

М11-768

Код участника
(заполняется организатором)



**Олимпиадная работа
заключительного этапа
«Всероссийская олимпиада школьников "Миссия
выполнима. Твоё призвание - финансист!" 2023-2024
г.»
«(Математика 11 класс)»**

Вариант №

1

«27 января 2024 г.»

Никакие другие записи на титульном листе делать не разрешается

М11-768

Код участника

Всероссийская олимпиада школьников «Миссия выполнима. Твое призвание – финансист!» 2023/2024 уч.г.

Бланк проверки работы

Математика 11 класс

№ задания	ФИО эксперта	Балл	ФИО эксперта	Балл	Итоговый балл
1	Васильев А.С.	10	Гурьянов И.З.	10	10
2	Гордеев	2	Савин С.В.	2	2
3	Александров	12	Урасов	12	12
4	Усупов	0	Султан	0	0
5	Султан	7	Усупов	7	7
6	Олегов	3	Брызгал	3	3
7	Кокнов	14	Венянин	14	14
8	Усупов	0	Султан	0	0
ИТОГО					48

Задача №2:

Умножим второе неравенство на два и сложим с третьим, получим:

$$11A + 11B \geq 33, \text{ значит } A+B \geq 3.$$

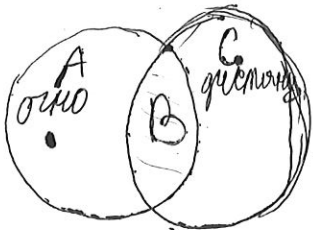
Решим, что при $A=1, B=2$ все три неравенства из условий выполняются и $A+B=3$. Значит $A+B=3$ — минимальное значение выражения $A+B$. Ответ: 3. 25

подбором $A=1$ и $B=2$ и не доказано это другими решениями

Задача №1

Пусть A чел. занимаются только оме, B — только оме и дистанционно, C — только дистанционно.

B человек оме и дистанционно, A — только оме. C — только дистанционно.



B — и оме и дист.

$$A+B+C - \text{всего}, \frac{A}{A+B+C} = ?$$

$$\frac{1}{2}(A+B) = B \Rightarrow A=B.$$

$$\frac{3}{5} \cdot (B+C) = B \Rightarrow 3B+3C=5B \Rightarrow$$

$$C = \frac{2}{3}B$$

$$\frac{A}{A+B+C} = \frac{B}{B+B+\frac{2}{3}B} = \frac{3B}{3B+3B+2B} = \frac{3}{8}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{3}{8}$$

(+10)

Задача №4

$f(x) = ax^4 + x^2 + x$. Заметим, что вертикальные прямые не могут касаться графика функции, значит мы рассматриваем только прямые вида $y = Kx + b$.

Пусть есть прямая $y = Kx + b$. Тогда прямая касается $f(x)$ в точке C равносильно тому, что C является корнем $f(x) - Kx - b = 0$ четной степени.

Потому существование прямой с двумя точками касания равносильно тому, что $f(x) - Kx - b$ можно записать как $D \cdot (x - C)^2 \cdot (x - D)^2$, $D \neq 0, C \neq D$.

$$a \cdot x^4 + x^2 + (1 - K) \cdot x - b = D \cdot (x - C)^2 \cdot (x - D)^2$$

Рассмотрим коэффициенты правой части при x^4 : это D , значит $D = a \Rightarrow a \neq 0$.

$$a \cdot x^4 + x^2 + (1 - K) \cdot x - b = a \cdot (x^2 - 2Cx + C^2) \cdot (x^2 - 2Dx + D^2)$$

Рассмотрим коэффициенты при x^3 :

$$-2aC - 2aD = 0 \iff C + D = 0 \iff D = -C$$

$$a \cdot x^4 + x^2 + (1 - K) \cdot x - b = a \cdot (x - C)^2 \cdot (x + C)^2$$

$$a \cdot x^4 + x^2 + (1 - K) \cdot x - b = a \cdot (x^2 - C^2)^2$$

$$a \cdot x^4 + x^2 + (1 - K) \cdot x - b = ax^4 - 2aC^2 \cdot x^2 + C^4 \cdot a$$

Рассмотрим коэффициенты при x^2 :

$$1 = -2aC^2 \iff C^2 = -\frac{1}{2a} \iff a < 0 \text{ и } C = \sqrt{-\frac{1}{2a}}$$

 $\Rightarrow$

⇒ №4.

Код участника: М11-268
(заполняется организатором)Рассмотрим формулу при x :

$$1 - k = 0 \Leftrightarrow k = 1$$

Рассмотрим свободный член:

$$b = -c^4 \cdot a = -\frac{1}{4a^2} \cdot a = -\frac{1}{4a}.$$

Получается параболу существует только при $a < 0$ и имеет вид $y = x - \frac{1}{4a}$

Задача №3

~~Рассмотрим~~Рассмотрим: $p(k) + p(100-k)$.

~~$$\frac{9^k}{9^k + 9^{50}} + \frac{9^{100-k}}{9^{100-k} + 9^{50}} =$$~~

$$\frac{9^k}{9^k + 9^{50}} + \frac{9^{100-k}}{9^{100-k} + 9^{50}} =$$

$$= \frac{9^k \cdot 9^{50-k}}{9^{50} + 9^{100-k}} + \frac{9^{100-k}}{9^{100-k} + 9^{50}} = \frac{9^{50} + 9^{100-k}}{9^{100-k} + 9^{50}} = 1$$

Тогда пусть $f = p(1) + p(2) + \dots + p(99)$

$$+ (p(2) + p(98)) + \dots + (p(99) + p(1)) = 1 \cdot 99,$$

значит $f = 49,5$ Ответ: 49,5.

Задача №5.

$$\arcsin \frac{5x+3}{3x-5} + \arcsin \frac{x-1}{x+1} = x$$

~~$$\alpha$$~~

~~$$\beta$$~~

$$\sin \alpha = \frac{5x+3}{3x-5}$$

$$\sin \beta = \frac{x-1}{x+1}$$

$$\sin x = \frac{1}{\sin x}$$

0039

⇒

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} \cdot \frac{3x-5}{5x+3}$$

$$\sqrt{5} \beta = \frac{x+1}{x-1}$$

$$\sqrt{5}(\alpha + \beta) = \frac{\sqrt{5}\alpha + \sqrt{5}\beta}{1 - \sqrt{5}\alpha \cdot \sqrt{5}\beta} = \frac{(3x-5)(x-1) + (5x+3)(x+1)}{1 - \frac{(3x-5)(x+1)}{(5x+3)(x-1)}}$$

$$= \frac{(3x-5)(x-1) + (5x+3)(x+1)}{(5x+3)(x-1) - (3x-5)(x+1)} = \frac{3x^2 - 3x - 5x + 5 + 5x^2 + 3x + 5x + 3}{5x^2 - 5x + 3x - 3 - 3x^2 - 3x + 5x + 5}$$

$$= \frac{8x^2 + 8}{2x^2 + 2} = \frac{4}{1} = 4$$

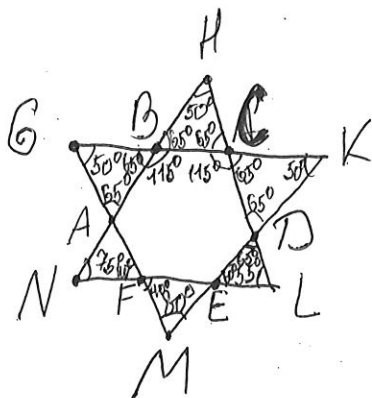
$$\alpha + \beta = x$$

$$\sqrt{5}(\alpha + \beta) = \sqrt{5}x$$

$$4 = \sqrt{5}x$$

$$x = \arcsin \frac{4}{\sqrt{5}}$$

Задача 16.



Дано: два пересек $\triangle ABCDEF$
 $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 115^\circ$, $\angle E = 120^\circ$, $\angle F = 110^\circ$

Найти: углы треугольников

Решение: сумма всех углов = 180°

Найдём по этому св-ву углы

$$\angle HBC = \angle GBE = \angle CAB = \angle NAF = \angle HCB = \angle KCD = \angle KDC = \angle ETL = 180^\circ - 115^\circ = 65^\circ$$

$$\angle AFE = \angle EFL$$

$$\angle NFA = \angle EFL = 180^\circ - 140^\circ = 40^\circ$$

$$\angle FEOH = \angle DEL = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$$

Сумма углов $\triangle = 180^\circ$

$$\angle G = \angle H = \angle K = 180^\circ - 65^\circ - 65^\circ = 50^\circ$$

$$\angle N = 180^\circ - 65^\circ - 40^\circ = 75^\circ$$

$\Rightarrow$

Код участника: *М11-768*
(заполняется организатором)Задача №6 $\Rightarrow$

$$\angle L = 180^\circ - 65^\circ - 60^\circ = 55^\circ$$

$$\angle M = 180^\circ - 40^\circ - 60^\circ = 80^\circ$$

Получаем $\triangle KML$ с углами $50^\circ + 75^\circ + 55^\circ =$

$$= 180$$

и $\triangle GKM$ с углами $50^\circ + 50^\circ + 80^\circ = 180^\circ$

2

Бланк ответа

Всероссийская олимпиада школьников «Миссия выполнима. Твоё призвание – финансист!»

Код участника: *M11-768*
(заполняется организатором)



М11- 782

Код участника
(заполняется организатором)



**Олимпиадная работа
заключительного этапа
«РЕГИСТРАЦИЯ ТОЛЬКО для победителей и
призеров ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНОГО ЭТАПА 2022-2023
учебного года "Миссия выполнима. Твоё призвание -
финансист!"»
«(Математика 11 класс)»**

Вариант № 1

«27 января 2024 г.»

Никакие другие записи на титульном листе делать не разрешается

М11-782

Код участника

Всероссийская олимпиада школьников «Миссия выполнима. Твое призвание – финансист!» 2023/2024 уч.г.

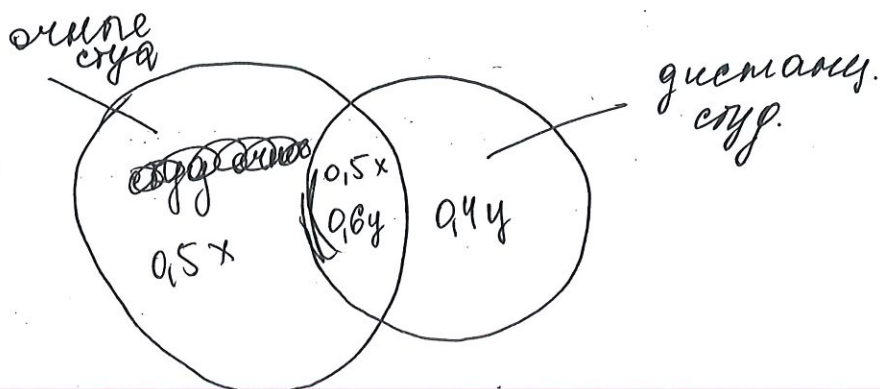
Бланк проверки работы

Математика 11 класс

№ задания	ФИО эксперта	Балл	ФИО эксперта	Балл	Итоговый балл
1	Басесянцук	10	Гурьянов	10	10
2	Савина Е.В.	10	Магомедов р.м.	10	10
3	Марков	12	Ужаев	12	12
4	Овчинков	0	Басеянцук	0	0
5	Борисов	8	Кремев	8	8
6	Олегов	3	Конев	3	3
7	Конев	5	Степанов	5	5
8	Шамкин	0	Григорьев	0	0
ИТОГО					48

N1

x - студ очные
 y - студ. дистанц.



Решение:

$0,5x = 0,6y$; тогда $5x = 6y$, следовательно

$$y = \frac{5}{6}x$$

$$x = \frac{6}{5}y$$

$0,5x = \frac{3}{5}y$ — студенты занимающиеся только очно

Всего студ: $0,5x + 0,5x + 0,4y = \frac{3}{5}y + \frac{3}{5}y + 0,4y = \frac{6}{5}y + 0,4y = 1,6y$ часть

Следовательно, только очных студ: $\frac{0,5x}{1,6y} = \frac{3}{5}y : (\frac{16}{10}y)$

$$\frac{0,5x}{1,6y} = \frac{3}{5}y : (\frac{16}{10}y) = \frac{3 \cdot 5}{5 \cdot 8} = \frac{3}{8} \quad \text{Ⓢ 100.}$$



Ответ: $\frac{3}{8}$ — составившей часть студентов занимающихся только очно.

~2

$$\begin{cases} A + 5B \geq 9 & (1) \\ 3A + 4B \geq 11 & (2) \\ 5A + 3B \geq 11 & (3) \end{cases}$$

Найдем $A+B$ - min

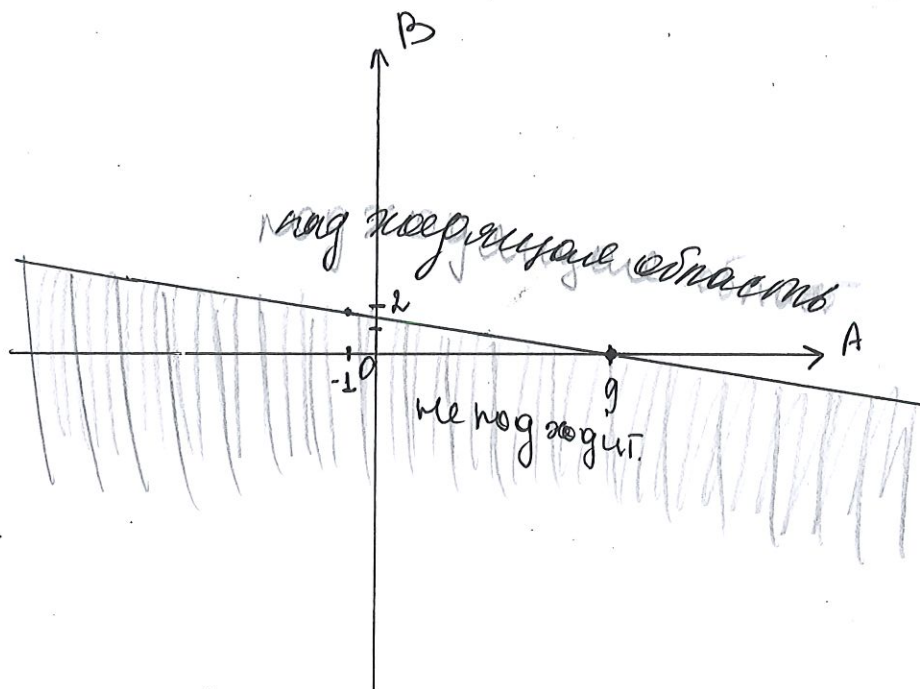
Решение:

Рисуем каждое неравенство пространств. методом интервалов.

(1) $A + 5B \geq 9$

$$A \geq 9 - 5B$$

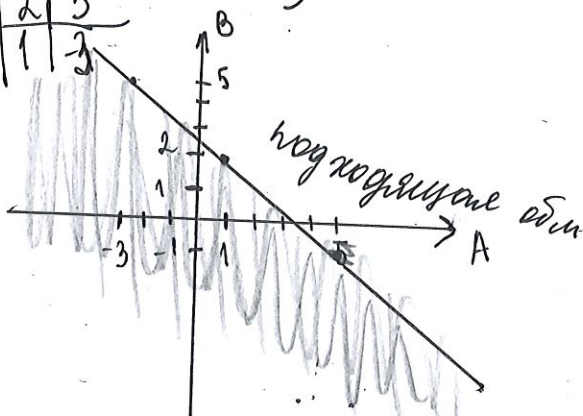
B	0	2
A	9	-1



(2) $3A + 4B \geq 11$

$$A \geq \frac{11}{3} - \frac{4B}{3}$$

B	2	5
A	1	3

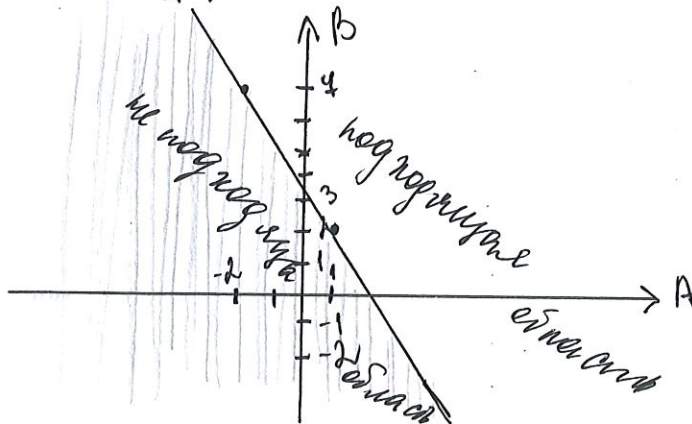


(3) $5A + 3B \geq 11$

$$5A \geq 11 - 3B$$

$$A \geq \frac{11 - 3B}{5}$$

B	2	4
A	1	-2



2.

На одном графике показаны все допустимые области



$$\begin{array}{c|c|c} A+B=2 \\ B & 2 & -4 \\ \hline A & 1 & -6 \end{array}$$

$A+B=2$ - один из уровней целевой функции

$A+B \rightarrow \min$ целевая функц. минимал

Выразим $A+B=2$, следовательно $B=2-A$

$$\begin{array}{c|c|c} A & 2 & 0 \\ \hline B & 0 & 2 \end{array}$$

Заметим, что первое пересечение целевой функции с доп. обл. в точке $(1; 2)$, тогда $A+B$ - минимальное = $1+2=3$

Ответ: 3 (можно наименьшим значением $A+B$)

$$\sqrt{3}$$

$$p(n) = \frac{9^n}{9^n + 9^{50}}$$

$$p(1) + p(2) + p(3) + \dots + p(99) = ?$$

$$p(1) = \frac{9}{9 + 9^{50}} = \frac{1}{1 + 9^{49}}$$

$$p(99) = \frac{9^{99}}{9^{99} + 9^{50}} = \frac{9^{49}}{9^{49} + 1}$$

$$p(1) + p(99) = \frac{1}{1 + 9^{49}} + \frac{9^{49}}{9^{49} + 1} = \frac{1 + 9^{49}}{1 + 9^{49}} = 1$$

$$p(2) + p(98) = \frac{9^2}{9^2 + 9^{50}} + \frac{9^{98}}{9^{98} + 9^{50}} = \frac{1}{1 + 9^{48}} + \frac{9^{48}}{9^{48} + 1} = 1$$

$$= 1$$

$$1 \text{ Суммарительно: } p(1) + p(99) + p(2) + p(98) + \dots + p(49) +$$

$$+ p(51) + p(50) = 49 + \frac{9^{50}}{9^{50} + 9^{50}} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + 49 = 49\frac{1}{2};$$

$$= 49,5$$

Код участника: 111-782

(заполняется организатором)

№5.

$$\operatorname{arccctg} \frac{5x+3}{3x-5} + \operatorname{arccctg} \frac{x-1}{x+1} = x$$

$$\begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq \frac{5}{3} \end{cases}$$

* слева угол, справа угол – угол равен, тогда равен их ctg.

$$\operatorname{ctg} \left(\operatorname{arccctg} \frac{5x+3}{3x-5} + \operatorname{arccctg} \frac{x-1}{x+1} \right) = \operatorname{ctg} x$$

$$\frac{\operatorname{ctg} \left(\operatorname{arccctg} \frac{5x+3}{3x-5} \right) \cdot \operatorname{ctg} \left(\operatorname{arccctg} \left(\frac{x-1}{x+1} \right) \right) - 1}{\operatorname{ctg} \left(\operatorname{arccctg} \left(\frac{5x+3}{3x-5} \right) \right) + \operatorname{ctg} \left(\operatorname{arccctg} \left(\frac{x-1}{x+1} \right) \right)} = \operatorname{ctg} x$$

$$\frac{\frac{5x+3}{3x-5} \cdot \frac{x-1}{x+1} - 1}{\frac{5x+3}{3x-5} + \frac{x-1}{x+1}}$$

$$= \operatorname{ctg} x$$

$$\frac{5x+3}{3x-5} + \frac{x-1}{x+1}$$

$$\frac{5x^2 + 3x - 5x - 3}{3x^2 + 3x - 5x - 5} - 1$$

$$= \operatorname{ctg} x$$

$$\frac{5x^2 + 5x + 3x + 3 + 3x^2 - 3x - 5x + 5}{3x^2 + 3x - 5x - 5}$$

$$\frac{5x^2 - 2x - 3 - 3x^2 + 2x + 5}{\cancel{3x^2 - 2x - 5}}$$

$$\frac{2x^2 + 2}{8x^2 + 8} = \operatorname{ctg} x$$

$$\frac{2x^2 + 2}{8x^2 + 8} = \operatorname{ctg} x$$

$$\frac{3x^2 - 2x - 5}{8x^2 + 8} = \operatorname{ctg} x$$

$$\frac{2(x^2 + 1)}{8(x^2 + 1)} = \operatorname{ctg} x$$

$$\frac{x^2 + 1}{4(x^2 + 1)} = \operatorname{ctg} x$$

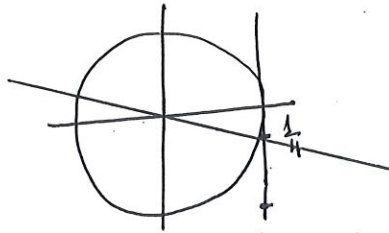
$$\left. \begin{aligned} \operatorname{ctg} x &= \frac{1}{4} \\ x &= \operatorname{arccctg} \frac{1}{4} + \pi \end{aligned} \right\}$$

Код участника: 111-782
(заполняется организатором)

NS

$$\operatorname{ctg} x = \frac{1}{4}$$

$$x = \operatorname{arccotg} \frac{1}{4} + \pi$$



Баллов

неблизко
от 0

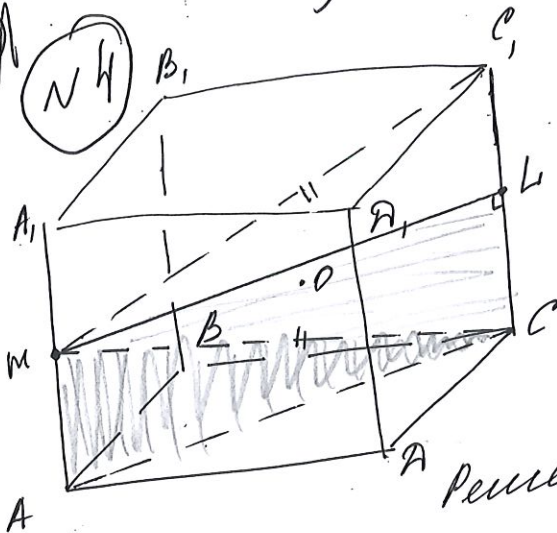
Учитывая об определении $\operatorname{arccotg} x : (0; \pi)$, полу-
чаем $x = \operatorname{arccotg} \frac{1}{4}$

Ответ: $\operatorname{arccotg} \frac{1}{4}$

Сумма
арккотанген-
сов промежутки
(0; 2π)



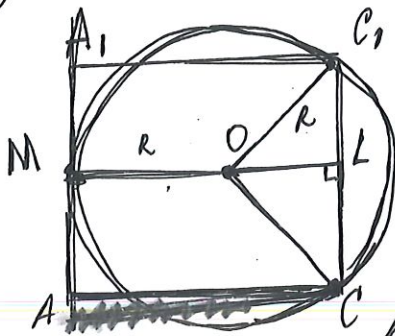
NS



Решение:

- Поскольку центр сферы равноудален от AD и A_1B_1 , то центр (обозначим точкой O) лежит на отрезке AD и A_1B_1 , следовательно от $(ABC)(A_1B_1C_1)$, сферически, точка O имеет пересек AA_1 в середине, значит сфера касается в середине AA_1 и центр сферы равноудален от точек C и C_1 .
- В силу симметрии, радиальное сечение сферы пройдет через C и C_1 и середину AA_1 (обозначим середину AA_1 точкой M).
- Рассмотрим радиальное сечение сферы в плоскости (AA_1, C, C_1) .

4



Радиус сферы (R) будет радиусом окружности, вписанной в $\triangle MCC_1$.

$\triangle MCC_1$ – равнобедренный, т.к. $MC_1 = MC$

$$AC = \sqrt{2}$$

$$AA_1 = 1$$

$$MA = MA_1 = \frac{1}{2}$$

$$\text{в } \triangle MAC : MC = \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$CC_1 = 1$$

$ML \perp CC_1$ – высота

$$\text{Следовательно } ML = AC = \sqrt{2}$$

$$\text{в } \triangle MCL : \frac{ML}{MC} = \frac{ML}{MC_1} = \frac{\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2}} = \frac{\sqrt{2} \cdot 2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$$

По формуле R описанной $LR = MC_1$

$$\text{в } \triangle MCL : \frac{ML}{MC} = \frac{ML}{MC_1} = \frac{\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$$

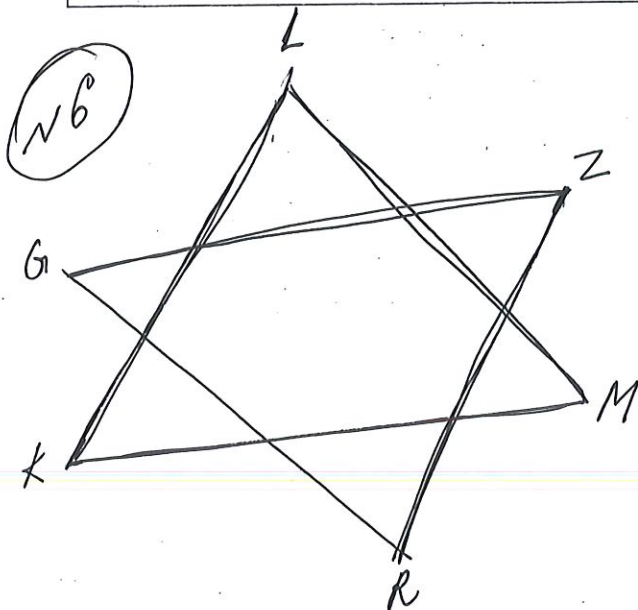
$$\text{По формуле } R \text{ описанной: } LR = MC_1 = \frac{\frac{\sqrt{5}}{2}}{\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}} = \frac{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}}{4\sqrt{2}} = \frac{5}{4\sqrt{2}}$$

$$R = \frac{5}{8\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{16}$$

Ответ: $\frac{5\sqrt{2}}{16}$ – радиус сферы

Код участника: МП - 782

(заполняется организатором)

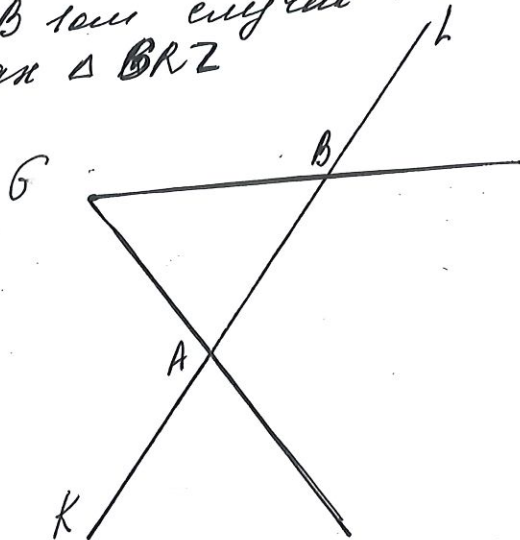


Пусть треугольники: KLM ; GZR ; Отметим, что треугольники абсолютно равноправны в этой задаче. Заметим, что есть два случая:

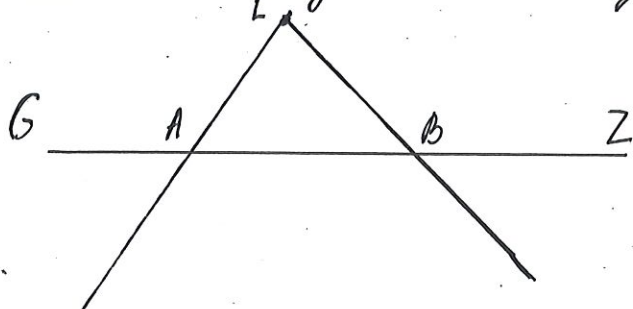
1. A и B попали на одну и ту же сторону $\triangle KLM$

2. A и B попали на разные стороны $\triangle KLM$

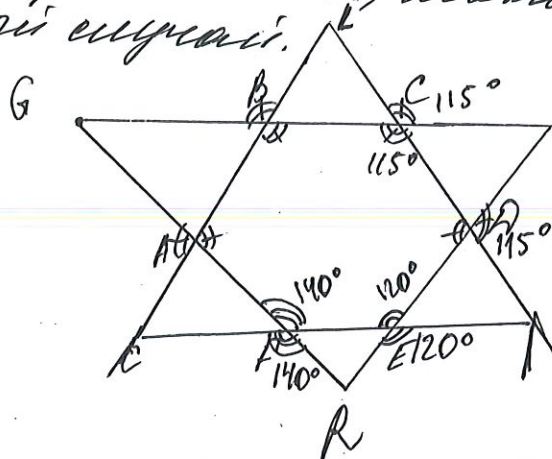
В том случае A и B будут лежать на разных сторонах $\triangle GZR$



Во втором случае на одной и той же стороне $\triangle GZR$



~6 Понимая тем, что треугольники равноправны можно сказать, что эти случаи абсолютно симметричны, следовательно, можно рассмотреть только один случай.



По такой картинке можно находить углы треугольника:

$$\angle K = 180^\circ - (180^\circ - 115^\circ) - (180^\circ - 140^\circ) = 45^\circ$$

$$\angle L = 180^\circ - (180^\circ - 115^\circ) - 2 = 50^\circ$$

$$\angle M = 180^\circ - (180^\circ - 115^\circ) - (180^\circ - 120^\circ) = 55^\circ$$

$$\angle B = 180^\circ - (180^\circ - 115^\circ) \cdot 2 = 50^\circ$$

$$\angle Z = 180^\circ - 2(180^\circ - 115^\circ) = 50^\circ$$

$$\angle R = 180^\circ - (180^\circ - 140^\circ) - (180^\circ - 120^\circ) = 80^\circ$$

Вывод: 1ый Δ : $\angle K = 45^\circ$
 $\angle L = 50^\circ$
 $\angle M = 55^\circ$

2ой Δ : $\angle B = 50^\circ$
 $\angle Z = 50^\circ$
 $\angle R = 80^\circ$

~4 $f(x) = ax^4 + x^2 + x$

$$y = ax^4 + x^2 + x$$

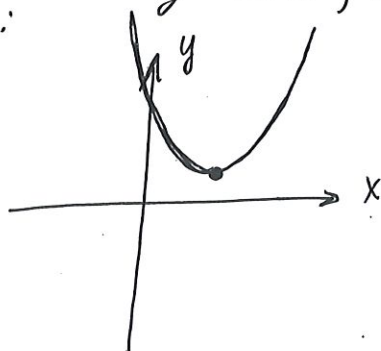
Рассмотрим, $a > 0$, тогда $y' = 4ax^3 + 2x + 1$

$$y'' = 12ax^2 + 2 > 0$$

~~а~~ a - любой x

$$a > 0$$

Следовательно $y' = 1$, следовательно y имеет одну точку экстр., тогда граф функции выглядит так:



- параболы y которой не касаются касательных в двух точках.

Рассмотрим $a < 0$

Найдем урав. касат в $x = 0$

$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$
 $y = 0 + 1x \Rightarrow y = x$ - касательная

Проверим в условии точка касания функции

имеем $y' = 1: 4ax^3 + 2x + 1 = 1$

$$4ax^3 + 2x = 0$$

$$4ax^2 + 2 = 0 \quad x = 0$$

$$x^2 = -\frac{1}{2a} \text{ - есть 2 решения при } a < 0$$

$$x = -\sqrt{-\frac{1}{2a}}$$

$$x = \sqrt{-\frac{1}{2a}}$$

Уравнение касательной в точке: $x = \pm \sqrt{-\frac{1}{2a}}$

функции $f(x) = f(\pm \sqrt{-\frac{1}{2a}}) = \frac{a^3}{4} + \frac{-a \pm \sqrt{-2a}}{2} = y = x - \frac{1}{4a}$

$= f(\pm \sqrt{-\frac{1}{2a}})$

функции $f(\pm \sqrt{-\frac{1}{2a}}) = \frac{a^3}{4} + \frac{-a \pm \sqrt{-2a}}{2} = f(\pm \sqrt{-\frac{1}{2a}})$

Касательная проходит через эти точки

$$\frac{a^3}{4} + \frac{-a + \sqrt{-2a}}{2} - \frac{1}{\sqrt{-2a}} = 0 = \frac{a^3}{4} + \frac{-a - \sqrt{-2a}}{2} + \frac{1}{\sqrt{-2a}}$$

$$\frac{\sqrt{-2a}}{2} - \frac{1}{\sqrt{-2a}} = -\frac{\sqrt{-2a}}{2} + \frac{1}{\sqrt{-2a}}$$

$$\frac{2}{2} \cdot \sqrt{-2a} = \frac{2}{\sqrt{-2a}}$$

Система: $-2a = 2; a = -1$

$$y(\sqrt{-\frac{1}{2a}}) = \sqrt{-\frac{1}{2a}} + x - \sqrt{-\frac{1}{2a}}$$

$$y = x - \frac{1}{4a} \quad y = x + \frac{1}{4}$$

$$f(\sqrt{-\frac{1}{2a}}) = a \cdot \frac{1}{4a^2} - \frac{1}{2a} + \sqrt{-\frac{1}{2a}} =$$

$$= -\frac{1}{4a} + \sqrt{-\frac{1}{2a}}$$

$$y = -\frac{1}{4a} + \sqrt{-\frac{1}{2a}} + 1 \cdot (x - \sqrt{-\frac{1}{2a}}) = -\frac{1}{4a} + \sqrt{-\frac{1}{2a}} - \sqrt{-\frac{1}{2a}} + x$$

Код участника: 111-782

(заполняется организатором)

$$\textcircled{24} \quad y = -\frac{1}{4a} = \sqrt{\frac{-1}{2a}} + \sqrt{\frac{-1}{2a}}$$

Ответ: функции $f(x) = -x^4 + x^2 + x$

$$\text{касательная} = x + \frac{1}{4}$$

5

М11 003

Код участника
(заполняется организатором)



**Олимпиадная работа
заключительного этапа
«Всероссийская олимпиада школьников "Миссия
выполнима. Твоё призвание - финансист!" 2023-2024
г.»
«(Математика 11 класс)»**

Вариант № 1

«27 января 2024 г.»

Никакие другие записи на титульном листе делать не разрешается

М 11 003

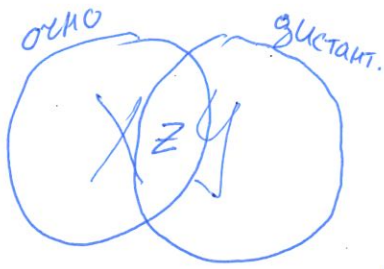
Код участника

Всероссийская олимпиада школьников «Миссия выполнима. Твое призвание – финансист!» 2023/2024 уч.г.

Бланк проверки работы

Математика 11 класс

№ задания	ФИО эксперта	Балл	ФИО эксперта	Балл	Итоговый балл
1	Анеликова Т.Г.	10	Качаловская А.С.	10	10
2	Тюздрев	10	Запичков	10	10
3	Берисова	12	Кремль	12	12
4	Обсешник	0	Курсанова	0	0
5	Бачанов	11	Угрюмов	11	11
6	Онегов	3	Курсанова	3	3
7	Косиков	0	Степанян	0	0
8	Курсанова	0	И	0	0
ИТОГО					46



№1

Пусть очно учатся X человек, дистанционно – Y человек, а (среди них) и очно, и дистанционно учатся Z человек. Из условия:

$$\begin{cases} 0,5X = Z & (50\%) \\ 0,6Y = Z & (60\%) \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow 0,5X = 0,6Y = Z$. Всему множеству содержат $X + Y - Z$ элементов (кол-во всех учащихся); только очно учатся $0,5X$ студентов $\Rightarrow$ искомое отношение:

$$\frac{0,5X}{X + Y - Z} = * \quad 0,5X = 0,6Y \Rightarrow Y = \frac{5}{6}X$$

$$* = \frac{0,5X}{X + \frac{5}{6}X - 0,5X} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{11}{6} - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{4}{3}} = \frac{\frac{3}{8}}{\frac{3}{8}} = \frac{3}{8}$$

Ответ: $\frac{3}{8}$
+ 10

№2

$$\begin{cases} A + 5B \geq 9 \\ 3A + 4B \geq 11 \\ 5A + 3B \geq 11 \end{cases}$$

Обозначим $A + B = X$, тогда:

$$\begin{cases} X + 4B \geq 9 \\ 3X + B \geq 11 \quad | \cdot 2 \\ 5X - 2B \geq 11 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 6X + 2B \geq 22 \\ 5X - 2B \geq 11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2B \geq 22 - 6X \\ 2B \leq 5X - 11 \end{cases} \Rightarrow 5X - 11 \geq 22 - 6X$$

$$11X \geq 33$$

$$X \geq 3$$

Значит, наименьшим значением $A + B$ будет являться 3. Покажем, что указанная оценка достигается: $A = 1; B = 2$

$$\begin{cases} 1 + 5 \cdot 2 = 11 \geq 9 \\ 3 + 4 \cdot 2 = 11 \geq 11 \\ 5 + 3 \cdot 2 = 11 \geq 11 \\ A + B = 1 + 2 = 3 \end{cases}$$

не проверил
при других значениях
A и B

Ответ: 3

105

Код участника:

(заполняется организатором)

M11 003

$p(n) = \frac{9^n}{9^n + 9^{50}}$. Пусть k принимает целые значения от 1 до 49.

$$\frac{9^k}{9^k + 9^{50}} + \frac{9^{100-k}}{9^{100-k} + 9^{50}} = \frac{9^{100} + 9^{50+k} + 9^{100} + 9^{150-k}}{9^{100} + 9^{150-k} + 9^{50+k} + 9^{100}} = 1$$

12 баллов

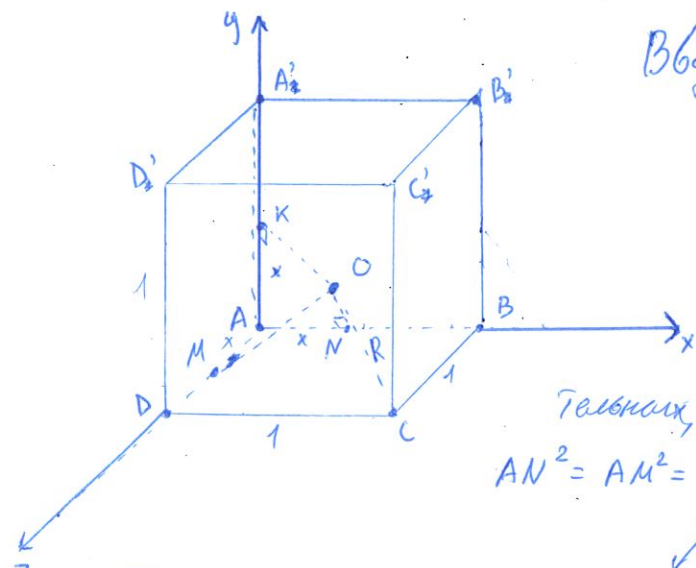
Значит, $p(k) + p(100-k) = 1$, тогда разделим данное на пары:

$p(1) + p(99)$; $p(2) + p(98)$; ...; $p(49) + p(51)$. Сумма элементов в каждой паре равна 1, всего пар 49. ($p(50)$ не имеет пары)

Значит, $p(1) + p(2) + p(3) + \dots + p(99) = 49 + p(50) = 49 + \frac{9^{50}}{9^{50} + 9^{50}} = 49,5$

Ответ: 49,5

N4



Введём систему координат. Пусть $A(0;0;0)$
 $C(1;0;1)$

Пусть сфера касается прямых (AB) ; (AA') ; (AD)

в точках N ; K ; M соответственно,

O - центр сферы. По св-ву касат.

ельных, проведённых к сфере из одной точки:

$$AN^2 = AM^2 = AK^2 \text{ (пусть } AN = AM = AK = x \text{); точки } M, N, K$$

✓ радиус сферы

могут лежать на продолжениях
 прямых за точку A .

Т.к. $ON = OM = OK = R$ и $ON \perp (AB)$

$OK \perp (AA')$

$OM \perp (AD)$

то $O(x; x; x)$

$C \in \text{сфере} \Rightarrow OC = R \Rightarrow OC^2 = (x-1)^2 + (x-1)^2 + x^2 = 3x^2 - 4x + 2$

$OA^2 = x^2 + x^2 + x^2 = 3x^2 \Rightarrow$ из $\triangle OMA$ по т. Пифагора: $R^2 = OM^2 = OA^2 - AM^2 =$

$= 3x^2 - x^2 = 2x^2 \Rightarrow R = x\sqrt{2}$

см. дальше $\rightarrow$

Код участника:

(заполняется организатором)

M11 003

N 4 продолжение:

Тогда $3x^2 - 4x + 2 = 2x^2$

$$x^2 - 4x + 2 = 0$$

$$D_1 = 4 - 2 = 2$$

$$x_{1,2} = \left[\frac{2 - \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} \Rightarrow \text{~~Решение~~} \right] \quad R = x\sqrt{2} = \begin{bmatrix} \sqrt{2}(2 - \sqrt{2}) \\ \sqrt{2}(2 + \sqrt{2}) \end{bmatrix} \cdot \mathbb{R}$$

$$R = \begin{cases} 2\sqrt{2} - 2 & \text{(соответствует расположению } O \text{ внутри куба)} \\ 2\sqrt{2} + 2 & \text{(соответствует расположению } O \text{ вне куба)} \end{cases}$$

Ответ: $2\sqrt{2} - 2$ или $2\sqrt{2} + 2$

N 5

$$\operatorname{arccotg} \frac{5x+3}{3x-5} + \operatorname{arccotg} \frac{x-1}{x+1} = X. \text{ Пусть } \alpha = \operatorname{arccotg} \frac{5x+3}{3x-5}, \alpha \in (0; \pi)$$

$$\beta = \operatorname{arccotg} \frac{x-1}{x+1}, \beta \in (0; \pi)$$

Тогда $X = \alpha + \beta; X \in (0; 2\pi)$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{5x+3}{3x-5} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{3x-5}{5x+3}; \quad \operatorname{ctg} \beta = \frac{x-1}{x+1} \Rightarrow \operatorname{tg} \beta = \frac{x+1}{x-1}$$

$$\alpha + \beta = X \Rightarrow \operatorname{ctg}(\alpha + \beta) = \operatorname{ctg}(X)$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha + \beta) = \frac{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta} = * \quad 1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta = 1 - \frac{3x-5}{5x+3} \cdot \frac{x+1}{x-1} = 1 - \frac{3x^2 - 2x - 5}{5x^2 - 2x - 3} =$$

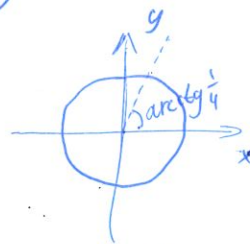
$$= \frac{5x^2 - 2x - 3 - 3x^2 + 2x + 5}{5x^2 - 2x - 3} = \frac{2x^2 + 2}{5x^2 - 2x - 3} = \frac{2(x^2 + 1)}{(5x+3)(x-1)}$$

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = \frac{3x-5}{5x+3} + \frac{x+1}{x-1} = \frac{3x^2 - 8x + 5 + 5x^2 + 8x + 3}{(5x+3)(x-1)} = \frac{8x^2 + 8}{(5x+3)(x-1)} = \frac{8(x^2 + 1)}{(5x+3)(x-1)}$$

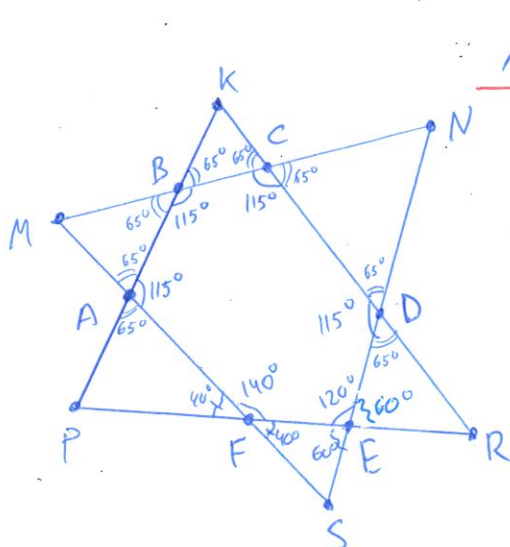
$$\operatorname{ctg}(\alpha + \beta) = * = \frac{2(x^2 + 1)}{(5x+3)(x-1)} : \frac{8(x^2 + 1)}{(5x+3)(x-1)} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} = \operatorname{ctg} X \Rightarrow X = \operatorname{arccotg} \frac{1}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$X \in (0; 2\pi) \Rightarrow \text{подходят корни: } x = \operatorname{arccotg} \frac{1}{4}$$

$$x = \operatorname{arccotg} \frac{1}{4} + \pi$$



Ответ: $\operatorname{arccotg} \frac{1}{4}; \operatorname{arccotg} \frac{1}{4} + \pi$ $\in \mathbb{R}$



N 6

Обозначим треугольники: $\triangle MNS \cap \triangle PKR = ABCDEF$
 По св-ву смежных углов: $\angle MAK = \angle MBA = \angle KBC = \angle KCB =$
 $= \angle NCD = \angle NDC = \angle RDE = \angle FAP = 180^\circ - 115^\circ = 65^\circ$

Аналогично, по св-ву смежных углов:

$$\angle DER = \angle FES = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$$

$$\angle AFP = \angle EFS = 180^\circ - 140^\circ = 40^\circ$$

Тогда из суммы углов треугольника: $\angle M = 180^\circ - 65^\circ - 65^\circ = 50^\circ$
 $\angle K = \angle N =$

$$\angle R = 180^\circ - 60^\circ - 65^\circ = 55^\circ$$

$$\angle S = 180^\circ - 60^\circ - 40^\circ = 80^\circ$$

$$\angle P = 180^\circ - 65^\circ - 40^\circ = 75^\circ$$

Ответ: углы $\triangle MNS$: $50^\circ; 50^\circ; 80^\circ$
 углы $\triangle PKR$: $75^\circ; 50^\circ; 55^\circ$
 30

N 7

$f(x) = ax^4 + x^2 + x$. Ур-ние касательной к $f(x)$: $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$, где x_0 - точка касания.

$$f'(x_0) = 4ax_0^3 + 2x_0 + 1 \Rightarrow \text{ур-ние касательной: } y = (4ax_0^3 + 2x_0 + 1)(x - x_0) + ax_0^4 + x_0^2 + x_0$$

$$y = 4ax_0^3x + 2x_0x + x - 4ax_0^4 - 2x_0^2 - x_0 + ax_0^4 + x_0^2 + x_0$$

$$y = -3ax_0^4 + 4axx_0^3 - x_0^2 + 2x_0x + x. \text{ Найдём точки пересечения с } f(x):$$

$$-3ax_0^4 + 4axx_0^3 - x_0^2 + 2x_0x + x = ax^4 + x^2 + x$$

$$3ax_0^4 - 4axx_0^3 + x_0^2 - 2xx_0 + ax^4 + x^2 = 0 \quad *$$

Заметим, что $x = x_0$ - корень: $3ax_0^4 - 4axx_0^3 + x_0^2 - 2xx_0 + ax^4 + x^2 = 0$

$$\begin{array}{r} 3ax_0^4 - 4axx_0^3 + x_0^2 - 2xx_0 + ax^4 + x^2 \\ - 3ax_0^4 - 3axx_0^3 \\ \hline - axx_0^3 + x_0^2 \\ - axx_0^3 + axx_0^2 \\ \hline - (ax+1)x_0^2 - 2xx_0 \\ - (ax+1)x_0^2 + (ax+1)xx_0 \\ \hline - (ax+1)xx_0 + ax^4 + x^2 \\ - (ax+1)xx_0 + ax^4 + x^2 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\text{Итак, } 0 = (x_0 - x)(3ax_0^3 - axx_0^2 - (ax+1)x_0 - (ax+1)x)$$

См. решение

Код участника:

(заполняется организатором)

M 11 003

№7 продолжение.

$3ax^3 - axx_0^2 - (ax-1)x_0 - (ax+1)x = 0$ ^{**} должно иметь
 ровно 1 корень, чтобы касательная имела с графиком ровно 2
 точки пересечения (первая - $x = x_0$). Хотя решения другие (не
 ~~x_0 достигается~~ при ~~уравнению~~ дописано): находим значения a ,
 при которых ур-ние (**) имеет ровно 1 решение, далее
 подставляем найденные значения в предыдущие ур-ния и находим
 x_0 , тем же ур-ние самой касательной.

0



ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМА.

ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ – ФИНАНСИСТ!»

ПО ПРЕДМЕТУ МАТЕМАТИКА 2023-2024 уч. года

ОЧНЫЙ ЭТАП

11 класс

Вариант 1

Задание 1 (10 баллов)

В некотором ВУЗе существуют очная и дистанционная формы обучения. При этом среди студентов, занимающихся очно, 50% занимаются также и дистанционно, а среди студентов, занимающихся дистанционно, 60% занимаются также и очно. Какую часть составляют студенты, занимающиеся только очно?

Задание 2 (10 баллов)

Каким наименьшим может быть значение выражения $A + B$, если A и B — числа, удовлетворяющие следующей системе неравенств

$$\begin{cases} A + 5B \geq 9; \\ 3A + 4B \geq 11; \\ 5A + 3B \geq 11. \end{cases}$$

Задание 3 (12 баллов)

Для каждого натурального числа n положим $p(n) = \frac{9^n}{9^n + 9^{50}}$.

Вычислите сумму $p(1) + p(2) + p(3) + \dots + p(99)$.

Задание 4 (12 баллов)

Длина ребра куба $ABCD A'B'C'D'$ равна 1. Найдите радиус сферы, проходящей через точку C и касающейся прямых AD , AA' и $A'B'$.

М11-101

Код участника
(заполняется организатором)

М:42-11285
18:03-18:08



Олимпиадная работа
заключительного этапа
«Всероссийская олимпиада школьников "Миссия
выполнима. Твоё призвание - финансист!" 2023-2024
г.»
«(Математика 11 класс)»

Вариант № 2

«27 января 2024 г.»

Никакие другие записи на титульном листе делать не разрешается

МН-101.

Код участника

Всероссийская олимпиада школьников «Миссия выполнима. Твое призвание – финансист!» 2023/2024 уч.г.

Бланк проверки работы

Математика 11 класс

№ задания	ФИО эксперта	Балл	ФИО эксперта	Балл	Итоговый балл
1	Бессеняев	10	Мини	10	10
2	Гроздева	10	Зайонов	10	10
3	Иванова	12	Магомедов	12	12
4	Иванова	0	Магомедов	0	0
5	Волосова	12	Уфимов	12	12
6	Григорьев	3	Орехов	3	3
7	Венедикт	0	Манашиев	0	0
8	Григорьев	0	Щеусков	0	0
ИТОГО					47

Продолжение №6: а также, что вертис. углы равны.

Зная, что сумма смежных углов и сумма углов треуго. равны 180° ,
получаем: $\angle NBL = \angle NCB = 80^\circ$; $\angle PAB = \angle PBA = 60^\circ$;
 $\angle PCB = \angle RCD = 80^\circ$; $\angle DER = \angle FET = 40^\circ$; $\angle TFE = \angle FTA = 30^\circ$.

Значит, $\angle P = 20^\circ$, $\angle N = 20^\circ$; $\angle K = 50^\circ$; $\angle R = 90^\circ$;
 $\angle Q = 70^\circ$, $\angle T = 110^\circ$.

Проверяем сумму углов в треуго.:

$$\triangle QNR = 70^\circ + 20^\circ + 90^\circ = 180^\circ - \text{верно}$$

~~треугольник~~

$$\triangle TNR = 110^\circ + 20^\circ + 50^\circ = 180^\circ - \text{верно.}$$

Значит, ~~треугольник~~ искомого угла треуго. существует

Ответ: $\angle P = 20^\circ$; $\angle N = 20^\circ$; $\angle K = 50^\circ$; $\angle R = 90^\circ$; $\angle Q = 70^\circ$; $\angle T = 110^\circ$

1 вар. решен - 3 балла.

№8 не

№5

$$\arctg \frac{2x-1}{x+2} + \arctg \frac{x+3}{3x-1} = \pi$$

Возьмем tg от обеих частей и получим:

$$\operatorname{tg}(\arctg \frac{2x-1}{x+2} + \arctg \frac{x+3}{3x-1}) = \operatorname{tg}(\pi)$$

Ар-им:

$$\arctg \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi \in (-\pi, \pi), \quad x \neq -2, \quad x \neq \frac{1}{3}.$$

Воспользуемся формулой tg суммы и приведем к единому знаменателю:

$$\frac{\operatorname{tg}(\arctg \frac{2x+1}{x+2}) + \operatorname{tg}(\arctg \frac{x+3}{3x-1})}{1 - \operatorname{tg}(\arctg \frac{2x-1}{x+2}) \cdot \operatorname{tg}(\arctg \frac{x+3}{3x-1})} = \frac{\frac{2x+1}{x+2} + \frac{x+3}{3x-1}}{1 - \frac{2x-1}{x+2} \cdot \frac{x+3}{3x-1}} =$$

$$= \frac{6x^2 - 3x - 2x + 1 + x^2 + 2x + 3x + 6}{3x^2 + 6x - x - 2 - 2x^2 - 6x + x + 3} = \frac{7x^2 + 7}{x^2 + 1} = 7, \text{ тогда}$$

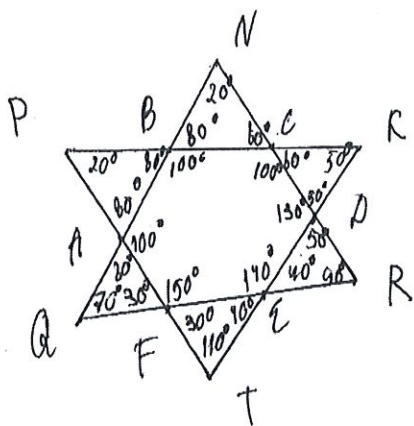
$$\operatorname{tg}(\pi) = 7$$

$\pi = \arctg 7 + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$. Учитывая описание всех ар-им

получаем ответ:

$$x \in \{\arctg 7; -\pi + \arctg 7\}.$$

№6.



Возьмем $\triangle PTK$ и $\triangle QNR$ симметричные образы.

Второй образ $PT \cap QN = A$;

$$PR \cap QN = B$$

$$PR \cap NR = C$$

$$NR \cap TR = D$$

$$QR \cap TR = E$$

$$PT \cap QR = F$$

Продолжение №1:

$$\begin{cases} 25y = a + z \\ 5x = a + z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 24y \\ z = 4x \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} 24y = 4x \\ x = 6y \end{matrix}$$

По условию необходимо найти:

$$\frac{x+z}{y+z} = \frac{x+4x}{y+24y} = \frac{5x}{25y} = \frac{x}{5y} = \frac{6y}{5y} = \frac{6}{5} = 1,2.$$

Ответ: В 1,2 раза. + 105.

№3.

$$p(n) = \frac{(-3)^n}{3^n + 3^{17}}$$

Найдем $p(q) + p(34-q)$, где $q \in [1; 16] \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} & \frac{(-3)^q}{3^q + 3^{17}} + \frac{(-3)^{34-q}}{3^{34-q} + 3^{17}} = \frac{(-1)^q}{1 + 3^{17-q}} + \frac{(-1)^{34-q} \cdot 3^{17-q}}{1 + 3^{17-q}} = \\ & = \frac{(-1)^q + ((-1)^{34-q} \cdot 3^{17-q})}{1 + 3^{17-q}}. \end{aligned}$$

Данное выражение
при четном q имеет вид: $\frac{1 + 3^{17-q}}{1 + 3^{17-q}} = 1$,а при нечетном: $\frac{-1 - 3^{17-q}}{1 + 3^{17-q}} = -1$.

Заметим, что при 33 слагаемых имеется всего 16 пар, среди которых каждая пара дает 1, а другие восемь дают (-1) тогда их сумма будет равняться нулю.

Найдем искомую сумму, складывая первый член с последним, второй с предпоследним и т.д.: $(p(1) + p(33)) + (p(2) + p(32)) + \dots + (p(16) + p(18)) + p(17) = -1 + 1 + \dots - 1 + 1 + p(17) = p$ Тогда ответ будет $p(17) = \frac{(-3)^{17}}{3^{17} + 3^{17}} = -\frac{1}{2}$.Ответ: $-\frac{1}{2}$ +

№2.

Возьмем первое два неравенства, из которых всегда достигим на 2 а затем сформулируем третью задачу!

$$a+b = ?$$

$$a+b \rightarrow \max.$$

$$11a + 11b \leq 31$$

$$a + b \leq \frac{31}{11}$$

$$\begin{cases} 3a + 5b \leq 11 \\ 4a + 3b \leq 10 \\ 7a + 4b \leq 18 \end{cases}$$

Возьмем первое 2 на 2 и сложим с третьим

$$11a + 11b \leq 31$$

$$a + b \leq \frac{31}{11}$$

Заметим, что (.) пересечение прямой $3x + 5y = 11$ и $4x + 3y = 10$ имеет координаты $x = \frac{17}{11}$ и $y = \frac{14}{11}$. Тогда получим равенство при $a = \frac{17}{11}$ и $b = \frac{14}{11}$.

Проверка

Подставим a и b в третье нерав.:

$$\frac{7 \cdot 17}{11} + \frac{4 \cdot 14}{11} \leq 18 - \text{верно, а значит } a+b \leq \frac{31}{11}.$$

Знач. $a+b$ максимиз., тогда получим: $a = \frac{17}{11}$; $b = \frac{14}{11}$.

Ответ: $\frac{31}{11}$.

№1.

Пусть x - слова, говорящие по нем., но не говорящие по франц.
 y - говорящие по французски, но не по английски.
 z - и говорящие на по нем., и по фр.

Получаем уравнения:

$$x + z = 0,4$$

$$y + z = 0,2$$

Получаем систему:

$$\begin{cases} \frac{y}{x+z} = 0,4 \\ \frac{x}{y+z} = 0,2 \end{cases} \Rightarrow$$

и т.д.

М11 361

Код участника
(заполняется организатором)



**Олимпиадная работа
заключительного этапа
«Всероссийская олимпиада школьников "Миссия
выполнима. Твоё призвание - финансист!" 2023-2024
г.»
«(Математика 11 класс)»**

Вариант № 1

«27 января 2024 г.»

Никакие другие записи на титульном листе делать не разрешается

ШШ 361

Код участника

Всероссийская олимпиада школьников «Миссия выполнима. Твое призвание – финансист!» 2023/2024 уч.г.

Бланк проверки работы

Математика 11 класс

№ задания	ФИО эксперта	Балл	ФИО эксперта	Балл	Итоговый балл
1	Кесслер	10	Гурьянов	10	10
2	Мякомеров Р.И.	2	Савина С.В.	2	2
3	Борисова	12	Кремиз	12	12
4	Овчинникова	4	Курсанова	4	4
5	Банишвили	2	Уфимов	2	2
6	Олежков	3	Курсанова	3	3
7	Катков	14	Степанян	14	14
8	Каминцев	0	Цацун	0	0
ИТОГО					47



ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМА.

ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ – ФИНАНСИСТ!»
ПО ПРЕДМЕТУ МАТЕМАТИКА 2023-2024 уч. года

ОЧНЫЙ ЭТАП

11 класс

Вариант 1

Задание 1 (10 баллов)

В некотором ВУЗе существуют очная и дистанционная формы обучения. При этом среди студентов, занимающихся очно, 50% занимаются также и дистанционно, а среди студентов, занимающихся дистанционно, 60% занимаются также и очно. Какую часть составляют студенты, занимающиеся только очно?

Задание 2 (10 баллов)

Каким наименьшим может быть значение выражения $A + B$, если A и B – числа, удовлетворяющие следующей системе неравенств

$$\begin{cases} A + 5B \geq 9; \\ 3A + 4B \geq 11; \\ 5A + 3B \geq 11. \end{cases}$$

Задание 3 (12 баллов)

Для каждого натурального числа n положим $p(n) = \frac{9^n}{9^n + 9^{50}}$.
Вычислите сумму $p(1) + p(2) + p(3) + \dots + p(99)$.

Задание 4 (12 баллов)

Длина ребра куба $ABCD A'B'C'D'$ равна 1. Найдите радиус сферы, проходящей через точку C и касающейся прямых AD , AA' и $A'B'$.

②

$$\begin{cases} A + 5B \geq 9 \\ 3A + 4B \geq 11 \\ 5A + 3B \geq 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (A+B) + 4B \geq 9 & (1) \\ 3(A+B) + B \geq 11 & (2) \\ 3(A+B) + 2A \geq 11 & (3) \end{cases}$$

Для точной оценки
нужно использовать все
нер-вы

Заметим, что при сложении левых и правых частей

нер-в соотв. с одним знаком - знак сжм.

т.к. $x+y=a \geq b$ $a+x+b+d$
 $d+a=c \geq d$ $\Leftrightarrow \frac{a}{c} + \frac{b}{d} \geq \frac{b+d}{c+d} \quad | - \frac{b-d}{c+d}$
 $\frac{a}{c} + \frac{b}{d} \geq 0$

$\frac{a}{c} + \frac{b}{d} \geq 0$

$\Rightarrow \frac{a}{c} + \frac{b}{d} \geq 0$

Аналогич. $\frac{a}{c} + \frac{b}{d} \geq 0$
 $\frac{a}{c} + \frac{b}{d} \geq 0$
 $\frac{a}{c} + \frac{b}{d} \geq 0$

$\Rightarrow$ Сложим все нерава:

$\Leftrightarrow (1) + 2 \cdot (2) + 3 \cdot (3):$

$(A+B) + 4B + 6(A+B) + 2B + 9(A+B) + 6A \geq 9 + 22 + 33$

$16(A+B) + 6(A+B) \geq 64$

$A+B \geq \frac{64}{22} = \frac{32}{11}$

Ответ: $\min(A+B) = \frac{32}{11}$

2, не верный
ответ.

③

$p(u) = \frac{g^u}{g^u + g^{50}}$

Заметим, что

$p(100-u) = \frac{g^{100-u}}{g^{100-u} + g^{50}} = \frac{g^{50}}{g^u (g^{50} + g^{50})} = \frac{g^{50}}{g^u + g^{50}}$

$\Rightarrow p(100-u) + p(u) = \frac{g^{50}}{g^u + g^{50}} + \frac{g^u}{g^u + g^{50}} = \frac{g^u + g^{50}}{g^u + g^{50}} = 1$

$\Rightarrow p(1) + p(2) + \dots + p(99) = p(1) + p(\frac{100-1}{99}) + p(2) + p(\frac{100-2}{99}) + \dots + p(50) =$

$= 1 + 1 + \dots + p(50)$, где $p(50) = \frac{g^{50}}{g^{50} + g^{50}} = \frac{1}{2}$

Всего пар, и и 100-и - от 1 до 49 - 49 пар, которые обрещ. в 1

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{49} p(i) = 49 + p(50) = 49,5$

Ответ: 49,5.

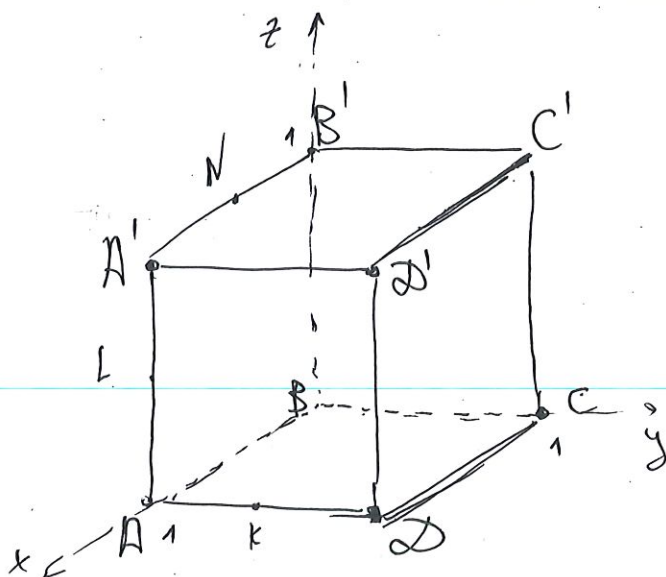
12 баллов

Код участника:

(заполняется организатором)

МН 361

④



Заметим, что

пр. $A'B'$, AA' , AD -

- симм. относительно
пл-ти $(ABB'A')$

т.е. AA' и $A'B' \in (ABB')$

а $AD \perp (ABB')$

Сфера, которая касается

$A'B'$, AA' , AD - имеет симметрию

Т.е. ГМТ, которые явл. центрами сфер,

касательных к AD , AA' , $A'B'$ - симметр.
относительно (ABB')

Решением является
сфера, упрощ.

$\frac{1}{3}$ т. A, C, B' - центром в т. B и радиусом BA .

$\Rightarrow$ радиус сферы = 1

Внесём наш куб в декартов. сист. координат с центром в т. $B(0;0;0)$

$\Rightarrow A'B' = \Gamma_{\text{плоск.}}$ т. K, L, N в $AD, AA', A'B'$ соотв.

и т. K, L, N - т. касания этих прямых и ~~сферы~~ сферы.

$\Rightarrow$ т. $C(0;1;0)$ т. $L(1;1;1)$

т. $K(x_K; y_K; 0)$ т. $N(x_N; 0; z_N)$

Код участника:

(заполняется организатором)

ММ 361

(4) (Продолжение)

$$LA' = A'N$$

$$LA = AK$$

$$z_L = y_K$$

(как ор. касат.

т.к. сфера ор. сферы в ин-те (A B B') и

(A B B')

$$1 - z_L = 1 - x_N$$

$$z_L = x_N$$

$$\Rightarrow \tau.L(1; y_L; z_L)$$

$$\tau.N(z_L; 0; z_N)$$

$$\tau.K(x_K; z_L; 0)$$

$$\tau.C(0; 1; 0)$$

 $\Rightarrow$ Пусть $\rho(x; y; z)$ — центр сферы

$$\Rightarrow \rho(0; 1) = \sqrt{(x-1)^2 + (y-y_L)^2 + (z-z_L)^2} = R$$

$$\begin{cases} R^2 = (x-1)^2 + y^2 + (z-z_N)^2 \\ R^2 = (x-x_K)^2 + (y-z_L)^2 + z^2 \\ R^2 = x^2 + (y-1)^2 + z^2 \\ R^2 = (x-1)^2 + (y-y_L)^2 + (z-z_L)^2 \end{cases}$$

~~Решение~~ При $x=0=y=z$

$$\begin{cases} R^2 = z_L^2 + z_N^2 \\ R^2 = x_K^2 + z_L^2 \\ R^2 = 1^2 \\ R^2 = 1^2 + y_L^2 + z_L^2 \end{cases} \Rightarrow R=1$$

$$\Rightarrow x_K = 1$$

$$z_N = 1$$

$$\Rightarrow \tau.C(0; 1; 0)$$

$$\tau.L(1; 0; 0)$$

$$\tau.K(1; 0; 0)$$

$$\tau.N(0; 0; 1)$$

это решение

удовл. условиям, что $\tau.L, N, K \in AA', A'B', A'Z$ $\Rightarrow$ явл. ответомответ: $R=1$.

14

Код участника:

(заполняется организатором)

ММ 361

$$(5) \quad \arccos \frac{5x+3}{3x-5} + \arccos \frac{x-1}{x+1} = x$$

$$\text{ОДЗ: } x \neq \frac{5}{3}$$

$$x \neq -1$$

$$\cos(\arccos \frac{5x+3}{3x-5} + \arccos \frac{x-1}{x+1}) = \cos x$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \frac{\cos \alpha \cdot \cos \beta - 1}{\cos \alpha + \cos \beta}$$

$$\cos(\arccos a) = a \quad \text{однозначно т.к.}$$

$$\Rightarrow \frac{5x+3}{3x-5} \cdot \frac{x-1}{x+1} - 1 = \cos x$$

$$\frac{5x+3}{3x-5} + \frac{x-1}{x+1} = \cos x$$

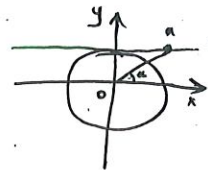
$$\frac{(5x+3)(x-1) - (3x-5)(x+1)}{(x+1)(5x+3) + (x-1)(3x-5)} = \cos x$$

$$\frac{5x^2 - 5x + 3x - 3 - 3x^2 - 3x + 5x + 5}{5x^2 + 8x + 8 + 3x^2 - 8x - 5x + 5} = \cos x$$

$$\frac{2(x^2+1)}{8(x^2+1)} = \cos x \quad \begin{matrix} x^2+1 > 0 \\ \forall \\ x^2+1 \neq 0 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \cos x = \frac{1}{4}$$

$$x = \arccos \frac{1}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$



оо cos

$$\alpha = \arccos a$$

$$0 \leq \alpha < \pi$$

$$\Rightarrow \cos \alpha = a \quad \text{однозначно}$$

Т.к. у cos и arcsin т.о. не

Такая 1 т.пересеч.

на ОДЗ:

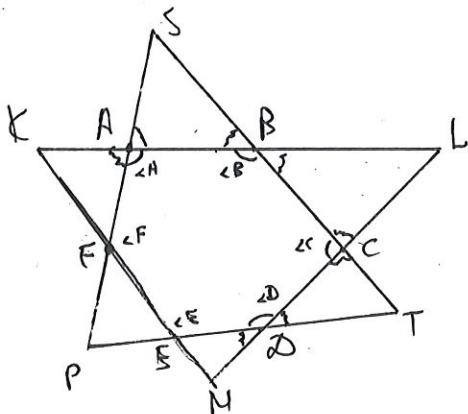
$$\text{Решая: } x = \arccos \frac{1}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Код участника:

(заполняется организатором)

111 361

- 6) Заметим, что невозможно 1 прямой пересеч. все стороны Δ -ка, т.к. если эта прямая не включает в себя одну из сторон Δ -ка. Поэтому, чтобы в пересеч. Δ -ка образовался треугольник, то необходимо, чтобы каждая сторона 1 Δ -ка пересекала 2 Δ -ка в 2 точки, тогда будет 6 точек пересечения. Это возможно только в случае, если любые точки ~~любого~~ Δ -ка и 2-е другие точки этого же Δ -ка находятся в разных полуплоскостях, образованных какой-либо прямой, содержащей одну из сторон 2-ого Δ -ка, то есть чертятся следующие:


Обозначим Δ -ки: ΔKLM и ΔPST

Начиная с угла

$$\angle DCT = 180^\circ - \angle C = 65^\circ \text{ (слож.)}$$

$$\angle CBT = 180^\circ - \angle B = 65^\circ$$

$$\angle BCL = 180^\circ - \angle C = 65^\circ$$

$$\angle CBL = 180^\circ - \angle B = 65^\circ$$

$$\angle ABS = 180^\circ - \angle B = 65^\circ$$

$$\angle BAS = 180^\circ - \angle A = 65^\circ$$

$$\angle KAF = 180^\circ - \angle A = 65^\circ$$

$$\angle EDM = 180^\circ - \angle D = 65^\circ$$

$$\angle MED = 180^\circ - \angle E = 60^\circ$$

$$\angle PEF = 180^\circ - \angle E = 60^\circ$$

$$\angle PFE = 180^\circ - \angle F = 40^\circ$$

$$\angle KFA = 180^\circ - \angle F = 40^\circ$$

$$\Rightarrow \angle L = 180^\circ - \angle CBL - \angle BCL = 50^\circ$$

$$\angle T = 180^\circ - \angle DCT - \angle CBT = 50^\circ$$

$$\angle S = 180^\circ - \angle ABC - \angle BAS = 50^\circ$$

$$\angle P = 180^\circ - \angle S - \angle T = 80^\circ$$

$$\angle M = 180^\circ - \angle MED - \angle MDE = 65^\circ$$

$$\angle K = 180^\circ - \angle M - \angle L = 75^\circ$$

Как
видно
из
 Δ -ка

Ответ:

В ΔKLM :

$$\angle K = 75^\circ$$

$$\angle L = 50^\circ$$

$$\angle M = 55^\circ$$

В ΔPST :

$$\angle P = 80^\circ$$

$$\angle S = 50^\circ$$

$$\angle T = 50^\circ$$

35

Код участника:

(заполняется организатором)

111.361

⑦

$$f(x) = ax^4 + x^2 + x$$

Прямая, касаясь. графика — касат. к графику

Её ур-ние: $y = \underbrace{(f(x_0))'}_{\alpha} \cdot x + \underbrace{(y_0 - (f(x_0))'x_0)}_{\beta}$, где x_0 — точка, через которую мы проводим касат.

т.к. $\alpha = (f(x_0))'$ — угол наклона

А для нахождения β рассмотрим, что наша прямая проходит $\pi/3$ (через) x_0, y_0 , где $y_0 = f(x_0)$

$$\Rightarrow y_0 = x_0 \cdot \alpha + \beta$$

$$\Rightarrow \beta = y_0 - x_0 \cdot \alpha = f(x_0) - x_0 \cdot \alpha$$

$\Rightarrow$ у 2х точек общая касат. только в том случае, если эти касат. (в этих точках) совпадают

$y = \alpha_1 x + \beta_1$ — ур-ние касат. к $f(x)$ при $x = x_1$

$y = \alpha_2 x + \beta_2$ — ур-ние касат. к $f(x)$ при $x = x_2$

$$\text{т.е. } \begin{cases} \alpha_1 = \alpha_2 \\ \beta_1 = \beta_2 \\ \text{или } x_1 \neq x_2 \end{cases}$$

$$\alpha_1 = (f(x_1))' = 4ax_1^3 + 2x_1 + 1$$

$$\alpha_2 = (f(x_2))' = 4ax_2^3 + 2x_2 + 1$$

$$\beta_1 = f(x_1) - x_1 \alpha_1 = ax_1^4 + x_1^2 + x_1 - 4ax_1^4 - 2x_1^2 - x_1 = -3ax_1^4 - x_1^2$$

$$\beta_2 = f(x_2) - x_2 \alpha_2 = -3ax_2^4 - x_2^2$$

Заметим, что $a \neq 0$

т.к. в этом случае

$f(x) = x^2 + x$ — парабола

Очевидно, что в этом случае касат.

$\pi/3$ 2 точки, неверно

Код участника:

(заполняется организатором)

111.361

(2) (Продолжение)

$$\begin{cases} 4ax_1^3 + 2x_1 + 1 = 4ax_2^3 + 2x_2 + 1 \Leftrightarrow 2a(x_1^3 - x_2^3) + x_1 - x_2 = 0 \\ -3ax_1^4 - x_1^2 = -3ax_2^4 - x_2^2 \\ x_1 \neq x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a(x_1^3 - x_2^3) + x_1 - x_2 = 0 \\ 3a(x_1^4 - x_2^4) + x_1^2 - x_2^2 = 0 \\ x_1 \neq x_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x_1 - x_2) (2a(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) + 1) = 0 \\ (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) (3a(x_1^2 + x_2^2) + 1) = 0 \\ x_1 \neq x_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = x_2 \Rightarrow \emptyset \\ 2a(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) = -\frac{1}{2a} \\ x_1 = x_2 \Rightarrow \emptyset \\ x_1 = -x_2 \\ x_1^2 + x_2^2 = -\frac{1}{3a} \\ x_1 \neq x_2 \end{cases}$$

Рассм. (1):

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 &= -\frac{1}{2a} \\ x_1^2 &= -\frac{1}{2a} \Rightarrow a < 0 \end{aligned}$$

$$x_2 = \pm \sqrt{\frac{1}{2|a|}}$$

$$x_1 = \mp \sqrt{\frac{1}{2|a|}}$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 4a \left(\sqrt{\frac{1}{2|a|}} \right)^3 + 2\sqrt{\frac{1}{2|a|}} + 1 =$$

$$= \frac{4a}{2\sqrt{2} \cdot |a| \sqrt{|a|}} + \frac{\sqrt{2}}{|a|} + 1 = \frac{-|a| \cdot \sqrt{2}}{|a| \sqrt{|a|}} + \frac{\sqrt{2}}{|a|} + 1 = 1$$

$$\beta_1 = \beta_2 = -3a \cdot \left(\sqrt{\frac{1}{2|a|}} \right)^4 - \left(\sqrt{\frac{1}{2|a|}} \right)^2 = \frac{3|a|}{4|a|^2} - \frac{1}{2|a|} =$$

$$= \frac{1}{4|a|}$$

Рассм.

$$\begin{cases} x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 = -\frac{1}{2a} \quad (1) \\ x_1 = -x_2 \\ x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 = -\frac{1}{2a} \quad (2) \\ x_1^2 + x_2^2 = -\frac{1}{3a} \\ x_1 \neq x_2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Рассм. (2): } x_1^2 + x_2^2 &= -\frac{1}{3a} \Rightarrow a < 0 \\ \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 &= \frac{1}{3|a|} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3|a|} + x_1x_2 = \frac{1}{2|a|}$$

$$\Rightarrow x_1x_2 = \frac{1}{6|a|}$$

$$x_1 = \frac{1}{6|a|x_2}$$

$$\begin{cases} x_1 \neq 0 & x_2 \neq 0 \\ \text{Умножим} & 0 \neq \frac{1}{6|a|}, a \neq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{36|a|^2 x_2^2} + x_2^2 = \frac{1}{3|a|} \quad | \cdot 36|a|^2 x_2^2, a \neq 0, x_2 \neq 0$$

$$x_2^4 \cdot 36|a|^2 + 1 = \frac{12|a|^2 x_2^2}{3|a|}$$

$$(6|a|x_2^2)^2 - 2 \cdot 6|a|x_2^2 + 1 = 0$$

$$(6|a|x_2^2 - 1)^2 = 0$$

$$x_2 = \pm \sqrt{\frac{1}{6|a|}}$$

$$x_2 = \sqrt{\frac{1}{6|a|}}$$

$$x_2 = -\sqrt{\frac{1}{6|a|}}$$

$$x_1 = \frac{\sqrt{6|a|}}{6|a|} = \frac{1}{\sqrt{6|a|}}$$

$$x_1 = x_2 \Rightarrow \emptyset$$

$$x_1 = -\frac{\sqrt{6|a|}}{6|a|} = -\frac{1}{\sqrt{6|a|}}$$

$$x_1 = x_2 \Rightarrow \emptyset$$

③ (Продолжение 2)

⇒ Для $a < 0$:

Упр-ние касат. ч/з 2 т. графика:

$$y = x + \frac{1}{4|a|} = x - \frac{1}{4a}$$

Точки
т. касания

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{2|a|}}, x_2 = -\frac{1}{\sqrt{2|a|}}$$

Ответ: $a < 0, y = x - \frac{1}{4a}$.

Д-во: пусть для $x_3 \neq x_1$ и $x_3 \neq x_2$
и такое, что $y_3 = x_3 - \frac{1}{4a} = f(x_3)$

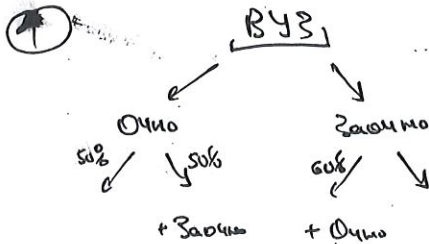
$$x_3 - \frac{1}{4a} = ax_3^4 + x_3^2 + x_3$$

$$ax_3^4 + x_3^2 + \frac{1}{4a} = 0$$

$$x_3^2 = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4a \cdot \frac{1}{4a}}}{2a} = \frac{-1 \pm 0}{2a} = -\frac{1}{2a}$$

$$x_3 \neq \pm \frac{1}{\sqrt{2|a|}} = [x_1, \text{ или } x_2]$$

⇒ касат. не пересекает график в 3 точки



Пусть $x(\text{очн})$ - только очно занимающийся студент

$y(\text{очн})$ - очно, и заочно занимающийся.

$z(\text{заочн})$ - только заочно

Всего: $x + y + z$

Известно: $\frac{y}{x+y} = \frac{1}{2} = \frac{50}{100}$

т.к. $x, y, z > 0$

$$\frac{y}{y+z} = \frac{60}{100} = \frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow xy \neq 0, y+z \neq 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2y = x+y \\ 5y = 3y+z \end{cases} \quad \begin{matrix} y=x \\ z=\frac{2}{3}y \end{matrix}$$

Только очно - x

⇒ Искомая величина

$$\frac{x}{x+y+z} = \frac{y}{y+y+\frac{2}{3}y} = \frac{\frac{1}{2}y}{\frac{5}{3}y} = \frac{3}{10} = 30\%$$

Ответ: 37,5%.

Код участника:

(заполняется организатором)

М 11361

(8) Сделает оценку сверху и снизу.

Лучший вариант: с 1 попытки

Худший вариант: можно сделать 100 последовательностей.

Y_k , таких, что в каждой последов. $y'_i \in Y_k$ и $y'_{i+1} = y'_i$

$\Rightarrow$ Каждое из чисел от 1 до 100 $y'_{100} = y_1$ повторяется на

каждом месте, и при равенстве с x_i мы запоминим и 100% определим X

Тем более при 99 Y_k мы по остаточному принципу определим X

При 98 Y_k число ~~не известно!~~ ~~мы~~ ~~знаем~~ и мы при помощи следущим y_i (в смысле)

$\Rightarrow$ Предположим, что мы знаем до X_{99} X_{100}

а y_{99} и y_{100} еще не были 1 и 2

$\Rightarrow$ мы не сможем определить $X_{99} = 1/2$ $X_{100} = 1/2$

$\Rightarrow$ Давение зададим

$Y_1 = \{1; 50; 2; 51 \dots 49; 100\}$

$Y_2 = \{100; 1; 50; 2 \dots 49; \}$

$\vdots$
 Y_{98}

неверный ответ

нет решения

Когда мы сможем при 98 шагах т.е. сравним $Y_1 \dots Y_{98}$ с X опред. каждое x_i , т.к. $1 < 100$;

Однако число шагов $\neq 98$, т.к. при малой последов. точность $>$, чем 98, не была отмечена

М11-550

Код участника
(заполняется организатором)



Олимпиадная работа
заключительного этапа
«Всероссийская олимпиада школьников "Миссия
выполнима. Твоё призвание - финансист!" 2023-2024
г.»
«(Математика 11 класс)»

Вариант № 2

«27 января 2024 г.»

Никакие другие записи на титульном листе делать не разрешается

№5 $\operatorname{arctg} \frac{2x-1}{x+2} + \operatorname{arctg} \frac{x+3}{3x-1} = x$

П.к $\operatorname{arctg} z \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) \Rightarrow$ Правая часть уравнения должна принимать $x \in (-\pi; \pi)$

$$\begin{cases} x \neq -2 \\ x \neq \frac{1}{3} \end{cases}$$

Нужно взять тангенс от двух частей:

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(\frac{2x-1}{x+2})) + \operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(\frac{x+3}{3x-1})) = 2 \text{ балла}$$

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(\frac{2x-1}{x+2}) + \operatorname{arctg}(\frac{x+3}{3x-1})) = \operatorname{tg} x$$

По формуле тангенса суммы

$$\frac{\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(\frac{2x-1}{x+2})) + \operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(\frac{x+3}{3x-1}))}{1 - \operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(\frac{2x-1}{x+2})) \cdot \operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(\frac{x+3}{3x-1}))} = \operatorname{tg} x$$

$$= \frac{\frac{2x-1}{x+2} + \frac{x+3}{3x-1}}{1 - \frac{2x-1}{x+2} \cdot \frac{x+3}{3x-1}} = \frac{1 - \frac{2x-1}{x+2} \cdot \frac{x+3}{3x-1}}{\frac{6x^2 - 3x - 2x + 1 + x^2 + 2x + 3x + 6}{3x^2 + 6x - x - 2 - 2x^2 - 6x + x + 5}} =$$

$$= \frac{7x^2 + 7}{x^2 + 1} = 7 \Rightarrow \operatorname{tg} x = 7 \Rightarrow x = \operatorname{arctg} 7 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} x = \operatorname{arctg} 7 + \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x \in (-\pi; \pi) \\ \begin{cases} x \neq -2 \\ x \neq \frac{1}{3} \end{cases} \end{cases}$$

№7 нет 0

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \operatorname{arctg} 7 \\ x = -\pi + \operatorname{arctg} 7 \end{cases}$$

Ответ: $x = \operatorname{arctg} 7; x = -\pi + \operatorname{arctg} 7$

Лиса 1

М11-550

Код участника

Всероссийская олимпиада школьников «Миссия выполнима. Твое призвание – финансист!» 2023/2024 уч.г.

Бланк проверки работы

Математика 11 класс

№ задания	ФИО эксперта	Балл	ФИО эксперта	Балл	Итоговый балл
1	Камчатцев А.С.	10	Мелевских Т.Т	10	10
2	Защипанов	10	Тюлькин	10	10
3	Мартынов	12	Борисов	12	12
4	Матвеев	0	Савин	0	0
5	Кремь	12	Борисов	12	12
6	Олегов	3	Труфанов	3	3
7	Косов	0	Степанов	0	0
8	Труфанов	0	Усачев	0	0
ИТОГО					47

$$N3 \quad p(n) = \frac{(-3)^n}{3^n + 3^{17}}$$

Сложим первый с последним и

2 с последним пред посл. тогда пусть $k \in [1; 16]$

$$k \in \mathbb{Z} - \text{целое} \Rightarrow p(k) + p(34-k) = \frac{(-3)^k}{3^k + 3^{17}} + \frac{(-3)^{34-k}}{3^{34-k} + 3^{17}} =$$

$$= \frac{(-1)^k \cdot 3^k}{3^k + 3^{17}} + \frac{(-1)^{34-k} \cdot 3^{34-k}}{3^{34-k} + 3^{17}} = \frac{(-1)^k}{1 + 3^{17-k}} + \frac{(-1)^{34-k} \cdot 3^{17-k}}{3^{17-k} + 1} =$$

$$= \frac{(-1)^k + (-1)^{34-k} \cdot 3^{17-k}}{1 + 3^{17-k}}$$

При чётности k будет:

$$1 + 3^{17-k}$$

$$\frac{1 + 3^{17-k}}{1 + 3^{17-k}} = 1 \quad \text{А при нечётности } k :$$

$$\frac{-1 - 3^{17-k}}{1 + 3^{17-k}} = -1$$

Таким образом 16 из них

8 будут давать 1 и 8 дадут -1, кроме 0,

$$\text{Тогда: } p(1) + p(2) + \dots + p(33) = (p(1) + p(33)) (p(2) + p(32))$$

$$+ \dots + (p(16) + p(18)) + p(17) = -1 + 1 - \dots + 1 + p(17) = p(17) =$$

$$= \frac{(-3)^{17}}{3^{17} + 3^{17}} = -\frac{1}{2} = -0,5$$

Ответ: -0,5

лист 2.

№2 Будем решать 1, 2 неравенство,
где второе умножим на 2 ~~и~~, после
просуммируем: $11A + 11B \leq 31$
 $A + B \leq \frac{31}{11}$, точка пересечения двух прямых

$$\begin{cases} 3x + 5y = 11 \\ 4x + 5y = 10 \end{cases} \text{ имеет координаты } x = \frac{17}{11}, y = \frac{14}{11}$$

Поскольку равенство будет работать при $A = \frac{17}{11}$, а
 $B = \frac{14}{11}$, при этом они не нарушают

3 неравенства: $7 \cdot \frac{17}{11} + 4 \cdot \frac{14}{11} \leq 18 \Rightarrow$
 $\Rightarrow A + B \leq \frac{31}{11}$, а это значит, что ~~max~~
сумма $S_{\max} = \frac{31}{11}$

Ответ: $\frac{31}{11}$

№1 Пусть Англ - число говорящих по -
английски, Франц - число говорящих по - французски

Пусть x - число говорящих по английски и
по французски, y - число говорящих по английски,
 z - ~~по~~ говорящих по французски, d - не умеют
говорить на иностранных языках.

$$\frac{z}{z+d} = 0,04 \quad \frac{y}{y+d} = 0,2, \text{ по этому:}$$

$$\begin{cases} \frac{z}{z+d} = \frac{1}{25} \\ \frac{y}{y+l} = \frac{1}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 25z = z+d \\ 5y = y+l \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = 24z \\ l = 4y \end{cases} \Rightarrow$$

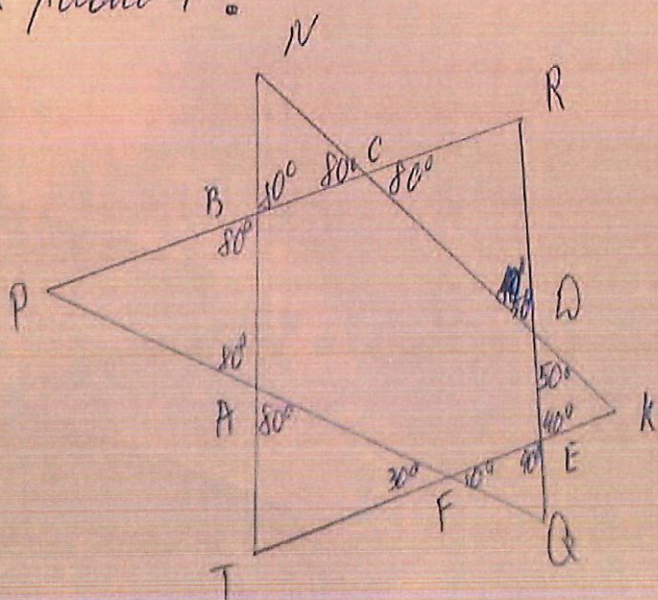
Найти:

$$\Rightarrow y = 6z \quad \frac{y+l}{z+d} = \frac{y+4y}{z+24z} = \frac{5y}{25z} = \frac{y}{5z} = \frac{6z}{5z} = 1,2$$

Ответ: в 1,2 раза (+10 баллов)

Решение: Пусть $\triangle MNC$ и $\triangle PTQ$ пересекаются
по отрезку BC так что PQ пересекает
 TC в A равно a , PR пересекает NC равно b ,
 PN пересекает TQ равно d , PK

Решение: Пусть $\triangle MNC$ и $\triangle PRQ$ пересекаются
так что PQ пересекает $TN = a$, PR пересекает
 TN равно b , PR пересекает NK равно c , NK пересекает
 RQ равно d , TK пересекает RQ равно e , TK пересекает
 PQ равно f .



Т.к. смежные углы
в сумме дают 180° и
сумма углов в $\triangle$ рав-
на 180° , тогда:
 $\angle PBA = \angle NBC = 80^\circ$
 $\angle PAB = \angle TAF = 80^\circ$, $\angle NDB = \angle RDC$
 $= 80^\circ$, $\angle RDC = \angle KDE = 50^\circ$

Миссия

№3 $\angle KED = \angle QEF = 40^\circ$, $\angle QFE = \angle TFA = 30^\circ$, тогда
 $\angle P = 20^\circ$; $\angle N = 20^\circ$; $\angle R = 50^\circ$, $\angle K = 90^\circ$; $\angle Q = 110^\circ$; $\angle T = 70^\circ$
 и сумма углов ~~существует~~ $\angle TNK = 20^\circ + 70^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ –
 существует.

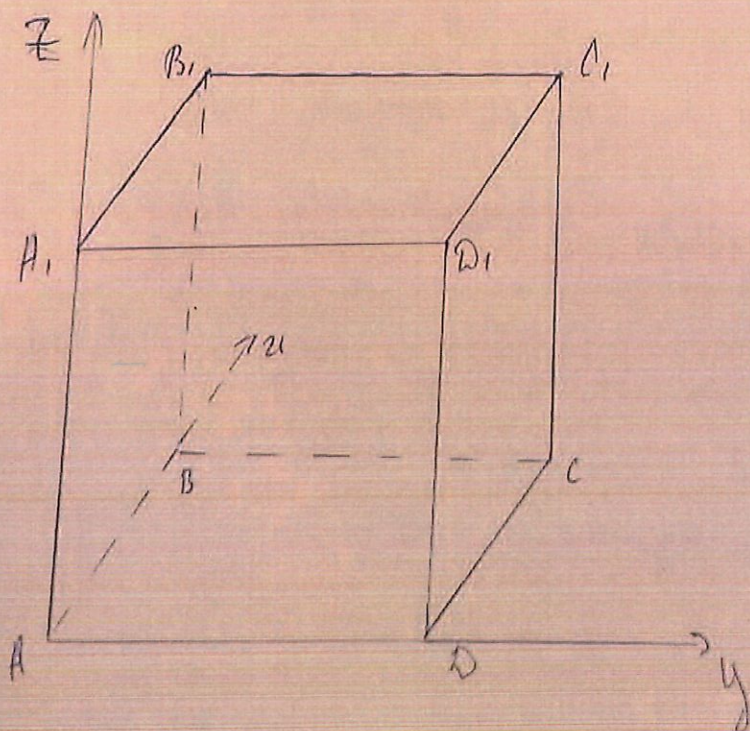
Сумма углов $\angle PRQ = 20^\circ + 50^\circ + 110^\circ = 180^\circ$ – такой
 $\triangle$ существует.

Ответ: 20° , 50° , 110° и 20° , 70° , 90° ЗБ

№4 Пусть оси координат заданы так:
 начало в точке А ~~по~~ ось Ox по
 лучу АВ, ось Oy по лучу АД, ось Oz по лучу АА₁,
 а центр шара имеет координаты (x_0, y_0, z_0) , r –
 радиус, тогда уравнение шара: $R^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 +$
 $+(z - z_0)^2$

Нет решения

05.



Миссия

18 Из условия можно сделать вывод, что всего перестановок 100!

Если x, y, z идут по порядку, то будет 6 вариантов перестановок, а всего случаев 97! При перестановке крайних элементов цепочка x, y, z становится в ряд 98 способов $\Rightarrow (6 \cdot 97! \cdot 98)$ - комбинаций, что xy, z вместе

Если отстоит 2 и 3 3-х букв xy, z , тогда парой xy, yx, xz, zx, yz, zy и рядом не третья буква $\Rightarrow$ это 97 комбинаций, если пара и 2 края. Это - $6 \cdot 97 \cdot 2 \cdot 97!$

И если пара не скраю $\Rightarrow$ 97 положений для пары, рядом не третья буква, т.е.

$96 \cdot 97$ и остальные перестановки $96! \Rightarrow$

$$\Rightarrow 6 \cdot 97 \cdot 2 \cdot 97! + 6 \cdot 97 \cdot 97 \cdot 96 \cdot 96!$$

Чтобы найти правильное число нужно вычитать все лишнее, тогда необходимое кол-во:

$$100! - 6 \cdot 97 \cdot 2 \cdot 97! - 6 \cdot 97 \cdot 97 \cdot 96 \cdot 96! - 6 \cdot 97! \cdot 98 + 1$$

Ответ: $100! - 6 \cdot 97 \cdot 2 \cdot 97! - 6 \cdot 97 \cdot 97 \cdot 96 \cdot 96! - 6 \cdot 97! \cdot 98 + 1$ [Правильно]

M11-607

Код участника
(заполняется организатором)



**Олимпиадная работа
заключительного этапа**

**«Всероссийская олимпиада школьников "Миссия
выполнима. Твоё призвание - финансист!" 2023-2024
г.»**

«(Математика 11 класс)»

Вариант № 2

«27 января 2024 г.»

Никакие другие записи на титульном листе делать не разрешается

М11-607

Код участника

Всероссийская олимпиада школьников «Миссия выполнима. Твое призвание – финансист!» 2023/2024 уч.г.

Бланк проверки работы

Математика 11 класс

№ задания	ФИО эксперта	Балл	ФИО эксперта	Балл	Итоговый балл
1	Камалетдинов А.Ш.	10	Александрова Т.Г.	10	10
2	Запрудин	10	Трунда	10	10
3	Борисов	12	Кремль	12	12
4	Иванов	0	Магомедов Р.М.	0	0
5	Кремль	12	Борисов	12	12
6	Олехов	3	Трунда	3	3
7	Кешков	0	Степанян	0	0
8		0	Щацков	0	0
ИТОГО					47

№4. Обозначим:

x - говорящих по-английски и ~~по-французски~~

y - говорящих по-английски ~~но не~~ говорящих по-французски

z - говорящих на французском, но не говорящих на английском

w - не говорящих ни на английском, ни на французском

Тогда:

$$\frac{z}{z+w} = \frac{4}{100}, \quad \frac{y}{y+w} = 0,2$$

Следовательно:

$$\begin{cases} \frac{z}{z+w} = \frac{1}{25} \\ \frac{y}{y+w} = \frac{1}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 25z = z+w \\ 5y = y+w \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} w = 24z \\ w = 4y \end{cases} \Leftrightarrow y = 6z$$

Тогда найдем:

$$\frac{y+w}{z+w} = \frac{y+4y}{z+24z} = \frac{5y}{25z} = \frac{y}{5z} = \frac{6z}{5z} = 1,2$$

Ответ: в 1,2 раз

+105

$$N(2). \begin{cases} 3A+5B \leq 11 & ① \\ 4A+3B \leq 10 & ② \\ 7A+4B \leq 18 & ③ \end{cases} \quad (A+B)_{\max} = ?$$

Если мы умножим ②-е неравенство на 2 и сложим с ①-ым неравенством, то получим:

$$11A+11B \leq 31$$

$$A+B \leq \frac{31}{11}$$

Прямая $3x+5y=11$ пересечёт прямую $4x+3y=10$ в точке с координатами $x = \frac{17}{11}$, $y = \frac{14}{11}$, а значит требуемое равенство достигается при $A = \frac{17}{11}$, $B = \frac{14}{11}$. Проверим, удовлетворяют ли эти значения A и B ③-му неравенству:

$$7 \cdot \frac{17}{11} + 4 \cdot \frac{14}{11} \leq 18$$

$$\frac{119}{11} + \frac{56}{11} \leq 18$$

$$\frac{175}{11} \leq \frac{198}{11}$$

верно, а значит $A = \frac{17}{11}$, $B = \frac{14}{11}$ — удовлетворяют ③-му неравенству, отсюда:

$$A+B \leq \frac{31}{11}, \quad (A+B)_{\max} = \frac{31}{11} \text{ и достигается при } A = \frac{17}{11}, B = \frac{14}{11}$$

Ответ: $\frac{31}{11}$

$$1) \textcircled{3}. p(n) = \frac{(-3)^n}{3^n + 3^{17}}$$

Если взять $m \in [1; 16]$, где m – целое число, то тогда получим:

$$\begin{aligned} p(m) + p(34-m) &= \frac{(-3)^m}{3^m + 3^{17}} + \frac{(-3)^{34-m}}{3^{34-m} + 3^{17}} = \\ &= \frac{(-1)^m \cdot 3^m}{3^m + 3^{17}} + \frac{(-1)^{34-m} \cdot 3^{34-m}}{3^{34-m} + 3^{17}} = \frac{(-1)^m}{1 + 3^{17-m}} + \frac{(-1)^{34-m} \cdot 3^{17-m}}{3^{17-m} + 1} = \\ &= \frac{(-1)^m + (-1)^{34-m} \cdot 3^{17-m}}{1 + 3^{17-m}} \end{aligned}$$

2) Справ

Если m – чётное, то $\frac{1 + 3^{17-m}}{1 + 3^{17-m}} = 1$

Если m – нечётное, то $\frac{-1 - 3^{17-m}}{1 + 3^{17-m}} = -1$
 пар нечётных и чётных m – всего 16, из которых 8 штук дают 1 и другие 8 штук дают -1, $\Rightarrow$ в сумме будет 0.

$p(1) + p(2) + p(3) + \dots + p(33) = (p(1) + p(33)) + (p(2) + p(32)) + \dots + (p(16) + p(18)) + p(17) = -1 + 1 - \dots + 1 + p(17)$ – если поочередно складывать первое с последним, второе с предпоследним и т.д.

Отсюда:

$$p(17) = \frac{-3^{17}}{3^{17} + 3^{17}} = -\frac{1}{2}$$

Ответ: $-\frac{1}{2}$

$$N \textcircled{B} \arctg \frac{2x-1}{x+2} + \arctg \frac{x+3}{3x-1} = x$$

Если $\arctg m \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$, то $m \in (-\infty; \infty) \Rightarrow x \neq -2$
 $x \neq \frac{1}{3}$

Возьмем тангенс от обеих частей уравнения:

$$\tg(\arctg(\frac{2x-1}{x+2}) + \arctg(\frac{x+3}{3x-1})) = \tg x$$

Применим формулу тангенса суммы, тогда рассмотрим левую часть ур-я:

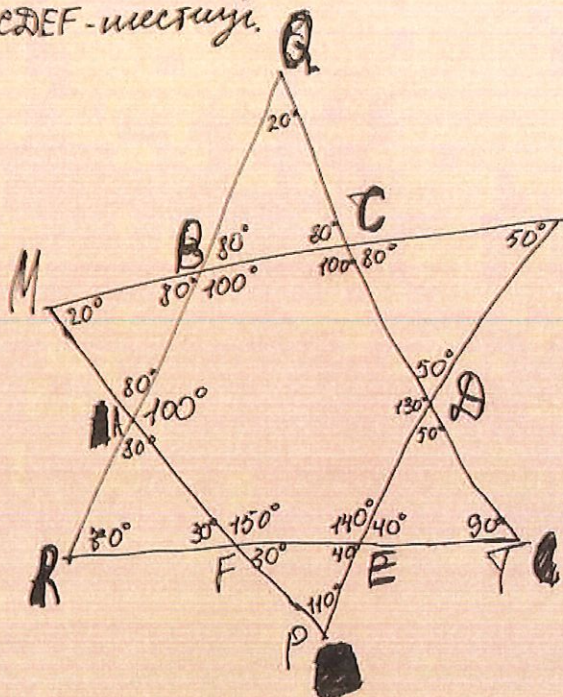
$$\begin{aligned} & \frac{\tg(\arctg(\frac{2x-1}{x+2})) + \tg(\arctg(\frac{x+3}{3x-1}))}{1 - \tg(\arctg(\frac{2x-1}{x+2})) \cdot \tg(\arctg(\frac{x+3}{3x-1}))} = \\ & = \frac{\frac{2x-1}{x+2} + \frac{x+3}{3x-1}}{1 - \frac{2x-1}{x+2} \cdot \frac{x+3}{3x-1}} = \frac{6x^2 - 5x + 1 + x^2 + 2x + 3x + 6}{9x^2 + 5x - 2 - 2x^2 - 5x + 3} = \\ & = \frac{7x^2 + 7}{x^2 + 1} = 7 \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $\tg x = 7 \Rightarrow \begin{cases} x = \arctg 7 \\ x = -\pi + \arctg 7 \end{cases}$

Ответ: $\arctg 7; -\pi + \arctg 7$

12 баллов

№ 6. $\triangle RQT$ и $\triangle MKP$ - пересекаются
 $ABCDEF$ - шестиугольник.



~~Если $\triangle MKP$ пересекается
~~тогда $\triangle RQT$ пересекается~~~~

1) Если учесть, что сумма смежных углов равна 180° и сумма всех углов в треугольнике равна 180° , то получим:

$$\angle QBC = \angle ABM = 80^\circ$$

$$\angle MAB = \angle RAF = 80^\circ$$

$$\angle BCQ = \angle KCD = 80^\circ$$

$$\angle CAK = \angle TDE = 50^\circ$$

$$\angle TEA = \angle FEP = 40^\circ$$

$$\angle EFP = \angle AFR = 30^\circ$$

Отсюда:

$$\angle M = \angle Q = 20^\circ$$

$$\angle K = 50^\circ$$

$$\angle T = 90^\circ$$

$$\angle R = 70^\circ$$

$$\angle P = 110^\circ$$

Следовательно,

Рассмотрим $\triangle RQT$:

Сумма углов $\triangle RQT$: $20^\circ + 70^\circ + 90^\circ = 180^\circ \Rightarrow \triangle$ существует

Рассмотрим $\triangle MKP$:

Сумма углов $\triangle MKP$: $20^\circ + 50^\circ + 110^\circ = 180^\circ \Rightarrow \triangle$ существует

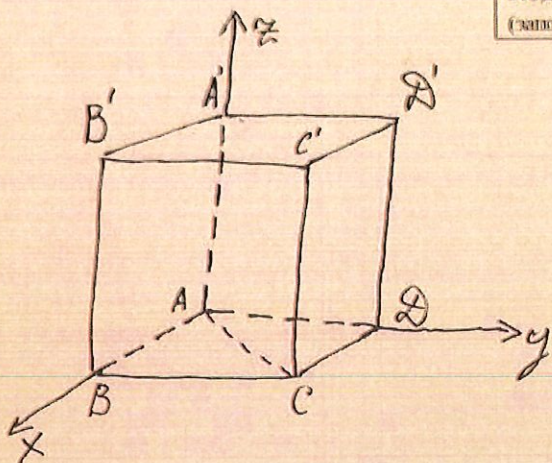
Ответ: $20^\circ; 70^\circ; 90^\circ$ и $20^\circ; 50^\circ; 110^\circ$

25

Код участника:
(заполняется организатором)

М11 - 607

N(4).



Зададим оси координат таким образом.
в т. А - началом координат,
ось Ox зададим по лучу AB ,
ось Oy по лучу AD ,
ось Oz по лучу AA' ,

Тогда координаты центра сферы
 $(x_0; y_0; z_0)$

и R тогда найдём из уравнения:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$$

Т. В лежит на сфере:

$$(1 - x_0)^2 + y_0^2 + z_0^2 = R^2$$

06

Дополнительный бланк №

Всероссийская олимпиада школьников «Миссия выполнима. Твое призвание – финансист!»

Код участника:

(заполняется организатором)

М 11-607

Рассмотрим касания сферы с оудными $AQ, AA', A'B'$:

№ 8 нет

17 нет

14 11 684

Код участника
(заполняется организатором)



**Олимпиадная работа
заключительного этапа
«Всероссийская олимпиада школьников "Миссия
выполнима. Твоё призвание - финансист!" 2023-2024
г.»
«(Математика 11 класс)»**

Вариант № 1

«27 января 2024 г.»

Никакие другие записи на титульном листе делать не разрешается

М 11-684

Код участника

Всероссийская олимпиада школьников «Миссия выполнима. Твое призвание – финансист!» 2023/2024 уч.г.

Бланк проверки работы

Математика 11 класс

№ задания	ФИО эксперта	Балл	ФИО эксперта	Балл	Итоговый балл
1	Самсонов	10	Гурьев	10	10
2	Матюшев Р.М.	10	Савина С.В.	10	10
3	Марков	12	Часов	12	12
4	Иванов	120	Матюшев Р.М.	0	0
5	Горисов	12	Кремль	12	12
6	Олегов	3	Груздев	3	3
7	Ковалев	0	Семанян	0	0
8	Клементьев	0	Щапов	0	0
ИТОГО					47

Ш 11684

ФГОБУ ВО «Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации»



ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМА.
ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ – ФИНАНСИСТ!»
ПО ПРЕДМЕТУ МАТЕМАТИКА 2023-2024 уч. года

ОЧНЫЙ ЭТАП

11 класс

Вариант 1

Задание 1 (10 баллов)

В некотором ВУЗе существуют очная и дистанционная формы обучения. При этом среди студентов, занимающихся очно, 50% занимаются также и дистанционно, а среди студентов, занимающихся дистанционно, 60% занимаются также и очно. Какую часть составляют студенты, занимающиеся только очно?

Задание 2 (10 баллов)

Каким наименьшим может быть значение выражения $A + B$, если A и B — числа, удовлетворяющие следующей системе неравенств

$$\begin{cases} A + 5B \geq 9; \\ 3A + 4B \geq 11; \\ 5A + 3B \geq 11. \end{cases}$$

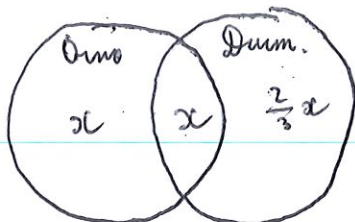
Задание 3 (12 баллов)

Для каждого натурального числа n положим $p(n) = \frac{9^n}{9^n + 9^{50}}$.
Вычислите сумму $p(1) + p(2) + p(n) + \dots + p(99)$.

Задание 4 (12 баллов)

Длина ребра куба $ABCD A'B'C'D'$ равна 1. Найдите радиус сферы, проходящей через точку C и касающейся прямых AD , AA' и $A'B'$.

Представим интересы студентов, занимающихся очно и дистанционно, в виде пересекающихся кругов (область их пересечения - те, кто занимается и очно, и дистанционно):



Плутит человек занимается только оино.
Они составляют 50% от всех, кто занима-
ется оино, ещё 50% - это те, кто занимается
ещё и другим. $\Rightarrow$ источник x .

Пусты у человек занимаютя дистанци-

опно. ~~Тогда~~ П.к. студ. занимающ. в обеих форм., сост. 60% от y , то $x = 0,6y \Rightarrow y = \frac{10x}{6}$. Тогда только дистанционно занимаются $y - x = \frac{10}{6}x - x = \frac{2}{3}x$ человек. Тогда всего студентов $x + x + \frac{2}{3}x = \frac{6x + 2x}{3} = \frac{8x}{3}$. Из них x заним. только оч. $\Rightarrow$ отношение будет $\frac{\frac{2x}{3}}{\frac{8x}{3}} = \frac{3}{8}$

Amber: $\frac{3}{8} + 100$

$$\boxed{NS} \quad \sqrt{p(n)} = \frac{g^n}{g^n + g^{50}}$$

$$\{p(1) + p(2) + \dots + p(99) = ?$$

Второе правило $\frac{1}{1+q^{50}} + \frac{1}{1+q^{45}} + \dots + \frac{1}{1+q} = \frac{q^1}{q^1+q^{50}} + \frac{q^2}{q^2+q^{50}} + \dots + \frac{q^{49}}{q^{49}+q^{50}}$. Сократим каждую дробь,

Заметим, что $\frac{1}{1+9^k} + \frac{9^k}{1+9^k} = 1$, поэтому сумма первой и посл., второй и пред-
послед. и т.д. слагаемых ~~составляет~~ ~~равна~~ 1. В итоге получим сумму из 49 единиц
и дроби $\frac{1}{2}$, что в итоге даст 49,5

Amber: 49,5

$$\arccos \frac{5x+3}{3x-5} + \arccos \frac{x-1}{x+1} = x$$

Возьмём котангенс от обеих частей:

$$\operatorname{ctg}\left(\operatorname{arccotg} \frac{5x+3}{3x-5} + \operatorname{arccotg} \frac{x-1}{x+1}\right) = \operatorname{ctg} x$$

$$\text{ctg}(\alpha + \beta) = \frac{\text{ctg} \alpha \cdot \text{ctg} \beta - 1}{\text{ctg} \alpha + \text{ctg} \beta}$$

$$= \frac{(5x+3)(x-1) - (3x-5)(2x+1)}{(5x+3)(2x+1) + (3x-5)(x-1)} = \frac{5x^2 - 5x + 3x - 3 - 3x^2 - 3x + 5x + 5}{5x^2 + 5x + 3x + 3 + 3x^2 - 3x - 5x + 5} = \frac{2x^2 + 2}{8x^2 + 8} = \frac{1}{4} \cdot \frac{x^2 + 1}{x^2 + 1}; x^2 + 1 > 0$$

$\Rightarrow$ on comp. $\Rightarrow \cot g x = \frac{1}{4} \Rightarrow \left[x = \pi + \arccot g \frac{1}{4} + \text{---} \right]$

$\Rightarrow$ on compr. $\Rightarrow \arccos x = y \quad [x = x + i \arccos y]$
 $\arccos(n) \in (0; \pi) \Rightarrow \arccos(n) + \arccos(m) \in (0; 2\pi) \Rightarrow$ оба нем. ноль, ноль.

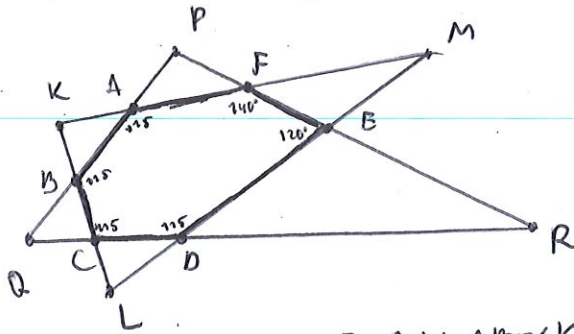
Ans: $x = \arccot \frac{1}{4}; \pi + \arccot \frac{1}{4}$

$$\begin{aligned} & \text{003: } \begin{cases} 0 < \arctan \frac{5x+3}{5x-5} < \frac{\pi}{2} \\ 0 < \arctan \frac{x-1}{2x+1} < \frac{\pi}{2} \end{cases} \\ & \begin{cases} 5x-5 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1 \\ 2x+1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -\frac{1}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

12 Jan 1960

NC

№6
~~Задача 6~~ Рассмотрим случай, когда каждая сторона одного
треугольника пересекает стороны другого в точках, отличных от
вершин треугол.:
Пусть вершины одного треугол. —



Плоскость вершины одного тетраэдра. - это K, L, M , а другого - P, Q, R , при этом QP перпендикулярно KL и LM в м. PM и A ($PM \perp QM \perp QA$), PR перпендикулярно KM и L в м. FE ($FE \perp PF \perp PE$) и RQ перпендикулярно ML и KL в м. DC ($DC \perp DR \perp RC$), тогда:

Это св. - вписанн. уг. : $\angle PAF = \angle KAB = \angle KBA = \angle QBC = \angle QCB = \angle LCD = \angle LDC = \angle RDE =$
 $= 65^\circ$, $\angle DER = \angle MEF = 60^\circ$ и $\angle MFE = \angle FPD = 40^\circ$. Тогда по сумме углов:
 в $\triangle PAF$ $\angle FPA = 75^\circ$; в $\triangle AKB$ $\angle AKB = 50^\circ$; в $\triangle BQC$ $\angle BQC = 50^\circ$; в $\triangle CLD$ $\angle CLD =$
 $= 50^\circ$; в $\triangle DRE$ $\angle DRE = 55^\circ$; в $\triangle EMF$ $\angle EMF = 30^\circ$.
 Углов наугад $\triangle KLM$ суммами 50° , 50° и 30° и $\triangle QPR$ суммами 75° , 50° и 55° .
^{углов} $\triangle$ пересекаем сразу 3 стороны углового треугол.

Допустим, какая-то сторона пересекает сторону второго треугольника. Пусть это сторона KL в $\triangle KLM$. Тогда это возможно только если одна из сторон второго треугольника (пусть это PQ) $\in KL$. Однако, эта сторона PQ тогда будет лежать на стороне KL , что невозможно, так как стороны не могут пересекаться по отрезку.

Однако ~~на одной~~, в таком случае стороны $KLMN$ не смогут пере-
сесть друг друга. В ещё 3-х точках, значит, 6-угольники получились
(для образования 6-угольника нужно 6 точек от вершин точек
пересеч.)

пересеч.)
Омбрен: $(50^{\circ}; 50^{\circ}; 80^{\circ})$ и $(75^{\circ}; 50^{\circ}; 55^{\circ})$

36

 $\sqrt{2}$

$$\begin{cases} A + 5B \geq 0 \\ 3A + 4B \geq 11 \\ 5A + 3B \geq 11 \end{cases}$$

$$\{ \min \} (A+B) = ?$$

Пусть $A+B=k$, тогда $A=k-B$. Подставим это в сумму:

$$y = x^2 - 4x + 9$$

$$\begin{cases} K - B + 5B \geq 9 \Rightarrow K \geq -4B + 9 \\ 3K - 3B + 4B \geq 11 \Rightarrow K \geq -\frac{1}{3}B + \frac{11}{3} \\ 5K - 5B + 3B \geq 11 \Rightarrow K \geq \frac{2}{5}B + \frac{11}{5} \end{cases}$$

$$5K - 5B + 3B \geq 11 \Rightarrow K \geq \frac{2}{5}B + \frac{11}{5}$$

Продолжение на другой странице

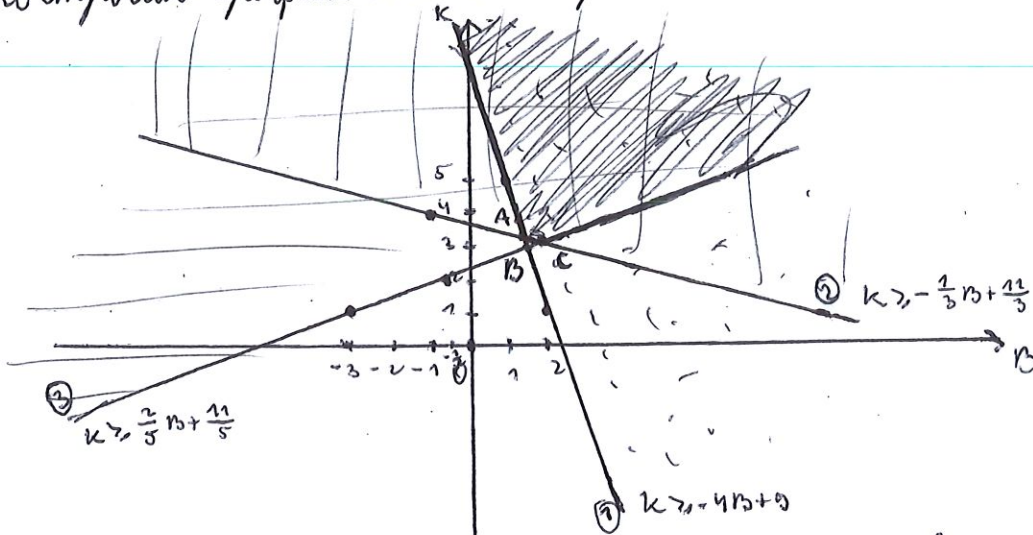


№2 (продолж.)

$$\begin{cases} K \geq -4B + 9 \\ K \geq -\frac{B}{3} + \frac{11}{3} \\ K \geq \frac{2}{5}B + \frac{11}{5} \end{cases}$$

Каждое из неравенств задаёт полуплоскость в осях B и K . ~~Нас интересует~~
~~Построим график системы неравенств:~~

$$\begin{array}{l} 1) K \geq -4B + 9 \\ \begin{array}{c|c|c} B & 2 & 1 \\ \hline K & 1 & 5 \end{array} \\ 2) K \geq -\frac{B}{3} + \frac{11}{3} \\ \begin{array}{c|c|c} B & -1 & 2 \\ \hline K & 4 & 3 \end{array} \\ 3) K \geq \frac{2}{5}B + \frac{11}{5} \\ \begin{array}{c|c|c} B & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \hline K & 1 & 1 \end{array} \end{array}$$



1-я и 2-я прямые пересекаются в т. А с координатами $(\frac{16}{11}; \frac{35}{11})$, 2-я и 3-я — в т. В $(2; 3)$, а 1-я и 3-я — в т. С $(1; 2)$. Решением системы отмечено на рисунке плотной штриховкой. Область, лежащая внутри $\triangle ABC$, в него не входит; 1-я прямая при $B \leq \frac{16}{11}$ и 3-я прямая при $B \geq 3$ — входят. Из этого легко видеть, что K принимает мин. значение в т. С и равен 2. Тогда $A=1$ и $B=2$. Проверим соответствующие суммы:

$$\begin{cases} 1+10 \geq 9 - \text{верно} \\ 3+8 \geq 11 - \text{верно} \\ 5+6 \geq 11 - \text{верно} \end{cases}$$

105.

Ответ: 3

№ 7 нет

№ 8 нет

М 11-799

Код участника
(заполняется организатором)



**Олимпиадная работа
заключительного этапа
«Всероссийская олимпиада школьников "Миссия
выполнима. Твоё призвание - финансист!" 2023-2024
г.»
«(Математика 11 класс)»**

Вариант № 1

«27 января 2024 г.»

Никакие другие записи на титульном листе делать не разрешается

Пусть x - чел. занимается дистанционно
 y - чел. занимается огно

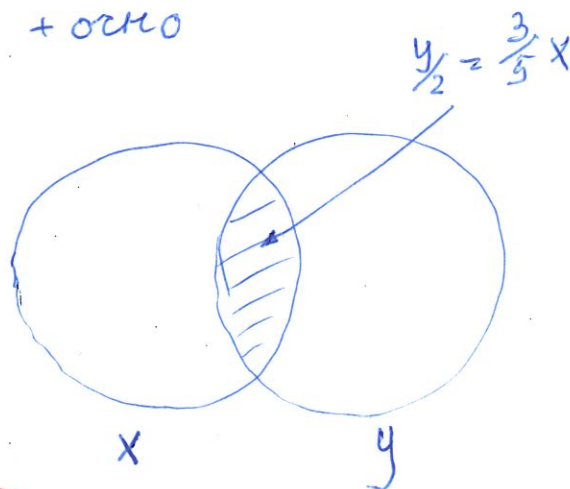
Тогда $\frac{3y}{2}$ - занимается дистанц. + огно; $\frac{y}{2}$ - только огно;

$$\frac{60}{100}x = \frac{3}{5}x - \text{занимается дистанц.} \\ + \text{огно}$$

$$1) \quad \frac{3}{5}x = \frac{y}{2} \Rightarrow x = \frac{5}{6}y$$

$$x + y = \frac{11}{6}y - \text{всего человек}$$

$$2) \quad \frac{\frac{y}{2}}{\frac{11}{6}y} = \frac{3}{11} - \text{часть только огно}$$



Ответ: $\frac{3}{11}$

~2

$$\begin{cases} A + 5B \geq 9 \\ 3A + 4B \geq 11 \\ 5A + 3B \geq 11 \end{cases} \quad 1) \quad \begin{cases} 15A + 75B \geq 135 \quad (1) \\ 15A + 20B \geq 55 \quad (2) \\ 15A + 9B \geq 33 \quad (3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 55B \geq 80 \quad (1)-(2) \\ 11B \geq 22 \quad (2)-(3) \\ 66B \geq 102 \quad (1)-(3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq \frac{80}{55} \\ B \geq 2 \\ B \geq \frac{102}{66} \end{cases} \Leftrightarrow B \geq 2$$

$$2) \quad \begin{cases} 4A + 20B \geq 36 \\ 12A + 60B \geq 108 \quad (1) \\ 45A + 60B \geq 165 \quad (2) \\ 100A + 60B \geq 220 \quad (3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 33A \geq 57 \quad (2)-(1) \\ 55A \geq 55 \quad (3)-(2) \\ 88A \geq 112 \quad (3)-(1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A \geq \frac{57}{33} \\ A \geq 1 \\ A \geq \frac{142}{88} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A \geq 1\frac{8}{11} \\ A \geq 1 \\ A \geq 1\frac{3}{11} \end{cases} \Leftrightarrow A \geq 1\frac{8}{11}$$

3) $\begin{cases} A \geq \frac{19}{11} \\ B \geq 2 \end{cases} \Rightarrow A+B \geq \frac{41}{11} = 3\frac{8}{11}$ v2 (продолж.)

$\begin{cases} A+5B \geq 9 \\ 3A+4B \geq 11 \\ 5A+3B \geq 11 \end{cases}$ Пусть $A+B=k$ v2
 $\Rightarrow A=k-B$

Тогда $\begin{cases} k-B+5B \geq 9 \\ 3(k-B)+4B \geq 11 \\ 5(k-B)+3B \geq 11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k+4B \geq 9 \\ 3k+B \geq 11 \\ 5k-2B \geq 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k+4B \geq 9 \\ 12k+4B \geq 44 \\ 10k-4B \geq 22 \end{cases}$

$\begin{cases} k+4B \geq 9 & (1) \\ 12k+4B \geq 44 & (2) \\ 10k-4B \geq 22 & (3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 11k \geq 35 & (2)-(1) \\ 11k \geq 31 & (1)+(3) \\ 22k \geq 66 & (2)+(3) \end{cases} \Leftrightarrow k \geq 3 - ?$

$\min(A+B) = 3$

Пример: $\begin{cases} A=1 \\ B=2 \end{cases}$

удовлетворяет
исходной системе

Ответ: 3.

65, не расказан
то 3-мин

$p(n) = \frac{9^n}{9^n + 9^{50}}$ v3 $p(1) + p(2) + p(3) + \dots + p(99) = ?$

1) Заметим, что числа нашей суммы разбиваются на пары $p(n) + p(100-n)$ (всего 49 пар) и число $p(50)$.

Сумма чисел в каждой паре:

$p(n) + p(100-n) = \frac{9^n}{9^n + 9^{50}} + \frac{9^{100-n}}{9^{100-n} + 9^{50}} =$

$= \frac{9^n}{9^n(1+9^{50-n})} + \frac{9^{50} \cdot 9^{50-n}}{9^{50}(9^{50-n}+1)} = 1$

МН-331

Код участника

Всероссийская олимпиада школьников «Миссия выполнима. Твое призвание – финансист!» 2023/2024 уч.г.

Бланк проверки работы

Математика 11 класс

№ задания	ФИО эксперта	Балл	ФИО эксперта	Балл	Итоговый балл
1	Баламанди	0	Гурьянов	0	0
2	Монахов Р.М.	6	Савина С.В.	6	6
3	Хренер	12	Борисова	12	12
4	Овчинин	0	Курсанова	0	0
5	Сунган	7	Угрюмов	7	7
6	Гудусев	3	Комков	3	3
7	Комков	14	Венанья	14	14
8	Д	0	Цоцков	0	0
ИТОГО					42

Код участника: ММ-240
(заполняется организатором)

13 (продолж.)

$$p(50) = \frac{9^{50}}{9^{50} + 9^{50}} = \frac{1}{2}$$

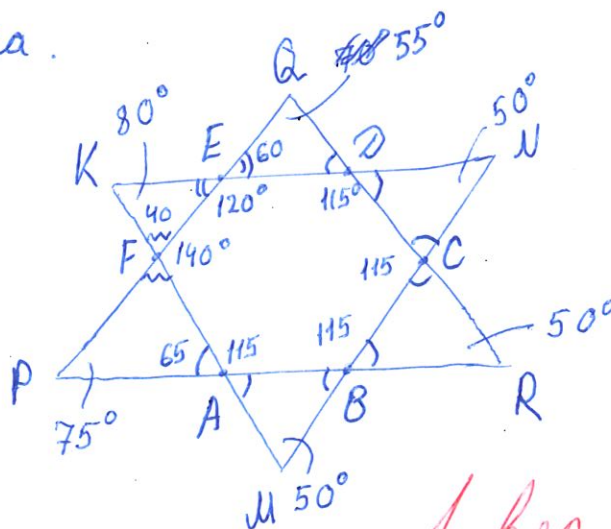
Т.к. пар 49, $p(1) + p(2) + p(3) + \dots + p(99) = 49 \cdot 1 + \frac{1}{2} = 49\frac{1}{2}$

Ответ: 49,5. + 12
16

Заметим, что $\forall$ прямая пересекает не более 2-х сторон треугольника $\Rightarrow$ всего точек пересечения для двух треугольников $\leq 3 \cdot 2 = 6$. Значит, ни одна вершина ~~этого~~ треугольника не лежит в части плоскости, ограниченной сторонами второго треугольника.

Тогда единственная возможная конфигурация на рисунке.

* Прочие конфигурации достигаются поворотом только



1) Внешние углы для $\angle A, \angle B, \angle C, \angle D$

$$= 65^\circ$$

для $\angle E = 60^\circ$, для $\angle F = 40^\circ$

2) $\triangle MNK, \triangle PQR$

Из $\triangle AMB, \triangle CBR, \triangle CDN$: $\angle M = \angle R = \angle N = 180^\circ - 2 \cdot 65^\circ = 50^\circ$

Из $\triangle EQD$: $\angle Q = 180^\circ - 60^\circ - 65^\circ = 55^\circ$

Из $\triangle KEF$: $\angle K = 180^\circ - 60^\circ - 40^\circ = 80^\circ$

Из $\triangle PFA$: $\angle P = 180^\circ - 40^\circ - 65^\circ = 75^\circ$

Ответ:

$\angle P = 75^\circ, \angle Q = 55^\circ,$
 $\angle R = 50^\circ$
 $\angle M = \angle N = 50^\circ,$
 $\angle K = 80^\circ$

Ответ: 6 шагов.

Будем действовать так:

1) Создадим последовательность $Y = \{50, 50, \dots, 50\}$

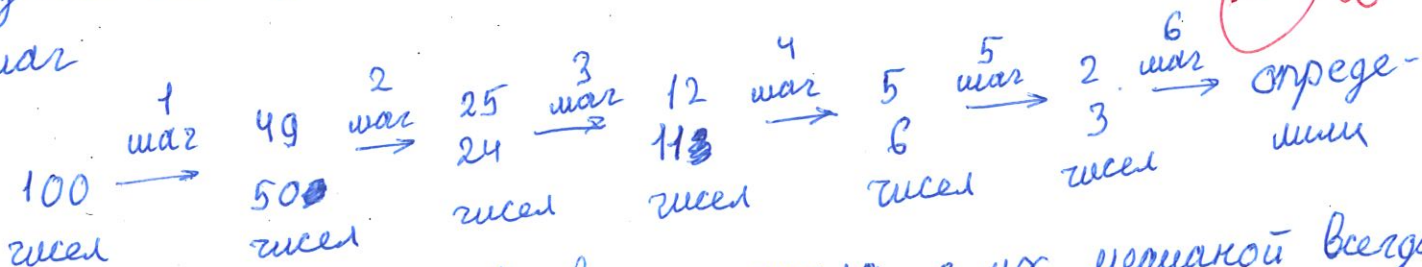
Так мы нашли число 50 и мысленно разделим последовательность X на 2 набора чисел ($< 50, > 50$)

2) Для этих 2-х наборов чисел повторим шаг (1) и сравним эти последоват. с последовательностями, состоящими из их медиан (для наших наборов это числа 25 и 75),

и получим 4е новых набора.

3) Повторяем шаг (1) до тех пор, пока не определим все числа.

Заметим, что когда новый набор состоит из ≤ 3 чисел, мы можем определить их за один шаг



Комментарий. Сравнивать числа с их медианой всегда (из набора)

выгоднее, чем с N другим числом, т.к. это позволяет локализовать так кол-во чисел (т.е. разбить на новые наборы)

Если n - число шагов, то условие $\Leftrightarrow \left\lceil \frac{100}{2^n} \right\rceil = 1$, т.е. $n_{\min} = 6$

$$\underbrace{\operatorname{arccctg} \frac{5x+3}{3x-5}}_{\alpha} + \underbrace{\operatorname{arccctg} \frac{x-1}{x+1}}_{\beta} = x$$

$$0 < \alpha, \beta \leq \pi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 < x < 2\pi$$

$$x \neq \frac{5}{3} \quad x \neq -1$$

$$\begin{cases} \operatorname{ctg} \alpha = \frac{5x+3}{3x-5} \\ 0 < \alpha < \pi \end{cases}$$

$$\begin{cases} \operatorname{ctg} \beta = \frac{x-1}{x+1} \\ 0 < \beta < \pi \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg}(\alpha + \beta) &= \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha + \beta)} = \\ &= \frac{\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta - 1}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta} \end{aligned}$$

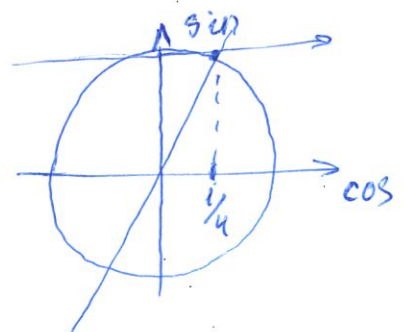
$$1) \frac{(5x+3)(x-1)}{(3x-5)(x+1)} - 1 = \operatorname{ctg} x$$

$$\frac{5x+3}{3x-5} + \frac{x-1}{x+1}$$

$$\frac{5x^2 - 2x - 3 - 3x^2 + 2x + 5}{5x^2 + 8x + 3 + 3x^2 - 8x + 5} = \operatorname{ctg} x \quad \left(\begin{array}{l} x \neq -1 \\ x \neq \frac{5}{3} \end{array} \right)$$

$$\frac{2x^2 + 2}{8x^2 + 8} = \operatorname{ctg} x; \quad \frac{2(x^2 + 1)}{8(x^2 + 1)} = \operatorname{ctg} x; \quad \operatorname{ctg} x = \frac{1}{4}$$

$$\operatorname{ctg} x = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \operatorname{arccctg} \frac{1}{4} + 2\pi k \\ x = \pi + \operatorname{arccctg} \frac{1}{4} + 2\pi k, \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$



2) Т.к. из условия ОДЗ:

$$0 < x < 2\pi$$

$$\begin{cases} x = \operatorname{arccctg} \frac{1}{4} \\ x = \pi + \operatorname{arccctg} \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\left(\operatorname{arccctg} \frac{1}{4} \neq \frac{3}{5}, \neq -1, \right. \\ \left. \pi + \operatorname{arccctg} \frac{1}{4} \neq \frac{3}{5}, \neq -1 \right)$$

$$\text{Ответ: } \operatorname{arccctg} \frac{1}{4}, \\ \pi + \operatorname{arccctg} \frac{1}{4}$$

$$\text{проверяет по ОДЗ: } \begin{cases} 0 < \alpha < \pi \\ 0 < \beta < \pi \end{cases}$$

Код участника: 114-740
(заполняется организатором)

$$f(x) = ax^4 + x^2 + x \quad \cdot \quad f(x) = g(x)$$

$$g(x) = kx + b$$

$$ax^4 + x^2 + x = kx + b$$

$$\cdot \quad f'(x) = g'(x)$$

$$4ax^3 + 2x + 1 - k = 0$$

ур-е имеет
2 различных
корня

1) По т. Виета для
кубич. многочлена:
(при $a \neq 0$)

$$x^3 + \frac{1}{2a}x + \frac{1-k}{4a} = 0$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{1}{2a} \\ x_1x_2x_3 = \frac{k-1}{4a} \end{cases}$$

Т.к. 2 точки касания,

$$x_1 = x_2 \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_3 = 0 \\ 2x_1^2 + x_1x_3 + x_1x_3 = \frac{1}{2a} \\ x_1^2x_3 = \frac{k-1}{4a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = -2x_1 \\ x_1^2 + 2x_1x_3 = \frac{1}{2a} \\ x_1^2x_3 = \frac{k-1}{4a} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = -2x_1 \\ 3x_1^2 = -\frac{1}{2a} \\ x_1^2x_3 = \frac{k-1}{4a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = -2x_1 \\ x_1^2 = -\frac{1}{6a} \\ x_3 = \frac{k-1}{2a} \cdot \left(-\frac{6a}{1}\right) \end{cases} \quad \left(\text{здесь считаем } x_1 > 0 \right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_3 = 3 - 3k \\ x_3 = -2x_1 \\ x_1 = \sqrt{-\frac{1}{6a}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \sqrt{-\frac{1}{6a}} \\ k = 1 - \frac{x_3}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \sqrt{-\frac{1}{6a}} \\ k = 1 + \frac{2}{3}\sqrt{-\frac{1}{6a}} \end{cases}$$

2 решения при $a < 0$

0 решений при $a > 0$

1 реш. при $a = 0$ (т.к. $x^2 + x = kx + b$)

Код участника: М44-749
(заполняется организатором)

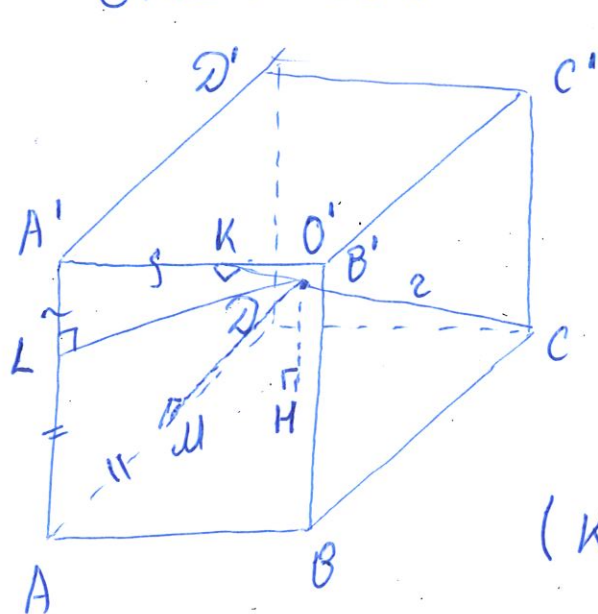
2) Найдём ур-е прямой

$$a \cdot \frac{1}{36a^2} = \frac{1}{6a} + \sqrt{\frac{1}{6a}} \left(-\frac{2}{3} \sqrt{-\frac{1}{6a}} \right) = b$$

$$-\frac{5}{36a} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{6a} = b; \quad b = -\frac{1}{36a}$$

$$y = \left(1 + \frac{2}{3} \sqrt{-\frac{1}{6a}} \right) x - \frac{1}{36a} \quad (x_1 > 0)$$

$$y = \left(1 - \frac{2}{3} \sqrt{-\frac{1}{6a}} \right) x - \frac{1}{36a} \quad (x_2 < 0)$$

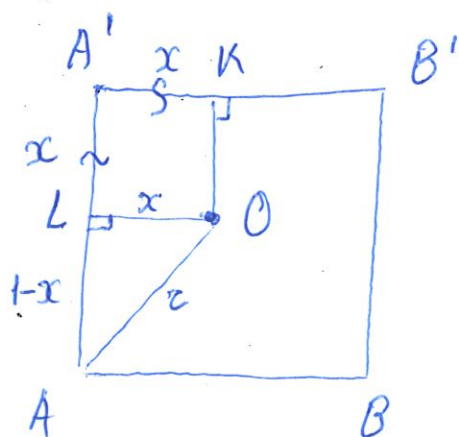
Ответ: $a \in (-\infty; 0)$. ~ 4
 O' - центр сферы O - проекция центра на $ABCD$ M - проекция центра сферы на AD $A'K = A'L$ (касательные) (K, L, M) - точки касания $A'B', AA', AD$ 1) Проекция на $ABCD$:

- $OK \perp A'B'$ по теореме о трёх перпендикулярах
- $OL \perp AA'$

- $AD \perp (ABCD) \Rightarrow O'M \parallel (ABCD)$

 $O'M \perp AD$

Тогда, т.к. A - образ т. M ,
 O - образ O' , то $AO = O'M = z$

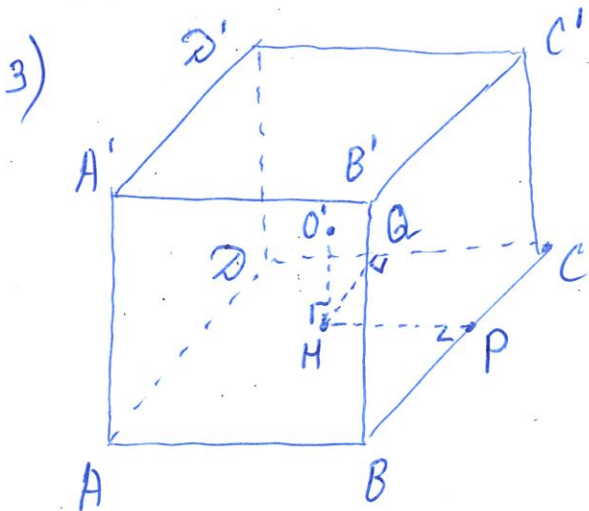


2) Т.к. $A'K = A'L$ и $\angle A'KO = \angle A'LO = \angle LA'K = 90^\circ$,
то $OK = OL = A'L = A'K = x$ (квадрат)

$B \triangle ALO:$

$$AO^2 = r^2 = x^2 + (1-x)^2$$

Тоже $A_M = A_L = 1 - x$



Пусть $MP \perp BC$
 $MQ \perp CD$

$$HQ = MD = 1 - AM = x$$

$$\left((DCC'D') \perp AD \text{ u. } (MO'M) \perp AD \right) \Rightarrow (DCC'D') \parallel (MO'M)$$

Аналогично,

$$MP = 1 - OL = 1 - x$$

$$^4 \quad O'H = 1 - OK = 1 - x$$

$$3) (O'C)^2 = z^2 = (O'H)^2 + (HP)^2 + (MQ)^2 = (1-x)^2 + (1-x)^2 + x^2$$

$$4) \begin{cases} z^2 = 2(1-x)^2 + x^2 \\ z^2 = x^2 + (1-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z^2 = x^2 + (1-x)^2 \\ (1-x)^2 = 0 \end{cases} \xrightarrow{z} \begin{cases} x = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

Answer: $n = 1$

$+1$

М11-372

Код участника
(заполняется организатором)



Олимпиадная работа

заключительного этапа

**«Всероссийская олимпиада школьников "Миссия
выполнима. Твоё призвание - финансист!" 2023-2024**

г.»

«(Математика 11 класс)»

Вариант № 2

«27 января 2024 г.»

Никакие другие записи на титульном листе делать не разрешается

Задание 3.

$$p(n) = \frac{(-3)^n}{3^n + 3^{17}} = \frac{(-1)^n}{3^{17-n} + 1} \quad (\text{разделим числитель и знаменатель на положительное } 3^n. (3^n > 0))$$

Заметим, что $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x+1} + \frac{x}{x+1} = \frac{x+1}{x+1} = 1$.

Тогда в сумме $\frac{(-1)^1}{3^{17-1}+1} + \frac{(-1)^2}{3^{17-2}+1} + \dots + \frac{(-1)^{32}}{3^{17-32}+1} + \frac{(-1)^{33}}{3^{17-33}+1} =$

$$= -\frac{1}{3^{16}+1} + \frac{1}{3^{15}+1} - \dots + \frac{1}{3^{15}+1} - \frac{1}{3^{16}+1} \quad \text{Найдутся симметричные}$$

относительно $p(17) = \frac{(-1)^{17}}{3^{17-17}+1} = -\frac{1}{2}$ (ему пары нет, поскольку $3^{17-17} = 3^{17+17} = 1$) пары вида $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+1}$: т.е., пары "первый - третий", "второй - третий второй", т.е. $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+1}$.

Т.е. сумма сгруппируется так:

$$-\left(\frac{1}{3^{16}+1} + \frac{1}{3^{16}+1}\right) + \left(\frac{1}{3^{15}+1} + \frac{1}{3^{15}+1}\right) + \dots + \left(\frac{1}{3^1+1} + \frac{1}{3^1+1}\right) + p(17) =$$

$$= -1 + 1 - 1 + \dots - 1 + 1 + p(17) = -\frac{1}{2}.$$

Ответ: $-\frac{1}{2}$.

Задание 1.

Оборачивая как во может, не говорящих по англ. $\bar{A}$, не говорящих по французски $\bar{\Phi}$. Тогда говорит:

- По-французски: $\bar{\Phi} = 0,04$. $\Rightarrow$ не по французски и не по англ. $0,96$
- По-английски: $\bar{A} = 0,2$. $\Rightarrow$ не по английски и не по фр.: $0,8$

$$\Rightarrow 0,96 \bar{A} = 0,8 \bar{\Phi} \Rightarrow \frac{\bar{\Phi}}{\bar{A}} = \frac{0,96}{0,8} = 1,2 \text{ раза} - \text{искомого отношения не говорящие по фр. не говорящие по англ.}$$

Ответ: 1,2 раза.

+ 10

Задача 5

(правая часть)

$$\arctg \frac{2x-1}{x+2} + \arctg \frac{x+3}{3x-1} = x.$$

$$\arctg x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \text{л.ч.} \in (-\pi; \pi) \Rightarrow x \in (-\pi; \pi).$$

(левая часть)

$$0.13: \begin{cases} x+2 \neq 0 \\ 3x-1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -2 \\ x \neq \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\operatorname{tg}(\arctg \frac{2x-1}{x+2} + \arctg \frac{x+3}{3x-1}) = \operatorname{tg} x.$$

$$\frac{\operatorname{tg}(\arctg \frac{2x-1}{x+2}) + \operatorname{tg}(\arctg \frac{x+3}{3x-1})}{1 - \operatorname{tg}(\arctg \frac{2x-1}{x+2}) \cdot \operatorname{tg}(\arctg \frac{x+3}{3x-1})} = \operatorname{tg} x.$$

$$\frac{\frac{2x-1}{x+2} + \frac{x+3}{3x-1}}{1 - \frac{2x-1}{x+2} \cdot \frac{x+3}{3x-1}} = \operatorname{tg} x.$$

Преобразуем левую часть.

$$\frac{\frac{2x-1}{x+2} + \frac{x+3}{3x-1}}{1 - \frac{2x-1}{x+2} \cdot \frac{x+3}{3x-1}} \stackrel{(\text{числ.})}{=} \frac{(2x-1)(3x-1) + (x+2)(x+3)}{(x+2)(3x-1) - (2x-1)(x+3)} = \frac{6x^2 - 5x + 1 + x^2 + 5x + 6}{3x^2 + 5x - 2 - 2x^2 - 5x + 3} =$$

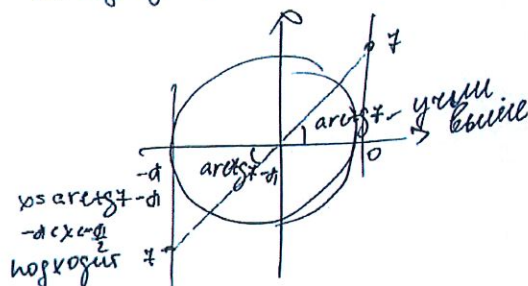
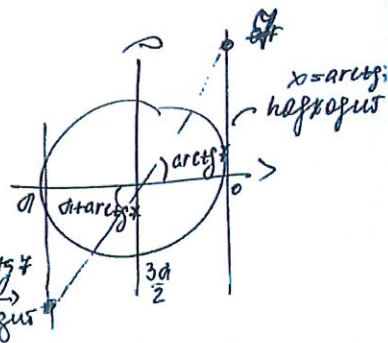
$$= \frac{7(x^2+1)}{x^2+1} = 7 = \text{правой части} = \operatorname{tg} x.$$

$$\operatorname{tg} x = 7 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \arctg 7 + \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x \in (-\pi; \pi) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \arctg 7 \\ x = \arctg 7 - \pi \end{cases}$$

Ответ: $x = \arctg 7$

$x = \arctg 7 - \pi$



12

МЛ-372

Код участника

Всероссийская олимпиада школьников «Миссия выполнима. Твое призвание – финансист!» 2023/2024 уч.г.

Бланк проверки работы

Математика 11 класс

№ задания	ФИО эксперта	Балл	ФИО эксперта	Балл	Итоговый балл
1	Амальцова	10	Гурьянов	10	10
2	Курсанов	10	Туздов	10	10
3	Иванова	12	Матюшков	12	12
4	Иванова	0	Матюшков	0	0
5	Крешер	12	Курсанов	12	12
6	Туздов	0	Олехов	0	0
7	Алипашев	3	Смакин	3	3
8	Крешер	0	Щакин	0	0
ИТОГО					47

Задача 2 $\max(A+B) = ?$ Обозначим $A+B=S$. Тогда

$$\begin{cases} 3A+5B \leq 11 \\ 4A+3B \leq 10 \\ 7A+4B \leq 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3S+2B \leq 11 \\ 4S-B \leq 10 \\ 4S-3B \leq 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S \leq -\frac{2}{3}B + \frac{11}{3} \\ S \leq \frac{B}{4} + \frac{5}{2} \\ S \leq \frac{3}{7}B + \frac{18}{7} \end{cases}$$

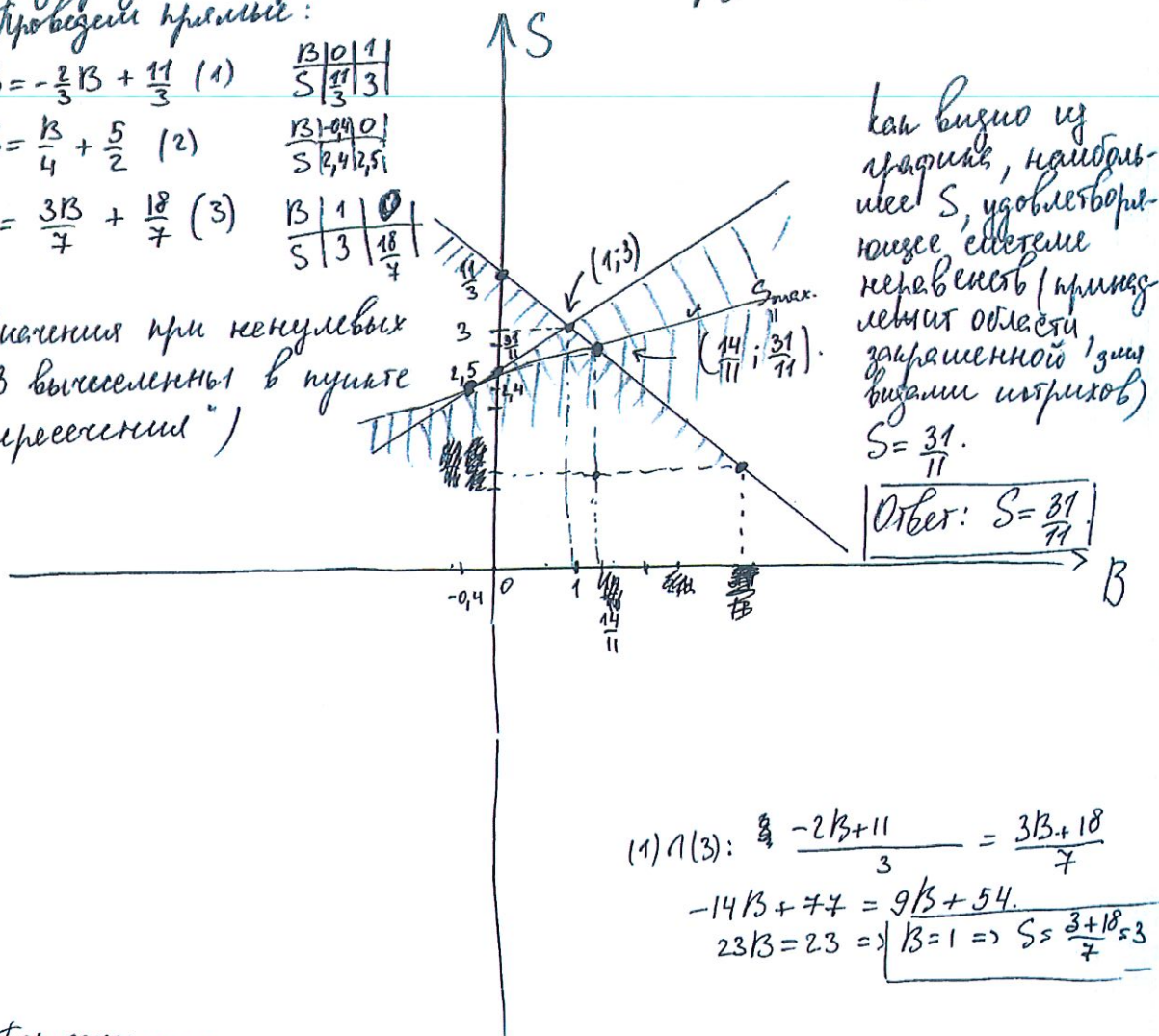
Изобразим неравенства в осях координат BOA .
Проведем прямые:

$$S = -\frac{2}{3}B + \frac{11}{3} \quad (1) \quad \begin{array}{c|c|c} B & 0 & 11/3 \\ \hline S & 11/3 & 0 \end{array}$$

$$S = \frac{B}{4} + \frac{5}{2} \quad (2) \quad \begin{array}{c|c|c} B & 0 & 10 \\ \hline S & 2,5 & 5 \end{array}$$

$$S = \frac{3B}{7} + \frac{18}{7} \quad (3) \quad \begin{array}{c|c|c} B & 0 & 18/7 \\ \hline S & 18/7 & 0 \end{array}$$

(Значения при ненулевых B вычислены в пункте «пересечения»)



$$\begin{aligned} (1) \cap (3): \quad & -\frac{2}{3}B + \frac{11}{3} = \frac{3B}{7} + \frac{18}{7} \\ & -14B + 77 = 9B + 54 \\ & 23B = 23 \Rightarrow B = 1 \Rightarrow S = \frac{3+18}{7} = 3 \end{aligned}$$

Пересечения:

$$\begin{aligned} (1) \cap (2): \quad & -\frac{2}{3}B + \frac{11}{3} = \frac{B}{4} + \frac{5}{2} \\ & -8B + 44 = 3B + 30 \\ & 11B = 14 \Rightarrow B = \frac{14}{11} \Rightarrow S = \frac{14}{11} + \frac{10}{4} = \frac{31}{11} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \cap (3): \quad & \frac{B}{4} + \frac{5}{2} = \frac{3B}{7} + \frac{18}{7} \\ & 7B + 70 = 12B + 72 \\ & 5B = -2 \\ & B = -0,4 \Rightarrow S = \frac{-0,4}{4} + \frac{10}{2} = 2,4 \end{aligned}$$

10

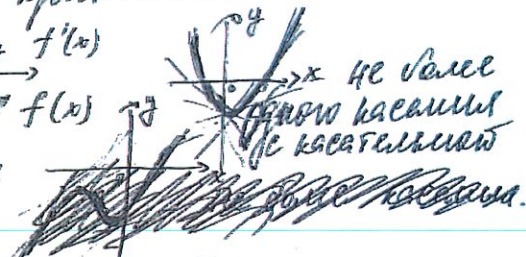
Задача 9.

$$f(x) = x^4 + bx^2 + x$$

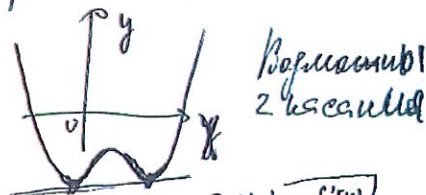
$f'(x) = 4x^3 + 2bx + 1$ – уравнение третьей степени $\Rightarrow$ не более трех корней критических точек.

Пусть корней один, тогда $\begin{matrix} - & + \\ x_1 & f'(x) \end{matrix}$

Пусть корней два: $\begin{matrix} - & + & - \\ x_1 & x_2 & f'(x) \end{matrix}$
один из них не является экстремумом, т.к. касательная не горизонтальна.
корни уравнения с разн. знаками – сопряженные.



Пусть корней три: $\begin{matrix} - & + & - & + \\ x_1 & x_2 & x_3 & f'(x) \end{matrix}$

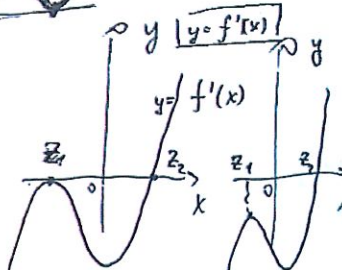


Выходит, экстремум возможен только тогда, когда производная имеет 3 корня.

Т.е. нам нужно исключить случаи:

1) первый максимум не выше оси OX :

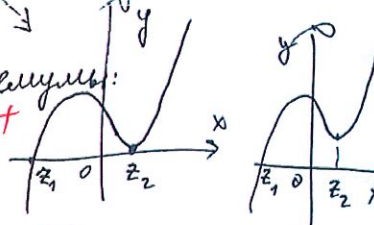
2) второй максимум ниже оси OX :



Возьмем вторую производную и найдем экстремумы:

$$f''(x) = 12x^2 + 2b = 0 \Rightarrow x^2 = -\frac{b}{6}$$

$$x = \pm \sqrt{-\frac{b}{6}} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\sqrt{-\frac{b}{6}} \\ x_2 = +\sqrt{-\frac{b}{6}} \end{cases}$$



Тогда перегиба.

подставляем x_1 и x_2 в (1) и (2):

$$\Rightarrow \begin{cases} f'(x_1) > 0 \\ f'(x_2) < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4\left(\sqrt{-\frac{b}{6}}\right)^3 + 2b\sqrt{-\frac{b}{6}} + 1 > 0 \\ 4\left(\sqrt{-\frac{b}{6}}\right)^3 + 2b\sqrt{-\frac{b}{6}} + 1 < 0 \end{cases}$$

$$(a): \frac{4b}{6}\sqrt{-\frac{b}{6}} - 2b\sqrt{-\frac{b}{6}} + 1 > 0$$

$$\frac{4}{3}b\sqrt{-\frac{b}{6}} < 1$$

$$b\sqrt{-\frac{b}{6}} < \frac{3}{4}$$

б квадрат (знак не важен, т.к. $b < 0$)

$$\frac{b^2 \cdot (-b)}{3 \cdot 6} < \frac{9}{16} \Rightarrow \left| b^3 - \frac{27}{8} \right|$$

$$(b): -\frac{4b}{6}\sqrt{-\frac{b}{6}} + 2b\sqrt{-\frac{b}{6}} + 1 < 0$$

$$-\frac{4b}{3}\sqrt{-\frac{b}{6}} < 1$$

$$-\frac{4b}{3}\sqrt{-\frac{b}{6}} < 1$$

$$\frac{4b}{3}\sqrt{-\frac{b}{6}} > 1 \Rightarrow \left| b^3 - \frac{27}{8} \right|$$

1 мая 4

$$\begin{cases} (a) \\ (b) \end{cases} \Rightarrow b^3 - \frac{27}{8} \Rightarrow b < \sqrt[3]{\frac{27}{8}} = -\frac{3}{2}.$$

$$\boxed{b < -\frac{3}{2}}$$

$x^4 + bx^2 + x = kx + c$ — касание с прямой. $y = kx + c$.

$x^4 + bx^2 - x(k-1) - c = 0$ — корни x_1 и x_2 . ($x_1 < x_2$).

$k = f'(x_1) = f'(x_2)$ — у прямой один укл. коэф.

$$4x_1^3 + 2bx_1 + 1 = 4x_2^3 + 2bx_2 + 1 \Rightarrow 4x_1^3 + 2bx_1 + 1 = 4x_2^3 + 2bx_2 + 1$$

$$(x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 - 2b) = 0$$

$$(x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 - 2b) = 0.$$

П.к. корни не равны ($x_1 \neq x_2$), то $x_1 - x_2 \neq 0 \Rightarrow x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 - 2b$

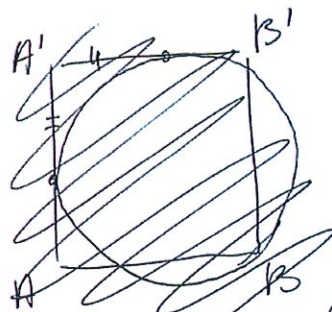
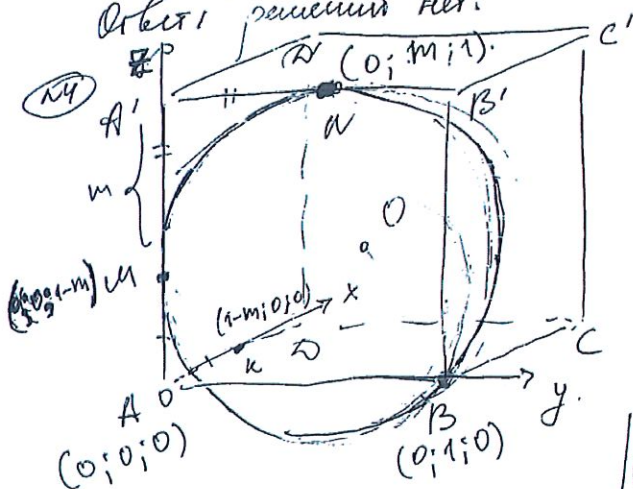
Решим отн-но x_2 : $D \geq x_1^2 - 4x_1^2 + 8b = -3x_1^2 + 8b \geq 0$

$-3x_1^2 + 8b \geq 0$ — т.е. есть корни, однако $-3x_1^2 \leq 0$ и $8b \leq 0$ — противоречие.

$$(b < -\frac{3}{2}).$$

Значит, такого касания нет.

Ответ: решений нет.



Пусть центр сфер-ты $O(x_0, y_0, z_0)$.

$R^2 = ON^2 = OM^2 = OB^2 = OK^2$ радиус

$$x_0^2 + (y_0 - 1)^2 + z_0^2 = R^2 \quad (1)$$

$$(x_0 - \frac{1}{2} + m)^2 + y_0^2 + z_0^2 = R^2 \quad (2)$$

$$x_0^2 + y_0^2 + (z_0 + m - 1)^2 = R^2 \quad (3)$$

$$x_0^2 + (y_0 - m)^2 + (z_0 - 1)^2 = R^2 \quad (4)$$

$$(1) \wedge (2) \Rightarrow x_0^2 + (y_0 - 1)^2 = (x_0 - \frac{1}{2} + m)^2 + y_0^2$$

$$-2y_0 + 1 = -2x_0 + 2x_0m - 2m + 1 + m^2$$

$$m^2 = 2m(1 - x_0) - 2(x_0 - y_0) = 0. \quad (I)$$

или

Код участника:

(заполняется организатором)

M11-372

Продолжение №4.

$$(1)=(3): \cancel{x_0^2 + y_0^2 - 2y_0 + 1 + z_0^2} = \cancel{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 + m^2 + 1 - 2m + 2mz_0 - z_0^2}$$

$$\Rightarrow \cancel{m^2} - 2m(\cancel{1} - z_0) - 2(z_0 - y_0) = 0 \Rightarrow$$

$$= (I) \Rightarrow m^2 - 2m(1 - x_0) - 2(x_0 - y_0) = 0.$$

$$(2)=(3) \text{ Аналогично: } m^2 - 2m(1 - y_0) - 2(2y_0 - z_0) = 0.$$

$$\sim x_0 = y_0 = z_0 = t$$

$$\Rightarrow m^2 - 2m(1 - t) = 0.$$

$$m(m - 2 + 2t) = 0 \quad m \neq 0 \Rightarrow \boxed{m = 2 - 2t}.$$

$$t^2 + (t - 2 + 2t)^2 + (t - 1)^2 = 2t^2 + (2 - t)^2 = R^2.$$

$$2t^2 + 4 + 4t^2 + 4t^2 - 8t + 2$$

№6 отс

№8 уб

Мяг

М 11-086

Код участника
(заполняется организатором)



Олимпиадная работа
заключительного этапа
«Всероссийская олимпиада школьников "Миссия
выполнима. Твоё призвание - финансист!" 2023-2024
г.»
«(Математика 11 класс)»

Вариант № 2 (второй)

«27 января 2024 г.»

Никакие другие записи на титульном листе делать не разрешается

М11-096

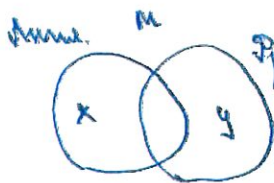
Код участника

Всероссийская олимпиада школьников «Миссия выполнима. Твое призвание – финансист!» 2023/2024 уч.г.

Бланк проверки работы

Математика 11 класс

№ задания	ФИО эксперта	Балл	ФИО эксперта	Балл	Итоговый балл
1	Басманов	10	Гурьев	10	10
2	Тюлькин	10	Зеленков	10	10
3	Кривер	12	Иванова	12	12
4	Матвеев	0	Иванов	0	0
5	Кривер	12	Семанов	12	12
6	Трудов	3	Олегов	3	3
7	Анатолий	0	Семанов	0	0
8	Климов	0	Цыган	0	0
ИТОГО					47



$N1$
 m людей m говорят на обоих языках.
 Пусть x - кол-во людей, которые говорят только на англ. яз (не говорят на франц. яз.), y - кол-во людей, которые говорят только на франц. яз (не говорят на англ. яз.).
 Тогда $(m+x)$ - кол-во людей, не говор. по франц. Среди них x говорят по англ.
 $(m+y)$ - кол-во людей, не говор. по англ. Среди них y говорят по франц.

$$\begin{cases} 0,04(m+y) = y \\ 0,2(m+x) = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m+y = 25y \\ m+x = 5x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 24y \\ m = 4x \end{cases} \quad \begin{cases} 24y = 4x \\ 6y = x \end{cases}$$

$$\frac{m+x}{m+y} = \frac{5x}{25y} = \frac{5 \cdot 6y}{25y} = \frac{6}{5} = 1,2$$

Ответ: $6 \frac{6}{5}$ раз. + 105.

$N2$

$$\begin{cases} I: 3A + 5B \leq 11 \\ II: 4A + 3B \leq 10 \\ III: 2A + 4B \leq 12 \end{cases}$$

Данная система II неравенств на 2 и можно с I .

$$\begin{cases} 3A + 5B \leq 11 \\ 4A + 3B \leq 10 \\ 2A + 4B \leq 12 \end{cases} \Rightarrow 11(A+B) \leq 31 \Rightarrow \boxed{A+B \leq \frac{31}{11}}$$

Пусть $A = \frac{17}{11}$, $B = \frac{14}{11}$; тогда все 3 неравенства выполняются и граница-линия оценок:

$$\begin{cases} \frac{51+20}{11} \leq \frac{121}{11} \\ \frac{68+42}{11} \leq \frac{110}{11} \\ \frac{110+56}{11} \leq \frac{198}{11} \end{cases}$$

Ответ: $31/11$.

$N3$

$p(n) = \frac{(-3)^n}{3^n + 3^{17}}$. Для чисел n заметим, что:

$$p(n) + p(34-n) = \frac{(-3)^n}{3^n + 3^{17}} + \frac{(-3)^{34-n}}{3^{34-n} + 3^{17}} = \frac{3^n (3^{34-n} + 3^{17}) + 3^{34-n} (3^n + 3^{17})}{(3^n + 3^{17})(3^{34-n} + 3^{17})} =$$

$$= \frac{3^{34} + 3^{n+17} + 3^{34} + 3^{51-n}}{3^{34} + 3^{34-n} + 3^{n+17} + 3^{34}} = 1, \text{ т.к. } n \equiv 0, 34-n \equiv 0, (-3)^n = 3^n, (-3)^{34-n} = 3^{34-n}$$

Для нечетных n : $n \equiv 1, 34-n \equiv 1, (-3)^n = -3^n, (-3)^{34-n} = -3^{34-n}$.

Аналогично, $p(n) + p(34-n) = \frac{-3^n (3^{34-n} + 3^{17}) - 3^{34-n} (3^n + 3^{17})}{(3^n + 3^{17})(3^{34-n} + 3^{17})} = -1$

Знаем, $p(1) + p(33) = 1 - 1$, $p(1) + p(32) = 1 \dots$

$$p(1) + p(2) + \dots + p(33) = 15 \cdot (-1) + 15 \cdot 1 + p(17) = 0 + \frac{-3^{17}}{2 \cdot 3^{17}} = -\frac{1}{2}$$

Ответ: $-\frac{1}{2}$.

arctg $\frac{2x-1}{x+2} + \text{arctg} \frac{x+3}{3x-1} = x$.

N 5

$\text{arctg} x \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$.

$\text{tg}(\text{arctg} \frac{2x-1}{x+2} + \text{arctg} \frac{x+3}{3x-1}) = \text{tg} x$

$-\pi < x < \pi$

$$\frac{\frac{2x-1}{x+2} + \frac{x+3}{3x-1}}{1 - \frac{(2x-1)(x+3)}{(x+2)(3x-1)}} = \text{tg} x$$

$$\frac{6x^2 - 5x + 1 + x^2 + 5x + 6}{(x+2)(3x-1)} = \text{tg} x$$

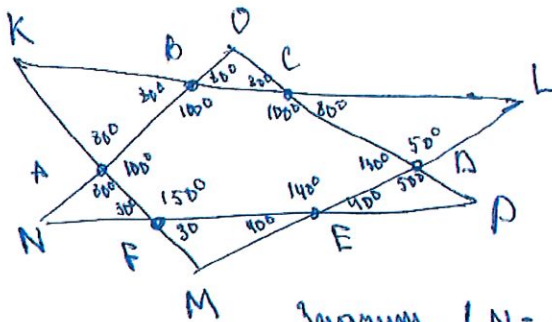
$$\frac{7x^2 + 7}{(x+2)(3x-1)} = \text{tg} x$$

$\text{tg} x = 7 \Rightarrow \begin{cases} x = \text{arctg} 7 \\ x = \text{arctg}(7) - \pi \end{cases}$

(12)

Ответ: $x = \text{arctg} 7$, $x = \text{arctg}(7) - \pi$.

N 6



$\angle EFM = \angle AFN = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$

$\angle NAF = \angle KAB = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$

аналогично $\angle OBC = \angle KBA = 30^\circ$

$\angle OCB = \angle LCD = 30^\circ$

$\angle LDC = \angle EOP = 50^\circ$

$\angle FEM = \angle DEP = 40^\circ$

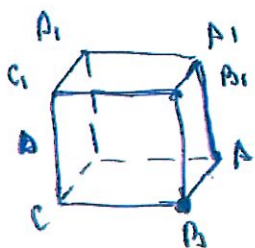
Знаем, $\angle N = 180^\circ - 100^\circ - 30^\circ = 50^\circ$, аналогично $\angle K = 20^\circ$

$\angle O = 20^\circ$, $\angle L = 50^\circ$, $\angle P = 50^\circ$, $\angle M = 110^\circ$

Итак 2 круга: $(20^\circ; 50^\circ; 110^\circ)$; $(80^\circ; 20^\circ; 70^\circ)$.

Вар решит - 3✓

N 4



П.р. сфера касается AD , AA' , $A'B'$, $\dots$ и проходит через M, B , но $\dots$ центр сферы равноудален от точек A, B, C, D .

О.Б. нет решения

Бланк ответа

Всероссийская олимпиада школьников «Миссия выполнима. Твое призвание – финансист!»

Код участника:

(заполняется организатором)

МН-096

$C_{100}^3 = \frac{100 \cdot 99 \cdot 98}{6}$ — только тогда дадим X, Y, Z, не учитывая
порядок. Всего возможных сочетаний 100!.

⊖ все реш. OK

н.т. реш.

М11-398
Код участника
(заполняется организатором)



**Олимпиадная работа
заключительного этапа
«Всероссийская олимпиада школьников "Миссия
выполнима. Твоё призвание - финансист!" 2023-2024
г.»
«(Математика 11 класс)»**

Вариант № 2

«27 января 2024 г.»

Никакие другие записи на титульном листе делать не разрешается

411-398.

Код участника

Всероссийская олимпиада школьников «Миссия выполнима. Твое призвание – финансист!» 2023/2024 уч.г.

Бланк проверки работы

Математика 11 класс

№ задания	ФИО эксперта	Балл	ФИО эксперта	Балл	Итоговый балл
1	Ананидзе	10	Гурьянова	10	10
2	Тоздеев	10	Ананидзе	10	10
3	Иванова	12	Магомедов	12	12
4	Иванова	0	Магомедов	0	0
5	Уризов	12	Валимова	12	12
6	Григорьев	3	Орехов	3	3
7	Алиагачев	0	Стаматов	0	0
8	Григорьев	0	Шауков	0	0
ИТОГО					47

$$p(n) = \frac{(-3)^n}{3^n + 3^{17}}$$

~ 3

№8 ил

$$p(1) + p(2) + p(3) + \dots + p(33) = ?$$

Будем складывать первый с последним, второй с предпоследним и т.д. Тогда пусть $k \in [1; 16]$

k принадлежит множеству чётных чисел k -член, тогда $p(k) + p(34-k) = \frac{-3^k}{3^k + 3^{17}} + \frac{-3^{34-k}}{3^{34-k} + 3^{17}} =$

$$= \frac{-1^k \cdot 3^k}{3^k + 3^{17}} + \frac{-1^{34-k} \cdot 3^{34-k}}{3^{34-k} + 3^{17}} = \frac{-1^k}{1 + 3^{17-k}} + \frac{-1^{34-k} \cdot 3^{17-k}}{3^{17-k} + 1} =$$

$$= \frac{-1^k + (-1)^{34-k} \cdot 3^{17-k}}{1 + 3^{17-k}}$$

При чётных значениях

k получим $\frac{1 + 3^{17-k}}{1 + 3^{17-k}} = 1$. При нечётных значениях k получим $\frac{-1 - 3^{17-k}}{1 + 3^{17-k}} = -1$. Всего

таких пар 16. Из них 8 пар даёт 1 и 8 даёт -1, а в сумме даёт 0. Тогда $p(1) + p(2) + p(3) + \dots + p(33) = (p(1) + p(33)) + (p(2) + p(32)) + \dots + (p(16) + p(18)) + p(17) = -1 + 1 + \dots + p(17) = p(17)$

$$p(17) = \frac{3^{17}}{3^{17} + 3^{17}} = -\frac{1}{2}$$

Ответ: $-\frac{1}{2}$.

~ 5 $\arctg \frac{2x-1}{x+2} + \arctg \frac{x+3}{3x-1} = x$

т.к. $\arctg t \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) \Rightarrow$ правая часть уравнения $x \in (-\pi; \pi)$, при этом $x \neq 2$, $x \neq \frac{1}{3}$

тайдём $\arctg$ от обеих частей уравнения

$$\arctg \left(\frac{2x-1}{x+2} \right) + \arctg \left(\frac{x+3}{3x-1} \right) = \arctg x$$

По формуле tg суммы левая часть:

$$\begin{aligned} & \frac{\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{2x-1}{x+2}\right)\right) + \operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{x+3}{3x-1}\right)\right)}{1 - \operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{2x-1}{x+2}\right)\right) \cdot \operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{x+3}{3x-1}\right)\right)} = \\ & = \frac{\frac{2x-1}{x+2} + \frac{x+3}{3x-1}}{1 - \frac{2x-1}{x+2} \cdot \frac{x+3}{3x-1}} = \frac{6x^2 - 3x - 2x + 1 + x^2 + 2x + 3x + 6}{3x^2 + 6x - x - 2 - 2x^2 - 6x + x + 3} = \\ & = \frac{7x^2 + 7}{x^2 + 1} = 7, \text{ тогда } \operatorname{tg} x = 7 \Rightarrow x = \operatorname{arctg} 7 + \pi k. \end{aligned}$$

$k \in \mathbb{Z}$. В учетом ограничений $x = \operatorname{arctg} 7$
 $x = -\pi + \operatorname{arctg} 7$.

Ответ: $x = \operatorname{arctg} 7$

$x = -\pi + \operatorname{arctg} 7$.

и 2.

~~Возьмем~~ (

$$3A + 5B \leq 11$$

$$4A + 3B \leq 10$$

$$7A + 4B \leq 18.$$

Возьмем (1) и (2) неравенства, второе умножим на 9 и сложим с первым, получим $11A + 11B \leq 31 \Rightarrow A+B \leq \frac{31}{11}$ 10
 При этом точки пересечения прямых $3x + 5y = 11$
 и $4x + 3y = 10$, имеют координаты $x = \frac{17}{11}$; $y = \frac{14}{11}$

то есть равенство достигается при $A = \frac{17}{11}$, $B = \frac{14}{11}$,
данные значения A и B удовлетворяют
3 неравенству $\Rightarrow 7 \cdot \frac{17}{11} + 4 \cdot \frac{14}{11} \leq 18$. Поэтому
 $A+B \leq \frac{31}{11}$ и максимальное значение
достигается при $A = \frac{17}{11}$, $B = \frac{14}{11} \Rightarrow A+B = \frac{17}{11} + \frac{14}{11} = \frac{31}{11}$
Ответ: $\frac{31}{11}$

~ 1.

Пусть d - число говорящих по-английски и
по-французски, b - число говорящих по-английски,
но не по-французски. f - число говорящих
по-французски, но не по-английски, t - число
говорящих ни по-английски, ни по-французски.

Из условия  $\frac{f}{f+t} = 0,04$.

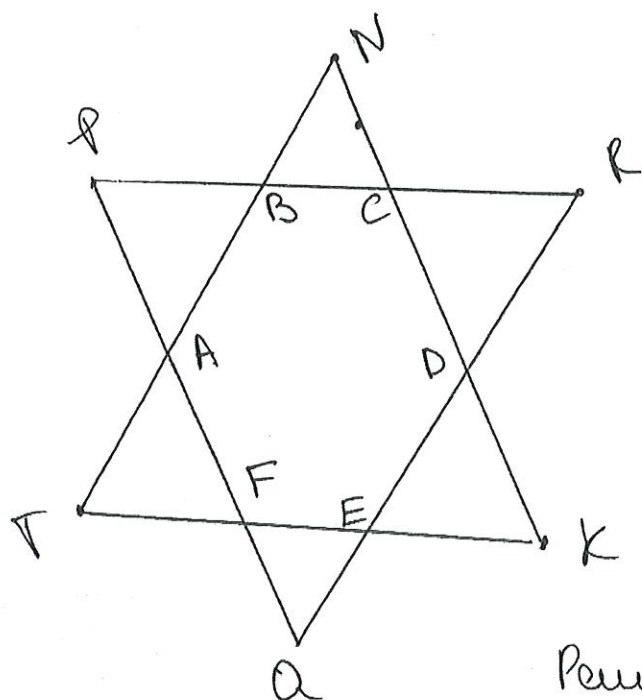
$\frac{b}{b+t} = 0,2$: Поэтому : $\begin{cases} \frac{f}{f+t} = 1,25 \\ \frac{b}{b+t} = 1,5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 25f = f+t \\ 5b = b+t \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} t = 24f \\ t = 4b \end{cases} \Rightarrow b = 6f$. Нужно найти:

$$\frac{b+t}{f+t} = \frac{b+4b}{f+24f} = \frac{5b}{25f} = \frac{b}{5f} = \frac{6f}{5f} = 1,2$$

Ответ: b 1,2 раза + (105)

№ 6



Дано:

АВЕРЕЕ = шестиугольник
 $\angle A = \angle B = \angle C = 100^\circ$
 $\angle D = 130^\circ$
 $\angle E = 140^\circ$
 $\angle F = 150^\circ$

Найти: $\angle ?$

Решение

Обозначим пересекающиеся треугольники за $\triangle TNK$ и $\triangle PRA$, они пересекаются по шестиугольнику так, что $PQ \cap TN = A$, $PR \cap TN = B$, $PR \cap NK = C$, $NK \cap RQ = D$, $TN \cap RQ = E$, $TN \cap PQ = F$

Г.к сумма углов в сумме дают 180° и сумма углов в треугольнике 180° , тогда $\angle PBA = \angle NBC = 80^\circ$, $\angle PAB = \angle TAF = 80^\circ$, $\angle NCB = \angle RCD = 80^\circ$, $\angle RDC = \angle KDE = 50^\circ$, $\angle KEP = \angle QEF = 40^\circ$, $\angle QFE = \angle TFA = 30^\circ$, тогда $\angle P = 20^\circ$, $\angle N = 20^\circ$, $\angle R = 50^\circ$, $\angle K = 30^\circ$, $\angle Q = 110^\circ$, $\angle T = 75^\circ$.

Сумма углов $\triangle PRA = 20^\circ + 50^\circ + 110^\circ = 180^\circ$ - существует.

Сумма углов $\triangle TNK = 20^\circ + 70^\circ + 30^\circ = 120^\circ$ - существует.

Ответ: $\triangle PRA: 20^\circ, 50^\circ, 110^\circ$; $\triangle TNK: 20^\circ, 70^\circ, 30^\circ$.

1 шаг реш - 3/

№ 4 нег

М11-855

Код участника
(заполняется организатором)



**Олимпиадная работа
заключительного этапа
«Всероссийская олимпиада школьников "Миссия
выполнима. Твоё призвание - финансист!" 2023-2024
г.»
«(Математика 11 класс)»**

Вариант № 2 (второй)

«27 января 2024 г.»

Никакие другие записи на титульном листе делать не разрешается

Задание 1.

Пусть по-английски говорят x человек, по-французски говорят y человек, а n человек всего
(x – англ, y – франц, n – всего)

Тогда по условию задачи:

$$\begin{cases} (n-x) \cdot 0,04 = y, & \text{где } (n-x) - \text{количество людей, не говорящих по-английски} \\ (n-y) \cdot 0,2 = x, & \text{где } (n-y) - \text{количество людей, не говорящих по-французски} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4(n-x) = 100y \\ 2(n-y) = 10x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n-x = 25y \\ n-y = 5x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y-x = 25y-5x \\ n-y = 5x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x = 24y \\ n-y = 5x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 6y \\ n = y + 5 \cdot 6y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 6y \\ n = 31y \end{cases}$$

Пусть нас просят найти число k . Тогда оно должно удовлетворять уравнению: $n-y = k(n-x)$

Подставим найденные значения для x и n в это уравнение:

$$31y - y = k(31y - 6y)$$

$$30y = 25yk$$

$$k = \frac{30}{25} = \frac{6}{5} = 1,2$$

Ответ: в 1,2 раза + 100.

Задание 2

$$\begin{cases} 3A + 5B \leq 11 \\ 4A + 3B \leq 10 \\ 7A + 4B \leq 18 \end{cases}$$

1) Сложим все ур-я и получим следствие №1

$$14A + 12B \leq 39$$

2) Вычтем из 5 ур-я 2 ур-е и получим следствие №2

$$3A + B \leq 8$$

3) Вычтем из следствия №1 следствие №2 и получим:

$$11A + 11B \leq 31$$

$$\boxed{A + B \leq \frac{31}{11}}$$

$$\text{Равенство выполняется при } A = \frac{17}{11} \text{ и } B = \frac{14}{11} : \begin{cases} 3 \cdot \frac{17}{11} + 5 \cdot \frac{14}{11} \leq 11 \\ 4 \cdot \frac{17}{11} + 3 \cdot \frac{14}{11} \leq 10 \\ 7 \cdot \frac{17}{11} + 4 \cdot \frac{14}{11} \leq 18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{51+70}{11} \leq 11 \\ \frac{68+42}{11} \leq 10 \\ \frac{119+56}{11} \leq 18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 11 \leq 11 \\ 10 \leq 10 \\ 15 \leq 18 \end{cases}$$

Ответ: $\frac{31}{11}$

Задача 3

Докажем, что $p(n) + p(34-n) = (-1)^n$:

$$\begin{aligned} p(n) + p(34-n) &= \frac{(-3)^n}{3^n + 3^{17}} + \frac{(-3)^{34-n}}{3^{34-n} + 3^{17}} = (-1)^n \left(\frac{3^n}{3^n(1 + 3^{17-n})} + \frac{3^{34-n}}{3^{17}(3^{17-n} + 1)} \right) = \\ &= (-1)^n \left(\frac{3^{17} + 3^{34-n}}{3^{17}(3^{17-n} + 1)} \right) = (-1)^n \left(\frac{\cancel{3^{17}}(1 + 3^{17-n})}{3^{17}(\cancel{3^{17-n}} + 1)} \right) = (-1)^n \quad \text{что и требовалось} \end{aligned}$$

Сгруппируем сумму, которую нужно найти:

$$\begin{aligned} p(1) + p(2) + p(3) + \dots + p(32) + p(33) &= (p(1) + p(33)) + (p(2) + p(32)) + (p(3) + p(31)) + \dots + \\ &+ (p(14) + p(20)) + (p(15) + p(19)) + (p(16) + p(18)) + p(17) = \\ &= \underbrace{(p(1) + p(34-1))}_{(-1)^1} + \underbrace{(p(2) + p(34-2))}_{(-1)^2} + \dots + \underbrace{(p(16) + p(34-16))}_{(-1)^{16}} + p(17) = \\ &= (-1)^1 + (-1)^2 + \dots + (-1)^{16} + p(17) = \\ &= p(17) = \frac{(-3)^{17}}{3^{17} + 3^{17}} = -\frac{3^{17}}{2 \cdot 3^{17}} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Ответ: $-\frac{1}{2}$

Задача 5

$$\arctg \frac{2x-1}{x+2} + \arctg \frac{x+3}{3x-1} = x$$

Ограничения на x :

$$\begin{cases} x \neq -2 \\ x \neq \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$x \in (-\pi; \pi) \text{ так как } \arctg \frac{2x-1}{x+2} \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \text{ и } \arctg \frac{x+3}{3x-1} \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\pi < \left(\arctg \frac{2x-1}{x+2} + \arctg \frac{x+3}{3x-1} \right) < \pi$$

$$\boxed{-\pi < x < \pi}$$

$$\operatorname{arctg} \frac{2x-1}{x+2} + \operatorname{arctg} \frac{x+3}{3x-1} = x \quad | \operatorname{tg}(\dots)$$

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} \frac{2x-1}{x+2} + \operatorname{arctg} \frac{x+3}{3x-1}) = \operatorname{tg} x$$

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} \frac{2x-1}{x+2}) + \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} \frac{x+3}{3x-1})$$

$$1 - \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} \frac{2x-1}{x+2}) \cdot \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} \frac{x+3}{3x-1}) = \operatorname{tg} x$$

$$\frac{\frac{2x-1}{x+2} + \frac{x+3}{3x-1}}{1 - \frac{2x-1}{x+2} \cdot \frac{x+3}{3x-1}} = \operatorname{tg} x ; \frac{6x^2 - 5x + 1 + x^2 + 8x + 6}{3x^2 + 5x - 2 - 2x^2 - 5x + 3} = \operatorname{tg} x$$

$$\frac{x^2 + 1}{x^2 + 1} = \operatorname{tg} x ; \operatorname{tg} x = x ; \begin{cases} x = \operatorname{arctg} x \\ x = \operatorname{arctg}(x) - \pi \end{cases}$$

Если $x = \operatorname{arctg} x$, то можно выписать $0 < \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{x+2} + \operatorname{arctg} \frac{x+3}{3x-1} < \frac{\pi}{2}$.

$$\operatorname{arctg} x > \operatorname{arctg} \sqrt{3} = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \frac{2x-1}{x+2} = 2 - \frac{5}{x+2} = 2 - \frac{5}{\operatorname{arctg}(x)+2} > 2 - \frac{5}{\frac{\pi}{3} + 2}$$

$$\frac{2x-1}{x+2} > 2 - \frac{15}{\pi+6} > 0. \Rightarrow \text{неравенство выполняется}$$

Тогда $x = \operatorname{arctg} x$ — корень.

Если $x = \operatorname{arctg} x - \pi$, $x \in (-\pi; -\frac{\pi}{2}) \Rightarrow -\pi < \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{x+2} + \operatorname{arctg} \frac{x+3}{3x-1} < -\frac{\pi}{2}$.

$$\operatorname{arctg}(x) - \pi \geq \operatorname{arctg} \sqrt{3} - \pi = \frac{\pi}{3} - \pi = -\frac{2\pi}{3} \Rightarrow \frac{2x-1}{x+2} = 2 - \frac{5}{\operatorname{arctg}(x) - \pi + 2} \geq 2 - \frac{5}{-\frac{\pi}{3} - \frac{2\pi}{3}}$$

$$\frac{2x-1}{x+2} \geq 2 - \frac{15}{6-2\pi} > 2. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{x+2} < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \text{Даже если}$$

$\operatorname{arctg} \frac{x+3}{3x-1}$ примет минимальное

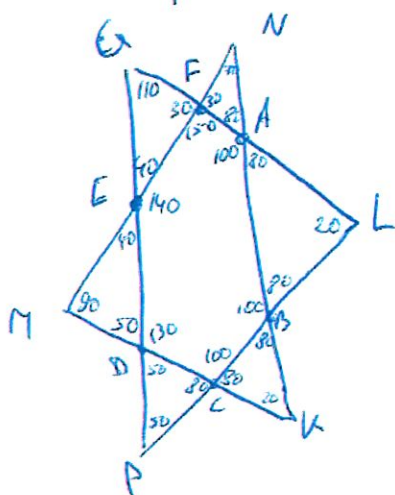
значение, то их сумма не сможет быть в той же координатной системе на отрицательной окружности, что и $\operatorname{arctg}(x) - \pi$.

Откуда можно сделать вывод, что $x = \arctg(7)$ - и не будет являться решением.

Ответ: $\arctg 7$.

Задание 6

Два треугольника могут пересекаться по 6-угольнику только если каждая сторона одного Δ пересекается с двумя сторонами другого Δ .



Пусть первый Δ - MNC
второй Δ - LPK

$$1) \angle NAF = 180 - \angle FAB = 180 - 100 = 80 \quad | = 7$$

$$\angle NFA = 180 - 150 = 30$$

$$\Rightarrow \angle N = 180 - 80 - 30 = 70^\circ \quad \boxed{\angle N = 70^\circ}$$

$$2) \angle BAL = \angle FAN = 80^\circ$$

$$\angle ABL = 180 - \angle ABC = 180 - 100 = 80 \quad | = 7$$

$$\Rightarrow \angle L = 180 - 80 - 80 = 20^\circ \Rightarrow \boxed{\angle L = 20^\circ}$$

Пользуясь смежностью/вертикальностью углов и тем, что сумма углов Δ равна 180° найдем аналогичным образом и остальные углы:

$$\angle K = 20^\circ$$

$$\angle P = 50^\circ$$

$$\angle M = 90^\circ$$

$$\angle G = 110^\circ$$

Ответ: углы первого треугольника: $110^\circ, 50^\circ, 20^\circ$
углы второго треугольника: $90^\circ, 70^\circ, 20^\circ$

735

Задача 7.

Уравнение касательной: $y = f'(x)(x - x_0) + f(x)$

Пусть касательная графику касается ф-ции $f(x) = x^4 + 6x^2 + x$, тогда справедливо:

$f'(x_1) = f'(x_2)$, где x_1 и x_2 – абсциссы точек касания.

$$4x_1^3 + 26x_1 + 1 = 4x_2^3 + 26x_2 + 1 \quad | : 2$$

$$2x_1^3 - 2x_2^3 + 6(x_1 - x_2) = 0.$$

$$2(x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) + 6(x_1 - x_2) = 0 \quad | : (x_1 - x_2), x_1 \neq x_2.$$

$$2(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) + 6 = 0.$$

Также справедливо:

$$f(x_1) - f'(x_1) \cdot x_1 = f(x_2) - f'(x_2) \cdot x_2.$$

$$\underline{x_1^4} + \underline{6x_1^2} + \cancel{x_1} - \underline{4x_1^4} - \underline{26x_1^2} - \cancel{x_1} = \underline{x_2^4} + \underline{6x_2^2} + \cancel{x_2} - \underline{4x_2^4} - \underline{26x_2^2} - \cancel{x_2}.$$

$$3(x_2^4 - x_1^4) + 6(x_2^2 - x_1^2) = 0.$$

$$3(x_2^4 - x_1^4) + 6(x_2^2 - x_1^2) = 0 \quad | : (x_2 - x_1)$$

$$2(x+1) - 2 = 2x + 2 - 2 = 2x.$$

$$3(x_2 + x_1)(x_2^2 + x_1^2) + 6(x_2 + x_1) = 0.$$

$$x_1 = -x_2 \quad (1)$$

$$3x_2^2 + 3x_1^2 + 6 = 0. \quad (2)$$

$$(1) \quad x_1 = -x_2$$

$$2(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) + 6 = 0$$

$$2(x_2^2 - x_2^2 + x_2^2) + 6 = 0.$$

$$6 = -2x_2^2 \quad \checkmark$$

М11 - 855

Код участника

Всероссийская олимпиада школьников «Миссия выполнима. Твое призвание – финансист!» 2023/2024 уч.г.

Бланк проверки работы

Математика 11 класс

№ задания	ФИО эксперта	Балл	ФИО эксперта	Балл	Итоговый балл
1	Касимов	10	Гурьянов	10	10
2	Поздня	10	Зырянов	10	10
3	Иванов	12	Марков	12	12
4	Дубинин	0	Иванов	0	0
5	Угрюмов	7	Васильев	7	7
6	Олегов	3	Семанов	3	3
7	Семанов	5	Кокнов	5	5
8	Шашков	0	Теминцев	0	0
ИТОГО					47

Код участника:

(заполняется организатором)

M11855

(2)

$$\begin{cases} b = -3(x_1^2 + x_2^2) \\ 2(x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2) + b = 0 \end{cases}$$

$$2x_1 x_2 - x_1^2 - x_2^2 = 0$$

$$(x_1 - x_2)^2 = 0$$

$$x_1 = x_2 \text{ (неудобно усл-ю задачи)}$$

Тогда единственный вариант, при котором такое возможно: $b = -2x_2^2$

Тогда исходное уравнение принимает вид:

$$f(x) = x^4 - 2x_0^2 \cdot x^2 + x, \text{ где } x_0 \text{ — абсцисса одной из точек касания касательной в которой касается функции}$$

Тогда уравнение касательной:

$$y_k = (4x_0^3 - 4x_0^3 + 1)(x - x_0) + x_0^4 - 2x_0^2 \cdot x_0^2 + x_0$$

$$y_k = (1 - 0)(x - x_0) + x_0^4 - 2x_0^2 \cdot x_0^2 + x_0$$

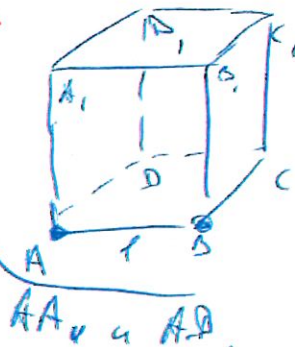
$$y_k = x - x_0 + x_0 - x_0^4; \quad y_k = x - x_0^4$$

$$\text{Ответ: } b = -2x_0^2$$

$$y_k = x - x_0^4$$

Задача 4:

Сфера проходит
ч/з т. В и
касается прямой



AA₁ и AB.

Прямые AA₁ и AB образуют плоскость, которая очевидно, не проходит ч/з центр сферы $\Rightarrow$ Если сфера касается обеих прямых, то она касается их в точке их пересечения (A) $\Rightarrow$ сфера проходит ч/з точку A.

$$\text{Ответ: } 5\frac{1}{2}$$

нет решения

00.

М11-512

Код участника
(заполняется организатором)



**Олимпиадная работа
заключительного этапа
«Всероссийская олимпиада школьников "Миссия
выполнима. Твоё призвание - финансист!" 2023-2024
г.»
«(Математика 11 класс)»**

Вариант № 1

«27 января 2024 г.»

Никакие другие записи на титульном листе делать не разрешается

ell 11-512

Код участника

Всероссийская олимпиада школьников «Миссия выполнима. Твое призвание – финансист!» 2023/2024 уч.г.

Бланк проверки работы

Математика 11 класс

№ задания	ФИО эксперта	Балл	ФИО эксперта	Балл	Итоговый балл
1	Анальска Т.Г.	10	Гурьянова И.Э.	10	10
2	Гоздеев	2	Золотых	2	2
3	Александрович	12	Борисове	12	12
4	Дубинский	0	Шарин	0	0
5	Сизов	4	Чуров	4	4
6	Орехов	3	Колесов	3	3
7	Колесов	0	Сеняков	0	0
8	Власов	16	Власов	16	16
ИТОГО					47

М1.

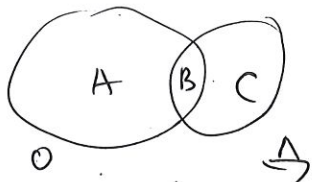
~~Пусть O – кол-во студентов, занимающихся
оцно, а A – кол-во студентов, занимающихся
гистариционно. Тогда пересечение этих мн-ств:~~

~~$$0,5 \cdot O = 0,6 \cdot A$$~~

~~$$\frac{O}{A} = \frac{6}{5} \Rightarrow O = \frac{6}{6+5} = \frac{6}{11} \text{ всех студентов}$$~~

М1.

Пусть A – кол-во студентов, занимающихся
только оцно, B – кол-во студентов, занимающихся
и оцно, и гистариционно, а C – кол-во студе-
нтов, занимающихся только гистариционно. Тогда:



$$B = B = 0,5(A+B) \Rightarrow A=B$$

$$0,5(A+B) = 0,6(B+C)$$

$$0,5 \cdot 2A = 0,6 \cdot (A+C)$$

$$10A = 6A + 6C$$

$$B = \frac{2}{3}A$$

$$A + B + C = M \text{ (все студенты).}$$

$$A + A + \frac{2}{3}A = M$$

$$\frac{8}{3}A = M \Rightarrow A = \frac{3}{8}M \text{ – студенты, занимающиеся только оцно.}$$

Ответ: $\frac{3}{8}$

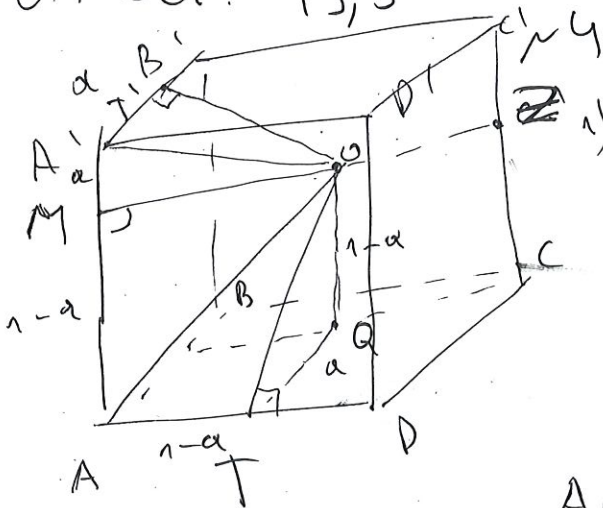
+ (100)

$$p(n) = \frac{g^n}{g^n + g^{50}} \quad n \sim 3$$

$$\begin{aligned} \text{Рассм } p(n) + p(100-n) &= \frac{g^n}{g^n + g^{50}} + \frac{g^{100-n}}{g^{100-n} + g^{50}} = \\ &= \frac{g^n (g^{100-n} + g^{50}) + g^{100-n} (g^n + g^{50})}{(g^n + g^{50})(g^{100-n} + g^{50})} = \frac{2 \cdot g^{100} + g^{50}(g^n + g^{100-n})}{2 \cdot g^{100} + g^{50}(g^n + g^{100-n})} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Тогда } p(1) + p(2) + p(3) + \dots + p(99) &= \\ &= \cancel{p(1)} + \frac{1}{2} (p(1) + p(99)) + p(2) + p(98) + \dots + p(99) + p(1) = \\ &= \frac{1}{2} (1 + 99) = \frac{99}{2} = 49,5 \quad + \end{aligned}$$

Ответ: 49,5



Пусть O — центр сферы, T', T, M — т. касания.
Рассм. $\triangle A'T'O \sim \triangle A'OM$:

По т. Пифагора:

$$A'O^2 = A'O^2$$

$$A'T'^2 + OT'^2 = A'M^2 + MO^2$$

$$OT' = MO = R \Rightarrow$$

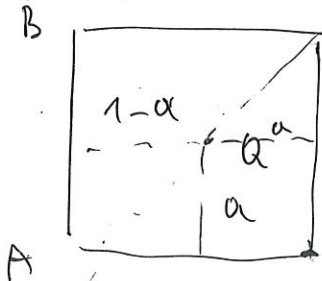
$$\Rightarrow A'T' = A'M.$$

Аналогично в $\triangle A'OM$ и $\triangle AOT$:

$$MA = AT.$$

2) Пусть $A'T' = a = A'M \Rightarrow MA = 1-a = AT.$

3) Пусть т. Q — проекция т. O на (ABC):



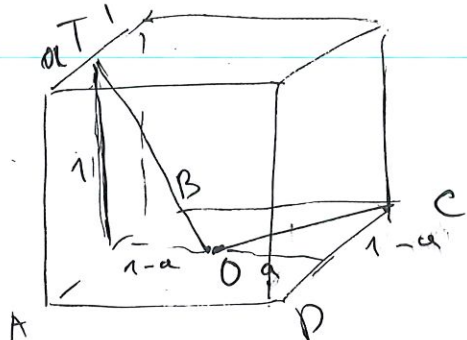
$$\Rightarrow CQ = \sqrt{a^2 + (1-a)^2}$$

$$\text{Рассм. } TO = \sqrt{a^2 + (1-a)^2} = R.$$

Тогда $OZ \parallel QC$, $OZ = QC = R$, но

Тогда т. Z — т. C, иная сфера не пройдет через нее;

Т.к. будет касаться прямая $C'B$ в точке, не равной C' , значит $\tau.O = \tau.Q \Rightarrow$
 $\Rightarrow$ центр сферы лежит в плоскости основания:



$$r^2 = R^2$$

$$1 + (1-a)^2 = a^2 + (1-a)^2$$

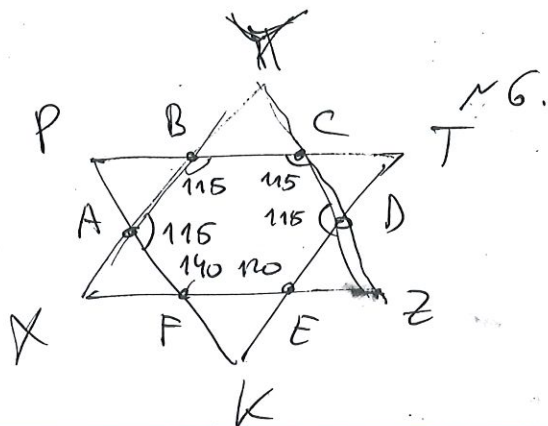
$$a = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tau.O = \tau.B$$

Проверка: $BB' = BA = BC = R = 1$,
 $BB' \perp A'B'$, $BA \perp AA'$
 $BA \perp AD$

Ответ: 1

нет системы уравнений



$$\angle P = \frac{2 \cdot 115 - 180}{1} = 50^\circ$$

$$\angle T = \frac{2 \cdot 115 + 180}{1} = 50^\circ$$

$$\angle K = 140 + 120 - 180 = 80^\circ$$

$$\angle X = 115 + 140 - 180 = 75^\circ$$

$$\angle Y = 2 \cdot 115 - 180 = 50^\circ$$

$$\angle Z = 120 + 115 - 180 = 55^\circ$$

Ответ: $(50, 50, 80)$, $(75, 50, 55)$

$$\arccos \frac{5x+3}{3x-5} + \arccos \frac{x-1}{x+1} = x$$

Пусть α и β – углы между векторами и осью Ox . Тогда $\vec{a} = (5x+3, 3x-5)$ для α и $\vec{b} = (x-1, x+1)$ для β .

Тогда $\vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{b}$ обладает углом $\alpha + \beta$.

Это можно показать, например, через комплексные числа: $v_1 \cdot e^{i\alpha}, v_2 \cdot e^{i\beta} = v_1 v_2 \cdot e^{i(\alpha+\beta)}$

$$\vec{c} = (x', y')$$

$$x' = (5x+3)(x-1) - (3x-5)(x+1) = 5x^2 - 2x - 3 - 3x^2 + 2x + 5 = 2x^2 + 2$$

$$y' = (5x+3)(x+1) + (3x-5)(x-1) = 5x^2 + 8x + 3 + 3x^2 - 8x + 5 = 8x^2 + 8$$

$$\alpha + \beta = \text{Arg}(\bar{c}) = \arccotg \frac{x_1'}{y_1'} = \arccotg \frac{2x^2+2}{8x^2+8} =$$

$$= \arccotg \frac{1}{4} \Rightarrow \cotg(\alpha + \beta) = \frac{1}{4} \quad +$$

$$\frac{\cos(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{1}{4} \Rightarrow 4\cos^2(\alpha + \beta) = 1 - \cos^2(\alpha + \beta)$$

$$\text{Т.к. } 2x^2+2 > 0 \text{ и } 8x^2+8 > 0, \quad \cos(\alpha + \beta) = \pm \frac{1}{5}, -$$

$$\text{То } \cos(\alpha + \beta) > 0 \text{ и } \sin(\alpha + \beta) > 0:$$

$$\alpha + \beta = \arccos\left(\frac{1}{5}\right)$$

Ответ: $\arccos\left(\frac{1}{5}\right)$

18.

Определить последовательность X можно за 50 шагов. Первым шагом минимальным кол-вом шагов за

Пусть $Y_1 = (1, 2, 3, \dots, 100)$. Вторым

$Y_2 = (3, 4, 5, \dots, 2)$, то есть поднимаем каждое значение на 2 по модулю 100. Действуя аналогично следующие 48 шагов:

$Y_{50} = (99, 100, 1, \dots, 98)$. Представим полученные значения в виде таблицы:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	

Таким образом в каждом столбце числа из X либо "зажаты" между двумя числами из Y_i и Y_{i+1} , а значит $Y_i < X_i < Y_{i+1}$, а значит мы однозначно определяем X_i , либо "прижаты" к верху или низу таблицы, в таком случае мы однозначно определяем X_i , или совпади с числом из Y_i , тогда $Y_i = X_i$ и мы однозначно определяем X_i .

Пусть можно определить последовательность X_i за 49 шагов или $n \leq 49$ меньше. Тогда в каждом столбце не будет точно $100 - n \geq 51 \Rightarrow$ по принципу Дирихле $\exists$ 2 значения X_i , которые отличаются друг от друга на 1 и не определены точно. Тогда можно построить такую X , что все её значения попадают в указанные пары, а значит не могут быть определены однозначно (иногда в построенной последовательности не совпадают между собой ~~выбывающие~~), а значит определить такую X невозможно.

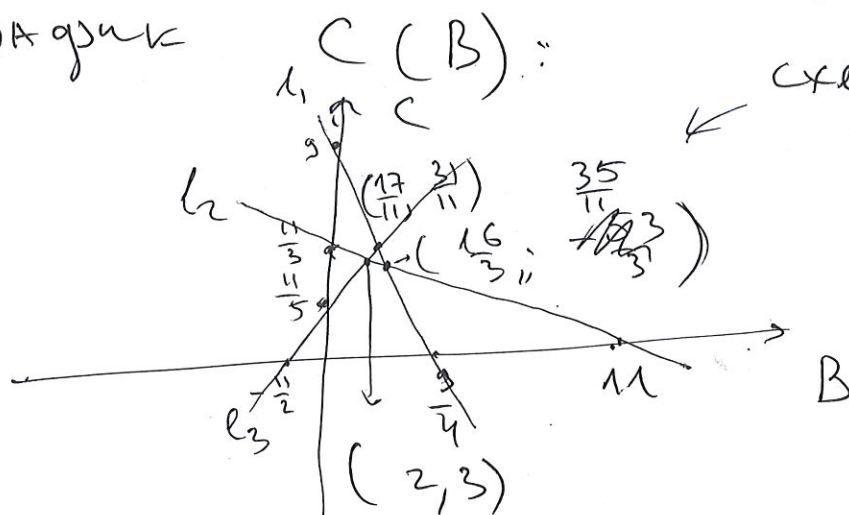
Отв.: 50 шагов.

№2.

$$\left\{ \begin{array}{l} A + 5B \geq 9 \\ 3A + 4B \geq 11 \\ 5A + 3B \geq 11 \end{array} \right. \xrightarrow{A+B=C} \left\{ \begin{array}{l} C + 4B \geq 9 \\ 3C + B \geq 11 \Leftrightarrow \\ 3C + 2A \geq 11 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} C + 4B \geq 9 \\ 3C + B \geq 11 \\ 5C - 2B \geq 11 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} C \geq -4B + 9 \quad ① \\ C \geq -\frac{1}{3}B + \frac{11}{3} \quad ② \\ C \geq \frac{2}{5}B + \frac{11}{5} \quad ③ \end{array} \right.$$

График

Схематичный
График

Ищем наибольшее C среди точек пересечения:
 $\max \left(3, \frac{35}{11}, \frac{31}{11} \right) = \frac{35}{11} \Rightarrow \max (A+B) = \frac{35}{11}$

Ответ: $\frac{35}{11}$ — не удов. условию задачи 25

17 лет 0

МН-638

Код участника
(заполняется организатором)



**Олимпиадная работа
заключительного этапа
«Всероссийская олимпиада школьников "Миссия
выполнима. Твоё призвание - финансист!" 2023-2024
г.»
«(Математика 11 класс)»**

Вариант № 1

«27 января 2024 г.»

Никакие другие записи на титульном листе делать не разрешается

111-637

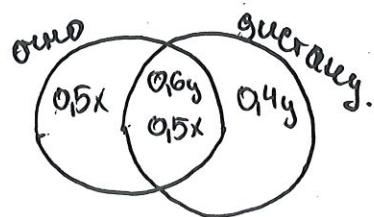
Код участника

Всероссийская олимпиада школьников «Миссия выполнима. Твое призвание – финансист!» 2023/2024 уч.г.

Бланк проверки работы

Математика 11 класс

№ задания	ФИО эксперта	Балл	ФИО эксперта	Балл	Итоговый балл
1	Касьянов	10	Гурьянов	10	10
2	Тюлькин	6	Зайцев	6	6
3	Борисов	12	Кремль	12	12
4	Овчинников	1	Курсанов	1	1
5	Башкиров	12	Уфимов	12	12
6	Онегов	3	Курсанов	3	3
7	Колесов	3	Семанов	3	3
8	Шамкин	0	Григорьев	0	0
ИТОГО					47

Задача 1

очно: 50% только очно = $0.5x$
50% и очно и дист = $0.5x$

дистант: 40% только дистант = $0.4y$
60% и очно и дист = $0.6y$

Заметим, что $0.5x = 0.6y \Rightarrow x = 1.2y$

Тогда всего студентов $0.5x + 0.5x + 0.4y = 1.2y + 0.4y = 1.6y$. А студентов, которые занимаются

только очно = $0.5x = 0.6y$

$\Rightarrow$ их часть = $\frac{0.6y}{1.6y} = \frac{3}{8}$ от общей кол-ва
= 37.5%

Ответ: студентов, занимающихся только очно 37.5% (или $\frac{3}{8}$ от общей кол-ва) **105**.

Задача 2

$$\begin{cases} A + 5B \geq 9 & (1) \\ 3A + 4B \geq 11 & (2) \\ 5A + 3B \geq 11 & (3) \end{cases}$$

Оценим A:

$$\begin{aligned} (1) \text{ и } (2): & \begin{cases} 4A + 20B \geq 36 \\ 15A + 20B \geq 55 \end{cases} \Rightarrow 11A \geq 19 \\ (2) \text{ и } (3): & \begin{cases} 9A + 12B \geq 33 \\ 20A + 12B \geq 44 \end{cases} \Rightarrow 11A \geq 11 \end{aligned}$$

$$(1) \text{ и } (3): \begin{cases} 3A + 15B \geq 27 \\ 25A + 15B \geq 55 \end{cases} \Rightarrow 22A \geq 28$$

Оценим B:

$$(1) \text{ и } (2): \begin{cases} 3A + 15B \geq 27 \\ 3A + 4B \geq 11 \end{cases} \Rightarrow 11B \geq 16$$

$$(2) \text{ и } (3): \begin{cases} 15A + 20B \geq 55 \\ 16A + 9B \geq 33 \end{cases} \Rightarrow 11B \geq 22 \Rightarrow 11B \geq 22$$

$$(1) \text{ и } (3): \begin{cases} 5A + 25B \geq 45 \\ 5A + 3B \geq 11 \end{cases} \Rightarrow 22B \geq 34$$

Тогда $11A + 11B \geq 41$

$$A + B \geq \frac{41}{11}$$

Ответ: наименьшее значение

$$A + B = \frac{41}{11} \text{ при } A = \frac{19}{11} \text{ и } B = 2$$

мы доказали что $A + B \geq 3$

Задача 3

$$p(n) = \frac{g^n}{g^n + g^{50}}$$

$$p(1) + p(2) + \dots + p(99) = \frac{g^1}{g^1 + g^{50}} + \frac{g^2}{g^2 + g^{50}} + \dots + \frac{g^{49}}{g^{49} + g^{50}} + \frac{g^{50}}{g^{50} + g^{50}} + \frac{g^{51}}{g^{51} + g^{50}} + \dots + \frac{g^{99}}{g^{99} + g^{50}}$$

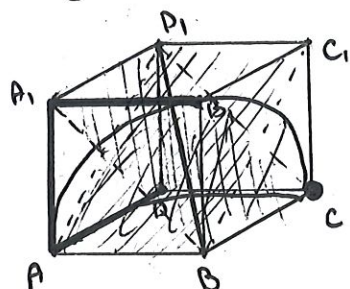
$$= \frac{1}{g^{49} + 1} + \frac{1}{g^{48} + 1} + \dots + \frac{1}{g^1 + 1} + \frac{1}{g^0 + 1} + \frac{g^1}{g^1 + 1} + \frac{g^2}{g^2 + 1} + \dots + \frac{g^{49}}{g^{49} + 1}$$

$$= \frac{g^{49} + 1}{g^{49} + 1} + \dots + \frac{g^1 + 1}{g^1 + 1} + \frac{1}{g^0 + 1} = \underbrace{1 + 1 + 1 + \dots + 1}_{49} + \frac{1}{2} = 49,5$$

Ответ: 49,5

12 баллов

Задача 4



Дано:

куб ABCD A1 B1 C1 D1,

AB=1

сфера: т.с в центре

сфера кас. AD, AA1, A1 B,

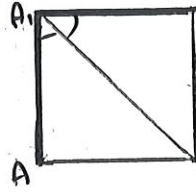
Найти радиусе сферы

Рассмотрим грань (ABC) сфера может пересекать эту грань по окружности. Заметим, что центр этой окр

Рассмотрим грань AA1 D1 D и заметим, что AD, C, B тоже ГМТ центра сферы → центр сферы лежит на отрезке

Рассмотрим грань AA1 B1 B:

сфера пересекет эту грань по окружн, касающейся AA1 и A1 B1.

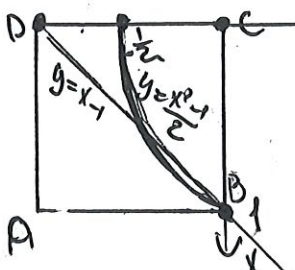


ГМТ центра этой окр. - биссектр ∠A1 B1 B, т.е. равноудален от сторон.

Тогда ГМТ центра сферы - перп. (AA1 B1) и A1 B1 этой перп. т.е. перп. (A1 D1 C)

на отрезке (BD1) = (AD1 C) ∩ (AD1 C)

лежит равноудаленно от AD и т.с. ⇒ ГМТ центра параболы. Пусть ось орз сх-ось абсцисс



Тогда ГМТ центра окр. : $y = \frac{x^2 - 1}{2}$ (верш пар. на CD) нули: $x = \pm 1$ сдвинуть 2 раза вверх от

Проекция центра сферы на (ABC) лежит на ГМТ: $y = \frac{x^2 - 1}{2}$ А также на проекции BD1 → BD, $y = x - 1 \Rightarrow \frac{x^2 - 1}{2} = x - 1$

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$(x - 1)^2 = 0$$

$$x = 1 \Rightarrow$$

центр сферы → B

Если центр сферы в BD, то B - центр сферы ⇒ $r = 1 - AB = BC$

Ответ: $r_{сф} = 1$

Код участника: М11-638
(заполняется организатором)

Задача 5

$$\textcircled{5} \arcsctg \frac{5x+3}{3x-5} + \arcsctg \frac{x-1}{x+1} = x$$

$$1) \left(\arcsctg \frac{5x+3}{3x-5} + \arcsctg \frac{x-1}{x+1} \right) \in (0; 2\pi)$$

$$\Rightarrow x \in (0; 2\pi)$$

2) можем взять ctg от обеих частей

при $x \neq \pi$, т.е. ($x \neq \pi$ т.к. $x \in (0; 2\pi)$)

при $x = \pi$: $\underbrace{\arcsctg \frac{5\pi+3}{3\pi-5}}_{\frac{\pi}{2}} + \underbrace{\arcsctg \frac{\pi-1}{\pi+1}}_{\frac{\pi}{2}} < \pi$ ~~не решение~~

$$\text{ctg}(\arcsctg \frac{5x+3}{3x-5} + \arcsctg \frac{x-1}{x+1}) = \text{ctg}(x)$$

$$\frac{\text{ctg}(\arcsctg(\frac{5x+3}{3x-5})) \cdot \text{ctg}(\arcsctg(\frac{x-1}{x+1})) - 1}{\text{ctg}(\arcsctg(\frac{5x+3}{3x-5})) + \text{ctg}(\arcsctg(\frac{x-1}{x+1}))} = \text{ctg}(x)$$

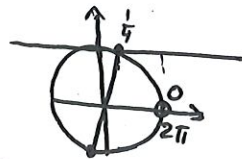
$$\frac{\frac{(5x+3)(x-1) - (3x-5)(x+1)}{(3x-5)(x+1)}}{\frac{(5x+3)(x+1) + (x-1)(3x-5)}{(3x-5)(x+1)}} = \frac{5x^2 - 2x - 3 - 3x^2 + 2x + 5}{5x^2 + 8x + 3 + 3x^2 - 8x + 5} = \text{ctg}(x)$$

$$\frac{(3x-5)(x+1) \cdot 2(x^2+1)}{(3x-5)(x+1) \cdot 8(x^2+1)} = \text{ctg}(x) = \frac{1}{4}$$

$$\begin{cases} x \neq -1 \\ x \neq \frac{5}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \arcsctg(\frac{1}{4}) + \pi n \\ x \in (0; 2\pi) \\ x \neq -1 \\ x \neq \frac{5}{3} \\ x \neq \pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \arcsctg \frac{1}{4} \\ x = \arcsctg \frac{1}{4} + \pi \end{cases}$$



$$\text{Отв: } x = \left\{ \arcsctg\left(\frac{1}{4}\right); \arcsctg\left(\frac{1}{4}\right) + \pi \right\}$$

Код участника: М11-638
(заполняется организатором)Задание 6

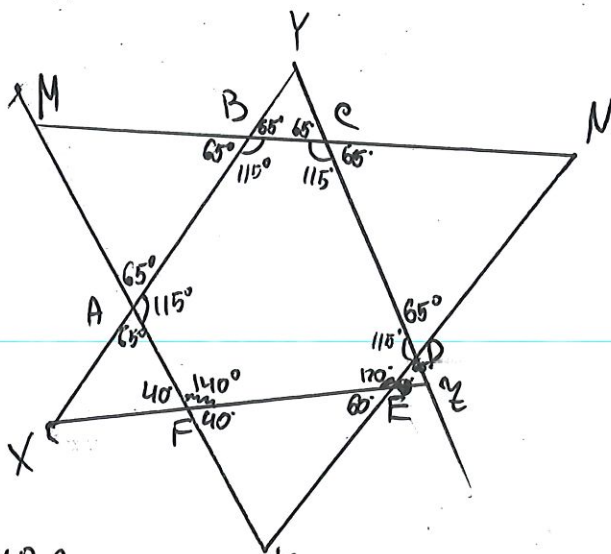
Дано

$$\Delta_1 \cap \Delta_2 = ABCDEF$$

$$\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 115^\circ$$

$$\angle E = 120^\circ$$

$$\angle F = 140^\circ$$

Найти
углы Δ_1 и Δ_2 

- 1) углы $\angle XAF, \angle MAB, \angle MBA, \angle YBC, \angle YCB, \angle NCD, \angle NDC, \angle ZDE$ смежные с углами равными $115^\circ \Rightarrow$ эти углы равны $180^\circ - 115^\circ = 65^\circ$
- 2) углы $\angle XFA$ и $\angle KFE$ смежные с углом $F = 140^\circ \Rightarrow$ они равны $180^\circ - 140^\circ = 40^\circ$
- 3) углы $\angle KEF$ и $\angle ZED$ смежные с углом $E = 120^\circ \Rightarrow$ эти углы $= 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$
- 4) В ΔXYZ : $\angle Y = 180^\circ - 65^\circ - 65^\circ = 50^\circ$; $\angle X = 180^\circ - 65^\circ - 40^\circ = 75^\circ$
 $\angle Z = 180^\circ - 60^\circ - 65^\circ = 55^\circ$
 Значит в первом треугольнике углы: $50^\circ, 55^\circ, 75^\circ$
 ($50^\circ + 55^\circ + 75^\circ = 180^\circ$ ✓)
- 5) в ΔMNK : $\angle M = 180^\circ - 65^\circ - 65^\circ = 50^\circ$; $\angle N = 180^\circ - 65^\circ - 65^\circ = 50^\circ$;
 $\angle K = 180^\circ - 40^\circ - 60^\circ = 80^\circ$
 Значит во втором треугольнике углы: $50^\circ, 50^\circ, 80^\circ$

Ответ: углы в первом Δ : $50^\circ, 55^\circ, 75^\circ$
 углы во втором Δ : $50^\circ, 50^\circ, 80^\circ$

35

Задача 7

Запомним, что у параболы 4-й степени может быть проведена касательная сразу к двум точкам только если она имеет два промежуточных выкручивания или два промежуточных возмущения

$$F(x) = ax^4 + x^2 + x$$

$$F''(x) = 12ax^2 + 2$$

при $a \geq 0$: $F''(x) > 0 \Rightarrow$ всегда выпуклая и имеет всего один промежуток возмущения

при $a < 0$: Рассмотрим точки перегиба:

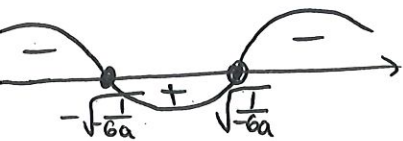
$$12ax^2 + 2 = 0$$

$$x^2 = -\frac{1}{6a}$$

$$x = \pm \sqrt{-\frac{1}{6a}}$$

$$f\left(\sqrt{-\frac{1}{6a}}\right) = \frac{a}{36a^2} - \frac{1}{6a} + \sqrt{-\frac{1}{6a}} = \sqrt{-\frac{1}{6a}} - \frac{5}{36a}$$

$$f\left(-\sqrt{-\frac{1}{6a}}\right) = \frac{a}{36a^2} - \frac{1}{6a} - \sqrt{-\frac{1}{6a}} = -\sqrt{-\frac{1}{6a}} - \frac{5}{36a}$$



есть два промежуточных возмущения

Отв: ~~при a < 0~~ при a < 0

3.

М И 020

Код участника
(заполняется организатором)



**Олимпиадная работа
заключительного этапа
«Всероссийская олимпиада школьников "Миссия
выполнима. Твоё призвание - финансист!" 2023-2024
г.»
«(Математика 11 класс)»**

Вариант № 1

«27 января 2024 г.»

Никакие другие записи на титульном листе делать не разрешается

М 11-020

Код участника

Всероссийская олимпиада школьников «Миссия выполнима. Твое призвание – финансист!» 2023/2024 уч.г.

Бланк проверки работы

Математика 11 класс

№ задания	ФИО эксперта	Балл	ФИО эксперта	Балл	Итоговый балл
1	Матвеева Т.Т.	10	Касаткина А.Ш.	10	10
2	Матвеев Р.М.	10	Савина С.В.	10	10
3	Краснер	12	Барина	12	12
4	Обаиник	1	Курсанова	1	1
5	Башкина	11	Уфеев	11	11
6	Орехов	3	Башкина	3	3
7	Курсанова	0	Тостова Л.В.	0	0
8	Курсанова	0	Ф	0	0
ИТОГО					47

М 11 020

ФГБОУ ВО «Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации»



ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМА.

ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ – ФИНАНСИСТ!»

ПО ПРЕДМЕТУ МАТЕМАТИКА 2023-2024 уч. года

ОЧНЫЙ ЭТАП

11 класс

Вариант 1

Задание 1 (10 баллов)

В некотором ВУЗе существуют очная и дистанционная формы обучения. При этом среди студентов, занимающихся очно, 50% занимаются также и дистанционно, а среди студентов, занимающихся дистанционно, 60% занимаются также и очно. Какую часть составляют студенты, занимающиеся только очно?

Задание 2 (10 баллов)

Каким наименьшим может быть значение выражения $A + B$, если A и B – числа, удовлетворяющие следующей системе неравенств

$$\begin{cases} A + 5B \geq 9; \\ 3A + 4B \geq 11; \\ 5A + 3B \geq 11. \end{cases}$$

Задание 3 (12 баллов)

Для каждого натурального числа n положим $p(n) = \frac{9^n}{9^n + 9^{50}}$.
Вычислите сумму $p(1) + p(2) + p(n) + \dots + p(99)$.

Задание 4 (12 баллов)

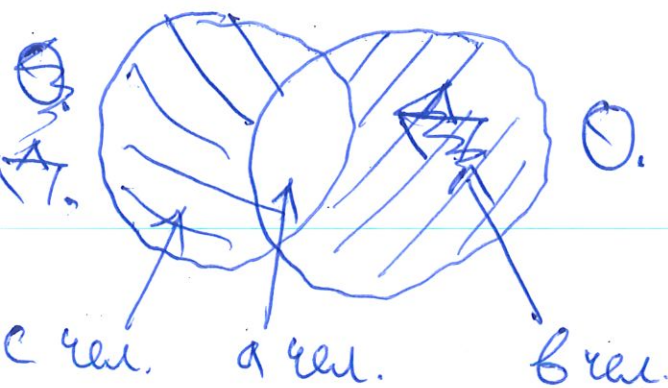
Длина ребра куба $ABCA'B'C'D'$ равна 1. Найдите радиус сферы, проходящей через точку C и касающейся прямых AD , AA' и $A'B'$.

Код участника:

(заполняется организатором)

М II 020

№1 Обозначим тех, кто занимается и филм. и очес за а. (а - кол-во людей). Тогда по условию:



$$\frac{a}{a+b} = 0,5 \quad \text{в - кол-во людей, занимающихся только филм. и очес}$$

$$a = 0,5a + 0,5b$$

$$b = a$$

$$\frac{a}{a+c} = 0,6 \quad \text{с - кол-во людей занимающихся только филм. и очес}$$

с - кол-во людей занимающихся только филм. и очес

$$a = 0,6a + 0,6c$$

$$0,6c = 0,4a$$

$$c = \frac{2}{3}a$$

Тогда у нас $\frac{2}{3}a$ человек занимающихся только филм. и очес, а человек занимающихся только очес и а человек занимающихся и очес и филм. и очес

$$\frac{c}{a+b+c} = \frac{\frac{2}{3}a}{a+a+\frac{2}{3}a} = \frac{2a}{3a+3a+2a} = \frac{2a}{8a} = 0,25 \text{ или } 25\%$$

Ответ: 0,25 или 25%

$$\frac{b}{a+b+c} = \frac{a}{a+a+\frac{2}{3}a} = \frac{3a}{3a+3a+2a} = \frac{3}{8} = 0,375 \text{ или } 37,5\%$$

Ответ: 0,375 или 37,5%

+ 10

Код участника:

(заполняется организатором)

МН ОДО

№2

$$\begin{cases} A + 5B \geq 9 \\ 3A + 4B \geq 11 \\ 5A + 3B \geq 11 \end{cases}$$

Обозначим $A+B=K$, тогда $A=K-B$, перепишем неравенства в удобном виде:

$$\begin{cases} K + 4B \geq 9 \\ 3K + B \geq 11 \\ 5K - 2B \geq 11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B \geq \frac{9-K}{4} \quad (1) \\ B \geq 11-3K \quad (2) \\ B \leq \frac{5K-11}{2} \quad (3) \end{cases}$$

Тогда из неравенств (2) и (3) следует:

$$\frac{11-5K}{2} \geq B \geq 11-3K \Rightarrow \frac{11-5K}{2} \geq 11-3K \quad | \cdot 2$$

$$11-5K \geq 22-6K$$

$$-K$$

$$\frac{5K-11}{2} \geq B \geq 11-3K \Rightarrow \frac{5K-11}{2} \geq 11-3K \quad | \cdot 2$$

$$5K-11 \geq 22-6K$$

$$11K \geq 33 \quad | : 11$$

$$K \geq 3$$

$$A+B \geq 3 \Rightarrow \min(A+B) = 3$$

Пример когда $A+B=3$ и нер-ва выполняются:

$$A=1 \quad B=2$$

$$\begin{cases} 1 + 2 \cdot 2 \geq 9 \\ 3 + 2 \cdot 4 \geq 11 \\ 5 + 3 \cdot 2 \geq 11 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 11 \geq 9 \\ 11 \geq 11 \\ 11 \geq 11 \end{cases} \quad \text{Верно!}$$

$$\text{Ответ: } A+B=3$$

105.

Код участника:

(заполняется организатором)

МН 020

N3 $p(n) = \frac{9^n}{9^n + 9^{50}}$

Рассмотрим сумму $p(k) + p(100-k)$:

$$\frac{9^k}{9^k + 9^{50}} + \frac{9^{100-k}}{9^{100-k} + 9^{50}} = \frac{9^k(9^{100-k} + 9^{50}) + 9^{100-k}(9^k + 9^{50})}{(9^k + 9^{50})(9^{100-k} + 9^{50})} =$$

$$\frac{2 \cdot 9^{100} + 9^{50+k} + 9^{150-k}}{2 \cdot 9^{100} + 9^{50+k} + 9^{150-k}} = 1$$

Таких сумм равно ~~50~~ 49 и $p(50) \Rightarrow$

$$p(1) + p(2) + \dots + p(99) = 49 + p(50) =$$

$$49 + \frac{9^{50}}{2 \cdot 9^{50}} = 49 + \frac{1}{2} = 49,5$$

Ответ: 49,5

N5 $\arcsctg\left(\frac{5x+3}{3x-5}\right) + \arcsctg\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = x$

$$\text{ctg}\left(\arcsctg\left(\frac{5x+3}{3x-5}\right) + \arcsctg\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right) = \text{ctg} x$$

$$\frac{\text{ctg}\left(\arcsctg\left(\frac{5x+3}{3x-5}\right)\right) \cdot \text{ctg}\left(\arcsctg\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right) - 1}{\text{ctg}\left(\arcsctg\left(\frac{5x+3}{3x-5}\right)\right) + \text{ctg}\left(\arcsctg\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right)} = \text{ctg} x$$

$$\frac{\frac{5x+3}{3x-5} \cdot \frac{x-1}{x+1} - 1}{\frac{5x+3}{3x-5} + \frac{x-1}{x+1}} = \text{ctg} x$$

$$\frac{(5x+3)(x-1) - (3x-5)(x+1)}{(5x+3)(x+1) + (3x-5)(x-1)} = \text{ctg} x$$

$$\frac{2(x^2+1)}{8(x^2+1)} = \text{ctg} x$$

$$\text{ctg} x = 0,25$$

Значит нам надо найти малых

$$x = \arcsctg 0,25 \text{ и } x = \arcsctg 0,25 + \pi \text{ м.к. они } \in (0; 2\pi)$$

Ответ: $x = \arcsctg 0,25$; $x = \arcsctg 0,25 + \pi$

ооо?!

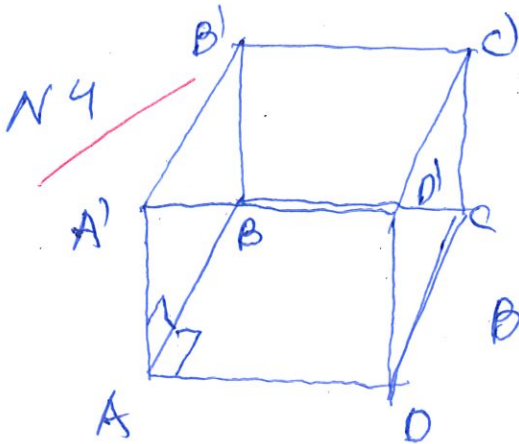
X.

Итак как $\arcsctg t$ и $\arcsctg t$ в левый член уравнения сумма двух $\arcsctg$, но $x \in (0; 2\pi)$ м.к. $f(t) = \arcsctg t \in (0; \pi)$

Код участника:

(заполняется организатором)

М П 020



Рассмотрим сферу с радиусом
равным $AB = a$ (стороне куба)
и с центром в т. В. Тогда

$$BB' = AB = R$$

$AB \perp AA'$ и $AB \perp AD$ м.к.
 $AB C D A' B' C' D'$ - куб (ребра куба $\perp$)

$BB' \perp A'B'$ Аналогично $\Rightarrow$

$\Rightarrow$
 $AA', A'B'$ и AD - касательные к этой
сфере

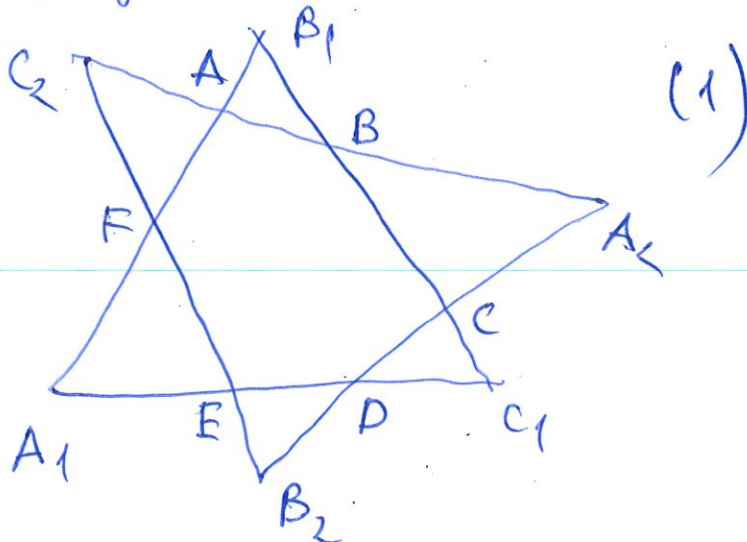
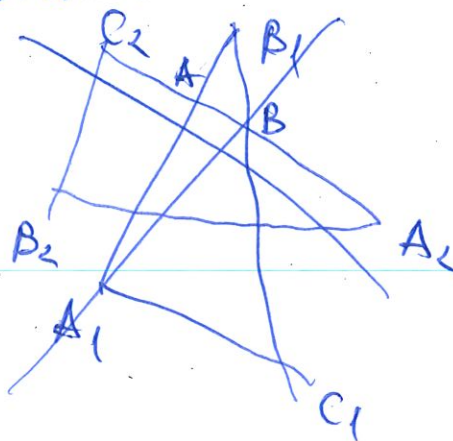
$BC = AB = a = R \Rightarrow$ сфера проходит через т. С.



Описываемая сфера является сферой описываемой в
условии задачи, $R = a = 1$

Ответ: $R = 1$

N6 Рассмотрим все случаи расположения ABCDEF относительно 2-х треугольников:



Для $\triangle AB_1B$: $\angle AB_1B = 180^\circ - \angle B_1AB - \angle ABB_1 = 180^\circ - (180^\circ - \angle A) - (180^\circ - \angle B) = \angle A + \angle B - 180^\circ = 50^\circ$

Для $\triangle A_1EF$: $\angle EA_1F = 180^\circ - \angle E - \angle F = 80^\circ$

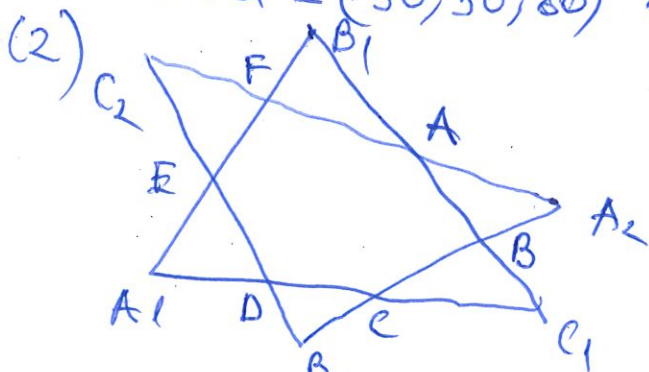
Для $\triangle CC_1D$: $\angle CC_1D = \angle C + \angle D - 180^\circ = 50^\circ$

Для $\triangle AC_2F$: $\angle AC_2F = \angle A + \angle F - 180^\circ = 75^\circ$

Для $\triangle EB_2D$: $\angle EB_2D = \angle E + \angle D - 180^\circ = 55^\circ$

Для $\triangle A_2BC$: $\angle BA_2C = \angle B + \angle C - 180^\circ = 50^\circ$

$\triangle A_1B_1C_1 \angle (50; 50; 80)$ $\triangle A_2B_2C_2 \angle (35; 75; 50)$



$\triangle AB_1F$: $\angle AB_1F = \angle A + \angle F - 180^\circ = 75^\circ$

$\triangle PA_1E$: $\angle PA_1E = \angle E + \angle D - 180^\circ = 55^\circ$

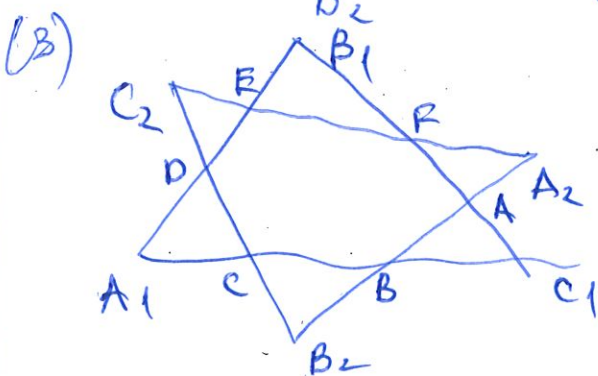
$\triangle C_1BE$: $\angle BC_1C = \angle B + \angle C - 180^\circ = 50^\circ$

$\triangle AA_2B$: $\angle AA_2B = \angle A + \angle B - 180^\circ = 50^\circ$

$\triangle PB_2C$: $\angle PB_2C = \angle P + \angle C - 180^\circ = 50^\circ$

$\triangle FC_2E$: $\angle FC_2E = \angle E + \angle F - 180^\circ = 80^\circ$

$\triangle A_2B_2C_2 \angle (50; 50; 80)$ $\triangle A_1B_1C_1 \angle (55; 75; 50)$



$\triangle AC_1B$: $\angle AC_1B = \angle A + \angle B - 180^\circ = 50^\circ$

$\triangle CA_1D$: $\angle CA_1D = \angle C + \angle D - 180^\circ = 50^\circ$

$\triangle FB_1E$: $\angle FB_1E = \angle E + \angle F - 180^\circ = 80^\circ$

~~$\triangle AC_1B$: $\angle AC_1B$~~

$\triangle DC_2E$: $\angle DC_2E = \angle E + \angle D - 180^\circ = 55^\circ$

$\triangle FA_2A$: $\angle FA_2A = \angle F + \angle A - 180^\circ = 75^\circ$

$\triangle CB_2B$: $\angle CB_2B = \angle C + \angle B - 180^\circ = 50^\circ$

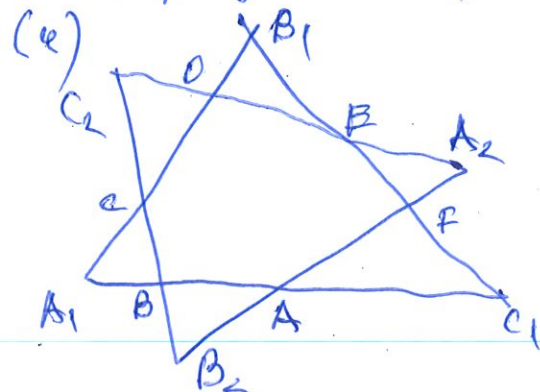
$\triangle A_1B_1C_1 \angle (50; 50; 80)$ $\triangle A_2B_2C_2 \angle (55; 75; 50)$

Код участника:

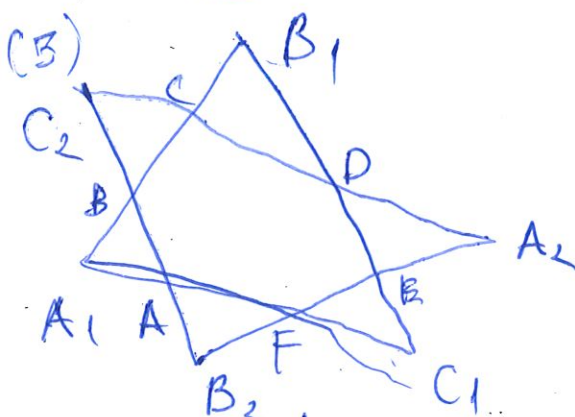
(заполняется организатором)

М. И. О. 20

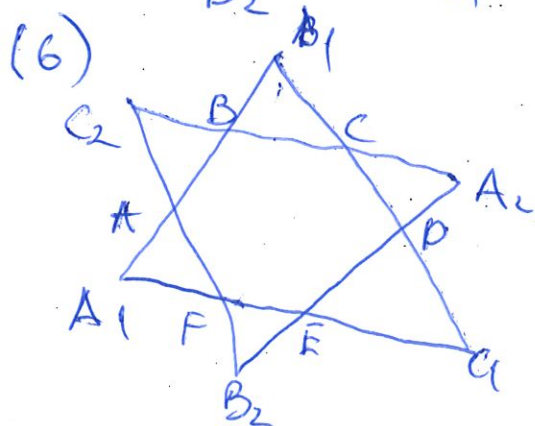
№6 (Продолжение)



$$\begin{aligned} \triangle EB_1D: \angle EB_1D &= \angle E + \angle D - 180^\circ = 55^\circ \\ \triangle FC_1A: \angle FC_1A &= \angle A + \angle F - 180^\circ = 75^\circ \\ \triangle BA_1C: \angle BA_1C &= \angle B + \angle C - 180^\circ = 50^\circ \\ \triangle CC_2D: \angle CC_2D &= \angle C + \angle D - 180^\circ = 50^\circ \\ \triangle FA_2E: \angle FA_2E &= \angle E + \angle F - 180^\circ = 80^\circ \\ \triangle BB_2A: \angle BB_2A &= \angle B + \angle A - 180^\circ = 50^\circ \\ \triangle A_1B_1C_1 &= (55^\circ; 75^\circ; 50^\circ) \quad \triangle A_2B_2C_2 = (50^\circ; 50^\circ; 80^\circ) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \triangle CB_1D: \angle CB_1D &= \angle C + \angle D - 180^\circ = 50^\circ \\ \triangle FC_1E: \angle FC_1E &= \angle E + \angle F - 180^\circ = 80^\circ \\ \triangle AA_1B: \angle AA_1B &= \angle A + \angle B - 180^\circ = 50^\circ \\ \triangle BC_2C: \angle BC_2C &= \angle C + \angle B - 180^\circ = 50^\circ \\ \triangle DA_2E: \angle DA_2E &= \angle D + \angle E - 180^\circ = 55^\circ \\ \triangle AB_2F: \angle AB_2F &= \angle A + \angle F - 180^\circ = 75^\circ \\ \triangle A_1B_1C_1 &= (50^\circ; 50^\circ; 80^\circ) \quad \triangle A_2B_2C_2 = (55^\circ; 75^\circ; 50^\circ) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \triangle BB_1C: \angle BB_1C &= \angle B + \angle C - 180^\circ = 50^\circ \\ \triangle CA_2D: \angle CA_2D &= \angle C + \angle D - 180^\circ = 50^\circ \\ \triangle DC_1E: \angle DC_1E &= \angle D + \angle E - 180^\circ = 55^\circ \\ \triangle FB_2E: \angle FB_2E &= \angle F + \angle E - 180^\circ = 80^\circ \\ \triangle AA_1F: \angle AA_1F &= \angle A + \angle F - 180^\circ = 75^\circ \\ \triangle AC_2B: \angle AC_2B &= \angle A + \angle B - 180^\circ = 50^\circ \\ \triangle A_1B_1C_1 &= (50^\circ; 55^\circ; 75^\circ) \quad \triangle A_2B_2C_2 = (50^\circ; 50^\circ; 80^\circ) \end{aligned}$$

Ответ: у одного треугольника углы: $50^\circ; 50^\circ; 80^\circ$, у другого углы: $55^\circ; 75^\circ; 50^\circ$

№7 Решения нет, О.И.

МН-620

Код участника
(заполняется организатором)



Олимпиадная работа

заключительного этапа

**«Всероссийская олимпиада школьников "Миссия
выполнима. Твоё призвание - финансист!" 2023-2024**

г.»

«(Математика 11 класс)»

Вариант № 2

«27 января 2024 г.»

Никакие другие записи на титульном листе делать не разрешается

Задание 1

~~Пусть А людей говорят по-английски~~

Пусть К людей говорят и по-английски, и по-французски,

А людей говорят только по-английски, (не говорят по-французски),

В людей говорят только по-французски (не говорят по-английски),

С людей не говорят ни по-английски, ни по-французски.

~~Не говорят~~ $A+C$ - не говорят по-французски $\frac{A+C}{B+C} = ?$
 $B+C$ - не говорят по-английски

Из условия следует:

$$\begin{cases} B = 0,04(B+C) \\ A = 0,2(A+C) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0,96B = 0,04C \\ 0,8A = 0,2C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 24B = C \\ 4A = C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 6B \\ C = 24B \end{cases}$$

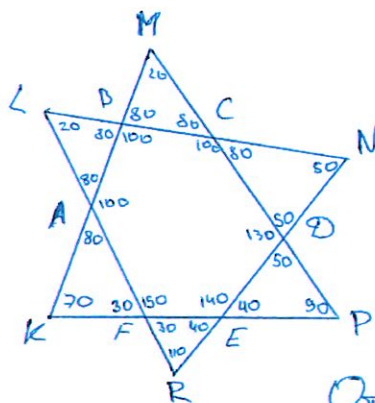
$$\frac{A+C}{B+C} = \frac{6B+24B}{B+24B} = \frac{30B}{25B} = \frac{6}{5} = 1,2$$

Ответ: в 1,2 раза.

+ (105)

Задание 6

Дано: $\angle A = \angle B = \angle C = 100^\circ$, $\angle D = 130^\circ$, $\angle E = 140^\circ$,
 $\angle F = 150^\circ$



Решение:

$\angle KFA + \angle LFP = 180^\circ$ как смежные $\Rightarrow \angle KFA = 30^\circ$

Аналогично $\angle KAF = 80^\circ$

$\angle K + \angle KAF + \angle KFA = 180^\circ$ как сумма углов $\triangle KAF \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle K = 70^\circ$

Аналогично для $\triangle ALB$, $\triangle BMC$, $\triangle CND$, $\triangle DPE$, $\triangle FER$:

$\angle L = 20^\circ$, $\angle M = 20^\circ$, $\angle N = 50^\circ$, $\angle P = 90^\circ$, $\angle R = 110^\circ$

Ответ: в (1) тр-ке: $70^\circ, 20^\circ, 90^\circ$

в (2) тр-ке: $20^\circ, 50^\circ, 110^\circ$

1600 р.м
30

М 11-620

Код участника

Всероссийская олимпиада школьников «Миссия выполнима. Твое призвание – финансист!» 2023/2024 уч.г.

Бланк проверки работы

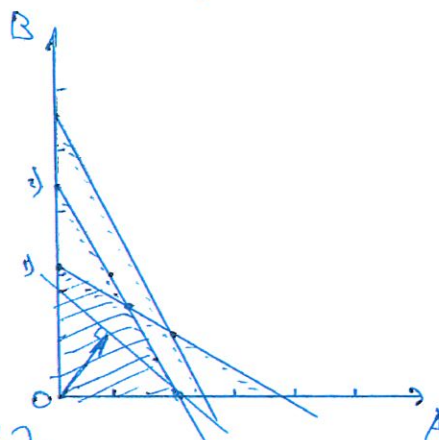
Математика 11 класс

№ задания	ФИО эксперта	Балл	ФИО эксперта	Балл	Итоговый балл
1	Ананькова	10	Гурьянов	10	10
2	Савина	10	Магомедов	10	10
3	Иванова	12	Магомедов	12	12
4	Иванова	0	Магомедов	0	0
5	Кремь	12	Урдов	12	12
6	Гузиев	3	Степанен	3	3
7	Кокнова	0	Степанен	0	0
8	Шашков	0	Фелинцев	0	0
ИТОГО					47

Задача 2.

$$\begin{cases} 3A + 5B \leq 11 \\ 4A + 3B \leq 10 \\ 7A + 4B \leq 18 \\ A + B \rightarrow \text{наиб.} \end{cases}$$

Воспользуемся методом линейного программирования:



$$\begin{aligned} 1) & 3A + 5B \leq 11 \\ & 5B \leq 11 - 3A \\ 2) & 4A + 3B \leq 10 \\ & 3B \leq 10 - 4A \\ 3) & 7A + 4B \leq 18 \\ & 4B \leq 18 - 7A \end{aligned}$$

Из графика видно, что пересекаются прямые (1) и (2).

Найдем координаты точки пересечения:

$$\begin{cases} 3A + 5B = 11 \\ 4A + 3B = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3A = 11 - 5B \\ 4A = 10 - 3B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4A = \frac{44}{3} - \frac{20}{3}B \\ 4A = 10 - 3B \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{44}{3} - \frac{20}{3}B = \frac{30}{3} - \frac{9}{3}B \\ 4A = 10 - 3B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{11}{3}B = \frac{14}{3} \\ 4A = 10 - 3B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = \frac{14}{11} \\ 4A = 10 - \frac{42}{11} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = \frac{14}{11} \\ 4A = \frac{110}{11} - \frac{42}{11} \end{cases}$$

$$\begin{cases} B = \frac{14}{11} \\ 4A = \frac{68}{11} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = \frac{14}{11} \\ A = \frac{17}{11} \end{cases} \left(\frac{17}{11}; \frac{14}{11} \right).$$

На ~~все~~ Прямые (1) и (3) пересекаются в точке (2; 1)

Прямые (2) и (3) пересекаются ниже оси OA.

Ответ: $2 \frac{9}{11} = \frac{31}{11}$

Мы ~~ищем~~ найдем наибольшее значение $A+B$, строим вектор.

Строим перпендикуляр к нему. Заштрихуем область, на графике, удовлетворяющую всем условиям. Параллельно переносим перпендикуляр к вектору, замечаем, что ~~последний раз~~ он пересекает одну точку, ~~первое~~ ^{последнюю область} пересечения (1) и (2) прямой. Зная далее, что ~~он~~ ^{она} ~~пересекает~~ ^{пересекается} на ~~дуге~~ ^{дуге}, $A+B = \frac{31}{11} = 2 \frac{9}{11}$

Задача 3

$$p(n) = \frac{(-3)^n}{3^n + 3^{17}} \Rightarrow p(n) = \frac{(-1)^n \cdot 3^n}{3^n + 3^{17}} = (-1)^n \cdot \frac{3^n}{3(3^{n-1} + 3^{16})} = (-1)^n \cdot \frac{3^{n-1}}{3^{n-1} + 3^{16}} =$$

$$= (-1)^n \cdot \frac{3^{n-1} + 3^{16} - 3^{16}}{3^{n-1} + 3^{16}} = (-1)^n \left(1 - \frac{3^{16}}{3^{n-1} + 3^{16}}\right).$$

$$p(n) = (-1)^n \left(1 - \frac{3^{16}}{3^{n-1} + 3^{16}}\right)$$

для чётных n : $p(n) = 1 - \frac{3^{16}}{3^{n-1} + 3^{16}}$

для нечётных n : $p(n) = \frac{3^{16}}{3^{n-1} + 3^{16}} - 1$

$$p(1) = \frac{3^{16}}{1 + 3^{16}} - 1$$

$$p(33) = \frac{3^{16}}{3^{32} + 3^{16}} - 1 = \frac{3^{16}}{3^{16}(3^{16} + 1)} - 1 = \frac{1}{3^{16} + 1} - 1$$

Заметим что $p(1) + p(33) = 2 + \left(\frac{1}{3^{16} + 1} - \frac{3^{16}}{3^{16} + 1}\right) = 2 + 1 = 1$

Докажем в общем виде:

1) для нечётных n :

$$p(n) = \frac{3^{16}}{3^{n-1} + 3^{16}} - 1$$

$$p(34-n) = \frac{3^{16}}{3^{33-n} + 3^{16}} - 1 = \frac{3^{16}}{3^{17-n}(3^{16} + 3^{n-1})} - 1 = \frac{3^{n-1}}{3^{16} + 3^{n-1}} - 1.$$

$$p(n) + p(34-n) = \frac{3^{16}}{3^{n-1} + 3^{16}} - 1 + \frac{3^{n-1}}{3^{16} + 3^{n-1}} - 1 = \frac{3^{16} + 3^{n-1}}{3^{16} + 3^{n-1}} - 2 = 1 - 2 = -1$$

2) для чётных n :

$$p(n) = 1 - \frac{3^{16}}{3^{n-1} + 3^{16}}, \quad p(34-n) = 1 - \frac{3^{16}}{3^{33-n} + 3^{16}} = 1 - \frac{3^{n-1}}{3^{16} + 3^{n-1}}$$

$$p(n) + p(34-n) = 2 - 1 = 1$$

$$p(1) + p(2) + \dots + p(33) = (p(1) + p(33)) + (p(2) + p(32)) + \dots + (p(16) + p(18)) + p(17) =$$

$$= 1 + 1 + \dots + 1 + p(17) = p(17), \text{ т.к. чётных и нечётных пар поровну}$$

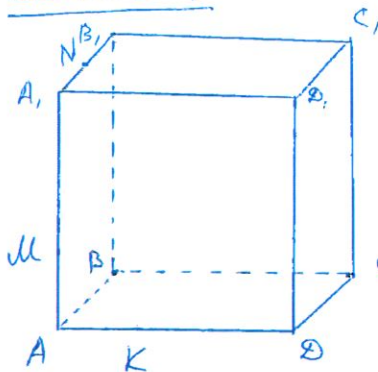
$$p(1) + p(2) + \dots + p(33) = p(17).$$

$$p(17) = \frac{(-3)^{17}}{3^{17} + 3^{17}} = -\frac{1}{2} \Rightarrow p(1) + p(2) + \dots + p(33) = -\frac{1}{2}.$$

Ответ: $-\frac{1}{2}$.

12

Задача 4



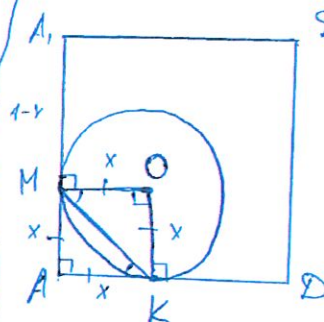
Дано: $ABCD, A_1B_1C_1D_1$, куб, $AB=1$

сфера ω пересекает B
 ω касается AD, AA_1, A_1B_1

Найти: радиус ω .

Решение: Пусть ω касается AD, AA_1, A_1B_1
в точках K, M, N соответственно.

1) Рассмотрим AA_1, D, D_1 :



$AK=AM$ как касательные

$MO=OK$ как радиусы.

$MO \perp AA_1, OK \perp AD$

как радиус, проведенный

в точку касания

$\angle MOK = 360^\circ - 3 \cdot 90^\circ = 90^\circ$

$AK \perp AA_1, MO \perp AA_1, \Rightarrow$

$\Rightarrow AK \parallel MO$ по признаку парал.

$\angle AKM = \angle OMK$ как внутр. накрест лежащие при $AK \parallel MO$ и

$\angle AMK = \angle MKO$ аналогично.

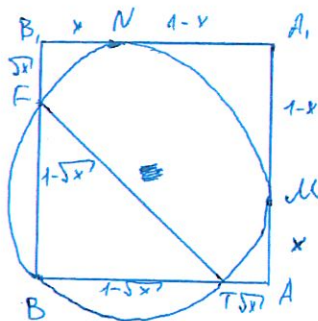
$\triangle AMK = \triangle OKM$ по второму и третьему углу (МК-общая)

$\Rightarrow MO=OK=AM=AK \Rightarrow AMOK$ - квадрат по признаку

(все углы 90° , стороны равны).

Пусть $AK=x$, тогда радиус тоже равен x .

2) Рассмотрим BB_1, A_1, A



Пусть $\omega \cap AB = T$
 $\omega \cap BB_1 = F$

$AM^2 = AT \cdot AB$ по Теореме о квадрате касательной.

$AB=1$ по усл. $\Rightarrow AM^2 = AT \Rightarrow AT = AM^2$

$AM=x \Rightarrow AT=x^2$, тогда $BT=1-x^2$

Аналогично $BF=x^2$, $BF=1-x^2$

$\angle B=90^\circ \Rightarrow TF$ - диаметр $\Rightarrow TF=2x$

Пусть R - искомый радиус ω .

$TF^2 = 2(1-x^2)^2 \Rightarrow R^2 = \frac{(1-x^2)^2}{2}$

$4x^2 = 2(1-x^2)^2 \Rightarrow 2x^2 = (1-x^2)^2$

$\sqrt{2}x = 1-x^2 \Rightarrow \sqrt{2}x + x^2 - 1 = 0$

$D = 1 + 4\sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{x^2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}}$

$x = \left(\frac{-1 + \sqrt{1+4\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}} \right)^2 = \frac{(-1 + \sqrt{1+4\sqrt{2}})^2}{8}$

Ответ: $\frac{(\sqrt{1+4\sqrt{2}}-1)^2}{8}$

Задача 8

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Всего мы имеем C_{100}^3 вариантов расстановки чисел x, y, z

$$C_{100}^3 = \frac{100!}{3!(100-3)!} = \frac{100!}{6 \cdot 97!} = \frac{98 \cdot 99 \cdot 100}{6} = 49 \cdot 33 \cdot 100 - \text{всего.}$$

Подходят нам те, в которых две или три подряд идут x, y, z .

Тогда мы возьмем два каких-нибудь числа из $\{x, y, z\}$.

Представим эти два числа, как ~~одну единицу~~ → одну комбинацию, неразрывную пару.

Тогда у нас получится: ~~x, y~~ ... $[x, y]$... $[z]$...

$$\text{Таких вариантов } C_{99}^2 = \frac{99!}{2!(99-2)!} = \frac{98 \cdot 99}{2} = 49 \cdot 99.$$

~~И еще должно быть~~

~~Получается~~ И еще должно быть на 3, ~~то~~ вглубь вариантов перестановки x, y, z .

$$3 \cdot C_{100}^3 = 49 \cdot 99 \cdot 100 - \text{всего.}$$

$$3 \cdot C_{99}^2 = 3 \cdot 49 \cdot 99 - \text{нам подходит.}$$

Тогда, чтобы проверка была подходящая нам последовательность, мы должны выписать все неподходящие и еще одну:

Решена группа задача

$$49 \cdot 99 \cdot 100 - 49 \cdot 99 \cdot 3 + 1 = 49 \cdot 99 (100 - 3) + 1 = 49 \cdot 99 \cdot 97 + 1 = 470548.$$

Ответ: 470548.

~~Задача 7~~ Задача 7

$f(x) = x^4 + 6x^3 + x$ должно иметь два ~~экстремума~~ минимума, тогда мы сможем провести ~~через~~ одну касательную к двум точкам.

~~МН~~

0

08

МН-407

Код участника
(заполняется организатором)



**Олимпиадная работа
заключительного этапа
«Всероссийская олимпиада школьников "Миссия
выполнима. Твоё призвание - финансист!" 2023-2024
г.»
«(Математика 11 класс)»**

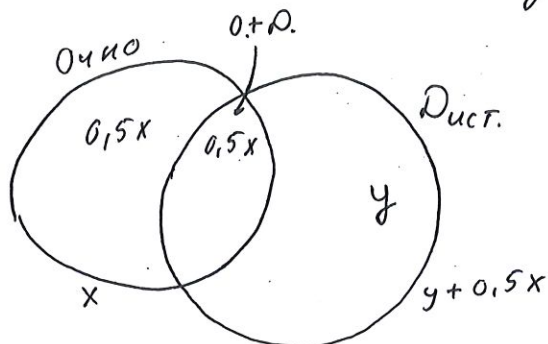
Вариант № 1

«27 января 2024 г.»

Никакие другие записи на титульном листе делать не разрешается

- ① Пусть x человек занимаются очно, тогда и очно и дистанционно занимается $0,5x$ человек

Пусть только дистанционно занимается y человек, всего занимающихся дистанционно — $(y + 0,5x)$ человек



Тогда занимающихся только очно $0,5x$ человек

Занимаются и очно, и дистанционно $0,5x$ или $0,6(y + 0,5x)$
 $0,5x = 0,6y + 0,3x \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 0,2x = 0,6y \Leftrightarrow x = 3y$

Часть студентов, занимающихся только очно:

$$\frac{0,5x}{0,5x + 0,5x + y} = \frac{0,5x}{x + y} = \frac{x}{2x + 2y} = \frac{3y}{6y + 2y} = \frac{3}{8} = 0,375$$

Ответ: 0,375

- ③ $p(n) = \frac{9^n}{9^n + 9^{50}}$ $p(1) + p(2) + p(3) + \dots + p(99) = ?$

$$p(1) = \frac{9}{9 + 9^{50}} = \frac{1}{1 + 9^{49}}$$

$$p(99) = \frac{9^{99}}{9^{99} + 9^{50}} = \frac{9^{49}}{9^{49} + 1}$$

$$p(1) + p(99) = \frac{1}{9^{49} + 1} + \frac{9^{49}}{9^{49} + 1} = \frac{9^{49} + 1}{9^{49} + 1} = 1$$

$$p(2) = \frac{9^2}{9^2 + 9^{50}} = \frac{1}{1 + 9^{48}}$$

$$p(98) = \frac{9^{98}}{9^{98} + 9^{50}} = \frac{9^{48}}{9^{48} + 1}$$

$$p(98) + p(2) = 1$$

$$p(50) = \frac{9^{50}}{9^{50} + 9^{50}} = 0,5$$

$$p(49) = \frac{9^{49}}{9^{49} + 9^{50}} = \frac{1}{1 + 9} = \frac{1}{10}$$

$$p(51) = \frac{9^{51}}{9^{51} + 9^{50}} = \frac{9}{9 + 1} = \frac{9}{10}$$

$$p(49) + p(51) = 1$$

Можно заметить закономерность, что $p(50+k) + p(50-k) = 1$, где $k \in [1; 49]$

$$\begin{aligned} p(50+k) + p(50-k) &= \frac{9^{50+k}}{9^{50+k} + 9^{50}} + \frac{9^{50-k}}{9^{50-k} + 9^{50}} = \frac{9^{50} \cdot 9^k}{9^{50} \cdot 9^k + 9^{50}} + \frac{9^{50}}{9^k + 9^{50}} = \\ &= \frac{9^k}{9^k + 1} + \frac{9^{50}}{9^{50} + 9^{50} \cdot 9^k} = \frac{9^k}{9^k + 1} + \frac{1}{1 + 9^k} = \frac{9^k + 1}{9^k + 1} = 1 \end{aligned}$$

$$\text{Тогда } p(1) + p(2) + p(3) + \dots + p(99) = p(50) + 1 \cdot \frac{99-1}{2} = \frac{1}{2} + 49 = 49,5$$

Ответ: 49,5

②
$$\begin{cases} A + 5B \geq 9 & (1) \\ 3A + 4B \geq 11 & (2) \\ 5A + 3B \geq 11 & (3) \end{cases}$$
 Наименьшее значение $A+B$ - ?

Если сложить между собой соответственно правые и левые части неравенств (1) и (3), а также (1), (2), и (3), получим:

$$\begin{cases} 6A + 8B \geq 20 \\ 3A + 4B \geq 11 \\ 9A + 12B \geq 31 \end{cases} \quad (\Rightarrow) \quad \begin{cases} 3A + 4B \geq 10 \\ 3A + 4B \geq 11 \\ 3A + 4B \geq 10\frac{1}{3} \end{cases}$$

Наименьшее возможное значение $3A + 4B = 11$

$$A = \frac{11}{3} - \frac{4}{3}B$$

Значение $A+B$ - наименьшее

$$A + B = \frac{3A + 4B - B}{3} = \frac{11 - B}{3}$$

при наибольшем возможном значении B

$$\begin{cases} \frac{11}{3} - \frac{4}{3}B + 5B \geq 9 \\ \frac{55}{3} - \frac{20}{3}B + 3B \geq 11 \end{cases} \quad (\Rightarrow) \quad \begin{cases} \frac{11}{3}B \geq \frac{16}{3} \\ \frac{11}{3}B \leq \frac{22}{3} \end{cases} \quad (\Rightarrow) \quad \begin{cases} B \geq \frac{16}{11} \\ B \leq 2 \end{cases}$$

Наибольшее значение B - это 2

$$\begin{cases} A = \frac{11}{3} - \frac{4}{3}B \\ B = 2 \end{cases} \quad (\Rightarrow) \quad \begin{cases} A = \frac{11-8}{3} = \frac{3}{3} = 1 \\ B = 2 \end{cases} \quad A+B = 1+2=3$$

Ответ: 3

10 б.

~~Сделано в 10:00~~

$$⑤ \quad \operatorname{arccotg} \frac{5x+3}{3x-5} + \operatorname{arccotg} \frac{x-1}{x+1} = x$$

Пусть $\operatorname{arccotg} \frac{5x+3}{3x-5} = a$, $\operatorname{arccotg} \frac{x-1}{x+1} = b$; $a, b \in (0; \pi)$
 $a+b \in (0; 2\pi)$
 $x \in (0; 2\pi)$

$$a+b=x \quad \operatorname{ctg}(a+b) = \operatorname{ctg}(x)$$

$$\operatorname{ctg}(a+b) = \frac{\operatorname{ctg} a \cdot \operatorname{ctg} b - 1}{\operatorname{ctg} a + \operatorname{ctg} b}$$

$$\operatorname{ctg} a = \operatorname{ctg} \left(\operatorname{arccotg} \frac{5x+3}{3x-5} \right) = \frac{5x+3}{3x-5}$$

$$\operatorname{ctg} b = \operatorname{ctg} \left(\operatorname{arccotg} \frac{x-1}{x+1} \right) = \frac{x-1}{x+1}$$

$$\operatorname{ctg}(a+b) = \frac{(5x+3)(x-1)}{(3x-5)(x+1)} - 1$$

$$\frac{5x+3}{3x-5} + \frac{x-1}{x+1}$$

$$= \frac{5x^2-2x-3-3x^2+2x+5}{5x^2+8x+3+3x^2-8x+5} = \frac{2x^2+2}{8x^2+8} = \frac{1}{4}$$

$$\begin{cases} \operatorname{ctg}(x) = \frac{1}{4} \quad (\Rightarrow) \\ 0 < x < 2\pi, x \neq \pi \end{cases} \begin{cases} x = \operatorname{arccotg} \frac{1}{4} \\ x = \operatorname{arccotg} \frac{1}{4} + \pi \end{cases}$$

Ответ: $\left\{ \operatorname{arccotg} \frac{1}{4}; \operatorname{arccotg} \frac{1}{4} + \pi \right\}$.

12 баллов

- ⑧ 1) Первым шагом стоит проверить последовательность x , состоящую из 1 числа (к примеру, 50) в которой все члены равны одному и тому же числу (к примеру, 50). Так мы узнаем кол-во членов, равных 50, а также кол-во членов меньше 50 и больше 50. Таким образом, нам известны все члены, равные 50, а про каждый из остальных мы знаем, что он принадлежит одному из двух промежутков ($1 \leq x_i \leq 49$ или $51 \leq x_i \leq 100$)
- 2) Вторым шагом стоит проверить последовательность x , где все x_i из промежутка $[1; 49]$ также равны одному и тому же числу a ($a \in (1; 49)$), а все x_i из промежутка $[51; 100]$ равны b ($b \in (51; 100)$). Таким образом, нам будут известны уже все члены, равные 50, a или b (3 числа), и каждый x_i из остальных будет принадлежать одному из 4 промежутков, т.к. числами a и b 2 промежутка разделились на двое каждый.
- 3) Таким образом, шаги нужно повторять до тех пор, пока в каждом из промежутков максимальное кол-во возможных вариантов чисел не будет равняться 3, потому что если мы знаем, что $t \leq x_i \leq t+2$, то каждый x_i в этом промежутке стоит приравнять к $t+1$, если $x_i < t+1$, то $x_i = t$, $x_i > t+1$, то $x_i = t+2$ либо $x_i = t+1$. Если в промежутке 2 числа, то мы также сможем за 1 шаг определить x_i .
- 4) Составим таблицу угаданных чисел и кол-во промежутков, на которые они разбивают мн-во чисел

шаг	Угад. чисел	Промежутков
1	1	2
2	3	4
3	7	8
4	15	16
5	31	32

Докажем, что требуется 5 шагов:
 1) Пусть предположим, что нужно 4 шага
 x - промежутков длиной 3, y - длиной 2
 $y = 16 - x$
 $15 + 3 \cdot x + 2(16 - x) = 100 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 3x - 2x + 15 + 32 = 100 \Leftrightarrow x = 53$, но
 всего промежутков 16, невозможно

- 2) Если мы проверили 31 число и получили 32 промежутка длиной 2 или 3 за 5 шагов: $y = 32 - x$

$$31 + 3x + 2(32 - x) = 100 \Leftrightarrow 3x - 2x + 31 + 64 = 100 \Leftrightarrow x = 5$$

$$y = 32 - 5 = 27$$

Значит, минимальное кол-во шагов чтобы определить все члены последовательности - 6, на 6-ом шаге мы проверим оставшиеся числа в промежутках длиной 2 или 3

Ответ: 6

Решение сразу задано ⑧

М 11-407

Код участника

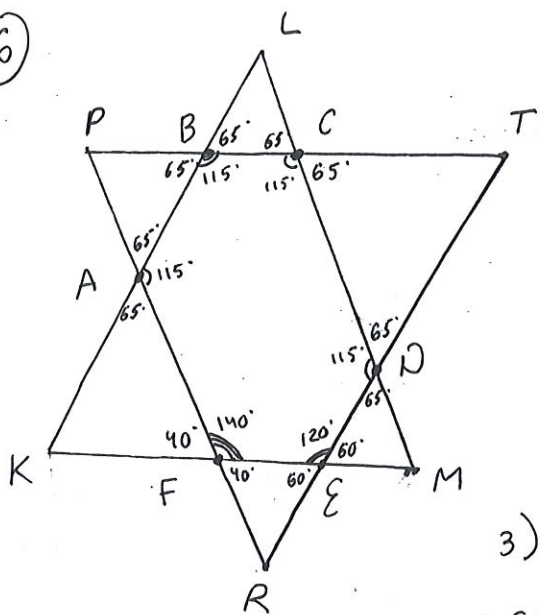
Всероссийская олимпиада школьников «Миссия выполнима. Твое призвание – финансист!» 2023/2024 уч.г.

Бланк проверки работы

Математика 11 класс

№ задания	ФИО эксперта	Балл	ФИО эксперта	Балл	Итоговый балл
1	Касимов	10	Гурьенков	10	10
2	Матюшков Р.М.	10	Савина С.В.	10	10
3	Мартин	12	Ужаков	12	12
4	Авсеев	0	Сиромова	0	0
5	Борисов	12	Кресин	12	12
6	Олегов	3	Степанов	3	3
7	Кочнов	0	Степанов	0	0
8	Шамов	0	Шемин	0	0
ИТОГО					47

6



$$\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 115^\circ \quad \angle E = 120^\circ \quad \angle F = 140^\circ$$

Пусть пересекаются треугольники $\triangle KLM$ и $\triangle PRT$

1) $\angle KAF = 180^\circ - \angle A = 180^\circ - 115^\circ = 65^\circ$
(как ~~смежные~~ углы)

$\angle PAB = \angle KAF = 65^\circ$ (как вертикальные углы)

2) Аналогично п.1) $\angle PBA = \angle LBC =$
 $= \angle LCB = \angle TCD = \angle TDC = \angle MDE = 65^\circ$

3) $\angle KFA = 180^\circ - \angle F = 180^\circ - 140^\circ = 40^\circ$
(как смежные углы)

$\angle EFR = \angle KFA = 40^\circ$ (как вертикальные углы)

4) $\angle DEM = 180^\circ - \angle E = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$ (как смежные углы)
 $\angle FER = \angle DEM = 60^\circ$ (как вертик. углы)

5) $\triangle APB$, $\triangle BLC$, $\triangle CTD$ – подобные по двум углам

Следовательно, $\angle APB = \angle BLC = \angle CTD$;

по теореме о сумме углов треугольника $\angle APB = 180^\circ - 65^\circ - 65^\circ = 50^\circ$
 $\angle APB = \angle BLC = \angle CTD = 50^\circ$

6) по теор. о сумме углов тр-ка B:

$\triangle AKF$: $\angle AKF = 180^\circ - 65^\circ - 40^\circ = 75^\circ$

$\triangle FRE$: $\angle FRE = 180^\circ - 60^\circ - 40^\circ = 80^\circ$

$\triangle DME$: $\angle DME = 180^\circ - 60^\circ - 65^\circ = 55^\circ$

7) В $\triangle KLM$: $\angle K = 75^\circ$, $\angle L = 50^\circ$, $\angle M = 55^\circ$

В $\triangle PRT$: $\angle P = 50^\circ$, $\angle R = 80^\circ$, $\angle T = 50^\circ$

Ответ: Iй треугольник – $50^\circ, 55^\circ, 75^\circ$

IIй треугольник – $50^\circ, 50^\circ, 80^\circ$

17 отсутствует

0

35

МЛГ11-19

Код участника
(заполняется организатором)



Олимпиадная работа

заключительного этапа

**«РЕГИСТРАЦИЯ ТОЛЬКО для победителей и
призеров ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНОГО ЭТАПА 2022-2023
учебного года "Миссия выполнима. Твоё призвание -
финансист!"»**

«(Математика 11 класс)»

Вариант № 2

«27 января 2024 г.»

Никакие другие записи на титульном листе делать не разрешается

МТГ И - 13

Код участника

Всероссийская олимпиада школьников «Миссия выполнима. Твое призвание – финансист!» 2023/2024 уч.г.

Бланк проверки работы

Математика 11 класс

№ задания	ФИО эксперта	Балл	ФИО эксперта	Балл	Итоговый балл
1	Амалько	10	Гурянов	10	10
2	Волкова	10	Тюфелев	10	10
3	Маркова	12	Александров	12	12
4	Авсеевич	0	Беломышев	0	0
5	Урюков	12	Волкова	12	12
6	Орехов	3	Берзин	3	3
7	Сенанян	0	Амелин	0	0
8	Клементьев	0	Щакин	0	0
ИТОГО					47

Код участника:

(заполняется организатором)

МАГ11-19

Задание 1

пч илт

Пусть a человек не говорят по-английски, тогда из них $0,04a$ человек говорят по-французски, и $a - 0,04a$ человек не говорят по-французски, зн. всего $a - 0,04a = 0,96a$ человек не говорят ни по-английски, ни по-французски.

Пусть b человек не говорят по-французски, тогда из них $0,2b$ человек говорят по-английски, и $b - 0,2b = 0,8b$ человек не говорят по-английски, т.е. всего $0,8b$ человек не говорят ни по-английски, ни по-французски, зн.

$$0,8b = 0,96a \quad | \cdot \frac{5}{4}$$

$b = 1,2a$, зн. число людей, не говорящих по-французски, в 1,2 раза больше числа людей, не говорящих по-английски.

Ответ: в 1,2 раза.

+10

Задание 2

$$\begin{cases} 3A + 5B \leq 11 \\ 4A + 3B \leq 10 \\ 7A + 4B \leq 18 \end{cases}$$

$$11(A+B) = 11A + 11B = (3A + 5B) + (8A + 6B) = (3A + 5B) + 2(4A + 3B) \leq 11 + 2 \cdot 10 = 31,$$

$$\text{зн. } A+B \leq \frac{31}{11} = 2\frac{9}{11}.$$

Если $A = \frac{17}{11}$ и $B = \frac{14}{11}$, то $3A + 5B = 3 \cdot \frac{17}{11} + 5 \cdot \frac{14}{11} = \frac{51 + 70}{11} = \frac{121}{11} = 11$,
 $4A + 3B = 4 \cdot \frac{17}{11} + 3 \cdot \frac{14}{11} = \frac{68 + 42}{11} = \frac{110}{11} = 10$, и $7A + 4B = 7 \cdot \frac{17}{11} + 4 \cdot \frac{14}{11} = \frac{119 + 56}{11} = \frac{175}{11} = 15\frac{10}{11} < 18$, то есть все 3 неравенства выполняются, и $A+B = \frac{17+14}{11} = \frac{31}{11} = 2\frac{9}{11}$, зн. $2\frac{9}{11}$ – наибольшее возможное значение выражения $A+B$.

Ответ: $2\frac{9}{11}$.

N°3

$$p(n) = \frac{(-3)^n}{3^n + 3^{17}}$$

Для любого $k \in \mathbb{Z}$ числа k и $34-k$ имеют одинаковую чётность, т.е. $(-1)^k = (-1)^{34-k}$ т.е. если $k \in \mathbb{N}$ и $1 \leq k \leq 16$, то

$$\begin{aligned} p(k) + p(34-k) &= \frac{(-3)^k}{3^k + 3^{17}} + \frac{(-3)^{34-k}}{3^{34-k} + 3^{17}} = \frac{(-1 \cdot 3)^k}{3^k + 3^{17}} + \frac{(-1 \cdot 3)^{34-k}}{3^{34-k} + 3^{17}} = \\ &= \frac{(-1)^k \cdot 3^k}{3^k(3^{17-k} + 1)} + \frac{(-1)^{34-k} \cdot 3^{34-k}}{3^{17}(3^{17-k} + 1)} = \frac{(-1)^k}{3^{17-k} + 1} + \frac{(-1)^{34-k} \cdot 3^{17-k}}{3^{17-k} + 1} = \frac{(-1)^k + (-1)^k \cdot 3^{17-k}}{3^{17-k} + 1} = \\ &= \frac{(-1)^k (3^{17-k} + 1)}{3^{17-k} + 1} = (-1)^k, \text{ т.е.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p(1) + p(2) + \dots + p(33) &= (p(1) + p(33)) + (p(2) + p(32)) + \dots + (p(16) + p(18)) + p(17) = \\ &= (p(1) + p(34-1)) + (p(2) + p(34-2)) + \dots + (p(16) + p(34-16)) + p(17) = \\ &= (-1)^1 + (-1)^2 + \dots + (-1)^{16} + p(17) = -1 + 1 - 1 + 1 - \dots - 1 + 1 + p(17) = p(17) = \frac{(-3)^{17}}{3^{17} + 3^{17}} = \\ &= \frac{-3^{17}}{2 \cdot 3^{17}} = -\frac{1}{2} = -0,5. \end{aligned}$$

Ответ: -0,5.

N°5

$$\operatorname{arctg} \frac{2x-1}{x+2} + \operatorname{arctg} \frac{x+3}{3x-1} = x$$

$x+2 \neq 0$ и $3x-1 \neq 0$, т.е. $x \neq -2$ и $x \neq \frac{1}{3}$

Если $x = \frac{\sqrt{6}}{2} + \sqrt{6}n$, $n \in \mathbb{Z}$, то

$$\operatorname{arctg} \frac{2x-1}{x+2} + \operatorname{arctg} \frac{x+3}{3x-1} = \frac{\sqrt{6}}{2} + \sqrt{6}n$$

$$\begin{aligned} \frac{2x-1}{x+2} &= \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} \frac{2x-1}{x+2}) = \operatorname{tg}(\frac{\sqrt{6}}{2} + \sqrt{6}n - \operatorname{arctg} \frac{x+3}{3x-1}) = \operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} \frac{x+3}{3x-1}) = \\ &= \frac{1}{\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} \frac{x+3}{3x-1})} = \frac{1}{\frac{x+3}{3x-1}} = \frac{3x-1}{x+3} \end{aligned}$$

$$\frac{2x-1}{x+2} = \frac{3x-1}{x+3} \quad | \cdot (x+2)(x+3) \neq 0$$

$$(2x-1)(x+3) = (x+2)(3x-1)$$

$$2x^2 + 6x - x - 3 = 3x^2 - x + 6x - 2$$

$x^2 = -1$, что невозможно, т.е. $x \neq \frac{\sqrt{6}}{2} + \sqrt{6}n$, $n \in \mathbb{Z}$, и $\operatorname{tg} x \neq$

$$\begin{aligned} \text{исключаем, т.е. } \operatorname{tg} x &= \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} \frac{2x-1}{x+2} + \operatorname{arctg} \frac{x+3}{3x-1}) = \\ &= \frac{\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} \frac{2x-1}{x+2}) + \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} \frac{x+3}{3x-1})}{1 - \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} \frac{2x-1}{x+2}) \cdot \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} \frac{x+3}{3x-1})} = \frac{\frac{2x-1}{x+2} + \frac{x+3}{3x-1}}{1 - \frac{2x-1}{x+2} \cdot \frac{x+3}{3x-1}} = \end{aligned}$$

№5 (продолжение)

$$= \frac{(2x-1)(3x-1) + (x+2)(x+3)}{(x+2)(3x-1)} = \frac{(2x-1)(3x-1) + (x+2)(x+3)}{(x+2)(3x-1) - (2x-1)(x+3)} =$$

$$= \frac{6x^2 - 2x - 3x + 1 + x^2 + 3x + 2x + 6}{3x^2 - x + 6x - 2 - 2x^2 - 6x + x + 3} = \frac{7x^2 + 7}{x^2 + 1} = \frac{7(x^2 + 1)}{x^2 + 1} = 7 \quad (x+2 \neq 0 \text{ и } 3x-1 \neq 0, \text{ а } x^2+1 > 0 \text{ при любом } x, \text{ зн. выражение можно сократить на } x^2+1)$$

$(x+2)(3x-1)$ и на x^2+1), зн. $x = \arctg 7 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

$-\frac{\pi}{2} < \arctg \frac{2x-1}{x+2} < \frac{\pi}{2}$ и $-\frac{\pi}{2} < \arctg \frac{x+3}{3x-1} < \frac{\pi}{2}$, зн. $-\pi < x < \pi$, т. к.

$-\pi = -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}$ и $\pi = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}$, зн. $x = \arctg 7 - \pi$ или $x = \arctg 7$.

Пусть $\arctg 7 = \alpha$, тогда $\tg \alpha = 7 = \tg(\arctg \frac{2\alpha-1}{\alpha+2} + \arctg \frac{\alpha+3}{3\alpha-1})$,
 $0 < \alpha < \pi$ и $\alpha > \arctg 1 = \frac{\pi}{4} > \frac{1}{2} > \frac{1}{3}$, т. е. $2\alpha-1 > 0$ и $3\alpha-1 > 0$, зн.

$\frac{2\alpha-1}{\alpha+2} > 0$ и $\frac{\alpha+3}{3\alpha-1} > 0$, т. е. $0 < \arctg \frac{2\alpha-1}{\alpha+2} < \frac{\pi}{2}$ и $0 < \arctg \frac{\alpha+3}{3\alpha-1} < \frac{\pi}{2}$, зн.

$0 < \arctg \frac{2\alpha-1}{\alpha+2} + \arctg \frac{\alpha+3}{3\alpha-1} < \pi$, но функция $y = \tg x$ принимает

различные значения при различных значениях x на интервале $(0; \pi)$ ($x \neq \frac{\pi}{2}$), зн. $\alpha = \arctg \frac{2\alpha-1}{\alpha+2} + \arctg \frac{\alpha+3}{3\alpha-1}$, т. е. $x = \arctg 7$ - решение уравнения.

Пусть $\arctg 7 - \pi = \beta$, тогда $\tg \beta = 7 = \tg(\arctg \frac{2\beta-1}{\beta+2} + \arctg \frac{\beta+3}{3\beta-1})$,
 $-\pi < \beta < 0$ и $\beta > -2$, зн. $2\beta-1 < 0$, $\beta+2 > 0$, $\beta+3 > 0$ и $3\beta-1 < 0$, т. е. $\frac{2\beta-1}{\beta+2} < 0$ и

$\frac{\beta+3}{3\beta-1} < 0$, зн. $\arctg \frac{2\beta-1}{\beta+2} \in (-\frac{\pi}{2}; 0)$ и $\arctg \frac{\beta+3}{3\beta-1} \in (-\frac{\pi}{2}; 0)$, зн.

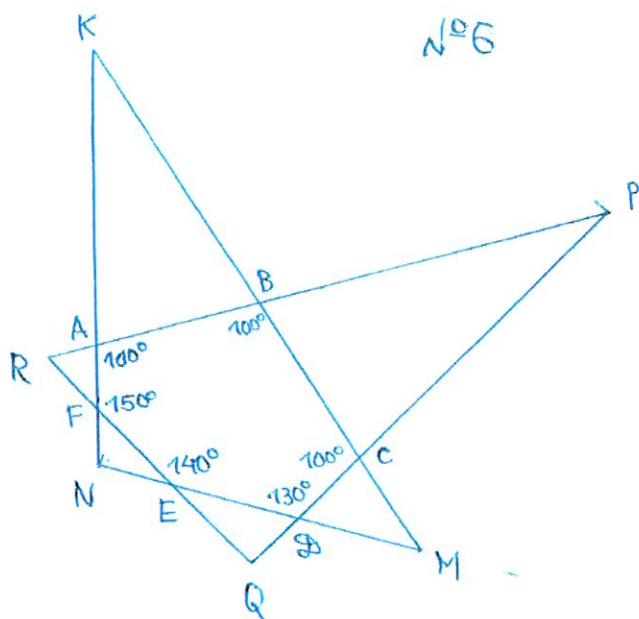
$-\pi < \arctg \frac{2\beta-1}{\beta+2} + \arctg \frac{\beta+3}{3\beta-1} < 0$, зн. аналогично предыдущему случаю $\beta = \arctg \frac{2\beta-1}{\beta+2} + \arctg \frac{\beta+3}{3\beta-1}$, т. е. $x = \arctg 7 - \pi$ - решение уравнения.

Ответ: $\arctg 7$; $\arctg 7 - \pi$.

Код участника:

(заполняется организатором)

УЛГ 11-19



Пусть $AF \cap BC = K$,
 $AB \cap CD = P$, $BC \cap DE = M$,
 $CD \cap EF = Q$, $DE \cap AF = N$ и
 $AB \cap EF = R$, тогда $\triangle KMN$ и
 $\triangle PQR$ пересекаются по
 шестиугольнику $ABCDEF$.
 $\angle MKN = 180^\circ - \angle BAK - \angle ABK =$
 $= (180^\circ - \angle BAK) + (180^\circ - \angle ABK) - 180^\circ =$
 $= \angle BAF + \angle ABC - 180^\circ =$

$= 100^\circ + 100^\circ - 180^\circ = 20^\circ$. Аналогично, $\angle KMN = \angle BCD + \angle CDE - 180^\circ =$
 $= 100^\circ + 130^\circ - 180^\circ = 50^\circ$, $\angle KMN = \angle AFE + \angle DEF - 180^\circ = 150^\circ + 140^\circ - 180^\circ = 110^\circ$,
 $\angle QPR = \angle ABC + \angle BCD - 180^\circ = 100^\circ + 100^\circ - 180^\circ = 20^\circ$, $\angle PQR = \angle DEF + \angle CDE - 180^\circ =$
 $= 140^\circ + 130^\circ - 180^\circ = 90^\circ$ и $\angle PRQ = \angle BAF + \angle AFE - 180^\circ = 100^\circ + 150^\circ - 180^\circ = 70^\circ$, т.е.
 углы $\triangle KMN$ равны 20° , 50° и 110° , а углы $\triangle PQR$ — 20° , 90° и 70° .
 Ответ: 20° , 50° и 110° ; 20° , 90° и 70° .

⊕ 25

Рассмотрен только один случай.

№8 нет

№8 нет

№7 нет

МН-889

Код участника
(заполняется организатором)



**Олимпиадная работа
заключительного этапа
«Всероссийская олимпиада школьников "Миссия
выполнима. Твоё призвание - финансист!" 2023-2024
г.»
«(Математика 11 класс)»**

Вариант № 2

«27 января 2024 г.»

Никакие другие записи на титульном листе делать не разрешается

М 11-889

Код участника

Всероссийская олимпиада школьников «Миссия выполнима. Твое призвание – финансист!» 2023/2024 уч.г.

Бланк проверки работы

Математика 11 класс

№ задания	ФИО эксперта	Балл	ФИО эксперта	Балл	Итоговый балл
1	Анненкова Т.Г.	10	Гурьевская И.Э.	10	10
2	Воздиль	10	Зайчиков	10	10
3	Маркова	12	Ухасова	12	12
4	Уфимов	0	Сунин	0	0
5	Бонин	11	Кремль	11	11
6	Гундас	3	Ковалев	3	3
7	Мостованова	0	Липа- кина	0	0
8	Игнатьев	0	Цапка	0	0
ИТОГО					46

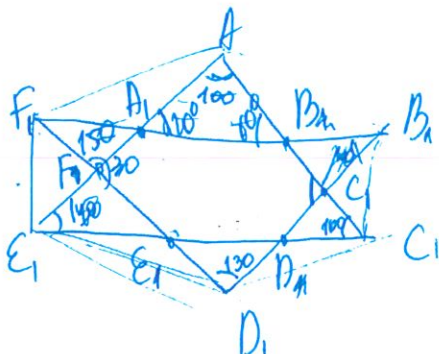
Код участника:

(заполняется организатором)

M-11-889

Лист № 1

Задача 6



- 1) $\angle A_1AB = 180^\circ - \angle A = 80^\circ$ (т.к. смежн.)
- 2) $\angle A_1BA = 180^\circ - \angle B = 80^\circ$ (т.к. смежн.)
- 3) $\angle B_1CB = 180^\circ - \angle C = 80^\circ$ (т.к. смежн.)
- 4) $\angle C_1DC = 180^\circ - \angle D = 50^\circ$ (т.к. смежн.)
- 5) $\angle D_1ED = 180^\circ - \angle E = 40^\circ$ (т.к. смежн.)
- 6) $\angle E_1FE = 180^\circ - \angle F = 30^\circ$ (т.к. смежн.)
- 7) $\angle A_1AB = \angle F_1AF = 80^\circ$ (т.к. вертикальные углы)
- 8) $\angle E_1FE = \angle F_1FA = 30^\circ$ (т.к. вертикальные углы)
- 9) $\angle E_1EF = \angle D_1ED = 40^\circ$ (т.к. вертикальные углы)
- 10) $\angle EDD_1 = \angle EED_1 = 80^\circ$ (т.к. вертикальные углы)
- 11) $\angle DCC_1 = \angle BCB_1 = 80^\circ$ (т.к. вертикальные углы)
- 12) $\angle CDB_1 = \angle ABA_1 = 80^\circ$ (т.к. вертикальные углы)
- 13) $\angle AA_1B = 180^\circ - 2 \cdot 80^\circ = 20^\circ$ (сумма углов в тр. $\triangle A_1AB$)
- 14) $\angle BB_1C = 180^\circ - 2 \cdot 80^\circ = 20^\circ$ (сумма углов в тр. $\triangle B_1BC$)
- 15) $\angle CD_1D = 180^\circ - 50^\circ - 80^\circ = 50^\circ$ (сумма углов в $\triangle CDD_1$)
- 16) $\angle DD_1E = 180^\circ - 50^\circ - 40^\circ = 90^\circ$ (сумма углов в $\triangle DDE$)
- 17) $\angle EE_1F = 180^\circ - 40^\circ - 30^\circ = 110^\circ$ (сумма углов в $\triangle DEF$)
- 18) $\angle FF_1A = 180^\circ - 30^\circ - 80^\circ = 70^\circ$ (сумма углов в $\triangle FFA$)

Ответ: $20^\circ; 50^\circ; 20^\circ; 90^\circ; 110^\circ; 70^\circ$

1 вар. реш.
3 д.

и 7 отсутствует

см лист № 2

Код участника:

(заполняется организатором)

М/11-889

Лист № 2

Задача 2

$$\begin{cases} 3A + 5B \leq 11 & (1) \\ 4A + 3B \leq 10 & (2) \\ 4A + 4B \leq 18 & (3) \end{cases} \quad \begin{cases} 4A + 8B \leq 24 & 4B \leq 3 \\ 7A + 4B \leq 18 & B \leq \frac{3}{4} \end{cases} \rightarrow \text{подставим в выражение и получим } A \leq \frac{15}{7}$$

2) Чтобы найти максимальную сумму, сумму которую имеют A и B должны быть тоже максимальными. Т.к. $B \leq \frac{3}{4}$, то получим определенное равенство, тогда и с числом $A = \frac{15}{7}$, тогда мы получаем след. сумму:

$$A + B = \frac{3}{4} + \frac{15}{7} = \frac{181}{28}$$

Ответ: максимальная сумма 81

Задача 13

Рассмотрим случаи:

$$1) \pi(k) = \frac{-3^k}{3^k + 3^{17}} \\ \pi(34-k) = \frac{(-3)^{34-k}}{3^{(34-k)} + 3^{17}}$$

$$\text{Пусть } k:2 \Rightarrow 34-k; \pi(k) + \pi(34-k) = \frac{3^k}{3^k + 3^{17}} + \frac{3^{34-k}}{3^{34-k} + 3^{17}} = \frac{3^k \cdot 1 + 3^{17-k} \cdot 2}{3^k \cdot (1+3^{17-k}) + 3^{17} \cdot (1+3^{17-k})} = \frac{1+3^{17-k}}{1+3^{17-k}} = 1$$

2) Пусть $k \neq 2 \Rightarrow 34-k$ не делится на k :

$$\pi(k) + \pi(34-k) = \frac{(-3)^k}{3^k + 3^{17}} + \frac{(-3)^{34-k}}{3^{34-k} + 3^{17}} = \frac{3^k \cdot (-1) + 3^{34-k} \cdot (-1)}{3^k + 3^{17} + 3^{34-k} + 3^{17}} = \frac{-1 + 3^{17-k} \cdot 3^k}{1 + 3^{17-k} + 3^k + 3^{17-k} \cdot 3^k} = \frac{-(1+3^{17-k})}{(1+3^{17-k})(1+3^k)} = -1$$

Сигурно...

См № 3

$$p(1) + p(33) = -1$$

$$p(2) + p(32) = -1$$

$$p(3) + p(31) = -1$$

$$p(4) + p(30) = -1$$

$$p(16) + p(18) = 1$$

$$p(1) + p(2) \dots p(33) = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots \quad p(17) = \frac{-3^{14}}{3^{14} + 3^{14}} = -\frac{1}{2}$$

Ответ: $-\frac{1}{2}$

Задача 5

1) $\arctg \frac{2x-1}{x+2} + \arctg \frac{x+3}{3x-1} = x$

2) Так как для любого $\arctg \frac{2x-1}{x+2} \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$, и $\arctg \frac{x+3}{3x-1} \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$, то левая часть уравнения $\in [-\pi; \pi]$, то $x \in [-\pi; \pi]$, $\Rightarrow$

$$\left(\frac{2x-1}{x+2} + \frac{x+3}{3x-1} \right) / \left(1 - \frac{2x-1}{x+2} \cdot \frac{x+3}{3x-1} \right) = \frac{2x-1}{x+2} \cdot \frac{x+3}{3x-1} = \operatorname{tg} x \quad (\text{т.к. мы ищем } x \text{ из обеих частей}) \Rightarrow$$

$$\frac{6x^2 - 5x + 1 + x^2 + 5x + 6}{3x^2 + 5x - 2 - (2x^2 + 5x - 3)} = \operatorname{tg} x \Rightarrow \frac{7 \cdot (x^2 + 1)}{(x^2 + 1)} = \operatorname{tg} x \Rightarrow \text{то есть}$$

3) $x = \arctg 7 + \pi k, k \in \mathbb{Z}$, но согласно ограничению по x , тогда $x_1 = \arctg 7$ или $x_2 = \arctg 7 - \pi + \arctg 7$

4) Следовательно, проверим: сделаем проверку на x_1 и x_2 ,

Можно сделать вывод, что $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \beta$; так как α и β лежат в одной области, то $\alpha = \beta$.
Но в данном случае $x_1 = \arctg 7 > 0$ и πk может отличаться только x_2 ,
или $x_2 = -\pi + \arctg 7 < 0 \Rightarrow$ Можем доказать, что $\arctg \frac{2x-1}{x+2} + \arctg \frac{x+3}{3x-1} > 0$;

I. $\arctg(7) > \arctg(\sqrt{3}) > \frac{\pi}{3} \Rightarrow \frac{2x-1}{x+2} > 0$

Код участника:

(заполняется организатором)

M-11-889

Лист № 4

$$\frac{x_1 + 3}{3x_1 - 1} > 0 \Rightarrow \text{Каждый астролог больше знает, что з.т. ф. (и их функции)}$$

II По второй части мог получиться астролог(7), при $x = x_1$, уравнение верно.

$$x = x_2 \Rightarrow x = x_2$$

Ответ: $x = \text{астролог}(7)$; $x_2 = \text{астролог} - n + \text{астролог}(7)$ (т. 003?)
Аналогично доказывается, что левая часть < 0 , при $x \neq x_2$

Задача №2

$$3A + 5B \leq 11$$

Задача №1



1) Обозначим 1-люди, которые говорят только на английском; 2-только на французском, 3-не относятся ни к одной группе

2) Попытка системы уравнений:

$$\begin{cases} 2 = 0,04 \cdot (2+3) \\ 1 = 0,02 \cdot (1+3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0,96 \cdot 2 = 0,04 \cdot 3 \\ 0,8 \cdot 1 = 0,2 \cdot 3 \end{cases} \Rightarrow$$

1/4

$$\begin{cases} 1 = \frac{1}{4} \cdot 3 \\ 2 = \frac{1}{24} \cdot 3 \end{cases} \Rightarrow \frac{1+3}{2+3} \Rightarrow \frac{5 \cdot 3}{4} = \frac{15}{4} = 3,75$$

Ответ: 1, 2 раз

Задача №2

$$\begin{cases} 3A + 5B \leq 11 \\ 4A + 3B \leq 10 \\ 7A + 4B \leq 18 \end{cases}$$

1) Пусть $S = A + B \Rightarrow \max S$
2) $2A + 5S \leq 11$ (1) и (1) и (2) мы получаем
3) $A + 3S \leq 10$ (2)
3) $3A + 4S \leq 18$ (3); $11S \leq 31$

$S \leq \frac{31}{11}$; осталось привести пример и ответ будет $\frac{31}{11}$

См. лист № 5

Код участника:

M-11-889

(заполняется организатором)

Лист № 5

3) Если $S \leq \frac{31}{11}$, то

$$\begin{cases} -22A + 155 \leq 121 \\ 11A + 83 \leq 110 \\ 33A + 124 \leq 198 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} A \geq \frac{17}{11} \\ A \leq \frac{17}{11} \\ A \leq \frac{74}{33} \end{cases}$$

AK

105

$A = \frac{17}{11}$, следовательно $B = \frac{14}{11}$

4) Мы можем убедиться, что A и B подходит ответ $\frac{31}{11}$

Ответ: $\frac{31}{11}$

Задача 8

Решите из всех перестановок возьмем все, чтоб 3 или 2 из $\{x; y; z\}$ рядом стояли и прибавим +1, в другом случае будет гарантированно больше или равно 1, удовлетвор. условию. Всего перестановок, где x, y стоят рядом $98! \cdot 2$, потому что способа выбрать x, y из 400 чисел 99. Расставить все числа кроме x и y можно $98!$. В паре x и y могут стоять, как xy и как yx , потому что умножаем еще на два. Но посчитаем и случай, когда x и y все вместе стоят, потому что возьмем и посчитаем отдельно:

~~$(98! \cdot 3! + 98! \cdot 2 \cdot 98! - 98! \cdot 3!)$~~

$(98! \cdot 3! \cdot 2 \cdot 98! - 98! \cdot 3!)$

2) Попробуем вариант, когда $(x, y); (y, z); (z, x)$ вместе стоят + учитываем случаи всех (всех).

⊖ об остальных

12:58-13:
92

Мн-415

Код участника
(заполняется организатором)



**Олимпиадная работа
заключительного этапа
«Всероссийская олимпиада школьников "Миссия
выполнима. Твоё призвание - финансист!" 2023-2024
г.»
«(Математика 11 класс)»**

Вариант № 2

«27 января 2024 г.»

Никакие другие записи на титульном листе делать не разрешается

2111-415

Код участника

Всероссийская олимпиада школьников «Миссия выполнима. Твое призвание – финансист!» 2023/2024 уч.г.

Бланк проверки работы

Математика 11 класс

№ задания	ФИО эксперта	Балл	ФИО эксперта	Балл	Итоговый балл
1	Малышева	10	Гурьянов	10	10
2	Трузеня	2	Волкова	2	2
3	Иванова	12	Магомедов	12	12
4	Иванова	0	Магомедов	0	0
5	Волкова	11	Израев	11	1
6	Трузеня	3	Олегов	3	3
7	Алиахметов	0	Генанг	0	0
8	Трущенко	0	Щаечев	0	0
ИТОГО					28

№7

Пусть чисто говорящих на французском, но не на английском, будет x

чисто говорящих на английском, но не французском: y

Тогда всего всего не говорящих по Англ. 25.

А не говорящих не на одном языке 25x - x = 24x

Не говорящих по ^{Франц.} Англ. все: 5y

Тогда не говорящих на на одном языке: $5y - y = 4y$

Значит $4y = 24x$

$$y = 6x$$

Тогда ~~чисто говорящих~~ чтобы найти все скажем
больше людей не знают французский, чем англ:

$$\frac{5y}{25x} = \frac{y}{5x} = \frac{6x}{5x} = \boxed{1,2} \quad + (10\%)$$

Ответ: 1,2

№8 все

$$\begin{cases} 3A + 5B \leq 27 \\ 2A + 4B \leq 20 \end{cases} \quad \sqrt{2}$$

$$11A + 11B \leq 37$$

$$A + B \leq \frac{37}{11}$$

Пусть $3A + 5B = 27$ и $4A + 3B = 20$
тогда $A = \frac{27}{11}$; $B = \frac{24}{11}$ (подбор)

Подставим это значение в
третье неравенство;

$$\frac{2 \cdot 27 + 4 \cdot 24}{11} = \frac{114 + 96}{11} = \frac{210}{11} \leq 28$$

подходит

Значит A может быть $\frac{27}{11}$ и B тогда может быть

не обосновано,
это это наиб.
значение

$$A + B = \frac{27}{11} + \frac{24}{11} = \frac{51}{11} \leq \frac{37}{11}$$

Значит при $A = \frac{27}{11}$, $B = \frac{24}{11}$ достигается
максимальное значение $\frac{37}{11}$

Ответ: $\frac{37}{11}$

25

Код участника:

(заполняется организатором) МН-415

№3

Структурируем:

$$(p(1) + p(33)) + (p(2) + p(32)) + \dots + (p(16) + p(18)) + p(17)$$

$$\text{или выразим } p(k) + p(34-k):$$

$$p(k) + p(34-k) = \frac{1^k + (-3)^{34-k}}{1 + 3^{34-k}} + \frac{(-1)^k + (-3)^{17-k}}{1 + 3^{17-k}} =$$

$$1) \text{ Если } k \text{ — чётное}$$

$$\frac{1^k + 3^{17-k}}{1 + 3^{17-k}} = 1$$

$$2) \text{ Если } k \text{ — нечётное}$$

$$\frac{-1^k - 3^{17-k}}{1 + 3^{17-k}} = (-1)$$

$$\text{тогда } p(1) + p(33) = (-1)$$

$$p(2) + p(32) = 1 \quad \text{и аналогично}$$

Значит:

$$(p(1) + p(33)) + (p(2) + p(32)) + \dots + (p(16) + p(18)) + p(17) =$$

$$= (-1) + 1 + (-1) + \dots + 1 + p(17) = p(17) = \frac{(-3)^{17}}{3^{17} + 3^{17}} =$$

$$= \frac{-3^{17}}{2 \cdot 3^{17}} = \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$\text{Ответ: } -\frac{1}{2}$$

$$\arctg \left(\frac{2x-1}{x+2} \right) + \arctg \left(\frac{x+3}{3x-1} \right) = x$$

$$\operatorname{tg}(x) = \operatorname{tg} \left(\arctg \left(\frac{2x-1}{x+2} \right) + \arctg \left(\frac{x+3}{3x-1} \right) \right) = \text{OD3-?}$$

$$= \frac{\operatorname{tg} \left(\arctg \left(\frac{2x-1}{x+2} \right) \right) + \operatorname{tg} \left(\arctg \left(\frac{x+3}{3x-1} \right) \right)}{1 - \operatorname{tg} \left(\arctg \left(\frac{2x-1}{x+2} \right) \right) \operatorname{tg} \left(\arctg \left(\frac{x+3}{3x-1} \right) \right)}$$

$$= \frac{\frac{2x-1}{x+2} + \frac{x+3}{3x-1}}{1 - \frac{2x-1}{x+2} \cdot \frac{x+3}{3x-1}} = \frac{(2x-1)(3x-1) + (x+3)(x+2)}{(x+2)(3x-1) - (2x-1)(x+3)}$$

$$= \frac{7x^2 + 7}{x^2 + 1} = 7 = \operatorname{tg}(x)$$

$$x = \arctg 7 + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

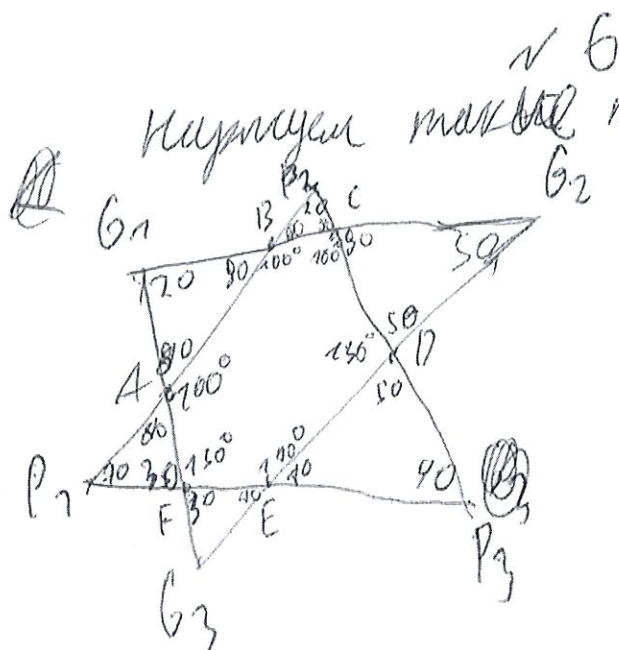
Кумаро ymmybale OD 2' ymo arctg d ∈ (-π; π)
Значит $x = \arctg \left(\frac{2x-1}{x+2} \right) + \arctg \left(\frac{x+3}{3x-1} \right) \in (-2\pi; 2\pi)$

$$\text{тогда } \begin{cases} x = \arctg 7 \\ x = -\pi + \arctg 7 \end{cases}$$

Ответ: $\arctg 7$; $-\pi + \arctg 7$

Код участника:

(заполняется организатором) МН-415



Обозначим углы треугольника как на рисунке

$\angle G_1AB = \angle P_1AF$ (вертикальные)

$\Rightarrow \angle G_1AB = \frac{180 - 70}{2} = 55 = \angle P_1A$

1) Аналогично делаем с углами B, C, D, E, F

$$\angle P_1FA = \angle G_3FE = 30^\circ$$

$$\angle P_1FA = \angle G_3FE = 30^\circ$$

$$\angle FEG_3 = \angle DEP_3 = 40^\circ$$

$$\angle EDP_3 = \angle CDG_2 = 50^\circ$$

$$\angle BCP_2 = \angle DCG_2 = 80^\circ$$

$$\angle G_1BA = \angle P_2BC = 80^\circ$$

2) $\angle P_1 = \angle P_1AF + 180 - \angle P_1AF - \angle P_1FA = 70$

Аналогично находим $\angle P_2, \angle P_3; \angle G_1, \angle G_2, \angle G_3$:

$$\angle P_3 = 90; \angle P_2 = 20; \angle G_1 = 20; \angle G_2 = 50; \angle G_3 = 70$$

3) $\angle P_1 + \angle P_2 + \angle P_3 = 90 + 20 + 70 = 180 +$

$$\angle G_1 + \angle G_2 + \angle G_3 = 20 + 50 + 70 = 140 +$$

Значит такие треугольники существуют с такими углами, $\angle P_1, \angle P_2, \angle P_3, \angle G_1, \angle G_2, \angle G_3$ — искомого угла

Вар. решен — 3✓.

Ответ: 90; 70; 20; 70; 50; 20

н 4 нег

М 11-891.

Код участника
(заполняется организатором)



**Олимпиадная работа
заключительного этапа
«Всероссийская олимпиада школьников "Миссия
выполнима. Твоё призвание - финансист!" 2023-2024
г.»**

«(Математика 11 класс)»

Вариант № 2 (звв)

«27 января 2024 г.»

Никакие другие записи на титульном листе делать не разрешается

№ 11 - 891

Код участника

Всероссийская олимпиада школьников «Миссия выполнима. Твое призвание – финансист!» 2023/2024 уч.г.

Бланк проверки работы

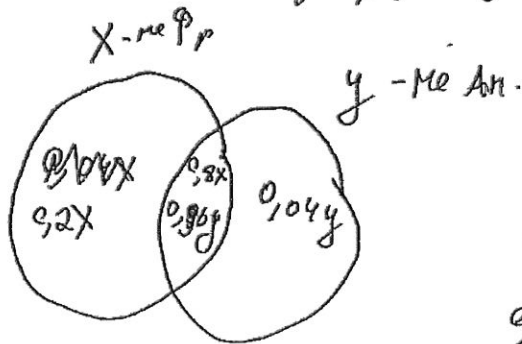
Математика 11 класс

№ задания	ФИО эксперта	Балл	ФИО эксперта	Балл	Итоговый балл
1	Васильева	10	Гурьев	10	10
2	Гордеев	10	Зайцев	10	10
3	Мам	12	Жакаев	12	12
4	Мам	0 отс.	Жакаев	0	0
5	Урозов	12	Волков	12	12
6	Овехов	3	Степанов	3	3
7	Степанов	0	Минин	0	0
8	Великий	0	Царев	0	0
ИТОГО					47

ММ 1 из 7

М1.

x - число людей, говорящих по-французски, y - число людей, говорящих по-английски
изобразим условие с помощью кругов Эйлера:



Тогда людей, не говорящих ни на Ан, ни на Фр. $0,96x + 0,96y - 0,08x = 0,88x + 0,96y$
приравняем значения:

$$0,88x = 0,96y \Leftrightarrow x, y \in \mathbb{N} \quad x = \frac{0,96}{0,88} \cdot y \Leftrightarrow$$

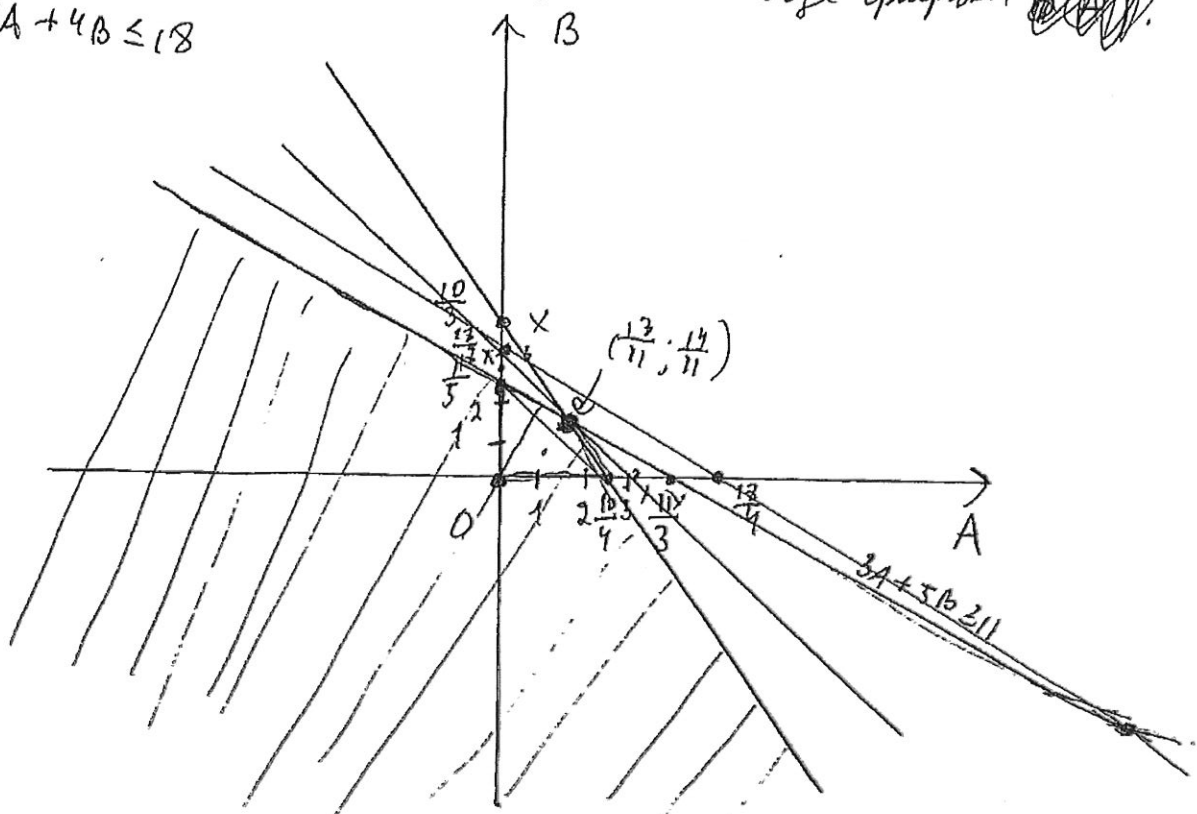
$x = 1,2y$ $\Rightarrow$ человек, не говорящий по-французски

в 1,2 раза больше, чем людей, не говорящих по-английски.

Ответ: в 1,2 раза. 105.

$$\begin{cases} 3A + 5B \leq 11 \\ 4A + 3B \leq 10 \\ 5A + 4B \leq 18 \end{cases}$$

изобразим условие в виде графиков



ит 2 из 7

12 - примерный

параллельны, значит, они пересекаются в точке a , иными же этих 3-х прямых.

Заметим, что нулевым значением z является $z = 0$, из которого,

$$\begin{cases} 3A + 5B \leq 11 \\ 4A + 3B \leq 10 \end{cases} \quad \text{тогда максимум}$$

на (A, B) .

Можем переписать $3A + 5B = 11$ и $4A + 3B = 10$.

Заметим, что $(A, B) = \left(\frac{13}{11}, \frac{14}{11}\right)$

или $A + B \leq X$, отсюда можно увидеть график $A + B = X$;

или $\max(A + B)$ достигается при равенстве.

$A = 0 \Rightarrow B = X$; $B = 0 \Rightarrow A = X$; очевидно из графика, что максимальное

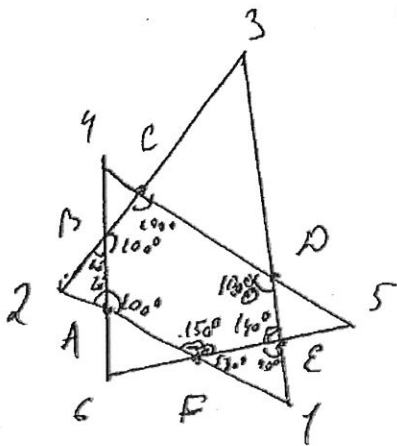
X будет достигаться при пересечении графика через точку пересечения

прямых $(A, B) = \left(\frac{13}{11}, \frac{14}{11}\right) \Rightarrow \max(A + B) = \frac{13}{11} + \frac{14}{11} = \frac{27}{11}$

13.

$$p(n) = \frac{(-3)^n}{3^n + 3^{13}}; \quad p(n+13) = \frac{(-3)^{n+13}}{3^{n+13} + 3^{13}} = \frac{(-3)^n}{3^n + 1}$$

16. Пересечение двух треугольников является четырехугольником $\Rightarrow$ каждый из четырех треугольников, образованных пересечением, является четырехугольником.



$$\angle FCE = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$$

$$\angle CEF = 180^\circ - 140^\circ = 40^\circ \Rightarrow \angle 1 = 180^\circ - (30^\circ + 40^\circ) = 110^\circ$$

$$\angle 2 \text{ в } \triangle ABE = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$$

$$\angle 2 \text{ в } \triangle BCD = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ \Rightarrow \angle 2 = 180^\circ - (80^\circ + 80^\circ) = 20^\circ$$

$$\angle 3 \text{ в } \triangle ACD = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ \Rightarrow \angle 3 = 180^\circ - (80^\circ + 50^\circ) = 50^\circ$$

$$\angle 4 \text{ в } \triangle BCF = 180^\circ - 130^\circ = 50^\circ$$

Мит 3.12.17.

№(примеры):

$$\left. \begin{aligned} \angle 4 BC &= 100^\circ - 100^\circ = 80^\circ \\ \angle 4 CB &= 100^\circ - 100^\circ = 80^\circ \end{aligned} \right\} \Rightarrow \angle 4 = 180^\circ - (80^\circ + 80^\circ) = 20^\circ$$

$$\left. \begin{aligned} \angle 5 DE &= 120^\circ - 130^\circ = 50^\circ \\ \angle 5 ED &= 180^\circ - 140^\circ = 40^\circ \end{aligned} \right\} \Rightarrow \angle 5 = 180^\circ - (50^\circ + 40^\circ) = 90^\circ$$

$$\left. \begin{aligned} \angle 6 AF &= 180^\circ - 109^\circ = 71^\circ \\ \angle 6 FA &= 130^\circ - 15^\circ = 115^\circ \end{aligned} \right\} \Rightarrow \angle 6 = 180^\circ - (71^\circ + 115^\circ) = 4^\circ$$

$\Rightarrow$ 2 группы сфинкс $110^\circ, 20^\circ, 50^\circ$ и $20^\circ, 90^\circ, 70^\circ$ при перемещении образуют треугольники с углами $\angle A = \angle B = \angle C = 100^\circ$; $\angle D = 130^\circ$; $\angle E = 140^\circ$; $\angle F = 80^\circ$
 Ответ: $(110^\circ, 20^\circ, 50^\circ)$ и $(20^\circ, 90^\circ, 70^\circ)$ | $\oplus$ 35

№3.

$$p(n) = \frac{(-3)^n}{3^n + 3^{12}}; \quad p(n+12) = \frac{(-3)^{n+12}}{3^{n+12} + 3^{12}} = \frac{-3^{12} \cdot (-3)^n}{3^{12} \cdot (3^n + 3^{12})} = \frac{-(-3)^n}{3^n + 1}$$

разобьем 32 числа попарно в пары на 16 пар вида $(k, k+12)$; где $n=32$, у нас будет $k=12$ без пары. Вычислим $p(12) = \frac{-3^{12}}{3^{12} + 3^{12}} = -\frac{1}{2}$.

Т.е. нам надо $\forall n \leq 16; n \in \mathbb{N}$ найти сумму $p(1) + p(2) + \dots + p(16) + p(17) + \dots + p(32)$.

$$\forall k \leq 16; k \in \mathbb{N}: p(k) = \frac{(-3)^k}{3^k + 3^{12}}; \quad \frac{1}{3^k + 3^{12}} = (-1)^k \cdot \frac{1}{1 + 3^{12-k}}$$

Заметим, что попарно-группировка четных и нечетных чисел дает разность знаменателя.

$$\begin{aligned} \text{Тогда } \sum_{k=1}^{32} p(k) &= \frac{1}{1+3^{12-1}} + \frac{1}{1+3^{12-2}} - \frac{1}{1+3^{12-3}} + \frac{1}{1+3^{12-4}} - \dots - \frac{1}{2} + p(18) + p(19) + \dots + p(32) \\ &= \frac{1}{1+3^{12-1}} + \frac{1}{1+3^{12-2}} - \frac{1}{1+3^{12-3}} + \frac{1}{1+3^{12-4}} - \dots - \frac{1}{2} + p(18) + p(19) + \dots + p(32) \end{aligned}$$

Заметим, что попарно-группировка четных и нечетных чисел дает разность знаменателя.

Т.е. искомая сумма будет: $p(1) + p(3) + \dots + p(31)$ и $p(2) + p(4) + \dots + p(32)$.

Мин ч.
из 14

№3 (продолжение)

$$Z = \frac{-1}{1+3^{16}} - \frac{3^{16}}{1+3^{16}} + \frac{1}{1+3^{15}} + \frac{3^{15}}{1+3^{15}} - \dots + \frac{1}{1+3} + \frac{3}{1+3} - \frac{1}{2}$$

Рассмотрим на 16 пар $(p(k) + p(m))$, где $m+n=39$, $m, n \in \mathbb{N}$

$p(17)$ — сумма корней $\pm C$. получаем всего 16 пар, сумма корней равна -1 или 1 , они чередуются, что пар четно $\Rightarrow$ сумма их будет нулев. отсюда следует $p(17) = -\frac{1}{2}$.

 $\Rightarrow$ сумма равна $p(17) = -\frac{1}{2}$ Ответ: $-\frac{1}{2}$.

$$\arctg \frac{2x-1}{x+2} + \arctg \frac{x+3}{3x-1} = x \Rightarrow \text{одз: } x \in (-\pi; \pi)$$

$$x \neq \frac{1}{3}, x \neq -2.$$

$$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b} \Rightarrow \operatorname{tg} x (=) - \text{решим, зная, что } \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} a) = a$$

$$\frac{(x^2+2)(x+2)(3x-1)}{(x+2)(3x-1)(x^2+1)} = \operatorname{tg} x \Rightarrow$$

$$\operatorname{tg} x = 2 \Leftrightarrow$$

$$\operatorname{arctg} 2 + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\{x = \operatorname{arctg} 2 + \pi k, k \in \mathbb{Z}\}$$

Т.к. $\operatorname{tg}(a+b)$ на промежутке $(-\pi; \pi)$ не монотонен, то необходимо проверить полученные значения.

М5 (продолжение).

Мит 5.
33.

$$\operatorname{arctg} z > 0 \Rightarrow K \neq 0$$

$$-\pi < \operatorname{arctg} z + \pi k < \pi \Rightarrow K \leq 0, K \neq 0$$

$$\operatorname{arctg} z > \operatorname{arctg} \sqrt{3} \Rightarrow \operatorname{arctg} z > \frac{\pi}{3}$$

$$\frac{\pi}{3} < \operatorname{arctg} z < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \operatorname{arctg} z \in \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2} \right)$$

$$-\frac{2\pi}{3} < \operatorname{arctg} z - \pi < -\frac{\pi}{2} \text{ — даже корни не переходят по ОДЗ.}$$

тогда нам могут переходить только $x = \operatorname{arctg} z$ или $x = \operatorname{arctg} z - \pi$.

$$g(x) = \frac{2x-1}{x+2} = \frac{2x+4-2x+1}{(x+2)^2} = \frac{5}{(x+2)^2} > 0 \Rightarrow g(x) \nearrow$$

$$f(x) = \frac{x+3}{3x-1}$$

$$f'(x) = \frac{3x-1-3x-9}{(3x-1)^2} = \frac{-10}{(3x-1)^2} < 0 \Rightarrow f(x) \searrow$$

§

x ∈ (π; 6)

2222

$$\min \left(\frac{2x-1}{x+2} \right) = 1$$

$$\Rightarrow \frac{2x-1}{x+2} = 1 \Rightarrow \frac{2\pi-1}{-\pi+2}$$

Код участника: МЛ-99¹

(заполняется организатором)

мет. 6.
с. 17

N8.

Сколько всего существует номеровых, удовлетворяющих условию?

Всего 100 номеров от 00 до 99. Или на 1 млн 100 вар, на 2 млн 99 вар, и т.д. $\Rightarrow$ Все номеровых-миллионов 100!

Сколько существует номеровых, в которых $\exists$ есть порядок а именно x_m, x_k, x_n . где $x_m = x; x_k = y; x_n = z$

$\Rightarrow$ Сколько существует способов расположить 2 числа между на 100 мест, размещаем x_m, x_k, x_n иными способами, т.к. в пос-ти может быть человек $\Rightarrow$ прежде всего. $\Rightarrow$ Считаем. $C_{100}^2 = 2$ т.к. мы имеем размещаем x_m, x_k, x_n иными способами. $2C_{99}^2 = 99 \cdot 98$ - выбираем 2 числа 99 способами.

Аналогично для остальных номеров рассуждаем. 99 способами. Анализируем три числа: выбираем 3 средних числа из кода $33 \cdot 2 + 32 = 98$ способами, затем номероваем с 3-ми цифрами порядок x_m, x_k, x_n с учетом порядка будет $6 \cdot C_{98}^3 = 98 \cdot 97 \cdot 96$. Но найдем по-другому "плохой", если в нем нет 2-ух или 3-ех порядков других номеров, т.е. номера $\{x, y, z\}$, а "хороший", если есть. Тогда плохих по-другому будет $100! - 99 \cdot 98 - 98 \cdot 97 \cdot 96$.

$\Rightarrow$ чтобы правильно выбрать получить хорошие номероваем, надо вычитать все плохие номера и еще одну - она обязательно будет хорошей. Тогда ответ: $100! - 99 \cdot 98 - 98 \cdot 97 \cdot 96 + 1$. Заметим, что пос-ти с двумя порядками другими числами могут содержать номероваем, в которых есть 3 порядка других данных чисел. Тогда что найдем перебором этих номеров номероваем.

(заполняется организатором)

Ms 4.
ms 4.

Сини волосы при
красном невенчаном
Т.м. Виле маэрой помин
и спавать

⑤ 99.98-4 = 2.95.94

Ген. Хорн

Там могут настать $\text{Super} = 100.1 - 99.98 + 4 + 2 - 95 - 94 - 98 - 97 - 96$
 может наверняка имели именно такую пос-ку, надо внимательно читать
 бы все такие пос-ки и еще одну, которая формирует
 хоррорей. $\Rightarrow$ Ответ: $100.1 - 99.98 + 4 + 2 - 95 - 94 - 98 - 97 - 96$

rebegun!

№ нет

М11-612

Код участника
(заполняется организатором)



**Олимпиадная работа
заключительного этапа**

**«Всероссийская олимпиада школьников "Миссия
выполнима. Твоё призвание - финансист!" 2023-2024
г.»**

«(Математика 11 класс)»

Вариант № 2

«27 января 2024 г.»

Никакие другие записи на титульном листе делать не разрешается

М 11 - 6/2

Код участника

Всероссийская олимпиада школьников «Миссия выполнима. Твое призвание – финансист!» 2023/2024 уч.г.

Бланк проверки работы

Математика 11 класс

№ задания	ФИО эксперта	Балл	ФИО эксперта	Балл	Итоговый балл
1	Васильев	10	Гурьянов	10	10
2	Запесков	10	Лоздцева	10	10
3	Марков	12	Александрович	12	12
4	Васильева	4	Башин	4	4
5	Усупов	7	Васильева	7	7
6	Васильев	3	Васильев	3	3
7	Конков	0	Семанов	0	0
8	Григорьев	0	Щакин	0	0
ИТОГО					43

Задача №1

Пусть людей, не говорящих по-английски x ;

А людей, не говорящих по-французски y ;

Тогда нас интересует отношение $\frac{y}{x}$?

• Если среди людей, не говорящих по-английски есть только 4% тех, кто говорит по-французски, то оставшиеся 96% ($100\% - 4\% = 96\%$) или $0,96x$ это те, кто не говорит ни на одном из этих языков

• Аналогично, среди тех, кто не говорит по-французски есть всего 20% тех, кто говорит по-английски, то оставшиеся 80% или $0,8y$ не говорят ни на одном из этих языков.

• Заметим, что ^{все} те, кто не говорит ни по-французски, ни по-английски мы посчитали двумя способами: как $0,96x$ и как $0,8y$. Поскольку оба раза мы очевидно считали ^{все} тех же людей, а только их, то

$$0,96x = 0,8y \Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{0,96}{0,8} = \frac{96}{80} = \frac{12}{10} = 1,2$$

Ответ: 1,2

Задача №2

$$\begin{cases} (1) 3A + 5B \leq 11 \\ (2) 4A + 3B \leq 10 \\ (3) 7A + 4B \leq 18 \end{cases}$$

Умножим неравенство (2) на два и сложим с неравенством (1)

$$\begin{aligned} 2 \cdot (4A + 3B) + (3A + 5B) &= 8A + 6B + 3A + 5B = \\ &= 11A + 11B = 11(A + B) \leq (2 \cdot 10) + 11 = 31 \\ 11(A + B) &\leq 31 \Rightarrow A + B \leq \frac{31}{11} \end{aligned}$$

Мы доказали, что значение $A + B$ не может быть больше $\frac{31}{11}$, теперь докажем, что оно может быть равно $\frac{31}{11}$.

Это выполняется при: $A = \frac{17}{11}$; $B = \frac{14}{11}$;

$$\begin{cases} 3A + 5B = \frac{3 \cdot 17 + 5 \cdot 14}{11} = \frac{51 + 70}{11} = \frac{121}{11} = 11 \leq 11 - \text{неравенство (1) выполняется} \\ 4A + 3B = \frac{4 \cdot 17 + 3 \cdot 14}{11} = \frac{68 + 42}{11} = \frac{110}{11} = 10 \leq 10 - \text{неравенство (2) выполняется} \\ 7A + 4B = \frac{7 \cdot 17 + 4 \cdot 14}{11} = \frac{119 + 56}{11} = \frac{175}{11} \leq 18 = \frac{198}{11} - \text{неравенство (3) выполняется} \end{cases}$$

Значит этот пример подходит

Ответ: $\frac{31}{11}$

Код участника:

(заполняется организатором)

M11-612

Задача 13

Если n четно: $P(n) = \frac{(-3)^n}{3^n + 3^{17}} = \frac{3^n}{3^n + 3^{17}} = \frac{1}{1 + 3^{17-n}}$

Пусть n четно и $\begin{cases} n > 0 \\ n < 17 \end{cases}$; Тогда:
 $P(17-n) = \frac{(-3)^{17-n}}{3^{17-n} + 3^{17}} = \frac{-3^{17-n}}{3^{17-n} + 3^{17}} \xrightarrow{\text{делим на } 3^{17-n}} = \frac{-1}{1 + 3^n}$

$P(17+n) = \frac{(-3)^{17+n}}{3^{17+n} + 3^{17}} = \frac{-3^{17+n}}{3^{17+n} + 3^{17}} \xrightarrow{\text{делим на } 3^{17}} = \frac{-3^n}{3^n + 1} = \frac{-3^n - 1}{3^n + 1} + \frac{1}{3^n + 1} = \frac{1}{3^n + 1} - 1$

$P(17-n) + P(17+n) = \frac{-1}{1+3^n} + \frac{1}{3^n+1} - 1 = -1$ (это при четном n)

Пусть n нечетно и $\begin{cases} n > 0 \\ n < 17 \end{cases}$; Тогда:

$P(17-n) = \frac{(-3)^{17-n}}{3^{17-n} + 3^{17}} = \frac{3^{17-n}}{3^{17-n} + 3^{17}} \xrightarrow{\text{делим на } 3^{17-n}} = \frac{1}{3 + 3^n}$

$P(17+n) = \frac{(-3)^{17+n}}{3^{17+n} + 3^{17}} = \frac{-3^{17+n}}{3^{17+n} + 3^{17}} \xrightarrow{\text{делим на } 3^{17}} = \frac{-3^{n+1}}{3^{n+1} + 3} = \frac{3^{n+1} - 1}{3^{n+1} + 3} - \frac{1}{3^{n+1} + 3} = 1 - \frac{1}{3^{n+1} + 3}$

$P(17-n) + P(17+n) = \frac{1}{3 + 3^n} + 1 - \frac{1}{3^{n+1} + 3} = 1$ (это при нечетном n)

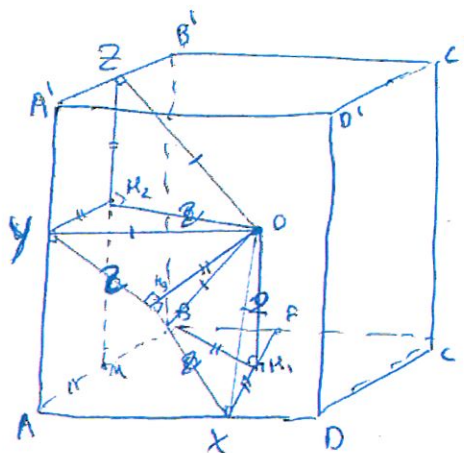
Теперь разобьем ~~все~~ слагаемые $P(n)$ на пары;

$(P(1) + P(33)) + (P(2) + P(32)) + \dots + (P(17-n) + P(17+n)) + P(17)$

Заметим, что $n \in \{1, 2, 3, \dots, 16\} \Rightarrow$ ~~остаток~~ ~~без пары~~
 $\Rightarrow n$ будет 8 раз четно и 8 раз нечетно. Вспомни, что
 дает пара, где n четно, и где нечетно и получишь:

$8 \cdot (-1) + 8 \cdot (1) + P(17) = -8 + 8 + P(17) = P(17) = \frac{(-3)^{17}}{3^{17} + 3^{17}} = \frac{-3^{17}}{2 \cdot 3^{17}} = \frac{-1}{2}$
 это и есть искомая сумма ~~на 3^17~~

Ответ: $-\frac{1}{2}$



Тогда: $OX = OA = OZ = OB = R$ - радиус сферы

Опустим из О перпендикуляры H_1, H_2, H_3 на ~~плоскости~~ $(ABC), (AA'B'), (AA'D')$ соответственно

$$\Rightarrow \Delta OH_1 B = \Delta OH_1 X \Rightarrow BH_1 = H_1 X$$

Аналогично по теореме о 3 перс-ах $M_2 Y = M_2 Z$

Заметим, что если провести ZH_3 до точки M пересечения с AB , то $AMH_3 \times YH_3 \cdot OH_3 = \text{площадь}$

$(AMH, X) \parallel (M_2M_3O)$ - а это очевидно, т.к. $ABCOA'B'C'O'$ - это куб, а

Значит $x_{H_2} = O_{H_2} = y_{H_2} = \lambda \mu = k$; $O_{H_1} = H_2 x = p = H_2 O \cdot y_{H_2}$ (т.к. $y_{H_2} = H_2 x$)
Заметим, что $\mu z = \mu_{H_2} + \mu_2 z = k + p = 1 \Rightarrow 1 = k + p$

$$Ax = BF = f; \quad M_1 F = \cancel{1-k} = 1 - M_1 x = 1 - k = f \Rightarrow BM_1^2 = BF^2 + M_1 F^2$$
$$k^2 = p^2 + p^2; (1-p)^2 = 2p^2; 1-2p+p^2 = 2p^2; p^2 + 2p - 1 = 0; p = 4 \pm 4 = 2 \pm 4; p = \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}}{2}$$
$$P = \sqrt{2} - 1 \text{ (m. t. } P > 0); R = 0; \text{ ~~0x~~ } 0x^2 = 0x^2 + 4x^2 \text{ (w/ } 50 \times 41) \Rightarrow R^2 = P^2 + K^2$$
$$r^2 = (2 - 2\sqrt{2} + 1) + (4 - 4\sqrt{2} + 2) = 3 - 2\sqrt{2} + 6 - 4\sqrt{2} = 9 - 6\sqrt{2}$$
$$R = \sqrt{9 - 6\sqrt{2}} = (\sqrt{2} - 1)\sqrt{3}$$

Ans: $R = (\sqrt{2} - 1)\sqrt{3}$

Задача №5

$$\arctg \frac{2x-1}{x+2} + \arctg \frac{x+3}{3x-1} = x \quad \begin{matrix} x \neq -2 \\ x \neq \frac{1}{3} \end{matrix}$$

Как известно, $\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b}$

$$\operatorname{tg}(\arctg \frac{2x-1}{x+2} + \arctg \frac{x+3}{3x-1}) = \operatorname{tg} x$$

$$\frac{\operatorname{tg}(\arctg \frac{2x-1}{x+2}) + \operatorname{tg}(\arctg \frac{x+3}{3x-1})}{1 - \operatorname{tg}(\arctg \frac{2x-1}{x+2}) \operatorname{tg}(\arctg \frac{x+3}{3x-1})} = \operatorname{tg} x$$

$$\frac{\frac{2x-1}{x+2} + \frac{x+3}{3x-1}}{1 - \frac{2x-1}{x+2} \cdot \frac{x+3}{3x-1}} = \operatorname{tg} x$$

$$\frac{\frac{(2x-1)(3x-1) + (x+3)(x+2)}{(x+2)(3x-1)}}{\frac{(x+2)(3x-1) - (2x-1)(x+3)}{(x+2)(3x-1)}} = \operatorname{tg} x; \quad \frac{(2x-1)(3x-1) + (x+3)(x+2)}{(x+2)(3x-1) - (2x-1)(x+3)} = \operatorname{tg} x$$

$$\frac{(6x^2 - 5x + 1) + (x^2 + 5x + 6)}{(9x^2 + 5x - 2) - (2x^2 + 5x - 3)} = \operatorname{tg} x; \quad \frac{7x^2 + 7}{x^2 + 1} = \operatorname{tg} x$$

$7 = \operatorname{tg} x \Rightarrow x = \arctg 7$ - и такое такое значение, т.к. $\arctg a = \arctg a$, $\arctg a$ принимает значения от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2} \Rightarrow$ сумма двух арктангенсов будет принимать значения от $-\pi$ до $\pi \Rightarrow$ только один ответ. Ну и этот ответ подходит при подстановке

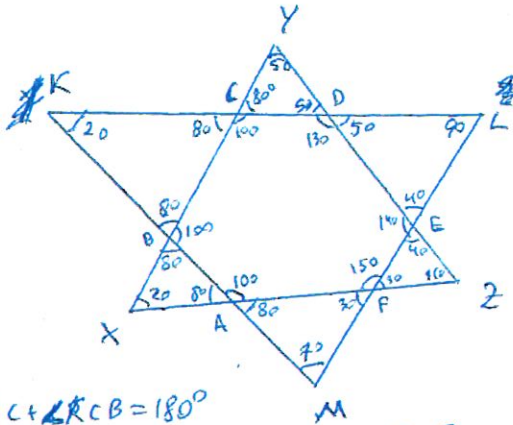
Ответ: $x = \arctg 7$ $\perp, x_2 - ?$

Код участника:

(заполняется организатором)

M11-612

Задача №6



$\angle A = \angle B = \angle C = 100^\circ$ По этим углам мы найдем углы в треугольнике ABCDEF
 $\angle D = 130^\circ$
 $\angle E = 140^\circ$
 $\angle F = 150^\circ$

$\angle KCB + \angle L = 180^\circ \Rightarrow \angle KCB = 180^\circ - \angle C = 80^\circ$

Аналогично для остальных:

$\angle KBC = 180^\circ - \angle B = 80^\circ$

$\angle XBA = 180^\circ - \angle B = 80^\circ$

$\angle XAB = 180^\circ - \angle A = 80^\circ$

$\angle MAF = 180^\circ - \angle A = 80^\circ$

$\angle MFA = 180^\circ - \angle F = 30^\circ$

$\angle ZFE = 180^\circ - \angle F = 30^\circ$

$\angle ZEF = 180^\circ - \angle E = 40^\circ$

$\angle LED = 180^\circ - \angle E = 40^\circ$

$\angle LDE = 180^\circ - \angle D = 50^\circ$

$\angle YDC = 180^\circ - \angle D = 50^\circ$

$\angle YCD = 180^\circ - \angle C = 80^\circ$

$\angle BKC + \angle KBC + \angle KCB = 180^\circ$
 $\angle BKC = 180^\circ - \angle KCB - \angle KBC = 180^\circ - 80^\circ - 80^\circ = 20^\circ$

Аналогично:

$\angle BXA = 180^\circ - 80^\circ - 80^\circ = 20^\circ$

$\angle XMA = 180^\circ - 80^\circ - 30^\circ = 70^\circ$

$\angle Z = 180^\circ - 30^\circ - 40^\circ = 110^\circ$

$\angle L = 180^\circ - 40^\circ - 50^\circ = 90^\circ$

$\angle Y = 180^\circ - 80^\circ - 50^\circ = 50^\circ$

Значит углы в $\triangle KML$ равны $20^\circ, 70^\circ, 90^\circ$

в $\triangle XYZ$ равны $20^\circ, 50^\circ, 110^\circ$

Ответ: $20^\circ, 70^\circ, 90^\circ$ - в одном треугольнике и $20^\circ, 50^\circ, 110^\circ$ в другом

(+3)

Код участника:

(заполняется организатором)

M11-612

Задача №7

Если прямая $y(x) = kx + c$ касается функции $f(x) = x^4 + bx^2 + x$ в точке x_1 , то это значит, что

$$\begin{cases} y(x_1) = f(x_1) \\ y'(x_1) = f'(x_1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} kx_1 + c = x_1^4 + bx_1^2 + x_1 \\ y'(x_1) = k = f'(x_1) = 4x_1^3 + 2bx_1 + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1^4 + bx_1^2 + x_1(1-k) - c = 0 \\ 4x_1^3 + 2bx_1 + 1 - k = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1^4 + bx_1^2 + x_1(1-k) - c = 0 \\ 4x_1^3 + 2bx_1 + 1 - k = 0 \end{cases}$$

$$3x_1^4 + bx_1^2 + c = 0 ; x_1^2 = t$$

$$3t^2 + bt + c = 0$$

$$D = b^2 - 12c$$

Поскольку нам нужно касание в двух точках, то мы хотим получить ровно 2 различных значения для x_1 ; при $t \neq 0$ уравнение $x_1^2 = t$ имеет ровно два корня $\Rightarrow$ мы хотим, чтобы решение для t было ровно одно $\Rightarrow D = b^2 - 12c = 0$

$$b^2 = 12c \Rightarrow b = \pm 2\sqrt{3c}$$

$$t = \frac{-b \pm 0}{2 \cdot 3} = \frac{-b}{6} ; x_1^2 = \frac{-b}{6} \Rightarrow b = -2\sqrt{3c} \text{ (т.к. } x_1^2 \geq 0)$$

$$x_1 = \pm \sqrt{\frac{-b}{6}} = \pm \sqrt{\frac{2\sqrt{3c}}{6}} = \pm \sqrt{\frac{\sqrt{3c}}{3}} = \pm \sqrt{\frac{c}{3}} \quad \textcircled{D}$$

Задача №8

Скажем, что между числами есть «соседство», если они хотя бы стояли рядом

Всего соседств $\frac{100 \cdot 99}{2} = \frac{9900}{2} = 4450$

каждая пара чисел

За каждую последовательность появляется не более 99 соседств.

Соответственно, чтобы получить x, y, z когда-нибудь стали соседними потребуются $\geq \frac{4450}{99} = 50$ последовательностей

Пример для 50 последовательностей:

I: 1, 2, 3... 100

затем 1° двигаем вправо на один, 2° на два, 1° на n позиций (при переходе через 100 начинаем с 1) Никакие две числа не будут стоять рядом более одного раза за все 50 последовательностей (т.к. тогда бы за какой-то период ≤ 50 из данных движений мы бы по очереди 100 на 0 или на 2, что невозможно.) Значит, 50 достаточно, а меньше быть не может

Ответ: 50