

Федеральное государственное образовательное бюджетное учреждение
высшего образования
«Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации»

На правах рукописи

Бачаев Умар Аптиевиç

НЕПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ
МОДЕЛИРОВАНИЕ НА ОСНОВЕ
КОПУЛА-ФУНКЦИЙ В АНАЛИЗЕ
ПРОСТРАНСТВЕННОГО РАЗВИТИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

5.2.2. Математические, статистические и инструментальные методы
в экономике

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата экономических наук

Научный руководитель

Гринева Наталья Владимировна,
кандидат экономических наук, доцент

Москва – 2026

Диссертация представлена к публичному рассмотрению и защите в порядке, установленном ФГОБУ ВО «Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации» в соответствии с предоставленным правом самостоятельно присуждать ученые степени кандидата наук, ученые степени доктора наук согласно положениям пункта 3.1 статьи 4 Федерального закона от 23 августа 1996 г. № 127-ФЗ «О науке и государственной научно-технической политике».

Публичное рассмотрение и защита диссертации состоится 30 сентября 2026 г. в 15:00 часов на заседании диссертационного совета Финансового университета Д 505.001.111 по адресу: Москва, Ленинградский проспект, д. 51, корп. 1, аудитория 1001.

С диссертацией можно ознакомиться в диссертационном зале Библиотечно-информационного комплекса ФГОБУ ВО «Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации» по адресу: 125167, Москва, Ленинградский проспект, д. 49/2, комн. 100 и на официальном сайте Финансового университета в информационно-телекоммуникационной сети «Интернет» по адресу: www.fa.ru.

Персональный состав диссертационного совета:

председатель – Михайлова С.С., д.э.н., доцент;
заместитель председателя – Коровин Д.И., д.э.н., доцент;
ученый секретарь – Золотова Т.В., д.физ.-мат.н., доцент;

члены диссертационного совета:
Абдикеев Н.М., д.техн.н., профессор;
Васильева Е.В., д.э.н., доцент;
Владова А.Ю., д.техн.н., доцент;
Иванюк В.А., д.э.н., доцент;
Соловьев В.И., д.э.н., профессор;
Судаков В.А., д.техн.н., доцент;
Трегуб И.В., д.э.н., профессор.

Автореферат диссертации разослан 26 мая 2026 г.

Ученый секретарь диссертационного совета
Финансового университета Д 505.001.111

Т.В. Золотова

I Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования. Пространственное развитие регионов Российской Федерации выступает одновременно заметным ограничением и важным ориентиром экономического и социального развития. Для принятия стратегических управленческих решений в рамках политики регионального развития необходимо количественно устанавливать, каким образом характеристики региональной экономики, демографии и социальной среды соотносятся с изменением ключевых показателей территориального развития. При этом принципиально важны не только усредненные зависимости, но и наблюдения, относящиеся к крайним значениям показателей: именно в регионах с наиболее выраженными отклонениями по уровню экономического и социального развития особенно остро встают вопросы адресных мер, выбора приоритетов и сценариев развития регионов. Региональные данные отличаются высокой неоднородностью, пространственной кластеризацией и асимметрией связей показателей экономического, социального и демографического развития, что ограничивает применимость классических подходов для их моделирования.

Классические регрессионные подходы и их расширения в основном базируются на оценивании усредненной линейной корреляции и предпосылках, которые являются ограничивающими моделирование неоднородных распределений и изменчивой структуры зависимостей. В качестве альтернативы этим подходам часто выбираются методы машинного обучения и более сложные нелинейные модели, однако они, как правило, не предоставляют вероятностное описание условной зависимости и затрудняют экономическую интерпретацию результатов моделирования.

Для рассматриваемой задачи нужен подход, позволяющий описывать многомерные связи не только через средние эффекты, но и через структуру совместного распределения показателей. В работе для этого используется аппарат копула-функций, который дает возможность отдельно моделировать маргинальные распределения переменных и структуру зависимости между ними, включая нелинейность, асимметрию и хвостовые эффекты. В исследовании

Vine-копула-регрессия используется как основной инструмент анализа пространственных региональных данных, поскольку она позволяет учитывать многомерный характер зависимостей между социально-экономическими и демографическими показателями.

Степень разработанности темы исследования. Проблематика пространственного развития регионов широко представлена в экономической географии, региональной экономике и пространственной эконометрике. В российской научной литературе вопросы территориальной организации хозяйства, межрегиональной дифференциации и необходимости целенаправленной государственной политики раскрыты в работах А.Г. Гранберга; роль агломераций, структурных факторов и пространственной неоднородности российских регионов отражена в работах Н.В. Зубаревич. Методы пространственно-эконометрического анализа регионального развития, включая учет пространственных эффектов, межрегиональных влияний и неоднородности связей между субъектами Российской Федерации, представлены в работах О.А. Демидовой и Д.С. Иванова. В зарубежной литературе исследуются механизмы территориальной поляризации, агломерационные эффекты, центрo-периферийные различия, инерционность территориальной структуры, а также роль технологических сдвигов и глобализации в усилении концентрации экономической активности. В этой части логика исследования опирается на подходы, представленные в работах Bathelt H., Duranton G., Puga D., Iammarino S. и других ученых, а также на результаты исследований по пространственным неравенствам в Европе (European Parliament, RegPol2).

Отдельный блок исследований посвящен пространственным аспектам демографической динамики: подчеркивается значимость географической неоднородности, пространственной взаимосвязанности территорий и миграционных взаимодействий, а также показывается, что демографические показатели формируются под влиянием локальных условий и окружения. В диссертации используются выводы, представленные в работах Weeks J.R., Tamura K., Wilson T., Baker J., где обсуждаются пространственная зависимость,

прогнозирование населения на малых территориях и эффекты пространственного сглаживания.

В математической статистике и прикладных областях сформирован развитый аппарат моделирования зависимости на основе копула-функций, позволяющий отдельно описывать маргинальные распределения и структуру зависимости, включая хвостовые эффекты. Теоретические основы копул связаны с работами Sklar A., Deheuvels P., Nelsen R.B., Joe H.; методы оценивания и статистические свойства – с работами Genest C., Rivest L., Fan Y., Chen X. Развитие многомерных конструкций парных копул (Vine-копул) связано с работами Bedford T. и Cooke R.M. и последующими исследованиями Aas K., Czado C., Nagler T., Kurowicka D., Joe H., Brechmann E.C., Schepsmeier U. и других, где предложены алгоритмы спецификации структуры, выбора семейств и оценивания параметров в многомерной постановке.

В научной литературе аппарат копула-функций широко используется в анализе рисков, страховании и финансовой эконометрике, тогда как в исследованиях социально-экономических процессов применяется реже и преимущественно для анализа парных зависимостей. Анализ степени разработанности темы показывает, что теоретические основы копул и методы построения Vine-копул достаточно подробно представлены в литературе, однако их применение к моделированию зависимостей между показателями пространственного развития регионов Российской Федерации и построению сценарных расчетов на региональных данных остается недостаточно проработанным.

Целью исследования является оценка степени и направленности влияния ключевых социально-экономических факторов на демографическую составляющую пространственного развития регионов Российской Федерации, построение сценарных оценок региональной демографической динамики с помощью непараметрического моделирования на основе Vine-копул, учитывающего нелинейность, асимметрию и хвостовое поведение распределений.

Для достижения поставленной цели в диссертации решаются следующие задачи:

– Систематизировать теоретические основы копула-моделирования зависимостей и подходов к оцениванию копула-функций для обоснования их применимости в анализе социально-экономических и демографических показателей регионов Российской Федерации.

– Провести статистический анализ распределений региональных социально-экономических и демографических показателей регионов Российской Федерации за 2010-2023 гг. на основе сформированной информационной базы, обеспечивающей сопоставимость наблюдений.

– Выполнить анализ парных зависимостей между темпами прироста численности населения и основными социально-экономическими показателями пространственного развития регионов Российской Федерации на основе расчета коэффициентов хвостовых зависимостей и построения кривых копула-функций.

– Определить предпосылки и ограничения применения Vine-копула-регрессии как непараметрического метода восстановления условного распределения демографического показателя при заданных значениях социально-экономических факторов.

– Построить и оценить множественную Vine-копула-регрессионную модель для анализа влияния социально-экономических факторов на демографическую динамику регионов Российской Федерации и сопоставить ее с линейными моделями с регуляризацией, чтобы оценить преимущества предлагаемого подхода при моделировании нелинейных и асимметричных зависимостей.

– Провести анализ структуры влияния факторов и выполнить сценарное моделирование демографического роста регионов Российской Федерации на основе значений восстановленных условных распределений, учитывая при этом возможные нелинейности, взаимодействие факторов и региональную неоднородность.

Объектом исследования является пространственное развитие Российской Федерации на уровне ее регионов, рассматриваемое через систему социально-экономических и демографических показателей.

Предметом исследования являются методы непараметрического моделирования на основе копула-функций и их применение для анализа пространственной динамики российских регионов.

Область исследования диссертации соответствует п. 3. «Разработка и развитие математических и эконометрических моделей анализа экономических процессов (в т.ч. в исторической перспективе) и их прогнозирования»; п. 14. «Эконометрические и статистические методы анализа данных, формирования и тестирования гипотез в экономических исследованиях. Эконометрическое и экономико-статистическое моделирование» Паспорта научной специальности 5.2.2. Математические, статистические и инструментальные методы в экономике (экономические науки).

Научная новизна исследования заключается в разработке и апробации экономико-математического инструментария анализа пространственного развития регионов Российской Федерации на основе непараметрического моделирования с использованием копула-функций, включающего теоретическое обоснование применимости копула-подхода к исследованию региональных социально-экономических и демографических показателей, методику оценки парных и многомерных зависимостей с учетом нелинейности, асимметрии и хвостовых эффектов, Vine-копула регрессионную модель анализа влияния социально-экономических факторов на региональную демографическую динамику, а также процедуру построения сценарных оценок развития регионов на основе значений восстановленных условных распределений.

Положения, выносимые на защиту. Результаты, полученные лично автором в ходе проведения исследования и отвечающие требованиям научной новизны, а также выносимые на защиту, состоят в следующем:

– в рамках задачи анализа пространственного развития регионов Российской Федерации теоретически обоснована применимость копула-подхода

для совместного исследования социально-экономических и демографических показателей. В отличие от классических регрессионных подходов, ориентированных преимущественно на оценку усредненных эффектов, копула-подход позволяет рассматривать структуру зависимости между региональными показателями с учетом неоднородности распределений, нелинейности, асимметрии и поведения показателей в крайних областях распределений (С. 13-40);

– для региональных данных Российской Федерации выполнен комплексный анализ хвостовых зависимостей между демографическими и социально-экономическими показателями, позволивший выявить нелинейные и асимметричные связи и тем самым обосновать переход к копула-моделированию как инструменту учета зависимости в центральных и крайних областях распределений региональных показателей (С. 58-80);

– впервые разработан и реализован пошаговый алгоритм применения многомерной Vine-копула регрессии для оценки влияния социально-экономических факторов на демографическую составляющую пространственного развития регионов Российской Федерации, учитывающий многомерную структуру условных зависимостей, взаимодействие факторов, нелинейность и асимметрию связей между региональными показателями (С. 91-113);

– разработан подход к сценарному анализу региональной динамики на основе Vine-копула-регрессии, позволяющий оценивать изменение демографических показателей при различных сочетаниях социально-экономических факторов пространственного развития. В отличие от расчетов, основанных на изолированных эффектах факторов, предложенный подход позволяет учитывать их совместное воздействие и выявлять неаддитивные эффекты в сценариях регионального развития (С. 113-126).

Теоретическая значимость работы. Работа расширяет теоретический аппарат непараметрического моделирования в экономике, развивает направление применения копула-функций в анализе многомерных зависимостей

пространственного регионального развития, а также вносит вклад в методику построения условных распределений на основе Vine-копул.

Практическая значимость работы заключается в том, что предложенный непараметрический копульный подход предлагает инструментарий для экономического анализа в условиях нелинейности, асимметрии и хвостовых эффектов зависимостей между региональными показателями: он позволяет оценивать влияние факторов не только через точечные прогнозы, но и через характеристики условных распределений (ожидаения, квантили, хвостовые вероятности). В работе этот инструментарий реализован в рамках задачи пространственной демографической динамики регионов Российской Федерации: полученные модели и сценарные расчеты могут использоваться для обоснования и мониторинга мер пространственной и демографической политики, а также при подготовке прогнозов и аналитических материалов для региональных стратегий и программ.

Методологию и методы исследования составляют современные подходы к моделированию многомерных статистических зависимостей, теория копула-функций, методы непараметрической регрессии и инструменты анализа структуры распределений. В работе используется концепция разделения маргинальных распределений и структуры зависимости, лежащая в основе теоремы Склера, а также подходы к построению условных распределений и условного математического ожидания в рамках копульного моделирования.

Степень достоверности, апробация и внедрение результатов исследования. Обоснованность и достоверность результатов исследования обеспечиваются использованием официальных статистических данных по регионам Российской Федерации за 2010-2023 гг., применением аппарата копульного моделирования и воспроизводимостью вычислительной процедуры. Достоверность выводов подтверждается более высокой точностью и качеством Vine-копула-регрессии по сравнению с линейными моделями, а также сохранением аналитического представления совместной функции распределения, что позволяет интерпретировать структуру зависимостей между региональными показателями.

Основные положения и выводы диссертационной работы докладывались и были озвучены в рамках научно-практических мероприятий: на VIII Международной научно-практической конференции «Современная математика и концепции инновационного математического образования» (Москва, Финансовый университет, 28 мая 2021 г.); на XI Международной научно-практической конференции «Современная математика и концепции инновационного математического образования» (Москва, Финансовый университет, 19 июня 2024 года); на III Международной научно-практической конференции студентов и аспирантов «Цифровизация экономики и финансов: модели, методы и технологии» (Москва, Финансовый университет, 23-24 апреля 2025 года); на XII Международной научно-практической конференции «Современная математика и концепции инновационного математического образования» (Москва, Финансовый университет, 11 июня 2025 года).

Материалы диссертации были использованы при выполнении научно-исследовательской работы по теме: «Разработка методологии моделирования и прогнозирования динамики пространственного развития Российской Федерации на основе data-driven management» (Государственное задание, приказ Финуниверситета от 24.12.2025 № 3243/о) в части подготовки раздела «Выявление пространственных эффектов на основе индексов Морана и Джири».

Материалы диссертации используются в практической деятельности ООО «Яндекс Еда» при решении аналитических задач, связанных с оценкой региональной неоднородности пользовательского спроса и различий между регионами присутствия компании. В практическую работу внедрен инструментарий непараметрического моделирования на основе Vine-копула-регрессии, предназначенный для оценки изолированных и совместных эффектов факторов на показатели спроса и пользовательской активности. Инструментарий был применен для оценки влияния коммуникационных каналов на показатели спроса, сопоставления совокупного эффекта нескольких каналов с суммой их изолированных эффектов, а также

анализа различий в отклике пользователей по регионам присутствия компании. Полученные результаты были применены при подготовке медиастратегии компании на 2026 год и использованы в практической работе Группы по планированию и закупке медиа.

Материалы исследования используются Кафедрой информационных технологий Факультета информационных технологий и анализа больших данных Финансового университета в преподавании учебной дисциплины «Алгоритмы и структуры данных в языке Python» для обучающихся по направлению подготовки 01.03.02 Прикладная математика и информатика.

Апробация и внедрение результатов исследования подтверждены соответствующими документами.

Публикации. Основные положения и результаты исследования отражены в 7 научных работах общим объемом 5,8 п.л. (авторский объем – 4,9 п.л.), в том числе 4 работы общим объемом 3,5 п.л. (весь объем авторский) опубликованы в рецензируемых научных изданиях, определенных ВАК при Минобрнауки России.

Структура и объем диссертации. Цель и задачи исследования определили структуру работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, списка литературы, содержащего 65 наименований, 4 приложений. Текст диссертации изложен на 147 страницах, включает 21 рисунок, 11 таблиц и 86 формул.

II Основное содержание работы

В первой главе диссертации обоснована исследовательская постановка задачи анализа пространственного развития регионов Российской Федерации с учетом социально-экономических и демографических показателей. Показано, что для региональных данных характерны выраженная территориальная неоднородность, асимметрия распределений показателей и различия в поведении наблюдений в крайних областях распределений. В этих условиях применение усредняющих линейных зависимостей и корреляционных характеристик ограничено, поскольку они не позволяют в полной мере описывать нелинейные связи, асимметрию и зависимость между показателями в экстремальных

состояниях, имеющих содержательное значение для анализа регионального развития.

Для решения этой задачи обосновано применение копула-функций как инструмента моделирования зависимости между социально-экономическими и демографическими показателями. Выбор копула-подхода связан с тем, что он позволяет отделить моделирование индивидуальных распределений показателей от моделирования структуры зависимости между ними. Это особенно важно для региональных данных, где показатели имеют разные масштабы измерения, неодинаковую форму распределений и могут быть связаны не только в среднем, но и в крайних областях распределений.

Копульный подход опирается на теорему Скляра, согласно которой совместная функция распределения может быть представлена через маргинальные распределения и копулу по формуле (1)

$$H(x_1, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)), \quad (1)$$

где $H(x_1, \dots, x_n)$ – n-мерная функция распределения;

$C(\cdot)$ – копула-функция;

$F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)$ – n маргинальных функций распределения.

Для непрерывных случайных величин копула-функция задается единственным образом. Это позволяет переходить от оценки исходных региональных показателей с различными масштабами к изучению их совместного поведения в единичном кубе. То есть копула позволяют исследовать взаимосвязи региональных показателей вне зависимости от их маргинальных распределений.

В исследовании рассматриваются основные классы копул: эллиптические и архимедовы, так как они способны отражать различные формы зависимостей, которые характерны для региональных данных. Эллиптические копулы используются для воспроизведения симметричных связей, а архимедовы копулы позволяют фиксировать асимметрию и тяжелые хвосты (как односторонние, так и двухсторонние). В качестве примера эллиптической копулы рассмотрим гауссовскую копулу, которая задается по формуле (2)

$$C_N(y_1, y_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(y_1)} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(y_2)} e^{-\frac{u^2-2\rho uv+v^2}{2(1-\rho^2)}} du dv, \quad (2)$$

где $C_N(\cdot)$ – нормальная копула;

ρ – коэффициент корреляции между переменными Y_1 и Y_2 ;

$\Phi^{-1}(\cdot)$ – квантильная функция нормального распределения.

Нормальная копула хорошо описывает симметричные зависимости, но не способна моделировать хвостовые зависимости. В отличие от нее, копула Стьюдента имеет ненулевую хвостовую зависимость, что делает ее более гибким инструментом для моделирования совместного поведения случайных величин в крайних областях распределений. Из архимедовых копул в исследовании применяются копулы Клейтона, Гумбеля и Франка: копула Клейтона может описывать нижнюю хвостовую зависимость, копула Гумбеля, верхнюю хвостовую зависимость, а копула Франка, сильную нелинейную симметричную зависимость без асимптотической хвостовой зависимости.

Для оценивания копула-функций систематизированы параметрические, полупараметрические и непараметрические подходы. В параметрической постановке логарифмическая функция правдоподобия включает вклад копулы и вклад маргинальных распределений по формуле (3)

$$l(\theta) = \sum_{t=1}^k \ln(c(F_1(z_{1t}, \alpha_1), \dots, F_n(z_{nt}, \alpha_n), \gamma)) + \sum_{t=1}^k \sum_{j=1}^n \ln f_j(z_{jt}, \alpha_j), \quad (3)$$

где α_j – параметры маргинальных распределений случайного вектора;

γ – вектор параметров совместной копула-функции случайного вектора.

При выполнении условий регулярности оценки максимального правдоподобия являются состоятельными и асимптотически нормальными, что делает этот метод базовым для сравнения спецификаций и построения многомерных копульных конструкций. Тем самым в первой главе обоснована

применимость копула-функций к анализу пространственного развития регионов: этот аппарат позволяет учитывать неоднородность распределений, нелинейность, асимметрию и зависимость в крайних областях распределений, что необходимо для последующего эмпирического анализа и многомерного моделирования региональных данных.

Эмпирическая база исследования сформирована на основе панельных данных по регионам Российской Федерации за 2010-2023 гг. Из анализа исключены Республика Крым, Севастополь и регионы, присоединенные в 2022 году, поскольку по ним отсутствуют полные ретроспективные данные, необходимые для формирования сбалансированной панели. Для целей копула-моделирования панель преобразована в единую совокупность наблюдений вида «год-регион». Такое объединение допустимо, поскольку используемые показатели заданы в относительной форме либо в расчете на душу населения, что снижает влияние различий в масштабе регионов и обеспечивает сопоставимость наблюдений. В принятой постановке каждое наблюдение «год-регион» рассматривается как отдельная реализация социально-экономических и демографических характеристик региона.

В качестве эндогенной переменной используется годовой темп прироста численности населения по региону, поскольку он отражает результирующую демографическую динамику территории и выступает одним из индикаторов пространственного развития. В качестве факторов рассматриваются девять показателей, характеризующих ключевые социально-экономические условия регионального развития: экономическую производительность, доходы населения, состояние рынка труда, инвестиционную активность, динамику цен и жилищного рынка, брачность, урбанизацию и пространственное положение региона. Такой набор переменных позволяет охватить основные измеримые характеристики региональной экономики и социальной среды, представленные в сопоставимой статистике за рассматриваемый период.

Предварительный анализ включает описательную статистику и проверку нормальности распределений, а также оценку пространственной автокорреляции

по срезу 2023 года с использованием матрицы весов по четырем ближайшим соседям центроидов регионов и пермутационного теста. Результаты представлены в таблице 1 и таблице 2.

Таблица 1 – Описательная статистика исходных данных

Переменная	Среднее	Медиана	Стандартное отклонение	Минимальное	Максимальное	Асимметрия	Экссесс	p(JB)
Y - темпы прироста населения	-0,0030	-0,0043	0,0086	-0,0228	0,0234	0,5580	-0,0449	0,000
X1 - ВРП на душу	721038,8	425801,3	1144607,9	91610,2	11995390,0	5,8040	41,7518	0,000
X2 - среднедушевые доходы	33188,1	28006,0	17133,0	11700,0	156988,0	2,7054	10,3607	0,000
X3 - безработица	8,0258	7,0070	4,5682	1,4530	44,2080	2,5145	10,1358	0,000
X4 - инвестиции	177804,6	88084,9	333948,4	23297,4	2866067,0	5,1687	29,3069	0,000
X5 - браки	6,7845	6,7000	1,4356	1,8000	11,0000	0,0337	0,0224	0,911
X6 - стоимость жилья	105,6524	103,8800	9,6276	85,4600	166,8200	1,7439	5,5811	0,000
X7 – индекс потребительских цен	107,8147	106,9700	4,4277	100,0700	122,0900	0,3646	-0,4793	0,000
X8 - доля городского населения	70,5641	71,5900	12,7145	29,3000	100,0000	-0,5035	1,0097	0,000
X9 - расстояние до Москвы	1776,471	1160,000	1807,987	0,0000	6800,0000	1,4806	1,0925	0,000

Источник: составлено автором.

Результаты описательной статистики показывают, что большинство социально-экономических показателей имеет выраженную асимметрию и отклоняется от нормального распределения. Особенно заметны различия между средними и медианными значениями по ВРП на душу населения, среднедушевым доходам, инвестициям и безработице, что указывает на неоднородность региональной выборки и наличие территорий с экстремальными значениями показателей. Следовательно, анализ таких данных требует методов, не сводящих зависимость только к средним эффектам и предпосылке нормальности распределений.

Таблица 2 – Индекс Морана для исходных переменных

Переменная	Moran's I	p-value
Y - темпы прироста населения	0,2490	0,002
X1 - ВРП на душу населения	0,3330	0,001
X2 - среднедушевые доходы	0,4161	0,001
X3 - безработица	0,4219	0,001
X4 - инвестиции	0,3153	0,002
X5 - браки	0,5449	0,001
X6 - стоимость жилья	0,0429	0,534
X7 - ИПЦ	0,1300	0,043
X8 - доля городского населения	0,4024	0,001
X9 - расстояние до Москвы	0,9839	0,001

Источник: составлено автором.

Результаты оценки пространственной автокорреляции показывают, что для большинства переменных фиксируется статистически значимая положительная пространственная связанность. Это означает, что близкие территории имеют тенденцию демонстрировать сходные значения по ряду демографических и социально-экономических показателей. Следовательно, в региональных данных наблюдаются не только неоднородные распределения, но и склонность регионов к пространственной кластеризации, что ужесточает требования к используемым инструментам моделирования зависимостей.

Для анализа парных зависимостей используют меры, которые определяются непосредственно через копула-функции. Рассматриваются коэффициенты верхней и нижней хвостовой зависимости, позволяющие оценить связь показателей в экстремальных значениях распределений. Они задаются с помощью формул (4) и (5)

$$\lambda^U = \lim_{s \rightarrow 1} P \left(\xi_2 > F_{\xi_2}^{-1}(s) \mid \xi_1 > F_{\xi_1}^{-1}(s) \right) = \lim_{s \rightarrow 1} \frac{1 - 2s + C(s, s)}{1 - s}, \quad (4)$$

$$\lambda^L = \lim_{s \rightarrow 0} P \left(\xi_2 \leq F_{\xi_2}^{-1}(s) \mid \xi_1 \leq F_{\xi_1}^{-1}(s) \right) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{C(s, s)}{s}, \quad (5)$$

где λ^U – коэффициент верхней хвостовой зависимости;

λ^L – коэффициент нижней хвостовой зависимости.

Изучение хвостовых связей является особенно важным в экономическом и демографическом анализе, так как экстремальные события и структурные сдвиги сильно влияют на устойчивость экономической системы и эффективность государственных мер поддержки регионов.

Главным итогом этого этапа работы стало обнаружение хвостовых зависимостей между темпами прироста населения и рядом социально-экономических переменных на квантильных уровнях $q = 0,90$ и $q = 0,95$. Это позволяет выделить факторы, связь с которыми проявляется в экстремальных областях распределения. Результаты анализа приведены в таблице 3.

Анализ таблицы показывает, что безработица, ВРП на душу населения, среднедушевые доходы и объем инвестиций в основной капитал имеют заметную асимметрию в характере связи с темпами прироста населения. У ряда показателей коэффициенты верхней и нижней хвостовой зависимости расходятся сильно, что говорит о различной природе связи в хвостах распределений. Этот результат подтверждает обоснованность использования копула-функций, так как они способны отразить структуру зависимости между региональными показателями с учетом ее асимметрии и поведения в хвостах.

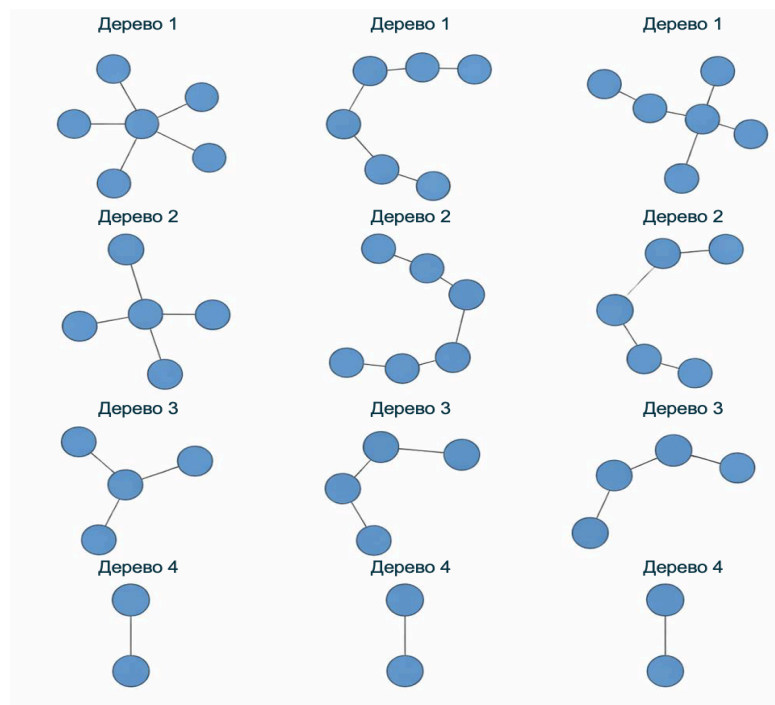
Таблица 3 – Оценки коэффициентов хвостовой зависимости между темпами прироста населения и экзогенными факторами

Переменная	$\lambda_{0,9}^U$	$\lambda_{0,9}^L$	$\lambda_{0,95}^U$	$\lambda_{0,95}^L$
X1: ВРП на душу населения	0,0108	0,1720	0,0000	0,0000
X2: Среднедушевые доходы	0,0108	0,1075	0,0000	0,0213
X3: Безработица	0,0000	0,2688	0,0000	0,3617
X4: Инвестиции	0,0645	0,1398	0,0000	0,0000
X5: Браки	0,0108	0,1613	0,0000	0,1064
X6: Стоимость жилья	0,0538	0,0323	0,0213	0,0000
X7: ИПЦ (инфляция)	0,0860	0,1290	0,0426	0,0213
X8: Доля городского населения	0,0000	0,2043	0,0000	0,1489
X9: Расстояние до Москвы	0,0430	0,0000	0,0000	0,0000

Источник: составлено автором.

В третьей главе выполнен переход от оценки парных зависимостей к многомерному моделированию демографического роста регионов Российской Федерации. В многомерной постановке ключевым является учет совместного влияния факторов и уточнение зависимости темпов прироста населения при контроле остальных переменных. Это особенно важно для региональных данных, где социально-экономические показатели взаимосвязаны и образуют устойчивые группы, а эффекты в крайних областях распределений формируются сочетанием факторов. Для решения задачи применяется непараметрический инструментарий Vine-копул, позволяющий задавать структуру совместной зависимости через систему парных и условных копул и тем самым описывать нелинейность, асимметрию и хвостовые эффекты в многомерном контексте.

Рассматриваются основные типы структур: C-vine, D-vine и R-vine, их различия и области применения. Vine-копулы позволяют строить гибкие многомерные модели зависимости, масштабируемые по размерности и допускающие использование различных семейств парных копул. Пример деревьев Vine-копул различных классов представлен на рисунке 1.



слева – C-Vine, по центру – D-Vine, справа – R-Vine

Источник: составлено автором.

Рисунок 1 – Пример деревьев Vine-копул различных классов

Далее, описывается методика построения непараметрической регрессии на основе Vine-копул. Разработан алгоритм построения модели, включающий преобразование исходных данных, выбор структуры Vine, подбор семейств парных копул и оценку параметров модели.

Шаг 1. По сформированному массиву данных для каждого компонента случайного вектора необходимо оценить плотность и функцию распределения. Оценка функций распределения нужна для того, чтобы обучить копула-функцию, определенную на единичном кубе. В настоящем исследовании оценка проводится через ядерные функции.

Шаг 2. Обучение копула-функции. Используя широкий класс эллиптических и архимедовых копул, происходит обучение Vine-копулы (в зависимости от задачи C-Vine, D-Vine, R-Vine).

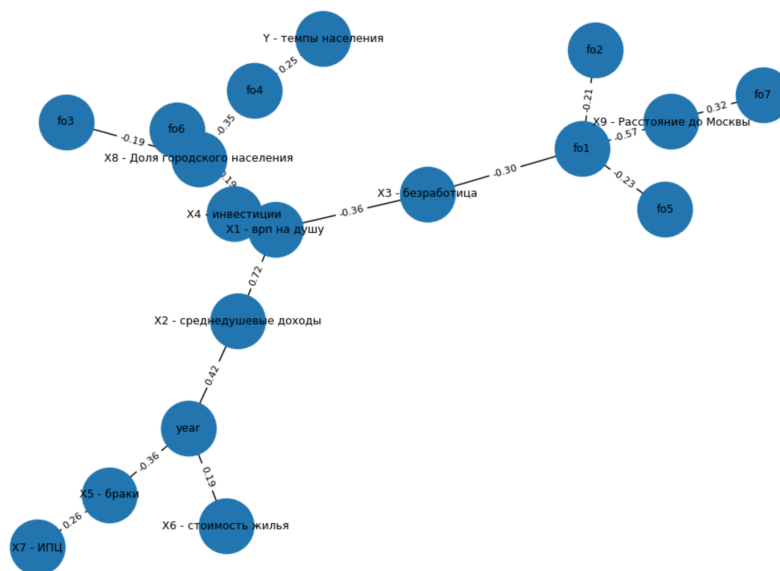
Шаг 3. Восстановление совместной плотности распределения и оценка численными подходами функционалов распределения (для регрессии условное математическое ожидание) происходит по формулам (6) и (7)

$$f_{Y|X_1, \dots, X_k}(y | x_1, \dots, x_k) = \frac{f_{Y, X_1, \dots, X_k}(y, x_1, \dots, x_k)}{f_{X_1, \dots, X_k}(x_1, \dots, x_k)}, \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} f_{Y|X_1, \dots, X_k}(y | x_1, \dots, x_k) dy &= \int_{\mathbb{R}} \frac{f_{Y, X_1, \dots, X_k}(y, x_1, \dots, x_k)}{f_{X_1, \dots, X_k}(x_1, \dots, x_k)} dy = \\ &= \frac{1}{f_{X_1, \dots, X_k}(x_1, \dots, x_k)} \int_{\mathbb{R}} f_{Y, X_1, \dots, X_k}(y, x_1, \dots, x_k) dy = 1. \end{aligned} \quad (7)$$

Обсуждаются возможности прикладного применения предложенного подхода, в том числе для анализа условных распределений, оценки вероятностей экстремальных сценариев и построения сценарных прогнозов. Отмечается, что непараметрическая регрессия на основе Vine-копул формирует универсальный инструмент анализа сложных зависимостей и служит основой для последующего многомерного прикладного анализа.

Реализуется многомерная Vine-копульная регрессия, позволяющая учесть условные зависимости между переменными. Описывается процедура построения R-vine структуры, основанная на отборе наиболее значимых безусловных и условных связей между показателями. Для наглядности проиллюстрируем структуру дерева T_1 графически на рисунке 2.



На ребрах указаны значения корреляции τ Кендалла

Источник: составлено автором.

Рисунок 2 – Структура дерева T_1 для рассматриваемой модели

Анализ рисунка 2 позволяет сделать выводы, что на первом уровне структуры прослеживаются наиболее стабильные связи, в то время как воздействие экономических и пространственных факторов проявляется на последующих уровнях в форме условных зависимостей. В процессе моделирования построено 17 деревьев. Особое внимание уделено интерпретации структуры Vine-копулы. В анализе выделен кластер социально-экономических факторов, включающий валовой региональный продукт на душу населения, среднедушевые доходы, объем инвестиций в основной капитал и уровень безработицы, отличающийся высокой взаимосвязанностью внутри группы. Пространственные характеристики, например, расстояние до Москвы, образуют отдельный блок влияния, который проявляется через условные зависимости с социально-экономическими индикаторами. Результаты указывают на многоуровневую природу влияния факторов на демографическую динамику регионов.

В целях проверки применимости предлагаемого метода в работе проведено сравнение Vine-копультной регрессии с традиционными регрессионными моделями. Так, с помощью Vine-копул удалось более точным образом восстановить динамику временного ряда и выявить изменения в структуре зависимостей в период кризиса. В таблице 4 приведены результаты по точности различных регрессионных моделей.

Таблица 4 – Показатели точности для различных моделей регрессии для темпов прироста населения

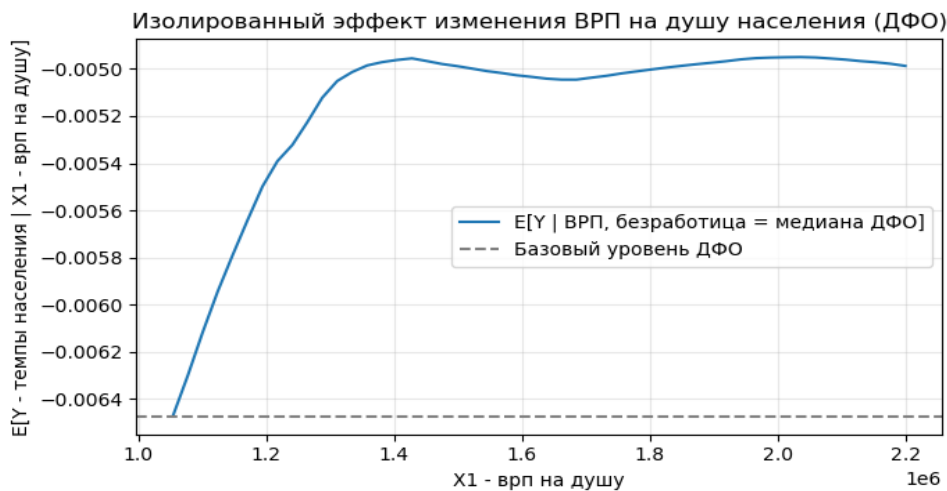
Model	MAE	RMSE	R ²
Copula	0,00473	0,00646	0,585040
Ridge	0,00547	0,00718	0,451932
Lasso	0,00548	0,00718	0,452734
OLS	0,00549	0,00717	0,454120

Источник: составлено автором.

Последний раздел третьей главы содержит сценарный анализ пространственного демографического роста на примере Дальневосточного федерального округа (ДФО). В сценарном анализе изучается влияние валового регионального продукта на душу населения и уровня безработицы на темпы прироста населения. Для каждого фактора рассчитываются изолированные эффекты: изменение ВРП на душу населения при фиксированном уровне безработицы, изображенном на рисунке 3, и изменение уровня безработицы при фиксированном значении ВРП на рисунке 4, а также их совместный эффект при одновременном росте ВРП и снижении безработицы.

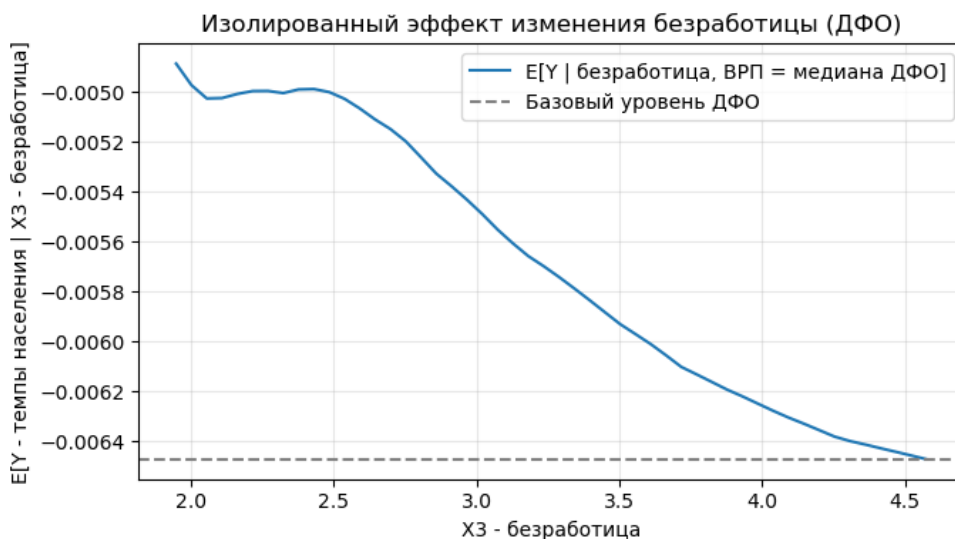
Полученные результаты свидетельствуют, что рост ВРП на душу населения оказывает умеренно положительное, но нелинейное влияние на демографическую динамику: наибольший прирост ожидаемых темпов прироста населения наблюдается при переходе к значениям ВРП порядка 1,3-1,4 млн руб. на человека, после чего эффект заметно сглаживается. В то же время повышение уровня безработицы демонстрирует устойчиво отрицательное влияние: увеличение безработицы выше 3,5% сопровождается резким снижением ожидаемых темпов прироста населения. Сравнение суммы изолированных

эффектов с результатом их одновременного изменения на рисунке 5 показывает наличие положительной синергии: в точке максимального расхождения совокупный эффект превышает сумму изолированных воздействий примерно на 0,2 п.п. в терминах темпов прироста населения относительно базового уровня. Это свидетельствует о неаддитивном характере влияния ВРП и безработицы и указывает на наличие взаимодействия между экономическим развитием и состоянием рынка труда, корректно выявляемого в рамках Vine-копультной модели.



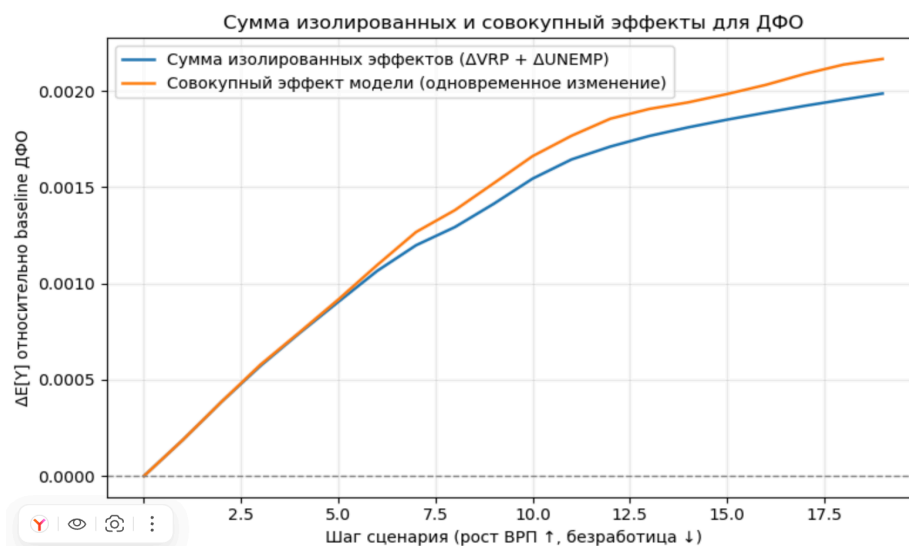
Источник: составлено автором.

Рисунок 3 – Кривая изолированного эффекта ВРП на темпы прироста населения в ДФО



Источник: составлено автором.

Рисунок 4 – Кривая изолированного эффекта безработицы на темпы прироста населения в ДФО



Источник: составлено автором.

Рисунок 5 – Сравнение суммы изолированных и совместных эффектов

В выводах по третьей главе описано, что применение непараметрической Vine-копульной регрессии позволяет выявить скрытые нелинейные и хвостовые зависимости между демографическими и социально-экономическими показателями российских регионов, а также сформировать вероятностные сценарии пространственного развития. Полученные результаты подтверждают практическую применимость разработанной методики и обосновывают ее использование для анализа региональных социально-экономических процессов.

III Заключение

В диссертации предложен и апробирован непараметрический подход к анализу пространственного развития регионов Российской Федерации на основе копула-функций. Его применение связано с необходимостью учитывать неоднородность региональных данных, нелинейность и асимметрию зависимостей между социально-экономическими и демографическими показателями.

Теоретический анализ показал, что копула-функции позволяют рассматривать зависимость между региональными показателями через структуру их совместного распределения. Копульное моделирование отделяет маргинальные распределения переменных от структуры зависимости между ними, что делает этот аппарат применимым для анализа региональных данных с различной

размерностью, неоднородными распределениями и разным характером связей в отдельных областях распределения.

Сформированная информационная база статистических показателей по регионам Российской Федерации за 2010-2023 гг. позволила выявить существенную неоднородность исходных данных. Для большинства социально-экономических и демографических показателей установлены отклонения от нормального распределения, асимметрия и наличие экстремальных значений. Расчет индекса Морана показал пространственную связанность основной части показателей.

Анализ парных зависимостей показал, что связь между темпами прироста численности населения и социально-экономическими показателями неоднородна по областям распределения. Для уровня безработицы, ВРП на душу населения, среднедушевых доходов и инвестиций в основной капитал выявлены различия между верхней и нижней хвостовой зависимостью. Таким образом, для регионов с различным положением в распределении социально-экономических показателей связь факторов с демографической динамикой различается по силе и характеру проявления.

Применение Vine-копула-регрессии позволило описать демографическую динамику регионов через многомерную структуру условных зависимостей. Показано, что предложенный подход восстанавливает условное распределение демографического показателя при заданных значениях социально-экономических факторов, а построенная модель демонстрирует более высокие показатели точности и качества по сравнению с линейными моделями с регуляризацией.

Сценарный анализ показал, что влияние социально-экономических факторов на региональную демографическую динамику не всегда сводится к сумме изолированных эффектов. При одновременном изменении факторов возникают совместные, в том числе неаддитивные эффекты, что подтверждает применимость предложенного подхода для построения сценарных расчетов в задачах пространственного развития.

Таким образом, поставленная цель исследования достигнута. В работе определены степень и направленность влияния ключевых социально-экономических факторов на демографическую составляющую пространственного развития регионов Российской Федерации, а также построены сценарные оценки региональной демографической динамики с помощью Vine-копула-регрессии, учитывающей нелинейность, асимметрию, хвостовое поведение распределений.

IV Список работ, опубликованных по теме диссертации

*Публикации в рецензируемых научных изданиях,
определенных ВАК при Минобрнауки России:*

1. Бачаев, У.А. О многомерном математическом моделировании процессов в экономических системах в период экстремальных событий (пандемии) / У.А. Бачаев // Инновации и инвестиции. – 2024. – № 5. – С. 458–461. – ISSN 2307-180X.

2. Бачаев, У.А. Непараметрический подход к регрессионному моделированию на базе копула функций на примере парных моделей / У.А. Бачаев // Проблемы экономики и юридической практики. – 2025. – № 3. Том 21. – С. 136–145. – ISSN 2541-8025.

3. Бачаев, У.А. Многомерная Vine-копула регрессия: теоретическое обоснование и предпосылки / У.А. Бачаев // Проблемы экономики и юридической практики. – 2026. – № 1. Том 22. – С. 163–169. – ISSN 2541-8025.

4. Бачаев, У.А. Сценарное моделирование пространственно-демографической динамики регионов на основе Vine-копула регрессии / У.А. Бачаев // Экономика Строительства. – 2026. – № 3. – С. 564–567. – ISSN 0131-7768.

Публикации в других научных изданиях

5. Бачаев, У.А. Моделирование оптимального портфеля ценных бумаг с помощью многомерных копула-функций / У.А. Бачаев // Современная математика

и концепции инновационного математического образования. – 2021. – № 1. Том 8. – С. 386–393. – ISSN 2412-9895.

6. Бачаев, У.А. Моделирование многомерной структуры активов в задаче портфельной оптимизации на основе копул / У.А. Бачаев, Н.В. Гринева // Информационно-измерительные и управляющие системы. – 2023. – № 6. Том 21. – С. 16–28. – ISSN 2070-0814.

7. Бачаев, У.А. Прогнозирование пространственных эффектов и факторов развития региона с использованием методов машинного обучения / У.А. Бачаев, С.С. Михайлова, Н.В. Гринева, Ю.А. Кораблев // Computational Nanotechnology / ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ НАНОТЕХНОЛОГИИ. – 2025. – № 3. Том 12. – С. 23–30. – ISSN 2313-223X.