

М10-103

Код участника
(заполняется организатором)



**Олимпиадная работа
заключительного этапа
«Всероссийская олимпиада школьников "Миссия
выполнима. Твоё призвание - финансист!" 2023-2024
г.»
«(Математика 10 класс)»**

Вариант № 1

«27 января 2024 г.»

Никакие другие записи на титульном листе делать не разрешается

М/10-103

Код участника

Всероссийская олимпиада школьников «Миссия выполнима. Твое призвание – финансист!» 2023/2024 уч.г.

Бланк проверки работы

Математика ^{10.}8-9 класс

№ задания	ФИО эксперта	Балл	ФИО эксперта	Балл	Итоговый балл
1	Лоздеева С.	10	Забайкина	10	10
2	Бонань	10	Овчинникова	10	10
3	Киреева	10	Берзин	10	10
4	Дубинский	12	Борисов	12	12
5	Венесова	12	Зайчиков	12	12
6	Берзин	14	Мендзя	14	14
7	Зинь	2	Киреева	2	2
8	Зинь	0	Киреева	0	0
ИТОГО					70

Код участника:

(заполняется организатором)

М 10-103Задача 2.

$$\varphi(\text{НОК}(a, b) + \text{НОД}(a, b)) = (a+b)^2 + 1.$$

Предположим, что a, b – взаимнопросты, тогда
уравнение примет вид: ≥ 2

$$\varphi(ab + 1) = (a+b)^2 + 1$$

$|a-b|^2 = 0 \Rightarrow a=b \nless 1$? противоречие, значит
(кроме 1; 1)

$a = kb$ ~~и т.д. и т.п.~~ ~~и т.д. и т.п.~~
← подставим.

$$\varphi(\text{НОК}(kb, b) + \text{НОД}(kb, b)) = (kb+b)^2 + 1.$$

$$\varphi(kb + b) = (kb+b)^2 + 1$$

отсюда $1 \leq b$

т.е. $b = 1$ получаем

$$\varphi(k+1) = (k+1)^2 + 1$$

$$(k-1)^2 = 0 \Rightarrow \boxed{k=1} \text{ Тогда } \boxed{a=1}.$$

$$\boxed{a=1; b=1}.$$

Ответ: пара единственная

P.S. $\varphi \cdot 1 + 1 = 2^2 + 1 \quad 5 = 5 \checkmark$

~~4 0 6 0~~

3. Задача

Предположим, что в каждом столбце или строке (т.е. таблицу можно поворачивать на 90°) разные суммы, тогда оценки т.е. стр = столб.

7-л. стр = 1000. / 0
Эту самую сумму $\sum_{m=1}^n = 0 + 1 + 2 + \dots + 49$.
 $= \frac{49}{2} \cdot 25 = 1225$, Таблица имеет вид $\begin{matrix} 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 9 \\ 0 & \dots & 11 \end{matrix}$ и т.д.

Однако Σ чисел в таблице $= 1250 \neq Q_1$.
 Q_1 - (кол-во единиц в таблице), значит где-то в
~~столбцах~~ строках нужно добавить единицы (125 шт)
 Тогда заметили, что обязательно Σ сумма будет
 совп-ать... 0, 1, 2, 4, 9 ~~и так~~
 + $\dots$ $\rightarrow$ см. посл.
 лист.

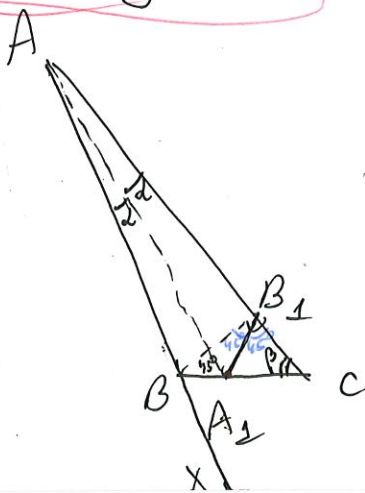
Новое число
 сделать не
 получится

Тогда остается прибавить ко всем $1, \Rightarrow$

$$\sum_{\min} = 1 + 2 + \dots + 50 = \frac{51 \cdot 50}{2} = 1275 > 1250$$

Противоречие.

4 Задача.



Док-во: ($\alpha = \angle BAA_1 = \angle A_1AB_1$); $\beta = \angle ACB$)
 Докажем, что BC - биссектриса
 $\angle B_1BX$, действительно $\angle B_1BC = 90^\circ - \beta$
 $\angle CBX = 2\alpha + \beta$, но из $\triangle ACA_1$ ($\angle AA_1B$
 $(*) \alpha + \beta = 45^\circ$, но тогда $\alpha = 45^\circ - \beta$, тогда
 $\angle CBX = 90^\circ - 2\beta + \beta = 90^\circ - \beta$. Ч.т.д.

Отсюда

A_1 - центр вневписанной $\triangle AB_1B = S$

B_1A_1 - биссектриса $\angle B_1B_1C$, $\angle B_1A_1C = \angle A_1B_1C$

$= \frac{90}{2} = 45^\circ$. Из $\triangle AB_1A_1$ $\angle A_1B_1C$ - внешний $\angle A_1B_1C = 45^\circ$, но он равен $(\angle B_1A_1A + \angle B_1A_1A = 45^\circ)$

Получаем

$\angle AA_1B = \angle A_1CB_1$ т.е.

касание доказано. (Угол между хордой и кас-ой).

ч.т.д.

Тогда этот угол

12 баллов

Задача 5.

$$f(x+y) = \sqrt{f^2(x) + f^2(y)}; f(1) + f(4) = 9$$

Положим $x=y$

$$f(2x) = f(x)\sqrt{2}, \text{ тогда } f(4) = f(2)\sqrt{2}, f(2) = f(1)\sqrt{2}$$

Заметим, получая: $f(4) = 2f(1)$. Из условия.

$$3f(1) = 9 \Rightarrow f(1) = 3 \Rightarrow f(4) = 6.$$

Далее составим ряд

Ответ: $6(\sqrt{2})^{2021}$

$$f(2^2) = 6(\sqrt{2})$$

$$f(2^3) = 6(\sqrt{2})^2$$

$$f(2^4) = 6(\sqrt{2})^3$$

$$f(2^{2021}) = 6(\sqrt{2})^{2021}$$

Задача 6.

$$36c^2 = c^3$$

$$1) a^3 + b^3 + 3abc = c^3$$

$$2) g(a+b)^2 = c^3$$

$$3) a^2 - ab + b^2 = c^2$$

выделим $3abc$

$$c(a+b)^2 = c^3 + 3abc$$

$$(a+b)^2 = c^2 + 3ab \quad / : c$$

$$(a+b)/(a^2 - ab + b^2) + 3abc = c^3$$

$$c^2(a+b) + 3abc = c^3 \quad / + c^3$$

$$c^2(a+b) + c(a+b)^2 = 2c^3 \quad / : c \quad (c \neq 0)$$

$$c(a+b) + (a+b)^2 = 2c^2 \quad \text{Заметим } a+b \text{ на } k.$$

$$ck + k^2 = 2c^2$$

$$k^2 + ck - 2c^2 = 0$$

$$1) a+b = -2c$$

$$g \cdot c^2 = c^3$$

$$c = 36$$

$$a = 36 - b$$

По т. Виета $k = -2c$; $k = c$
корни

$$2) a+b = c$$

$$g \cdot c^2 = c^3$$

$$g = c$$

$$a = g - b$$

из 2)

$$g^2 = g^2 + 3ab, \text{ либо } a=0 \text{ или } b=0$$

Тогда $a=0$ или $b=0$

$$a=0 \rightarrow b^2 = c^2 \quad b = \pm g; c = g$$

$$b=0 \rightarrow a^2 = c^2 \quad a = \pm g; c = g$$

$$(36-b)^2 - (36-b)b + b^2 = 36^2$$

$$36^2 - 72b + b^2 - 36b + b^2 + b^2 = 36^2$$

$$3b^2 - 108b = 0$$

$$b(3b - 108) = 0$$

$$b = 0 \text{ или } b = 36$$

$$a = 36 - b$$

$$a = 0 \text{ или } a = 36$$

Если $c=0$, то $(a+b)^2 = 0$ или $a=b=0$
из 3) $0 = 0 + 3ab$ либо $a=0$ либо $b=0$, тогда $(0,0,0)$ ответ

(заполняется организатором)

ll 10-103

 $(a; b; c)$

ногтями

$a; b = -9$ не погр

$$4c^2 = c^2 + 3ab$$

$$3c^2 = 3ab$$

$$c^2 \ll a b.$$

$$\begin{cases} a+b = -72 \\ ab = 36^2 \end{cases}$$

$$q = -72 - 6 \cdot 1 \quad 36^2 = 0$$

$$(-72-6) \cdot 0 - 36 = 0$$

$$b^2 + 72b + 36^2 = 0$$

$$(b+36)^2 = 0$$

$$\begin{aligned} b &= -36. \\ a &= -36. \end{aligned}$$

$$(-36; -36; 36) - \text{Точка ответа}$$

$$-36; -36, 36 /$$

Zagara 1

Бюджет в конце

из 1. n людей с номерами от 1 до n .

$\text{И.У.О Пусть } \Delta$

1 --- "0" --- 100 --- n --- 123 --- K TOZGA

Уровне №2.

Пусть люди стоят рядом с звездами.

Пусть людей спереди — 105 / 26 + 37 = 63
Заметим, что до Грини стоят люди с двумя и однозвучными талонами. Подсчитали кол-во двух- и однозвучных талонов. Пусть людей с двумя талонами — 26, а с одним — 37.

$$10 + 2 \cdot (T - 10) = 1,25 / (26 + 37) \cdot 26$$

Пусть людей
с душой. Т.е. люди,

~~$$1, \dots, g, 10, \dots, 10^k$$

$$C = 100 - (k+5)$$~~

~~$$10 + 2(k-1) = 1,25(198 - 2k + 6k - 228)$$~~

~~$$10 + 2(k-10) = 1,25(192 - 2k + 6k - 228)$$~~
~~$$2k - 10 = 1,25(4k - 30) \quad | \cdot 4 \quad 100 - k - 4 + f = k + 23$$~~

$$f = 2k - 99 + 23 = 2k - 76.$$

~~50~~
 $81 - 40 = 5(4k - 30)$

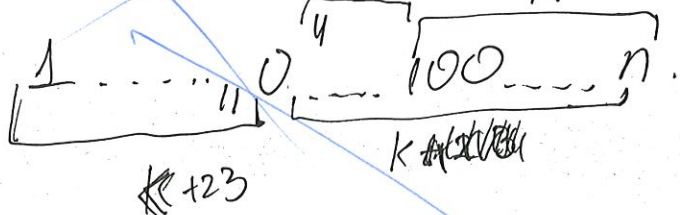
$$2k = 40 = 20k - 150 \quad 12k = 110$$

~~20K-250 74K-70~~
~~74K-70 - прирост. ош. и др.~~

Код участника:

(заполняется организатором)

Задача 6. Правая косяков. $ke 70$



$$\begin{array}{r} 18 \\ \times 263 \\ \hline 228 \\ - 228 \\ \hline 76 \end{array}$$

$$L = 100 - (k + 23 + 1) = 76 - k$$

$$L + f = k$$

$$k - L = k - (76 - k) = 2k - 76$$

Из ур-я из №3 следует. $10 + 2(k + 13) = 1,25(2L + f)$

$$1, \dots, 9, 10, \dots, 100, \dots, n$$

$$10 + 2(k + 13) = 1,25(2L + f), \text{ подставим все и найдем } k$$

$$10 + 2k + 26 = 1,25(152 - 2k + 76k - 228)$$

$$4(36 + 2k) = 5(4k - 76) \quad 4k - 76$$

$$144 + 8k = 20k - 380$$

$$528 = 12k$$

$$k = 44$$

Ответ: $88 + 22 = 110$

111

Ответ: 111

Задача 7.

Будем рассматривать степени двоек

$2^1, 2^2, 2^3, \dots, 2^{10}$, очевидно, как минимум 11 раз.

Наши новые числа это комбинации сум показателей. Т.е. встретятся все от 2^0 до 2^{55} . Ровно 55 чисел.

Ответ: 55 чисел.

25

Задача 2.

Совершенно тривиально, что если числа не делятся групп на группы случаев, то будет получаться больше различных чисел. Т.е. условием говоря $2^n \cdot 2^k = 2^{n+k}$, а если $2^n \cdot 3^k$ никак не преобразуются в 2^{n+k} .

Из показателей $1, 2, \dots, 9$ можно составить любое число от 1 до 55.

Значит при всевозм. комбинациях сумм этих числа будут нашими откусы и получаем требуемую оценку.

Опять задача 1.

Пусть Гриша будильник "0". Тогда ряд выглядит так.

Вариант
 $1, 2, 3, \dots, 9, 10, \dots, 0, \dots, 100, \dots, n$
 k людей.

из №1
 усл.
 + №2
 все

$$9 + 2(k + 23 - 9) = 1,25 \cdot (2L + 3F)$$

$k + 14$ $2k + F$

из №3

$$2L + 2F = 2K$$

$$9 + 2k + 28 = 1,25(2k + 2k - 76) / 4$$

$$F = k - L$$

$$L = 100 - (1 + 23 + 44) / 4$$

99 k + 23

$$8k + 148 = 20k - 380$$

$$12k = 148 + 380 = 528 \quad k = 44$$

Ответ: 111

$$F = 2k - 76$$

Код участника:

(заполняется организатором)

3. Можем сделать новое лутём прибавления 25 единицу к каким-то строкам.

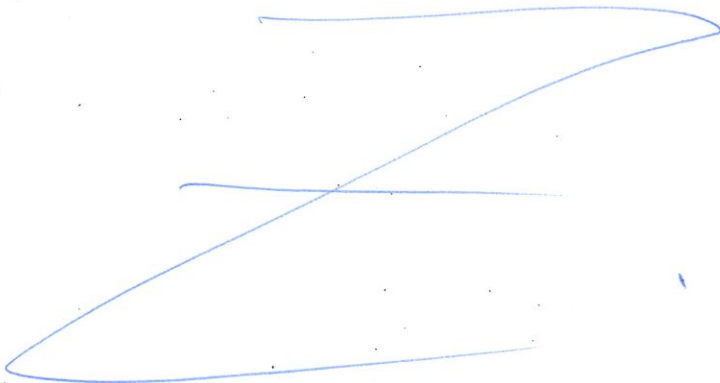
Теперь смотрим на столбцы. Ввиду п.1 (Н.У.О) с поворотом Таблица стала асимметрична?

⇒ ситуация с 0,1..., 49 нарушилась, причём ~~мне больше~~ ввиду

нечётности 25/2 не получится с 2-х "кубов" одеть одну и ту же картинку ⇒ ед. возможных вариантов это 1, 2, 3..., 50 однако как выше написало $1275 > 1250$ Противоречие!

Задача 8.

Заяу всегда выигрывает волка. Ум Такова его судьба // Предполагая, в силу чётности 10.



М10-173

Код участника
(заполняется организатором)

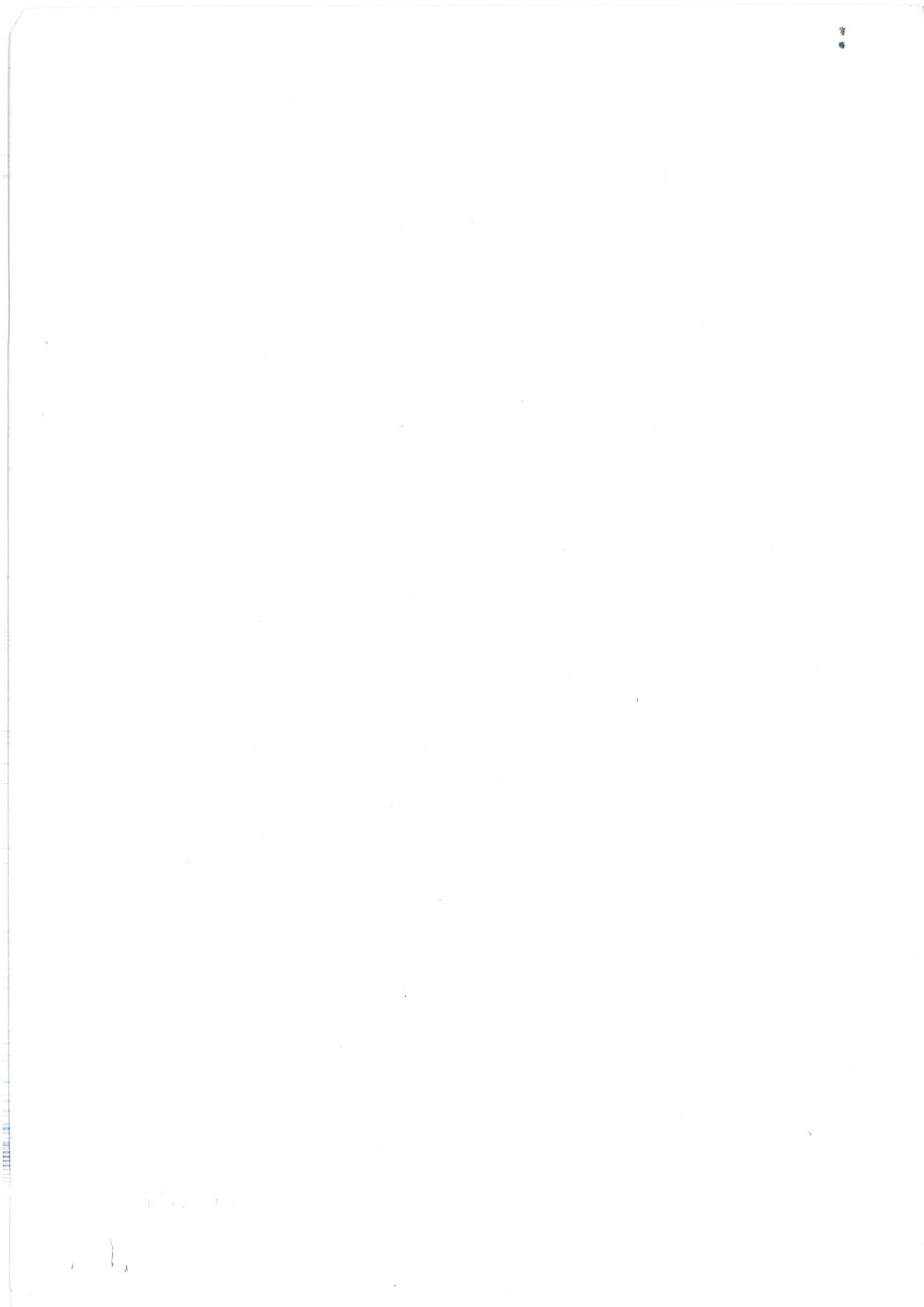


**Олимпиадная работа
заключительного этапа
«Всероссийская олимпиада школьников "Миссия
выполнима. Твоё призвание - финансист!" 2023-2024
г.»
«(Математика 10 класс)»**

Вариант № 1 (один)

«27 января 2024 г.»

Никакие другие записи на титульном листе делать не разрешается



M10 - 173

Код участника

Всероссийская олимпиада школьников «Миссия выполнима. Твое призвание – финансист!» 2023/2024 уч.г.

Бланк проверки работы

Математика 10 класс

№ задания	ФИО эксперта	Балл	ФИО эксперта	Балл	Итоговый балл
1	Забитков	10	Волосова Н.В.	10	10
2	Авсанишвили	10	Богданов	10	10
3	Курбанова	10	Гурьянова	10	10
4	Дубинский	0	Борисов	0	0
5	Волосова Н.В.	12	Иванова	12	12
6	Берзин	14	Мандря	14	14
7	Эминин	14	Трундаев	14	14
8	Эминин	0	Трундаев	0	0
ИТОГО					70

Код участника:

(заполняется организатором)

И 10-173

Задача 2.Обозначим за $d = \text{НОД}(a, b)$ и за $k = \pm \text{НОК}(a, b)$

$$\begin{matrix} a : d \\ k : a \end{matrix} \Rightarrow k : d$$

$$\underbrace{4k}_{:d} + \underbrace{d}_{:d} = \underbrace{(a+b)^2 + 1}_{:d} \Rightarrow 1 : d \Rightarrow d \text{ может быть равно только } 1, \text{ тогда } k = ab$$

$$4ab + 1 = a^2 + 2ab + b^2 + 1$$

$$(a-b)^2 = 0$$

$$a = b$$

$a = b$, при этом $\text{НОД}(a, b) = 1 \Rightarrow$ возможен только случай $a = b = 1$.

Ответ: $\{(1; 1)\}$. P

Задача 5.

По условию $f(x) \geq 0$ для любого x .

$$f(2^n) = f(2^{n-1} + 2^{n-1}) = \sqrt{f^2(2^{n-1}) + f^2(2^{n-1})} = \sqrt{2} \cdot f(2^{n-1})$$

$$f(2^{n-1}) = (\sqrt{2})^2 \cdot f(2^{n-2})$$

$\vdots$

$$f(2^{n-k+1}) = \sqrt{2} \cdot f(2^{n-k})$$

Тогда $f(2^n) = (\sqrt{2})^k \cdot f(2^{n-k})$

$$f(2^{2023}) = (\sqrt{2})^{2021} \cdot f(4) = (\sqrt{2})^{2023} \cdot f(1)$$

$$(\sqrt{2})^{2021} \cdot f(4) = (\sqrt{2})^{2023} \cdot f(1)$$

$$\sqrt{2} \cdot 2^{1010} \cdot f(4) = \sqrt{2} \cdot 2^{1011} \cdot f(1)$$

$$f(4) = 2f(1)$$

$$f(2^{2023}) = (\sqrt{2})^{2023} \cdot f(1) = \sqrt{2} \cdot 2^{1011} \cdot 3$$

Ответ: $f(2^{2023}) = 3 \cdot 2^{1011} \cdot \sqrt{2}$.

$$f(2^n) = (\sqrt{2})^k f(2^{n-k})$$

$$f(4) = 2f(1) \text{ и } f(1) + f(4) = 9.$$

Значит, $f(1) = 3$, $f(4) = 6$.



Задание 7.

Пусть выписали натуральные числа $a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_9 < a_{10}$.

Тогда $a_2 \geq 2$, $a_3 \geq 3$, ..., $a_{10} \geq 10$.

Приведем пример на 46 различных значений:

$$2^0, 2^1, 2^2, \dots, 2^9$$

Тогда на доске будет 46 различных значений – все степени 2 от 0 по 45: $2^0, 2^1, 2^2, \dots, 2^{0+1+\dots+9} = 2^{45}$.

Задание 4.

$\angle BAC$ в $\triangle ABC$ не может быть $\geq 90^\circ$, т.к. тогда т. А будет на или внутри опис. окр. $\triangle A_1B_1C \Rightarrow$ не подходит.

$\angle ABC$ в $\triangle ABC$ будет $> 90^\circ$. Проведем высоту AH в $\triangle ABC$, тогда $\triangle AHA_1$ – прямоугольн., $\angle H, AH = A_1H$.

$$AA_1^2 = AB \cdot AC - BA_1 \cdot A_1C$$

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BA_1}{A_1C} \quad (\text{по св-ву биссектрисы треугольника})$$

$$\triangle AHC \sim \triangle B_1B_1C$$

$$\frac{AC}{BC} = \frac{HC}{B_1C} \Leftrightarrow AC \cdot B_1C = HC \cdot BC$$

т. А, H, B, B₁ лежат на одной окр.

$$\angle AB_1H = \angle A_1AH = \angle ABH = 45^\circ + \alpha = \angle HAC \Rightarrow \triangle AHB_1 - \text{пр.}, AH = HB_1$$

$$\angle B_1HC = 90^\circ - \angle AHB_1 = 90^\circ - (180^\circ - 2(45^\circ + \alpha)) = 2\alpha.$$

$$AH = A_1H = HB_1 \Rightarrow \triangle A_1HB_1 - \text{пр.} \Rightarrow \angle HA_1B_1 = \angle HB_1A_1 = 90^\circ - \alpha$$

$$\angle AA_1B_1 = \angle HA_1B_1 - \angle AA_1B = 90^\circ - \alpha - 45^\circ = 45^\circ - \alpha.$$

$$\angle A_1CB_1 = \frac{1}{2} \angle A_1B_1 = 45^\circ - \alpha \Rightarrow \angle A_1B_1 = 90^\circ - 2\alpha.$$

$\angle AA_1B_1 = \frac{1}{2} \angle A_1B_1$. Предположим, что AA_1 не касательная к опис. окр. $\triangle A_1B_1C$. Тогда проведем касательную AP . По ее свойству $\angle PA_1B_1 = \frac{1}{2} \angle A_1B_1 = \angle AA_1B_1$. Так как $\angle PA_1B = \angle AA_1B$ и PA_1 и AA_1 лежат в одной полуплоскости отн. A_1B_1 , то AA_1 и PA_1 совпадают. $\Rightarrow$ опис. окр. $\triangle A_1B_1C$ касается прямой AA_1 .

Обакова

не требуется решение

Код участника:

(заполняется организатором)

10-173

Задача 1

Докажем, что в очереди меньше 1000 человек. Если бы их было ≥ 1000 , то до Гриши максимум стояло 99 человек с кол-вом цифр $9 + 2 \cdot 90 = 189$, а после него минимум стояло 901 человек с кол-вом цифр $3 \cdot 900 + 4 = 2704$.

$189 = 1,25 \cdot 2704$. Противоречие $\Rightarrow$ в очереди меньше 1000 человек.

Пусть до Гриши стояло $x + 23$ человека (у каждого из них ^{кол-во цифр} будет 1 или 2), а после него тогда x человек.

105

$$9 + 2 \cdot (x + 23 - 9) = 1,25 \cdot (2 \cdot (99 - x - 23) + 3 \cdot (2x + 23 - 99))$$

$$2x + 37 = 1,25(4x - 76)$$

$$2x + 37 = 5x - 95$$

$$3x = 132$$

$$x = 44$$

Тогда $n = 2x + 23 = 111$.

Ответ: 111.

Задача 6

$$\begin{cases} a^3 + b^3 + 3abc = c^3 \\ (3a + 3b)^2 = c^3 \\ a^2 - ab + b^2 = c^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^3 + b^3 + 3abc = c^3 \quad (1) \\ 9(a+b)^2 = c^3 \quad (2) \\ a^2 - ab + b^2 = c^2 \quad (3) \end{cases}$$

Из того, что $\underbrace{9(a+b)^2}_{\geq 0} = c^3$, следует, что $c^3 \geq 0 \Leftrightarrow c \geq 0$.

При $c = 0$: $a^2 - ab + b^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases} \Rightarrow a = b = c = 0$ - подходит.

При $c \neq 0$; $c > 0$:

$$(3): (a^2 - ab + b^2)^2 = c^4$$

$$(2) \cdot (3): 9(a+b)^2(a^2 - ab + b^2)^2 = c^7$$

$$9(a^3 + b^3)^2 = c^7$$

$$|(a^3 + b^3)| = \frac{c^3 \sqrt{c}}{3}$$

$$(2): (a+b)^2 = \frac{c^3}{9}$$

$$(3): (a+b)^2 - 3ab = c^2$$

$$3ab = \frac{c^3}{9} - c^2$$

$$(1): \text{I случай: } a^3 + b^3 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{c^3 \sqrt{c}}{3} + \frac{c^4}{9} - c^3 = c^3 \quad | \cdot \frac{9}{c^3}$$

$$a+b \geq 0$$

$$3\sqrt{c} + c - 18 = 0$$

$$(\sqrt{c} + 6)(\sqrt{c} - 3) = 0$$

$$\begin{cases} \sqrt{c} = -6 \quad \text{не подходит} \\ \sqrt{c} = 3 \end{cases}$$

$$\rightarrow c = 9$$

Код участника:

(заполняется организатором)

М 10-173

Задача 1

$$\begin{cases} 9(a+b)^2 = 9^3 \\ a^2 - ab + b^2 = 81 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=9 \\ (a+b)^2 - 3ab = 81 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=9 \\ ab=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=9 \\ b=0 \\ a=0 \\ b=9 \end{cases}$$

$$a=9, b=0: \begin{cases} 9^3 = 9^3 \\ 27^2 = 9^3 \\ 9^2 = 9^2 \end{cases} \text{ подходит} \quad a=0, b=9: \begin{cases} 9^3 = 9^3 \\ 27^2 = 9^3 \\ 9^2 = 9^2 \end{cases} \text{ подходит}$$

$$\text{II случай: } a^3 + b^3 \leq 0 \Leftrightarrow a+b < 0: \frac{-c^3\sqrt{c}}{3} + \frac{c^4}{9} - c^3 = c^3 \cdot \frac{9}{c^3}$$

$$-3\sqrt{c} + c - 18 = 0 \quad \begin{cases} \sqrt{c} = -3 \quad \text{не подходит} \\ \sqrt{c} = 6 \rightarrow c = 36 \end{cases}$$

14

$$\begin{cases} 9(a+b)^2 = 36^3 \\ a^2 - ab + b^2 = 36^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b = -72 \\ (a+b)^2 - 3ab = 36^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b = -72 \\ ab = 36^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -36 \\ b = -36 \end{cases}$$

$$a = -36, b = -36: \begin{cases} -36^3 - 36^3 + 3 \cdot 36^3 = 36^3 \\ 9 \cdot 72^2 = 36^3 \\ 36^2 - 36^2 + 36^2 = 36^2 \end{cases} \text{ подходит}$$

Ответ: $a=b=c=0$; $a=c=9, b=0$; $b=c=9, a=0$; $a=b=-36, c=36$.

Задача 3.

Сумма чисел в строке или столбце – это кол-во единиц в строке или столбце. Рассмотрим, сколько "1" может быть в строках таблицы. По условию задачи всего в таблице 1250 "1" и 1250 "0". В каждой строке может быть 0, 1, 2, ..., 49 или 50 единиц. При этом в любых двух строках кол-во единиц должно быть различным и суммарное кол-во единиц должно быть равно 1250.

$$0 + 1 + \dots + 49 = \frac{49 \cdot 50}{2} = 49 \cdot 25 = 1250.$$

Значит, кол-во единиц в строках могут быть только следующие (чтобы любые два из них были различны): 0, 1, 2, ..., 49, 50. Аналогично доказывается, что кол-во единиц в столбцах могут быть только такие же, как в строках. Получается, что найдется столбец, в котором будут 50 единиц $\Rightarrow$ во всех строках будет хотя бы по 1 единице, но должна быть строка, в которой 0 единиц.

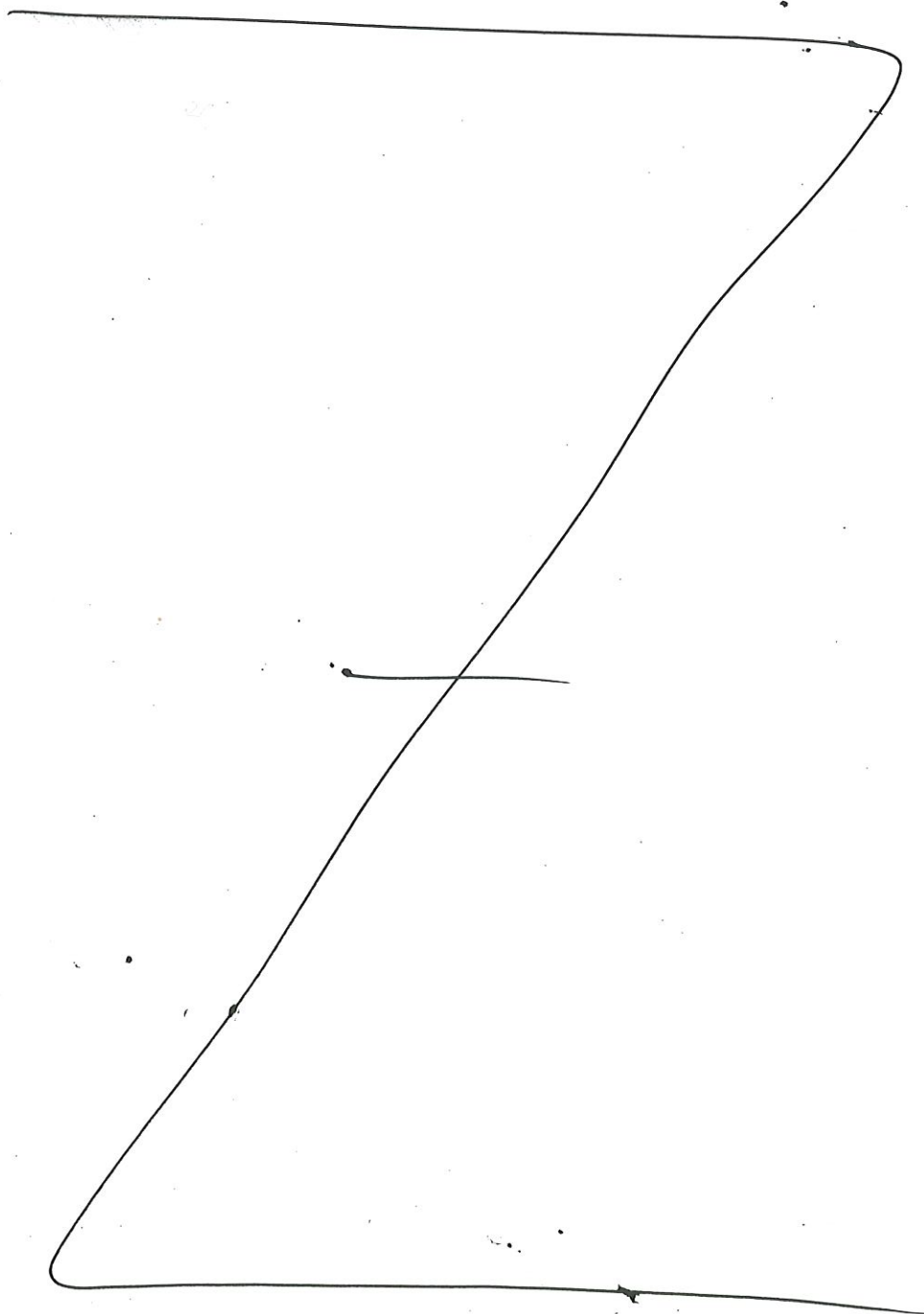
Код участника:

(заполняется организатором)

И 10-173

Задача 3.

Получаем противоречие $\Rightarrow$ не могло быть так, что во всех строках суммы чисел разные и во всех столбцах суммы чисел разные. $\Rightarrow$ Найдутся две строки или два столбца, в которых сумма чисел одинаковая. Что и требовалось доказать.

+10

М10-112

Код участника
(заполняется организатором)



**Олимпиадная работа
заключительного этапа
«Всероссийская олимпиада школьников "Миссия
выполнима. Твоё призвание - финансист!" 2023-2024
г.»
«(Математика 10 класс)»**

Вариант № 1

«27 января 2024 г.»

Никакие другие записи на титульном листе делать не разрешается

1000

1000

М 10-112

Код участника

Всероссийская олимпиада школьников «Миссия выполнима. Твое призвание – финансист!» 2023/2024 уч.г.

Бланк проверки работы

Математика 10 класс

№ задания	ФИО эксперта	Балл	ФИО эксперта	Балл	Итоговый балл
1	Зайчиков	7	Волосова	7	7
2	Овсепкина	10	Богачев	10	10
3	Кирсанова	11	Сртов	11	11
4	Дубинский	0	Брисов	0	0
5	Волосова Н.В.	12	Зайчиков	12	12
6	Кирсанова	14	Шанур	14	14
7	Эмиль	14	Грознев	14	14
8	Эмиль	0	Грознев	0	0
ИТОГО					68

№1

Обозначим за c количество людей с трёхзначными номерами, а x кол-во людей перед Гришей. Тогда получаем 2 уравнения:

$$\begin{cases} x - 23 = c + 99 - x \\ ((x - 9) \cdot 2 + 9) \cdot \frac{5}{4} = (3 \cdot c + 2 \cdot (99 - x)) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x = c + 122 \\ 10x - 90 + 45 = 12c + 8 \cdot 99 - 8x \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 79 \\ \times 99 \\ \hline 792 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 11 \\ \times 122 \\ \hline 1098 \end{array}$$

$$\begin{cases} 2x = c + 122 \\ 18x = 12c + 792 + 45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 18x = 9c + 1098 \\ 18x = 12c + 837 \end{cases}$$

$$9c + 1098 = 12c + 837$$

$$3c = 261$$

$$c = 87$$

$$\begin{array}{r} 1098 \\ - 837 \\ \hline 261 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 261 \\ - 261 \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} 3 \\ 157 \end{array}$$

~~Всего~~ всего чисел $99 + c = 99 + 87 = 166$

ОТВЕТ: 166

№2

Обозначим за $k = \text{НОД}(a, b)$. Заметим, что $\text{НОК}(a, b) : k$, $\text{НОД}(a, b) : k$, $a : k$, $b : k \Rightarrow (a+b)^2 : k \Rightarrow (a+b)^2 + 1 \not\vdots k$ ($k \neq 1$)
 $4\text{НОК}(a, b) + \text{НОД}(a, b) = (a+b)^2 + 1$

Левая часть делится на k , а правая нет при $k \neq 1$, значит

$$k = 1 \Rightarrow \text{НОК}(a, b) = ab$$

$$4ab + 1 = a^2 + 2ab + b^2 + 1$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = 0$$

$$(a-b)^2 = 0$$

$$a = b \Rightarrow \text{НОД}(a, b) = a = b, \text{ но } \text{НОД}(a, b) = 1 \Rightarrow a = b = 1$$

ОТВЕТ: $(a=1; b=1)$

Код участника:

(заполняется организатором)

М 10-112

N3

Предположим, что все строки попарно различны и столбцы тоже. Тогда пусть нет строки с суммой 0, тогда сумма всех строк $\geq \frac{50 \cdot (50+1)}{2} = 1275$ (сумма всех различных чисел от 1 до 50), но $1275 > 1250 \Rightarrow$ существует строка с суммой 0. Но тогда заметим, что в каждом столбце хотя бы один 0 $\Rightarrow$ сумма по всем столбцам $= \frac{49 \cdot (49+1)}{2} = 1225$ (сумма различных от 0 до 49), но $1225 < 1250 \Rightarrow$ противоречие $\Rightarrow$ найдутся 2 совпадающих по ~~сумме~~ строки или столбца.

+11

N5

Заметим, что $f^2(2^n) = f^2(2^{n-1}) + f^2(2^{n-1}) = 2f^2(2^{n-1})$. Мы можем так расписывать $f^2(2^n)$ до $n=1$, где получится $2f^2(2^0)$. Заметим, что на каждой итерации аргумент функции уменьшался в 2 раза, а константа, на которую мы умножаем, увеличивалась в 2 раза $\Rightarrow$

$$f^2(2^n) = 2^n f^2(1) \Rightarrow f^2(4) = 4f^2(1)$$

$$f(1) + f(4) = 9 \Rightarrow f(1) + \sqrt{4f^2(1)} = 9 \Rightarrow f(1) + 2f(1) = 9 \Rightarrow f(1) = 3$$

$$\begin{aligned} f^2(2^{2023}) &= 2^{2023} f^2(1) = 2^{2023} \cdot 3^2 \\ f(2^{2023}) &= \sqrt{2^{2023} \cdot 3^2} = 3 \cdot 2^{1011} \cdot \sqrt{2} \end{aligned}$$

↑
это я считать не буду

$$\text{Ответ: } 3 \cdot 2^{1011} \cdot \sqrt{2}$$

Код участника:
(заполняется организатором)

М 10-112

N 7

ТАК КАК ВСЕ ЧИСЛА РАЗЛИЧНЫ, У НАС ЕСТЬ ХОТЯ БЫ
 9 ЧИСЕЛ $\neq 1$, ПРИ УМНОЖЕНИИ НА КОТОРЫЕ ЧИСЛО УВЕЛИЧИТСЯ.
 ТОГДА ВОЗЬМЕМ МАКСИМАЛЬНОЕ ЧИСЛО НА ДСКЕ И УМНОЖИМ ЕГО
 НА ОСТАЛЬНЫЕ 8. КАЖДАЯ ПАРА БОЛЬШЕ ПРОШЛОГО МАКСИМУМА И
 ВСЕ ПАРЫ РАЗЛИЧНЫ, В ПРОИЗВЕДЕНИИ $\Rightarrow$ +8 УНИКАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ.
 ЗАТЕМ ВОЗЬМЕМ МАКСИМАЛЬНУЮ ПО ПРОИЗВЕДЕНИЮ ПАРУ, И УМ-
 НОЖИМ ПО ОЧЕРЕДИ НА ВСЕ ЧИСЛА НЕ ВХОДЯЩИЕ В НЕЕ. ВСЕ РЕЗУЛЬТАТЫ
 БОЛЬШЕ НЕЕ И УНИКАЛЬНЫ $\Rightarrow + (9-2) = +7$ УНИКАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ.
 АНАЛОГИЧНО МАКСИМАЛЬНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ X ЧИСЕЛ УМНОЖАЕТСЯ
 НА ВСЕ ЧИСЛА НЕ ВХОДЯЩИЕ В НЕГО И ДАЕТ $+(9-x)$ УНИКАЛЬНЫХ
 ЧИСЕЛ. ТОГДА ВСЕГО УНИКАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ:

$$10 + (9-1) + (9-2) + (9-3) + (9-4) + (9-5) + (9-6) + (9-7) + (9-8) + (9-9) = 46 \checkmark$$

ВСЕГДА ЕСТЬ ХОТЯ БЫ 46 РАЗЛИЧНЫХ ЧИСЕЛ

+

ПРИМЕР НА 46:

ВОЗЬМЕМ ВСЕ СТЕПЕНИ 2 ^{от} 0 до 3. В ПРОИЗВЕДЕНИИ ПО-
 ЛУЧАТСЯ ВСЕ СТЕПЕНИ ОТ 0 до $(1+2+\dots+9)=45 \Rightarrow 45-0+1=46$
 РАЗЛИЧНЫХ СТЕПЕНЕЙ 2; 46 РАЗЛИЧНЫХ ЧИСЕЛ

ОТВЕТ: 46

N 6

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 + 3abc &= c^3 \\ (a+b)(a^2 - ab + b^2) + 3abc &= c^3 \\ (a+b)c^2 + 3abc &= c^3; \text{ ПУСТЬ } c \neq 0 \\ (a+b)c + 3ab &= c^2 \\ (a+b)c + 3ab &= a^2 - ab + b^2; \text{ ПУСТЬ } (a+b) \neq 0 \\ c &= \frac{a^2 - 4ab + b^2}{(a+b)} \\ a^2 - ab + b^2 &= c^2 \\ a^2 - ab + b^2 &= \frac{(a^2 - 4ab + b^2)^2}{(a+b)^2} \end{aligned}$$

Код участника:

(заполняется организатором)

М 10-112

№ 6 (ПРОДОЛЖЕНИЕ)

$$(a^2 - ab + b^2)(a^2 + 2ab + b^2) = (a^2 - 4ab + b^2)^2$$

$$a^4 + 2a^3b + a^2b^2 - a^3b - 2a^2b^2 - ab^3 + a^2b^2 + 2ab^3 + b^4 =$$

$$= a^4 - 4a^3b + a^2b^2 - 4a^3b + 16a^2b^2 - 4ab^3 + a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$$

$$a^4 + a^3b + ab^3 + b^4 = a^4 - 8a^3b + 18a^2b^2 - 8ab^3 + b^4$$

$$9a^3b - 18a^2b^2 + 9ab^3 = 0$$

$$ab(a^2 - 2ab + b^2) = 0$$

$$ab(a-b)^2 = 0$$

$$\begin{cases} a=0 \\ b=0 \\ a=b \end{cases}$$

СЕЙЧАС РАССМОТРИМ ВСЕ СЛУЧАИ:

1) $a=0$ / $b=0$ (ВСЕ УРАВНЕНИЯ СИММЕТРИЧНЫ ОТНОСИТЕЛЬНО a И b)

$$a^2 - a \cdot 0 + 0 = c^2$$

$$a^2 = c^2$$

$$(3a)^2 = c^3$$

$$9a^2 = c^3 \Rightarrow c = 3$$

$$a^3 + 0 + 0 = c^3 \Rightarrow a = c = 3; b = 0$$

2) $a-b=0$ / $b-a=0$ ($a=b$)

$$(6a)^2 = c^3$$

$$36a^2 = c^3$$

$$a^2 - a^2 + a^2 = c^2 \Rightarrow a^2 = c^2 \Rightarrow c = 36$$

$$2a^3 + 3a^2c = c^3$$

$$2a^3 + 36a^2 = 36^3 \quad a = \pm 36, \text{ но при } a=36 \quad 2 \cdot 36^3 + x = 36^3, \text{ ГДЕ}$$

$$\text{при } a=-36 \text{ РАБОТАЕТ: } 3 \cdot 36^3 - 2 \cdot 36^3 = 36^3 \quad x > 0 \Rightarrow \text{ПРОТИВОРЕЧИЕ}$$

3) $c=0$

$$a^2 - ab + b^2 = 0 \quad D = b^2 - 4b^2 = -3b^2 \Rightarrow \text{при } b \neq 0 \text{ НЕТ РЕШЕНИЙ}$$

$$\text{при } b=0 \quad (3a)^2 = 0 \Rightarrow a=0$$

4) $a+b=0$

$$(3a+3b)^2 = 0 \Rightarrow c^3 = 0 \Rightarrow \text{АНАЛОГИЧЕН } c=0$$

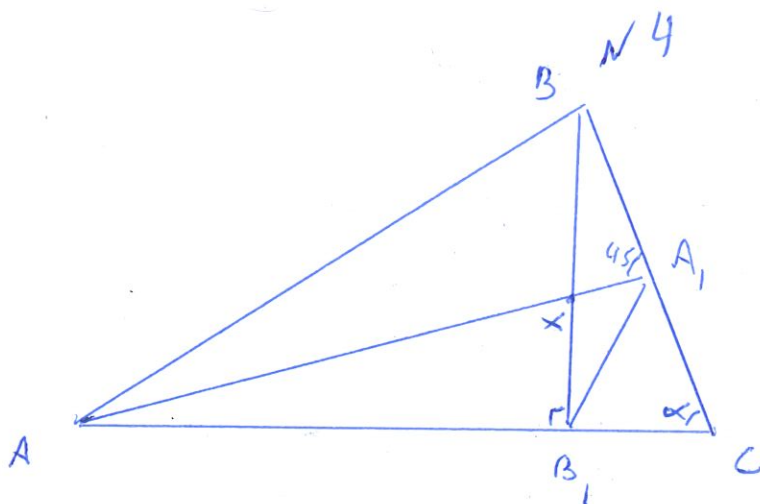
ОТВЕТ: $(a=3; b=0; c=3); (a=0; b=3; c=3); (a=-36; b=-36; c=36); (a=0; b=0; c=0)$

+ 14

Код участника:

(заполняется организатором)

М 10-112



$$\angle A A_1 B = 45$$

$$\angle A_1 C B_1 = \alpha$$

$$\angle C B B_1 = 90 - \alpha \text{ (по сумме углов)}$$

AA_1 – биссектриса

$\Downarrow$

$$\frac{A_1 B}{AB} = \frac{A_1 C}{AC}$$

$$X \in AA_1 \cap BB_1 \Rightarrow \frac{XB}{AB} = \frac{XB_1}{AB_1}$$

$\Downarrow$

$$\frac{BA_1}{XB} = \frac{AC}{AC - AB_1} \Rightarrow \frac{BA_1}{XB} = \frac{AC}{AC - AB_1}$$

$$\frac{BA_1}{XB} = \frac{A_1 C}{B_1 C}$$

$\Downarrow$

$B_1 A_1$ – биссектриса

$\Downarrow$

$$\angle X B_1 A_1 = \frac{90}{2} = 45$$

$$\angle B_1 A_1 A = 180 - 45 - 45 - (90 - \alpha) = \alpha$$

$\Downarrow$

$$\angle A A_1 B_1 = \angle A_1 C B_1$$

$\Downarrow$

AA_1 – касательная

Осанов

гогогогого

М10 - 087
Код участника
(заполняется организатором)



**Олимпиадная работа
заключительного этапа
«РЕГИСТРАЦИЯ ТОЛЬКО для победителей и
призеров ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНОГО ЭТАПА 2022-2023
учебного года "Миссия выполнима. Твоё призвание -
финансист!"»
«(Математика 10 класс)»**

Вариант № 2

«27 января 2024 г.»

Никакие другие записи на титульном листе делать не разрешается

М10 - 087

Код участника

Всероссийская олимпиада школьников «Миссия выполнима. Твое призвание – финансист!» 2023/2024 уч.г.

Бланк проверки работы

Математика 10 класс

№ задания	ФИО эксперта	Балл	ФИО эксперта	Балл	Итоговый балл
1	Колесов	0	Милачин	0	0
2	Смирнов	10	Тютин	10	10
3	Трунцев	12	Шерин	12	12
4	Борисов	2	Фудинский	2	2
5	Тюхтеев	12	Олехова	12	12
6	Морин	14	Борисов	14	14
7	Зинь	0	Трунцев	0	0
8	Зинь	16	Трунцев	16	16
ИТОГО					66

$$2. \text{НОК}(a, b) + 4 \text{НОД}(a, b) = (a+b)^2 \neq 1$$

1) если $\text{НОД}(a, b) \neq 1 = k$
то $a:k; b:k \Rightarrow \text{НОК}(a, b):k$

Но $(a+b)^2+1 \neq k$, т.к. $(a+b)^2:k$

$$2) \text{Из } 1) \text{НОД}(a, b) = 1 \Rightarrow \text{НОК}(a, b) = ab$$

$$ab+4 = (a+b)^2+1$$

$$a^2+ab+b^2=3$$

$$\begin{matrix} \sqrt{1} \\ 3 \end{matrix}$$

Отсюда $a=b=1$ – единственная пара.

$$3. 1) 70 \cdot 70 = 4900$$

$$4900 - 2450 = 2450$$

Значия половина – единицы, другая нули

2) Допустим во всех строках разные суммы, тогда необходимо 70 различных распределений 0 и 1. В

Всего таких возможных сумм 71:

$$0, 1, 2, \dots, 70$$

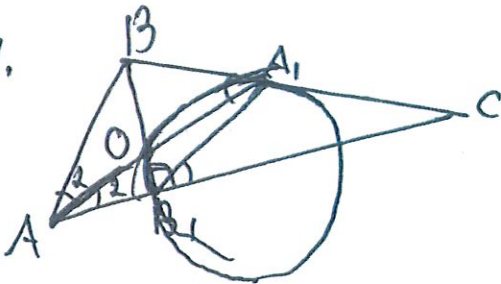
Т.к. в сумме должно получиться 2450, а сумма $0+1+\dots+70=2485$, то необходимы все суммы кроме 35.

3) Теперь рассмотрим такую таблицу, уже по столбцам, и заметим, что суммы 0 и 70 в столбец получить не получится, т.к. есть строка со всеми 0 и всеми 1, значит и распределение как в 2) получить не удастся, т.к. необходимы суммы 0 и 70, а значия будут повторения.

Т. Т. Д.

нет

4.



$$\angle BAA_1 = \angle A, AC = 1$$

$$\angle ADA = 45^\circ$$

$$BB_1 \perp AC$$

1) Окружность не может касаться AB , т.к. она касается точки O . Не может касаться AC , т.к. тогда OB_1 - диаметр.

2) Докажем, что окружность касается BC

Для этого нужно доказать: $\angle BAA_1 = \angle OBA_1$ (как у касательной).

$$3) \angle BBA_1 = 45^\circ \Rightarrow B, A_1 - \text{биссектриса} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{A_1B}{A_1C} = \frac{BB_1}{B_1C}$$

$$\frac{A_1B}{A_1C} = \frac{AB}{AC} \text{ (т.к. } AA_1 - \text{биссектриса)}$$

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BB_1}{B_1C} - \text{доказать}$$

$$4) \angle CA_1A = 135^\circ \Rightarrow \angle C = 45^\circ - 2$$

$$\angle ABC = 135^\circ - 2$$

$$\frac{AB}{AC} = \frac{\sin(45^\circ - 2)}{\sin(135^\circ - 2)} = \operatorname{tg}(45^\circ - 2)$$

$$\frac{BB_1}{B_1C} = \operatorname{tg}(C) = \operatorname{tg}(45^\circ - 2)$$

т.о.д.

2 балла
за хер
решение

$\Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{BB_1}{B_1C}$ - из этого исхода
предыдущие утверждения.
инверсия

$$5. f(x+y) = \sqrt{f^2(x) + f^2(y)}$$

$$1) f(2x) = \sqrt{2} f(x)$$

$$\Downarrow$$

$$f(2^{2024}) = 2^{1012} f(1)$$

$$2) f(2) = \sqrt{2} f(1)$$

$$f(4) = \sqrt{2} f(2)$$

$$f(4) = 2 f(1)$$

$\Downarrow$

$$2 f(1) + f(1) = 12$$

$$f(1) = 4$$

$$f(2^{2024}) = 2^{1014}$$

126

$$6. \begin{cases} a^3 + b^3 + 3abc = c^3 \Rightarrow (a+b)(a^2 - ab + b^2) + 3abc = c^3 \\ (2a+2b)^2 = c^3 \Rightarrow 4(a+b)^2 = c^3 \\ (a^2 - ab + b^2 = c^2) \Rightarrow (a+b)^2 - 3ab = c^2 \end{cases}$$

$$a+b=x \quad ab=y$$

$$\begin{cases} x^2 + 3y = c^3 \\ 4x^2 = c^3 \\ x^2 - 3y = c^2 \end{cases}$$

$$c \neq 0 \text{ (при } c=0, a=b=0)$$

$$cx + 3y = c^2$$

$$x^2 - 3y = c^2$$

$$4x^2 = c^3$$

$$cx + 3y = c^2$$

$$x^2 - 3y = c^2$$

$$4x^2 = c^3$$

$$c = (2x)^{2/3}$$

$$3y = c^2 - cx$$

$$3y = x^2 - c^2$$

$$c^2 - cx = x^2 - c^2$$

$$2x \cdot (2x)^{1/3} - (2x)^{2/3} \cdot x = x^2 - 2x(2x)^{1/3}$$

$$(2x)^{1/3} = k$$

Код участника:

(заполняется организатором)

M10-087

$$6. 4kx - k^2x = x^2$$

$$x = 4k - k^2$$

$$k^3 = 8k - 2k^2, \text{ т.к. } 2xe = k^3$$

$$k^2 + 2k - 8 = 0$$

$$1) k = 2$$

$$x = 4$$

$$c = \sqrt[3]{4x^2}$$

$$c = 4$$

$$y = \frac{x^2 - c^2}{3}$$

$$y = 0$$

$$\begin{cases} a + b = 4 \\ ab = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 4 \\ b = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 0 \\ b = 4 \end{cases}$$

$$2) k = -4$$

$$x = -32$$

$$c = 16$$

$$y = 256$$

$$\begin{cases} a + b = -256 \\ ab = 2^8 \end{cases}$$

$$a = b = -16$$

4/5

$$O \text{ есть } (a; b; c) : (4; 0; 4); (0; 4; 4); (-16; -16; 16); (0; 0; 0)$$

Код участника:

(заполняется организатором)

M10-087

8. Докажем, что Заяц всегда может выиграть:
Разделим доску на 36 квадратов 2×2 , задача

Зайца своим ходом не покидать пределы
одного квадрата, то есть возможны две

ситуации:

X	X
X	X

 и

X	
	X

, и тот и тот случай

заяц может создать, а так, как Волк первым
занимает клетку, то он и будет покидать квадрат
 2×2 , если Волк своим ходом туда вернется, то Заяц
просто займет клетку, тогда все квадраты 2×2
будут завершаться зайцем и его ход всегда
будет проигрышным ход Волка будет X
проигрышным.

МВ-023

Код участника
(заполняется организатором)



**Олимпиадная работа
заключительного этапа
«Всероссийская олимпиада школьников "Миссия
выполнима. Твоё призвание - финансист!" 2023-2024
г.»
«(Математика 10 класс)»**

Вариант № II

«27 января 2024 г.»

Никакие другие записи на титульном листе делать не разрешается

М/О - 023

Код участника

Всероссийская олимпиада школьников «Миссия выполнима. Твое призвание – финансист!» 2023/2024 уч.г.

Бланк проверки работы

Математика 10 класс

№ задания	ФИО эксперта	Балл	ФИО эксперта	Балл	Итоговый балл
1	Хенцов	10	Степанян	10	10
2	Балашиев	4.	Васильева	4	4
3	Иванов	12	Прошечко	12	12
4	Борисов	2	Халиков	2	2
5	Иванова	12	Васильева	12	12
6	Мерин	8	Мандра	8	8
7	Трунов	14	Зин	14	14
8	Трунов	2	Зин	2	2
ИТОГО					64

Код участника:

(заполняется организатором)

МЮ-023

№ 7.

Возьмем степени 2 - от 0 до 10 ($2^0; 2^1 \dots 2^{10}$)

Тогда все возможные произведения будут эквивалентны всем возможным суммам степеней, т.е. всем числам от 0 до $\frac{10 \cdot (10+1)}{2} = 55$, т.е. 56

Предположим, что это не оптимальный вариант, тогда возьмем несколько групп чисел похожего вида, т.е. $\cancel{p^{a_1}}; \cancel{p^{a_2}} \dots \cancel{p^a} p^{k_1}; p^{k_2}; \dots p^{k_n}$

тогда в каждой группе посчитаем все возможные произведения - их будет не менее $\frac{n(n+1)}{2}$ (где n - кол-во чисел в группе)

тогда для каждого из произведений по доске мы можем взять одно из произведений в каждой группе или не брать ничего, итого будет: $(\frac{n_1(n_1+1)}{2} + 1) (\frac{n_2(n_2+1)}{2} + 1) \dots (\frac{n_k(n_k+1)}{2} + 1)$, что больше 56

Ответ: 56.

№ 2.

$$\text{НОК}(a; b) \cdot \text{НОД}(a; b) = ab; \quad \text{НОД}(a^2; b^2) = \text{НОД}^2(a; b)$$

пусть $a = k \cdot \text{НОД}(a; b)$, тогда $b = \frac{\text{НОК}(a; b)}{k}$

$$b^2 + 4 \frac{a}{k} = (a+b)^2 + 1$$

I при $a=b$

$$\text{НОД}(a; b) = \text{НОК}(a; b) = a$$

$$a + 4a = (2a)^2 + 1$$

$$\frac{5}{4}a^2 - 5a + 1 = 0$$

$$\begin{cases} a=1 \\ a=\frac{4}{5} \end{cases} \quad \begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases} - \text{решение}$$

II при $a \neq b$

без потери общности $a > b$

$$\text{НОД}(a; b) \leq \frac{a}{2} \quad \text{НОК}(a; b) \geq 2a$$

III $\text{НОД}(a; b) \geq 1$; $\text{НОК}(a; b) = ab$

$$ab + 4 = a^2 + b^2 - 2ab + 1$$

$$a^2 + ab + b^2 - 3 = 0$$

т.к.



ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМА.

ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ – ФИНАНСИСТ!»
ПО ПРЕДМЕТУ МАТЕМАТИКА 2023-2024 уч. года

ОЧНЫЙ ЭТАП

10 класс

Вариант 2

Задание 1 (10 баллов)

В очереди стояло n людей, каждый из них получил талон со своим номером в очереди (от 1 до n). Гриша влез внутрь очереди без талона. Он сразу заметил несколько фактов:

1. Человек с талоном номер 100 стоял сзади.
2. Спереди от Гриши количество людей на 31 больше, чем сзади.
3. Общее количество цифр на талонах у людей сзади на 20% больше, чем общее количество цифр на талонах у людей спереди Гриши.

После этого Гришу заметили и отправили в самый конец очереди. За это время кроме Гриши в очереди люди не уходили и никак не менялись. Сколько людей было в очереди перед приходом Гриши?

Задание 2 (10 баллов)

Найдите все такие пары натуральных чисел $(a; b)$, для которых $\text{НОК}(a, b) + 4 \text{НОД}(a, b) = (a + b)^2 + 1$.

Задание 3 (12 баллов)

Дана квадратная таблица 70×70 . В каждой её клетке стоит либо единица, либо ноль, причём сумма всех чисел в таблице равна 2450. Докажите, что или в каких-то двух строках, или в каких-то двух столбцах одинаковая сумма чисел.

Задание 4 (12 баллов)

В треугольнике ABC биссектриса AA_1 и высота BB_1 пересекаются в точке O . Оказалось, что $\angle AA_1B = 45^\circ$. Докажите, что окружность, описанная около треугольника A_1OB_1 , касается одной из сторон $\triangle ABC$.

~1. рассмотрим несколько случаев:

I пусть в очереди осталось не менее 1 человека с номерами от 1 до 9, а из очереди ушли не более 8 человек, а именно

$1 \leq a \leq 9$ человек с номерами от 10-a до 9

тогда очередь выглядит так:

$\underbrace{10-a \dots 9}_{a \text{ человек}} \quad \underbrace{10 \dots 99}_{90 \text{ человек}} \quad \uparrow \quad \underbrace{100 \dots n}_{n-99 \text{ человек}}$
Граница

тогда по факту ~2: $90+a = n-99-31$

по факту ~3: $1,2 \cdot (a + 2 \cdot 90) = 3(n-99)$
на 10% больше 1 цифра 2 цифры 3 цифры

$$\begin{cases} 90+a = n-99-31 \\ 1,2(a+2 \cdot 90) = 3(n-99) \end{cases} \quad \begin{cases} a = n-220 \\ 1,2(n-220+180) = 3(n-99) \quad | \cdot \frac{5}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = n-220 \\ 2(n-40) = 5(n-99) \end{cases} \quad \begin{cases} a = n-220 \\ 2n-120 = 5n-495 \end{cases} \quad \begin{cases} 3n = 375 \\ a = n-220 \end{cases} \quad \begin{cases} n = 125 \\ a = -95 \end{cases}$$

п.к. a - кол-во человек $1 \leq a \leq 9$, но решений нет.

II если из очереди ушли все с номерами от 1 до 9 и еще $0 \leq a \leq 90$ человек с номерами от 10 до 99, тогда очередь:

$\underbrace{10+a \dots 99}_{90-a \text{ человек}} \quad \uparrow \quad \underbrace{100 \dots n}_{n-99 \text{ человек}}$
Граница

факт 2: $90-a = n-99-31$

факт 3: $1,2(2 \cdot (90-a)) = 3(n-99)$
на 10% больше 2 цифры в параметре 3 цифры

$$\begin{cases} 90-a = (n-99)-31 \\ 1,2(2 \cdot (90-a)) = 3(n-99) \end{cases} \quad \begin{cases} -a \leq n-220 \\ 2 \cdot 2(90-a) = 5(n-99) \end{cases} \quad \begin{cases} a = 220-n \\ 4(90-(220-n)) = 5(n-99) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 220-n \\ 4n-520 = 5n-495 \end{cases} \quad \left\{ \right.$$

Код участника:

(заполняется организатором)

M10 - 023

№1. когда Грisha пришел в очередь, она была

так:

1...9 10...a 100...n
 9 человек a-9 человек 99-a человек n-99 человек

перед Грishей могли подняться люди с талоном 1-9, т.к. в противном случае изади него было бы отрицательное кол-во человек по факту №2.

рассмотрим на факт также $a+1 \leq 100$, т.к. талон 100 изади Грisha $a \leq 99$

тоже также $a > (99-a)+31$, т.к. иначе талон 100 не по факту
 $2a > 130$
 $a > 65$

рассмотрим факт 2: $9 + (a-9) = (99-a) + (n-99) + 31$
 $a = n - a + 31$
 $2a = n + 31$

факт 3: $1 \cdot 9 + 2 \cdot (a-9) = 2 \cdot (99-a) + 3 \cdot (n-99)$
 1 цифра 2 цифры 2 цифры 3 цифры

~~15~~ 1×5

$$\begin{aligned} 0 \cdot 9 + 6 \cdot 2(a-9) &= 10 \cdot (99-a) + 15 \cdot (n-99) \\ 54 + 12a - 108 &= 990 - 10a + 15n - 1485 \\ 22a &= 15n + 54 - 495 \\ 22a &= 15n - 441 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 2a = n + 31 \\ 2(11 \cdot 11 \cdot 2a) = 15n - 441 \end{cases} \quad \begin{cases} 2a = n + 31 \\ 11(n + 31) = 15n - 441 \end{cases} \quad \begin{cases} 11n + 341 = 15n - 441 \\ 2a = n + 31 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4n = 782 \\ 2a = n + 31 \end{cases} \quad \begin{cases} n = 195,5 \\ a = 113,5 \end{cases} \quad \text{н.к. не подходит}$$

если же факт 3 записывается как $1 \cdot 9 + 2(a-9) = 0,8(2 \cdot (99-a) + 3(n-99))$
 т.е. 20% состоит из сумми цифр изади

$$\begin{cases} n = 210 \\ a = 120,5 \end{cases} \quad \text{также не подходит}$$

Ответ: такого не могло быть

10

Код участника:

(заполняется организатором)

M10 - 023

~3.

Предположим противное, что в модных двух строках и в модных двух столбцах разная сумма:

~~тогда в~~

всего сумма чисел в строке или в столбце может принимать значение от 0 (одиничу) до 70 (все 70 единичу) и т.к. всего строк и столбцов по 70, то по предположению из 71 варианта нужно выбрать 70 сумм для столбцов и для строк (отдельно). при этом сумма всех сумм в строках (сумма всех чисел) должна быть равна 2450 (аналогично и в столбцах)

выбрать 70 из 71 значит не выбирать 1, равной a
сумма чисел от 0 до 70 равна $\frac{0+70}{2} \cdot 71 = \frac{70 \cdot 71}{2} = 2485$
значит $2485 - a = 2450 \quad a = 35$

т.е. должны присутствовать все суммы кроме 35, в том числе 0 и 70

значит в некоторой строке ~~нет~~ все ~~из~~ числа - нули, тогда ни в одном столбце сумма не может быть равна 70 противоречие.

значит предположение неверно и найдутся две строки или два столбца, сумма ~~из~~ ¹² в которых чисел в которых одинаковы Ч.П.Д.

~5. Докажем, что $f(2^k) = \sqrt{2} \cdot f(2^{k-1})$:

$$f(2^k) = f(2^{k-1} + 2^{k-1} + 2^{k-1}) = \sqrt{f^2(2^{k-1}) + f^2(2^{k-1})} = \sqrt{2f^2(2^{k-1})} = \sqrt{2} \cdot f(2^{k-1})$$

$$\text{Тогда } f(4) = \sqrt{2} f(2) = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} f(1) = 2 f(1)$$

$$f(1) + f(4) = 12$$

$$f(1) + 2f(1) = 12$$

$$f(1) = 4$$

↑ т.к. $f(n) \geq 0$, $\forall n$

+

Код участника:

(заполняется организатором)

MW-023

~5 (продолжение)

$$f(2^{2024}) = \sqrt{2} f(2^{2023}) = \dots = (\sqrt{2})^{2024} f(2^0) = 2^{1012} f(1) = 2^{1012} \cdot 4 = 2^{1012} \cdot 2^2 = 2^{1014}$$

Ответ: 2^{1014}

125

~6.

$$\begin{cases} a^3 + b^3 + 3abc = c^3 \\ (2a+2b)^2 = c^3 \\ a^2 - ab + b^2 = c^2 \end{cases}$$

Замени переменных: $p = a+b$
 $q = ab$

$$a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b) = p^3 - 3pq$$

$$(2a+2b)^2 = 4(a+b)^2 = 4p^2$$

$$a^2 - ab + b^2 = (a+b)^2 - 3ab = p^2 - 3q$$

$$\begin{cases} (p^3 - 3pq) + 3qc = c^3 \\ 4p^2 = c^3 \\ p^2 - 3q = c^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} pc^2 + 3qc = c^3 \quad | :c \\ 4p^2 = c^3 \\ p^2 - 3q = c^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c^2 - pc - 3q = 0 \quad (*) \\ 4p^2 = c^3 \\ p^2 - 3q = c^2 \end{cases}$$

при $c=0$: $(2a+2b)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=0 \end{cases}$, значит, $\begin{cases} a=0 \\ b=0 \\ c=0 \end{cases}$ - решение

$$A) \quad c^2 - pc - 3q = 0$$

$$D = p^2 + 12q = 4p^2 - 3(p^2 - 3q) + 3q = c^3 - 3c^2 + 3q$$

$$A) \quad c^2 - pc + 3q = 0$$

$$c^2 - (a+b)c - 3ab = 0$$

$$\begin{cases} 3q = c^2 - pc \\ 4p^2 = c^3 \\ p^2 - c^2 + pc = c^2 \quad (1) \end{cases}$$

$$A) \quad p^2 - c^2 + pc = c^2$$

$$2c^2 - pc - p^2 = 0$$

$$D = p^2 + 4 \cdot 2p^2 = 9p^2 = (3p)^2$$

$$\begin{cases} c = \frac{p+3p}{2 \cdot 2} \\ c = \frac{p-3p}{2 \cdot 2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = p \\ c = -\frac{p}{2} \end{cases}$$

$$I \quad c = p$$

$$\begin{cases} c^2 - c^2 - 3q = 0 \\ 4c^2 = c^3 \quad | :c^2 \\ c^2 - 3q = c^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3q = 0 \\ c = 4 \\ -3q = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=0 \\ b=0 \\ c=4 \end{cases}$$

$$II \quad c = -\frac{p}{2} \quad p = -2c$$

$$\begin{cases} c^2 + 2c^2 - 3q = 0 \\ 76c^2 = c^3 \quad | :c^2 \\ \dots \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3(c^2 - q) = 0 \\ c = 16 \\ \dots \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = 16 \\ q = 16^2 \\ D = -2 \cdot 16 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = 16 \\ ab = 16^2 \\ a+b = -2 \cdot 16 \end{cases}$$

№6 (продолжение)

Код участника:
(заполняется организатором)

MIO-023

$$\begin{cases} c = 16 \\ a = -16 \\ b = -16 \end{cases}$$

Итого: Ответ:

$$\begin{cases} a=0 \\ b=0 \\ c=0 \end{cases}$$

$$\text{или } \begin{cases} a=0 \\ b=0 \\ c=4 \end{cases}$$

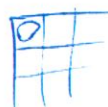
$$\text{или } \begin{cases} a=-16 \\ b=-16 \\ c=16 \end{cases}$$

76

№8.

выиграет Волк, в при такой стратегии:

а 1. Волк ставит фишку в угол В



у Зайца единственного ход:



Далее Волк двигает фишку к краю доски:



I если Заяц делает такой ход:



то проигрывает,

т.к. Волк может повторить предыдущий ход (к краю доски) и

→ Заяц будет вынужден повторить тот же ход:



В итоге последний ход сделает Волк, после которого

фишка окажется в углу:



проигрывает Заяц.

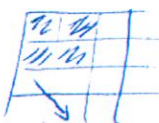
II Если Заяц делает ход к другому краю:



то Волк вынужден слодить:



Затем Заяц:



Волк ходит вверх



тут у Зайца два варианта:

а) он ходит вправо вверх или вправо вниз и попадает в ситуацию, идентичную I (или по достижении край игроки попадают в угол, или смещаются вверх и повторяют все)

б) Заяц ходит влево вниз, после чего можно вернуться к началу рассмотрения этапа II

пункт (а) обязательно будет выполнен, в крайнем случае по достижении нижнего края (т.к. доска 12x72, а каждое повторение этапа II смещает фишку на 2 клетки вниз) т.е. таким образом, проигрывает...

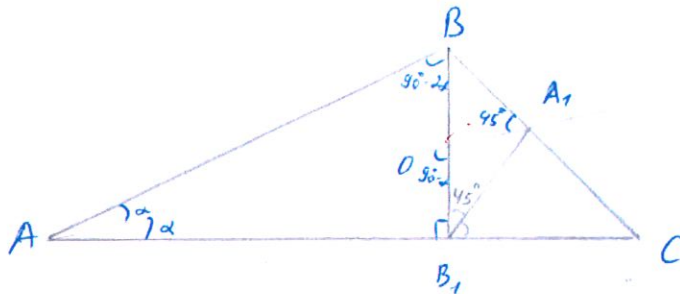


Код участника:

(заполняется организатором)

М10-023

~4.



Обозначим $\angle BAA_1 = \angle B_1A_1C = \alpha$

$$\angle ABB_1 = 90^\circ - 2\alpha \text{ из } \triangle ABB_1, \angle B_1 = 90^\circ +$$

$$\angle AOB_1 = 90^\circ - \alpha \text{ из } \triangle AOB_1, \angle B_1 = 90^\circ +$$

$$\angle BA_1A = 45^\circ \text{ по укл.}$$



по свойствам биссектрисы $\frac{AB}{AC} = \frac{BA_1}{A_1C}$ и $\frac{AB}{AB_1} = \frac{BO}{OB_1} +$

необходимо доказать: $\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{BB_1}{B_1C}$, т.е. B_1A_1 - биссектриса $\angle BA_1C$

$$\text{значит, } \angle OB_1A_1 = \frac{1}{2} \angle BB_1C = \frac{1}{2} \cdot 90^\circ = 45^\circ$$

Как огибае следу
треуголь?

тогда в окружности, описанной около $\triangle A_1OB_1$, $\angle OA_1B_1 = 45^\circ$
 $\angle BA_1O = 45^\circ$, значит, это ~~то~~ угол между касательной и хордой,

т.е. BC - касательная

Док. отсутствует

Ч. П. Д.

$$(A): k^2 = \frac{BA_1^2}{A_1C^2} = \frac{AB^2}{AC^2} = \frac{AB_1^2 + B_1B^2}{(AB_1 + B_1C)^2}$$

$$BB_1^2 + AB_1^2 = k^2 (AB_1 + B_1C)^2$$

$$BB_1^2 + AB_1^2 = k^2 B_1C^2 + k^2 (AB_1^2 + AB_1 \cdot B_1C)$$

$$AB_1^2 = k^2 B_1C^2 + k^2 AB_1 \cdot B_1C \quad \leftarrow$$

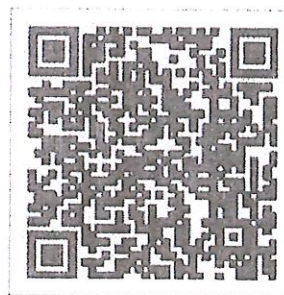
$$\frac{AB_1}{AC + B_1C} = k^2 - \text{верно, значит,}$$

$$B_1B^2 = k^2 B_1C^2$$

$$\frac{B_1C^2}{B_1B^2} = k^2 = \frac{BA_1^2}{A_1C^2}, \text{ т.е. } \frac{BA_1}{A_1C} = \frac{BB_1}{B_1C}$$

М10-010

Код участника
(заполняется организатором)



Олимпиадная работа
заключительного этапа

«Всероссийская олимпиада школьников "Миссия
выполнима. Твоё призвание - финансист!" 2023-2024
г.»

«(Математика 10 класс)»

Вариант № 1

№ 2 10

«27 января 2024 г.»

Никакие другие записи на титульном листе делать не разрешается

Всероссийская олимпиада школьников «Миссия выполнима. Твое призвание – финансист!» 2023/2024 уч.г.

Бланк проверки работы

Математика 10 класс

№ задания	ФИО эксперта	Балл	ФИО эксперта	Балл	Итоговый балл
1	Волосова Н.В.	10	Роздеев С.Н.	10	10
2	Балашихин	10	Овсенко	10	10
3	Касанов	12	Гурьянов И.Э.	12	12
4	Дубинский	0	Борисов	0	0
5	Макулов	12	Иванов	12	12
6	Дубинский	0	Борисов	0	0
7	Эмиль	3	Груздев	3	3
8	Эмиль	16	Груздев	16	16
ИТОГО					63

Задача 1.

Очередь с Гринвич (Г) вылезает та,

$$123 \dots (x+2) \mid x+24 \dots 100 \dots (2x+23)^n$$

2 3 ... $x+2$ | $x+24$... 100 ... 18, 25
 Тогда получим: $\frac{(x+2) + (x+24)}{2} \cdot 18 + \frac{(x+24) + 100}{2} \cdot 25$

Следствие: $9 + 2(x + y)$

основания
гвоздены
привычные
не только
для нас.
100. Сущ
и т

$$= 1.25 \cdot (2(76-x) + 3(2x-76))$$

группы
группы, р. 100 (с. 100)

Честно говоря и для себя
не могу, т.е. $23 \in 99$ (на 100 сгоря)
 $x \in 86 \Rightarrow 26 + 23 \in 175$

$$9 + 28 + 28 = 2.5(76-10) + 3.75(26-70)$$

37 + 202 190 - 7.50 + 7.50 - 185

$$132 = 3x$$

$x = 44$

$$h = 2x + 21 = 111$$

Вместе: 11 человек

Задача 2

Задача 2
 Пусть $d = \text{НОД}(a, b)$. Тогда $a = dx$, $b = dy$, где x и y взаимно просты.

$$\mu_0 \frac{d\mathbf{K}}{dt} = d\mathbf{K} \cdot \mathbf{K}.$$

$$4 dx dy = d^2(x+y)^2 + 1$$

$$4x_4 + \frac{1}{2} = d(x_4)^2 + \frac{1}{d}$$

$4 \times 4 + 1 = 17$
 ↑
 композиция

$\Rightarrow$ композиция $= 17$
 (т.е. $\frac{1}{d} = \text{композиция}$ и д-композиция)

$$\Rightarrow x = a$$

$$4ab + 1 = (a+b)^2 + 1$$

$$4ab^2 + c^2 + 2ab + b^2$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = 0$$

$$(a-b)^2 = 0$$

$$a \approx b = 0$$

$a = b$

NO. NO!

$$\text{MOD}(a, b) = 1 \Rightarrow a = b$$

$d = d, m_4$
lyse nachm

$$a=b \} \rightarrow a=b=1$$

Umform: $(1; 2)$.

Задача 3. В этой задаче я подразумеваю, что ^{числом} ~~всех~~ ^{целое} ~~число~~, но значениями-целыми значениями и т.д. пойдём от противного:

Заметим, что сумма чисел в некоторой строке (как и в некоторой столбце) может принимать значения $[0; 50]$, т.е. всего 51 значений в строках и столбцах 50 , а рассуждаем мы 0 и 50 .

Если берём чисел от 0 до 50 включительно равное 1275 , причём сумма всех чисел 51 , а не $50 \Rightarrow$ мы можем не брать 0 и 50 . По условию, сумма в таблице $1250 \Rightarrow$ нет строк с суммой 25 . $(1275 - 25 = 1250)$. Значит есть строка A с суммой 0 (все нули) и строка B с суммой 50 (все единицы).

Но это означает, что нет столбца с суммой 0 (т.к. в любой столбце будет 1 из строки A) и нет столбца с суммой 50 (т.к. в любой столбце будет 0 из строки B).

~~и значит~~ $\Rightarrow$ суммы чисел в столбцах принимают значения $[1; 49]$. т.е. 49 , а столбцов 50 . По принципу Дирихле найдётся две столбца с одинаковой суммой.

Противоречие с предположением от противного.

К.Т. - 8

Задача 6.

$$\begin{cases} ab=x \\ a+b=y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2 - 3xy + 3xc - c^2 = 0 \\ 9y^2 = c^2 \Rightarrow y = \frac{\sqrt{c^2}}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\sqrt{c^2}}{3} - x\sqrt{3} + 3xc - c^2 = 0 \\ \frac{c^2}{9} - 3x = c^2 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{c^2 - \frac{\sqrt{c^2}}{3}}{3c - \sqrt{c^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{\sqrt{c^2}}{3} - 3x^3}{3c - \sqrt{c^2}} = \frac{8}{9}c^2 \mid \cdot 9(3c - \sqrt{c^2})$$

$$\sqrt{c^2} - 27c^3 = 8c^2(3c - \sqrt{c^2})$$

$$c^4\sqrt{c^2} - 27c^3 = 24c^3 - 8c^3\sqrt{c^2}$$

$$c^4\sqrt{c^2} + 8c^3\sqrt{c^2} = 51c^3$$

$$c\sqrt{c^2} + 8\sqrt{c^2} = 51$$

$$\sqrt{c^2} + 8 = 51$$

$$t = 3$$

0 баллов

Омлен: Точно не существует

$$t^3 + 8 + 51(4 - t) = (t^2 + 3t + 12) \Rightarrow t^3 + 8 + 204 - 51t = t^2 + 3t + 12 \Rightarrow t^3 - t^2 - 50t + 212 = 0$$

$$t^3 - t^2 - 50t + 212 = 0 \Rightarrow t = 3 \Rightarrow 27 - 9 - 150 + 212 = 0 \Rightarrow 0 = 0$$

Омлен: Точно не существует

Код участника:

(заполняется организатором)

Задача 5.

$f(x) \geq 0$ по условию $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ можно возвести ~~уравнение~~ равенство $\square$ условие $\square$ и возр:

$$f^2(x+y) = f^2(x) + f^2(y)$$

Тогда

~~$$f^2(x) = f^2(1) + f^2(x-1) = f^2(1) + f^2(x-2) = \dots = x f^2(1)$$~~

$$f^2(n) = f^2(1) + f^2(n-1) = f^2(1) + f^2(n-2) = \dots = n f^2(1)$$

$$f(n) = \sqrt{n f^2(1)} \quad (\text{все } \geq 0 \Rightarrow \text{можно брать корень})$$

$$f(n) = \sqrt{n} \cdot f(1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(2) = 2 f(1)$$

$$3 f(1) = 9$$

$$f(1) = 3$$

$$f(2^{2013}) = \sqrt{2^{2013}} f(1) = 2^{1006} \sqrt{2} \cdot 3$$

$$\text{Ответ: } 3 \cdot 2^{1006} \sqrt{2}.$$

(+)

~~Решение~~

+

Задача 8.

~~Рассуждения: пусть x — какое-то натуральное число. Тогда x^2 — квадрат натурального числа. Если x^2 делится на 2, то x делится на 2. Если x^2 не делится на 2, то x не делится на 2. Но тогда x^2 делится на 4, что невозможно, так как x^2 не делится на 4. Следовательно, x^2 делится на 2, и x делится на 2. Таким образом, x делится на 2. Если x делится на 2, то x^2 делится на 4. Если x не делится на 2, то x^2 не делится на 4. Но тогда x^2 делится на 4, что невозможно, так как x^2 не делится на 4. Следовательно, x^2 делится на 2, и x делится на 2. Таким образом, x делится на 2. Если x делится на 2, то x^2 делится на 4. Если x не делится на 2, то x^2 не делится на 4. Но тогда x^2 делится на 4, что невозможно, так как x^2 не делится на 4. Следовательно, x^2 делится на 2, и x делится на 2. Таким образом, x делится на 2.~~

Заче 8. Попречи галу ^{в обичају} ширини раскрс

Министерство Раггелле гоош не 28 и вогренил 2021 Ренте-копел



Пусть z — всегда z и в итерации,
в котором есть с функцией (такой z , единственный где z).
Заметим, что он всегда может это сделать.

почему? ~~Вот почему...~~

Рассмотрим гц всплеска :

~~Robertson~~ 25/4/00

~~Bank Bonds am nächsten Freitag~~
~~Bank Bonds am nächsten Freitag~~

Очевидно, первый ход он должен так сделать. Сразу замети, что в этом абстракте (в первом виде поставил точки) остается где основание перст.

Если были оставлены в явном изобретении, то он является уже и
у него есть как в оставленном ином в этом изобретении и
были бы в нем специфичным характером изобретения)
Если были в нем и, изобретение (или) еще
затем в нем то в нем оставлены или же и
ином (некоторые могут сказать). Там же
(ни и в нем не будет изобретения и поэтому оно не изобретение
которое затея специфичное изобретение (или) основано
2 оставлены ином (либо все же, так возвращение к нему).

Не могу из них
получить ничего.
Тем же образом, за все время
побит в иран
границы, потому
сейчас настала война. Не говоря
о том, что в настоящее время
в Европе, в которой сейчас
идет борьба (особенно не бойня)

Omben: 3029.

+

Код участника:

(заполняется организатором)

Задача 7.

Для нечетного заметим, что имея 1 среди наших чисел, мы получим минимум (т.е. если ее не будет, то не будем минимизировать).

Пусть $f(x)$ – наименьшее различие чисел среди ~~возможных~~ ^{возможных} кандидатов, если среди них есть 1. $g(x)$ – если не 1.

Заметим, что $f(x) \leq g(x-1)$, т.е. мы можем добавить 1

и $(x-1)$ -ому числу и получить столько же различных чисел

~~как раньше~~ ^{как раньше} среди ~~проб~~ ^{проб}.

~~Пусть $g(x) \leq f(x)$, т.е. мы можем добавить 1 и $(x-1)$ -ому числу и получить столько же различных чисел, как раньше.~~

Тогда $f(x) \leq g(x)$, $f(x) \leq g(x+1)$, очевидно, выбирая $f(x)$ лучше.

Тогда можно посчитать $g(x)$ для x , являющегося не 10-м числом.

Таким образом очевидно что лучше выбирать число, которое является степенью двойки. Почему? Ну потому что

есть несколько чисел, которые не являются степенями

чисел, которые являются степенями двойки.

Тогда заменим их на степени (выберем) наибольшее

число не увеличивая. Так можно, потому что степень можно добавить только же или даже больше.

Тогда оставшиеся кандидаты покажем степени.

✓ $1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, \dots$ можно, потому что ~~все~~ ^{все} ~~они~~ ^{они} ~~являются~~ ^{являются} ~~степенями~~ ^{степенями} ~~двойки~~ ^{двойки} ~~и~~ ^и ~~они~~ ^{они} ~~являются~~ ^{являются} ~~наибольшими~~ ^{наибольшими} ~~числами~~ ^{числами} ~~среди~~ ^{среди} ~~кандидатов~~ ^{кандидатов} ~~таких~~ ^{таких} ~~же~~ ^{же} ~~или~~ ^{или} ~~даже~~ ^{даже} ~~больше~~ ^{больше} ~~или~~ ^{или} ~~равны~~ ^{равны} ~~степени~~ ^{степени}.

Все 8 полученных чисел (они просто будут больше, чем кандидаты) ~~являются~~ ^{являются} ~~наибольшими~~ ^{наибольшими} ~~числами~~ ^{числами} ~~среди~~ ^{среди} ~~кандидатов~~ ^{кандидатов} ~~таких~~ ^{таких} ~~же~~ ^{же} ~~или~~ ^{или} ~~даже~~ ^{даже} ~~больше~~ ^{больше} ~~или~~ ^{или} ~~равны~~ ^{равны} ~~степени~~ ^{степени}.

Ответ: 18.

(Пример: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512)

35

Реш

4000

XXXXXX

M10-084

Код участника
(заполняется организатором)



Олимпиадная работа
заключительного этапа
«Всероссийская олимпиада школьников "Миссия
выполнима. Твоё призвание - финансист!" 2023-2024
г.»
«(Математика 10 класс)»

Вариант № 1

«27 января 2024 г.»

Никакие другие записи на титульном листе делать не разрешается

№1 Заметим, что если человек становится 100 сзади Гриши, то перед ним только одно и двузначное число. Пусть людей перед ним X , тогда сзади $X-23$. Разберём два случая. Первый случай, все номера за Гришей трёхзначные, т.е. $X=99$. Тогда сумма цифр людей после Гриши = сумма людей перед ним, ~~умноженная~~ делённая на 1,25, или умноженная на 0,8 и равна $(9+90 \cdot 2) \cdot 0,8 =$ нецелое число, противоречие. Значит, остаётся только ^{двузначные} второй случай, $X < 99$ и после него есть люди с двузначными номерами.

Сумма цифр талонов перед Гришей равна $9+2 \cdot (X-9)$, т.к. $X > 9$, иначе противоречие со 2-м наблюдением. После равна сумме двузначных + трёхзначных $= 2 \cdot (99-X) + 3 \cdot (X-23-(99-X))$.

Получили, что $(9+2(X-9)) \cdot 0,8 = 2(99-X) + 3(X-23-(99-X))$.

$\Rightarrow 1,6X - 7,2 = 4X - 168,8$, т.е. $2,4X = 160,8 \Rightarrow X = \frac{160,8}{2,4} = \frac{1608}{24} = 67$.

Итого, всего людей в очереди $X + (X-23) = 2X - 23 = 2 \cdot 67 - 23 = 111$.

№3 Допустим, что мы смогли расставить числа так, что их общая сумма равна 1250, но ни в каких двух строках или двух столбцах сумма цифр не совпала. Заметим, что будем рассматривать сумму чисел в строках (в столбцах она считается аналогично). Сумма ^{чисел} цифр в строке может принимать целые значения на промежутке $[0; 50]$. С другой стороны, ~~$0+1+2+\dots+49 = \frac{49 \cdot 50}{2} = 1225$~~ — минимальная сумма чисел во всей таблице. Всего строк 50, а возможных сумм 51. Значит, лишь одна сумма не будет присутствовать. Пусть она равна X . Тогда, $X = (1+2+\dots+50) - 1250 = \frac{50 \cdot 51}{2} - 1250 = 25 \cdot 51 - 1250 = 25$.

№1 Заметим, что если человек становится 100 сзади Гриши, то перед ним только одно и двузначные номера. Пусть людей перед ним X , тогда сзади $X-23$. Разберём два случая. Первый случай, все номера за Гришей трёхзначные, т.е. $X=99$. Тогда сумма цифр людей после Гриши = сумма людей перед ним, ~~или~~ делённая на 1,25, или умноженная на 0,8 и равна $(9+90 \cdot 2) \cdot 0,8 =$ нецелое число, противоречие. Значит, остаётся только ^{двузначные} второй случай, $X < 99$ и после него есть люди с двузначными номерами.

Сумма цифр талонов перед Гришей равна $9+2 \cdot (X-9)$, т.к. $X > 9$, иначе противоречие со 2-м наблюдением. После равна сумме двузначных + трёхзначных $= 2 \cdot (99-X) + 3 \cdot (X-23-(99-X))$. Получаем, что $(9+2(X-9)) \cdot 0,8 = 2(99-X) + 3(X-23-(99-X))$
 $\Rightarrow 1,6X - 7,2 = 4X - 168,8$, т.е. $2,4X = 160,8 \Rightarrow X = \frac{160,8}{2,4} = \frac{1608}{24} = 67$.

Итого, всего людей в очереди $X + (X-23) = 2X - 23 = 2 \cdot 67 - 23 = 111$.

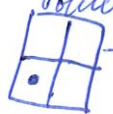
№3 Допустим, что мы смогли расставить числа так, что их общая сумма равна 1250, но ни в каких двух строках или двух столбцах сумма цифр не совпала. Заметим, что будем рассматривать сумму чисел в строках (в столбцах она считается аналогично). Сумма ^{чисел} цифр в строке может принимать целые значения на промежутке $[0; 50]$. С другой стороны, ~~$0+1+2+\dots+49 = \frac{49 \cdot 50}{2} = 1225$ — минимальная сумма чисел во всей таблице.~~ Всего строк 50, а возможных сумм 51. Значит, лишь одна сумма не будет присутствовать. Пусть она равна X . Тогда, $X = (1+2+\dots+50) - 1250 = 1275 - 1250 = 25$.

Код участника:

(заполняется организатором)

М 10-084

№3-продолжение. Значит, в какой-то строке есть сумма чисел, равная 0 и 50, тогда и в каком-то столбце найдётся сумма чисел, равная 0 и 50. Но тогда, в строке с суммой чисел 0 все числа равны 0, а в столбце с суммой 50 все числа равны 1, но они где-то пересекаются. Получается, противоречие. Значит, сумма чисел в каких-то двух столбцах или строках совпадёт. +10

№8 Выигрывает заяц. Стратегия (мы играем за зайца): разобьём доску на квадраты 2×2 . В каждом таком квадратике при шахматной раскраске всей доски будет 2 чёрных и две белых клетки. Допустим, что мы по ходу игры мы определяем, в каком квадратике 2×2 стоит фишка, и передвигаем её и в противоположную клетку этого квадратика, таким образом после хода зайца + волка в каждом таком квадратике ~~была~~ ^{было} фишка была поставлена на 2 поле одного цвета. Пример:  - стало после хода зайца. Мы подстраиваемся под волка, после нашего хода волк либо остаётся в том же квадратике, но тогда мы опять ~~по~~ ^{по} ходим в противоположную клетку и квадратик больше недоступен, либо переходим в другой квадратик 2×2 . У зайца всегда будет доступная клетка и именно в том ^{в квадратике 2×2} квадратике 2×2 , куда пошёл волк, т.к. после хода зайца + волка либо остаются две противоположные клетки одного цвета, либо ~~ни~~ доступных клеток просто не остаётся. Также стоит заметить, что после хода зайца кол-во клеток, куда больше нельзя ~~по~~ ^{по} ходить ~~по~~ ^{по} остаётся чётным, а всего $10 \cdot 10 = 100$ клеток, 100 чётно. Значит, в какой-то момент из-за того, что клеток не бесконечно, у волка закончатся ходы. +

1. 1. 1.

2. 2. 2.

3. 3. 3.

4. 4. 4.

5. 5. 5.

6. 6. 6.

7. 7. 7.

8. 8. 8.

9. 9. 9.

N. 6

$$\begin{cases} a^3 + b^3 + 3abc = c^3 & ① \\ (3a + 3b)^2 = c^3 & ② \\ a^2 - ab + b^2 = c^2 & ③ \end{cases}$$

$$②: 9(a+b)^2 = c^3 \quad c(a+b)^2 - 3abc = c^3$$

$$③: ~~a^2 - ab + b^2 = c^2~~; a^3 + b^3 = c^2(a+b) \Rightarrow ①: c^2(a+b) + 3abc = c^3$$

Сложим первое, третье и вычтем второе удвоенное из того, что получили.

$$c(a+b)^2 - 3abc + c^2(a+b) + 3abc - 18(a+b)^2 =$$

$$= c(a+b)(a+b+c) - 18(a+b)^2 = ~~(a+b)(c^2 - 18a - 18b)(a+b+c) = 0~~$$

$$(a+b)(c^2 + (a+b)(c-18)) = 0. \text{ 1 случай. } a+b=0, \Rightarrow a = -b.$$

$$~~a^3 + b^3 + 3abc = c^3~~$$

$$9(a+b)^2 = c^3, \Rightarrow c=0. a^2 - ab + b^2 = a^2 + a^2 + a^2 = 0 \Rightarrow a=0, \Rightarrow b=0, \text{ значит, } (a, b, c) = (0, 0, 0).$$

$$2 \text{ случай. } c^2 + (a+b)(c-18) = 0 \Rightarrow c^2 = (18-c)(a+b).$$

$$\text{Пусть } a+b=t.$$

$$\begin{cases} 9t^2 = c^3 \\ (18-c)t = c^2 \end{cases}$$

$$\text{Также } c(a+b)^2 - 3abc + c^2(a+b) + 3abc = ~~c^3~~$$

$$= ct(c+t) = 2c^3 \quad t = \frac{c^2}{18-c} \Rightarrow 9\left(\frac{c^2}{18-c}\right)^2 = \frac{9c^4}{324-36c+c^2} = c^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{если } c \neq 0, \text{ то } \frac{9c}{324-36c+c^2} = 1 \Rightarrow 324-36c+c^2 = 9c \Rightarrow 324-45c+c^2 = 0;$$

$$c = \frac{45 \pm \sqrt{2025-324 \cdot 4}}{2} = \frac{45 \pm 27}{2} = 9; 36. \text{ Если } c=9, \text{ то т.к.}$$

$$~~c^2 + (a+b)(c-18) = 0~~ (18-c)t = c^2 \Rightarrow t=9. \text{ Значит,}$$

$$a+b=9 \Rightarrow b=9-a \Rightarrow a^2 - a(9-a) + (9-a)^2 = 81 \Rightarrow 3a^2 - 27a = 0 \Rightarrow a=0 \text{ или } a=9. \text{ Тогда получаются ещё две пары } (a, b, c) = (0, 9, 9); (9, 0, 9).$$

Они обе подходят.

Найдено только 3 тройки из 4-х

Код участника:

(заполняется организатором)

И 10-084

№6 – продолжение.

Если $c=36$, то

$$(18-c)t=c^2 \Rightarrow t=\frac{36^2}{-18}=-2 \cdot 36=-72.$$

$$\text{Тогда } a+b=-72 \Rightarrow b=a-72, \Rightarrow$$

$$a^2-(a-72)a+(a-72)^2=a^2-72a+5224=1296 \Rightarrow a^2-72a+3928=0;$$

$$a=\frac{72 \pm \sqrt{72^2-3928 \cdot 4}}{2}, \text{ но } D < 0, \text{ значит корней нет.}$$

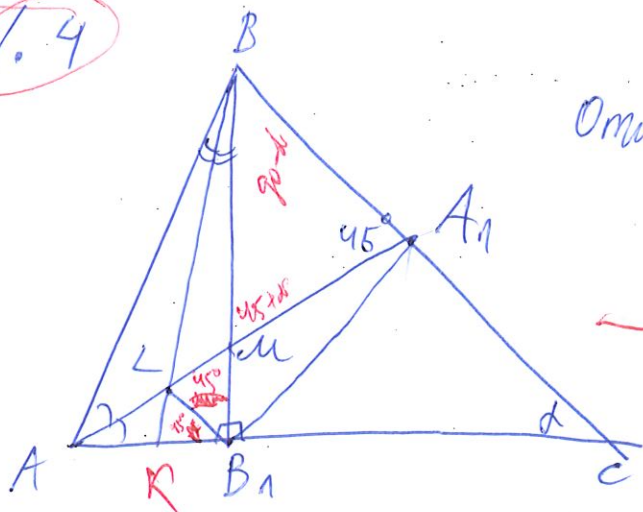
Осталось проверить допущение, пусть $c=0$. Тогда

$$9(a+b)^2=0 \Rightarrow a+b=0 \Rightarrow a=-b, \text{ получается опять тройка } (0; 0; 0).$$

А значит, ответ: всего три тройки (a, b, c) ; удовлетворяющие условию: $(a, b, c) = (0; 0; 0); (0; 9; 9); (9; 0; 9)$.

ll 10-084

N. 4



Угол $\angle AVB_1$, пересечение
с AC назовем K .

Канон
прилой.

 ~~$\angle A A_1 B = 45^\circ$~~ ~~$\angle A C B = 45^\circ$~~

Torga

А $\angle$ В₁ $\angle$ В₂ Пересечение АА₁ и биссектрисы
угла АВВ₁ назовём L. Т.к. AL и BL — две биссектрисы $\triangle$ АВВ₁, то
В₁L — тоже биссектриса. Поэтому $\angle$ ВВ₁L = $\angle$ АВ₁L = $\frac{90}{2} = 45^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow$ т.к. $\angle BA_1L = \angle VB_1L = 45^\circ$, то $LB A_1 B_1$ — вписанный четырёхуголь-
ник. Пусть $\angle ACB = d$, тогда $\angle B_1 B A = 90 - d$. Пусть пересечение

$AA_1 \perp BB_1 \Rightarrow \angle A_1AB_1 = 90^\circ$. Тогда $\angle BMA_1 = \angle A_1MB_1 = 180 - 45 - (90 - \alpha) = 45 + \alpha$.

Найдем, $\angle MAB_1 = 180 - 90 - (45 - \alpha) = 45 + \alpha, \Rightarrow \angle BAB_1 = 2(45 + \alpha) = 90 + 2\alpha, \Rightarrow \angle ABB_1 = 2\alpha, \Rightarrow \angle CBB_1 = \angle CA_1B_1 = \alpha$, но тогда

$\angle A_1CB_1 = \angle AA_1B_1 = \alpha$, но тогда по теореме о касательной и секущей, в которой эти два угла равны только в случае касания AA_1 окружности, описанной вокруг $\triangle B_1A_1C$ в точке A_1 , мы понимаем, что AA_1 — есть касательная. Доказано.

48 аааа

Код участника:

(заполняется организатором)

ee 10-054

№2 Пусть $\text{НОК}(a, b) = x$; $\text{НОД}(a, b) = y$.

$$xy = ab \Rightarrow 4x + y = a^2 + b^2 + 2ab + 1 = a^2 + b^2 + 2xy + 1 \Rightarrow 4x + y - 2xy - 2 =$$

$$= (2x-1)(2-y) = a^2 + b^2 - 1. (2x-1) - \text{нечётно. Пусть } y:2, \text{ тогда } a:2 \text{ и } b:2 \Rightarrow a^2 + b^2 - 1 = \text{нечётно. Но тогда из } (2x-1)(2-y) = a^2 + b^2 - 1$$

следует, что нечётное $\cdot$ чётное = нечётное, это противоречие.

Значит, $y \not\equiv 2 \pmod{4}$. Заметим, что по модулю 4 можно рассмотреть все числа в виде остатков 0, 1, 2, 3:

$$0^2 \equiv 0 \pmod{4}; 1^2 \equiv 1 \pmod{4}; 2^2 \equiv 0 \pmod{4}; 3^2 \equiv 1 \pmod{4}. \text{ Пусть одно из чисел } (a, b) \text{ чётно. Значит,}$$

$$\cancel{a^2 + b^2 + 1 \equiv 1 \pmod{4}} \quad (a+b)^2 + 1 \equiv 1+1=2 \pmod{4}, \text{ но тогда}$$

$$\cancel{4x+y} \equiv 2 \pmod{4}, \Rightarrow y \equiv 2 \pmod{4}. \text{ Но тогда } y:2. \text{ Мы}$$

получим противоречие, ~~значит~~ таких пар чисел (a, b) не существует. Значит, оба числа a и b – нечётны. В таком случае $(a+b)^2 + 1 \equiv 1 \pmod{4}, \Rightarrow y \equiv 1 \pmod{4}$

Нет задачи №5.

М 10 - 084.

Код участника

Всероссийская олимпиада школьников «Миссия выполнима. Твое призвание – финансист!» 2023/2024 уч.г.

Бланк проверки работы

Математика 10 класс

№ задания	ФИО эксперта	Балл	ФИО эксперта	Балл	Итоговый балл
1	Волосова Н.В.	10	Тоздеи сы	10	10
2	Овсянникова	0	Балашов	0	0
3	Курсанова	10	Берзин	10	10
4	Дубинский М.С.	4	Борисова Л.Р.	4	4
5	Волосова	0	Курсанова	0	0
6	Берзин	11	Мамедов	11	11
7	Эмилян	0	Овсянникова	0	0
8	Эмилян	16	Курсанова	16	16
ИТОГО					51

М10-080

Код участника
(заполняется организатором)



**Олимпиадная работа
заключительного этапа
«Всероссийская олимпиада школьников "Миссия
выполнима. Твоё призвание - финансист!" 2023-2024
г.»
«(Математика 10 класс)»**

Вариант № 1

«27 января 2024 г.»

Никакие другие записи на титульном листе делать не разрешается

МЮ-080

Код участника

Всероссийская олимпиада школьников «Миссия выполнима. Твое призвание – финансист!» 2023/2024 уч.г.

Бланк проверки работы

Математика 10 класс

№ задания	ФИО эксперта	Балл	ФИО эксперта	Балл	Итоговый балл
1	Лоздеская	10	Землякова	10	10
2	Бачинов	10	Овсепян	10	10
3	Курсанова	0	Берзин	1	1
4	Дубинский М.С.	12	Борисова А.Р.	12	12
5	Волова	12	Курсанова	12	12
6	Берзин	14	Иванова	14	14
7	Землякова	0	Васильева	0	0
8	Землякова	0	Васильева	0	0
ИТОГО					59

МЮ-080

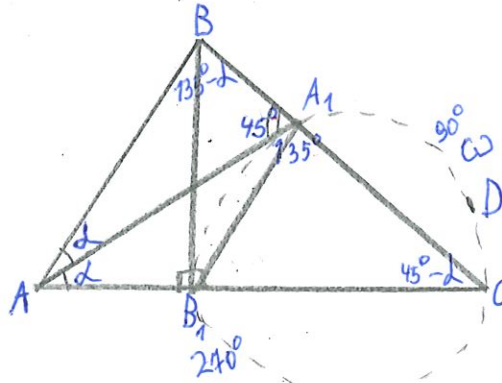
Код участника

Всероссийская олимпиада школьников «Миссия выполнима. Твое призвание – финансист!» 2023/2024 уч.г.

Бланк проверки работы

Математика 10 класс

№ задания	ФИО эксперта	Балл	ФИО эксперта	Балл	Итоговый балл
1	Тюдеева С.	10	Земляков	10	10
2	Башинов	10	Овчинникова	10	10
3	Курсанова	0	Берзин	1	1
4	Дубинский М.Р.	12	Борисова А.Р.	12	12
5	Волонова	12	Курсанова	12	12
6	Берзин	14	Иванова	14	14
7	Земляков	0	Васильева	0	0
8	Земляков	0	Васильева	0	0
ИТОГО					59

④ Дано: $\triangle ABC$ AA_1 - вис. BB_1 - высота $\angle AA_1B = 45^\circ$ ω - окруж. эк. $\triangle A_1B_1C$ (1) ω касается AA_1

До-во:

Пусть $\angle BAA_1 = \alpha$, тогда:по сумме углов $\triangle ABA_1$: $\angle ABC = 135^\circ - \alpha$,по сумме углов $\triangle ABC$: $\angle ACB = 45^\circ - \alpha$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{BB_1 \cdot AC}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{С другой стороны } S_{\triangle ABC} &= \frac{AB \cdot BC \cdot \sin \angle ABC}{2} = \frac{AB \cdot BC \cdot \sin(135^\circ - \alpha)}{2} = \Rightarrow \\ &= \frac{AB \cdot BC \cdot \sin(90^\circ + (45^\circ - \alpha))}{2} = \frac{AB \cdot BC \cdot \cos(45^\circ - \alpha)}{2} \stackrel{\text{Def.}}{=} \frac{AB \cdot B_1C}{2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{BB_1 \cdot AC}{2} = \frac{AB \cdot B_1C}{2} \Rightarrow BB_1 \cdot AC = AB \cdot B_1C \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{BB_1}{B_1C}$$

По св-ву ~~касания~~ вис. AA_1 в $\triangle ABC$: $\frac{AB}{AC} = \frac{BA_1}{A_1C}$

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BA_1}{A_1C}$$

$$\frac{BB_1}{B_1C} = \frac{BA_1}{A_1C} \Rightarrow B_1A_1 \text{ - вис. } \angle BB_1C \text{ (по признаку)}$$

верно

$$\angle A_1B_1C = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ \Rightarrow \angle A_1B_1C = 90^\circ \text{ (т.к. } \angle A_1B_1C \text{ - вис.)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle A_1 B_1 C = 360^\circ - 90^\circ = 270^\circ$$

$$\angle A A_1 C = 180^\circ - \angle A A_1 B = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ \text{ (как смеж.)}$$

✓

Поскольку $2 \cdot 135^\circ = 270^\circ = \angle A A_1 C = \angle A_1 B_1 C$, AA_1 — касательная к ω .

$$\textcircled{2} \begin{cases} a, b \in \mathbb{N} \end{cases}$$

12 баллов

ч.т.д.

$$4 \text{НОК}(a, b) + \text{НОД}(a, b) = (a+b)^2 + 1 \quad (*)$$

Предположим, что $\text{НОД}(a, b) \neq 1$, тогда:

$$\begin{array}{l} 4 \text{НОК}(a, b) : \text{НОД}(a, b) \\ \text{НОД}(a, b) : \text{НОД}(a, b) \end{array} \left| \begin{array}{l} \text{ч.ч. } (*) : \text{НОД}(a, b) \\ \Rightarrow \cancel{\text{НОК}(a, b)} : \cancel{\text{НОД}(a, b)} \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} a : \text{НОД}(a, b) \\ b : \text{НОД}(a, b) \end{array} \left| \Rightarrow a+b : \text{НОД}(a, b) \Rightarrow (a+b)^2 : \text{НОД}(a, b) \right.$$

Ит.к. по предположению $\text{НОД}(a, b) \neq 1$, $(a+b)^2 + 1 \not\vdots \text{НОД}(a, b) \Rightarrow$
 $\Rightarrow \text{Пр. ч. } (*) \not\vdots \text{НОД}(a, b) \quad (!!).$ Мы пришли к противоречию, а значит, наше предположение было неверно.
 Тогда, $\text{НОД}(a, b) = 1 \Rightarrow \text{НОК}(a, b) = ab$

• Решим (*) подставив НОК и НОД:

$$4ab + 1 = (a+b)^2 + 1$$

$$a^2 + b^2 + 2ab - 4ab = 0$$

$$(a-b)^2 = 0 \Rightarrow a = b, \text{ при этом } \text{НОД}(a, b) = 1.$$

Возможно только само себе только 1 натуральное число.

$$a=b=1$$

Ответ: $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. $\times$

① Пусть среди от Грини x человек, тогда среди $x+23$ чел.

Поскольку человек с талантом $\sqrt{100}$ за Гриней,
 $x+23 \leq 99$

$$x \leq 76 \Rightarrow 2x+23 = n \leq 2 \cdot 76 + 23 = 175 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ ~~Значит~~ Перед Гриней стоят люди только с однозначными или двузначными номерами талантов, а за Гриней – только с двузначными или трёхзначными.

Пусть за Гриней стоят y человек с двузначными номерами, тогда по условию:

$$\frac{100+25}{100} = \frac{9+2 \cdot 90 - 2y}{2y + 3(n-99)} \quad (*)$$

105

Кол-во людей перед Гриней равно $x+23 = 99-y$. $\cdot 2$

$$2x + 2 \cdot 23 = 2 \cdot (99 - y)$$

$$n+23 = 198 - 2y \Rightarrow$$

$\Rightarrow -2y = n+23 - 198 = n - 175$. Подставим это в (*):

$$\frac{100+25}{100} = \frac{9+2 \cdot 90 + n - 175}{-(n-175) + 3(n-99)}$$

$$\frac{5}{4} = \frac{14+n}{3n-234-n+145}$$

$$\frac{5}{4} = \frac{14+n}{2n-122}$$

$$4(14+n) = 5(2n-122)$$

$$56+4n = 10n - 5 \cdot 122$$

$$6n = 5 \cdot 122 + 56$$

$$n = \frac{666}{6} = \boxed{111} \text{ человек.}$$

Ответ: 111 человек.

⑤ ~~Задача~~
$$\begin{cases} f \geq 0 \\ f(x+y) = \sqrt{f^2(x) + f^2(y)} \\ f(1) + f(4) = 9 \end{cases}$$

$$f(2^{2023}) = ?$$

$$\text{Если } k \in \mathbb{N}, \text{ то } f(2^k) = f(2 \cdot 2^{k-1}) = f(2^{k-1} + 2^{k-1}) = \sqrt{f^2(2^{k-1}) + f^2(2^{k-1})} = \sqrt{2 f^2(2^{k-1})} = \sqrt{2} f(2^{k-1}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(2^{2023}) = \sqrt{2} f(2^{2022}) = \sqrt{2}^2 f(2^{2021}) = \dots = \sqrt{2}^{2023} \cdot f(2^0) = 2^{1011} \sqrt{2} f(1)$$

$$f(4) = f(2^2) = \sqrt{2} f(2) = 2 f(1)$$

$$f(1) + f(4) = 9$$

$$f(1) + 2 f(1) = 9$$

$$f(1) = 3 \Rightarrow f(2^{2023}) = 2^{1011} \sqrt{2} \cdot 3 = \boxed{2^{1011} \cdot 3 \sqrt{2}}$$

$$\text{Ответ: } f(2^{2023}) = 2^{1011} \cdot 3 \sqrt{2}.$$

Код участника:

(заполняется организатором)

$$\textcircled{6} \begin{cases} a^3 + b^3 + 3abc = c^3 & (1) \\ (3a + 3b)^2 = c^3 & (2) \\ a^2 - ab + b^2 = c^2 & (3) \end{cases}$$

Из (2) следует, что $c \geq 0$.

$$\begin{cases} 9(a+b)^2 = c^3 \\ a^2 - ab + b^2 = c^2 \end{cases} \quad | \cdot 9$$

$$\begin{cases} 9a^2 + 9b^2 + 18ab = c^3 \\ 9a^2 + 9b^2 - 9ab = 9c^2 \end{cases}$$

$$24ab = c^3 - 9c^2 \quad | : 9$$

$$3ab = \frac{c^3 - 9c^2}{9} \quad (4)$$

Возьмём корень из (2):

$$3|a+b| = c^{\frac{3}{2}}$$

~~(1) $a+b=0$~~ (1): $(a+b)(a^2 - ab + b^2) + 3abc = c^3$

~~$3(a+b) = c^{\frac{3}{2}}$~~

~~$(a+b) = \frac{c^{\frac{3}{2}}}{3}$~~

Подставим сюда (3):

$$c^2(a+b) + 3abc = c^3$$

Если $c=0$:

$$|a+b|=0$$

$$a+b=0$$

$$24ab=0 \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \text{решение}$$

Если $c \neq 0$:

Поделим это равенство на c :

$$c(a+b) + 3ab = c^2$$

Код участника:

(заполняется организатором)

Подставим в него (4):

$$c(a+b) + \frac{c^3 - 9c^2}{9} = c^2$$

I) $a+b \geq 0$:

$$3(a+b) = c^{\frac{3}{2}}$$

$$\frac{c \cdot c^{\frac{3}{2}}}{3} + \frac{c^3}{9} - c^2 = c^2 \quad | \cdot \frac{9}{c^2}$$

$$3\sqrt{c} + c - 18 = 0$$

$$[t = \sqrt{c}], t \geq 0$$

$$t^2 + 3t - 18 = 0$$

$$D = 9 + 4 \cdot 18 = 81$$

$$t_{1,2} = \frac{-3 \pm 9}{2} = -6; 3$$

→ не подходит, т.к. $t \geq 0$

$$\sqrt{c} = 3$$

$$c = 9$$

$$\begin{cases} 3ab = \frac{9^3 - 9 \cdot 9^2}{9} \\ a+b = \frac{\sqrt{9^3}}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3ab = 0 \\ a+b = 9 \end{cases}$$

$$a=0; b=9$$

$$b=0; a=9$$

$$(0; 9; 9); (9; 0; 9) \text{ — решения}$$

II) $a+b < 0$

Код участника:

(заполняется организатором)

$$-3(a+b) = c^{\frac{3}{2}}$$

$$c(a+b) + \frac{(c^3 - 9c^2)}{9} = c^2$$

$$\frac{-c^{\frac{5}{2}}}{3} + \frac{c^3}{9} - 2c^2 = 0 \cdot 9$$

$$c^3 - 18c^2 - 3c^{\frac{5}{2}} = 0 : c^2$$

$$c - 18 - 3\sqrt{c} = 0$$

$$[q = \sqrt{c}], q \geq 0$$

$$q^2 - 3q - 18 = 0$$

$$D = 9 + 4 \cdot 18 = 81$$

$$q_{1,2} = \frac{\pm 9 + 3}{2} = -3; 6$$

→ не подх., т.к. $q \geq 0$

$$\sqrt{c} = 6$$

$$c = 36$$

$$\begin{cases} -3(a+b) = \sqrt{36}^3 \\ 3ab = \frac{36^3 - 9 \cdot 36^2}{9} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+b = \frac{2^3 \cdot 3^2}{-1} \Rightarrow b = -a - 42 \\ ab = 36^2 \end{cases} \swarrow$$

$$-a^2 - 42a - 36^2 = 0$$

$$a^2 + 42a + 36^2 = 0$$

$$(a+36)^2 = 0$$

$$a = -36$$

$$b = 36 - 42 = -36$$

$$\boxed{(-36; -36; 36)} - \text{решение}$$

Код участника:

(заполняется организатором)

$$(\overset{a}{0}; \overset{b}{0}; \overset{c}{0}); (\overset{a}{0}; \overset{b}{9}; \overset{c}{9}); (\overset{a}{9}; \overset{b}{0}; \overset{c}{9}); (-\overset{a}{36}; -\overset{b}{36}; \overset{c}{36})$$

145

Ответ: ↑

③ Сумма в одном столбце равна натуральному числу $\forall$ от ~~1 до 50~~ 0 до 50.

Предположим, что во всех столбцах разные суммы и во всех строчках разные суммы.

Тогда сумма во всей таблице равна $1250 = \frac{(1+50)50}{2} - x, x \in \{0; 1; 2; \dots; 50\}$ нет объяснений

$$x = \frac{50 \cdot 51}{2} - 1250 = 25$$

Значит, среди сумм столбцов встречаются все, кроме 25.

Аналогичное можно сказать и про строки.

М 10-116

Код участника
(заполняется организатором)



**Олимпиадная работа
заключительного этапа
«Всероссийская олимпиада школьников "Миссия
выполнима. Твоё призвание - финансист!" 2023-2024
г.»
«(Математика 10 класс)»**

Вариант № 2

«27 января 2024 г.»

Никакие другие записи на титульном листе делать не разрешается

М10-116

Код участника

Всероссийская олимпиада школьников «Миссия выполнима. Твое призвание – финансист!» 2023/2024 уч.г.

Бланк проверки работы

Математика 10 класс

№ задания	ФИО эксперта	Балл	ФИО эксперта	Балл	Итоговый балл
1	Конников	10	Степанов	10	10
2	Сунин	10	Разумов	10	10
3	Васильев	12	Гурьянова и.а.	12	12
4	Борисов	2	Дубинский	2	2
5	Иванова	12	Постовалова	12	12
6	Борисов	0	Дубинский	0	2
7	Зинин	10	Гузнев	10	10
8	Зинин	0	Гузнев	0	0
ИТОГО					58

- №1 1) $n > 100 \Rightarrow$ все двузначные номера встречаются $\Rightarrow$
 $\Rightarrow$ Гриша не может быть среди первых 9 человек,
 т.к. кол-во двузначных чисел $>$ кол-во однозначных,
 а кол-во человек перед Гришей $>$ кол-ва человек за
 Гришей $\Rightarrow$ перед Гришей есть двузначные номера.
 2) кол-во двузн. чисел $<$ кол-ва трехзн.; трехзн. номера
 начинаются за Гришей; кол-во человек спереди $>$
 $>$ кол-ва человек сзади $\Rightarrow$ четырехзначных номеров
 нет.

Пусть перед Гришей стоит a человек. Тогда
 за Гришей $99 - a$ двузначных номеров и b трехзн.,
 причем $99 - a + b = a - 31 \Rightarrow b = 2a - 130$

Общее кол-во цифр спереди: $2a - 9$ (т.к. 9 из них — однознач.)

Общее кол-во цифр сзади: $(99 - a) \cdot 2 + (2a - 130) \cdot 3 = 4a - 192$

По условию 2:

$$1,2(2a - 9) = 4a - 192$$

$$1,6a = 181,2$$

$$a = 113,25$$

10

$$\underline{2} \quad \text{НОК}(a, b) + 4 \text{НОД}(a, b) = (a+b)^2 + 1$$

Заметим, что $\text{НОК}(a, b) : \text{НОД}(a, b);$

$$4 \text{НОД}(a, b) : \text{НОД}(a, b);$$

$$(a+b)^2 : \text{НОД}(a, b)$$

$$\Rightarrow 1 : \text{НОД}(a, b) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{НОД}(a, b) = 1 \Rightarrow \text{НОК}(a, b) = ab$$

$$ab + 4 = (a+b)^2 + 1$$

$$3 = a^2 + b^2 + 2ab - ab$$

$$3 = a^2 + b^2 + ab$$

т.к. $a, b \in \mathbb{N}$, то $a^2 + b^2 + ab \geq 1 + 1 + 1 = 3 \Rightarrow$

$$\Rightarrow a = b = 1$$

Ответ: $a = 1; b = 1$

+

3 Предположим, что это не так.

Заметим, что если нет строки с суммой 70, то сумма всех чисел по строкам $= 0 + 1 + 2 + \dots + 69 = \frac{69 \cdot 70}{2} = 2415 < 2450$

(т.к. по предположению все строки суммы различны) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ строка с суммой 70 есть — в ней все единицы $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ нет столбца с суммой 0.

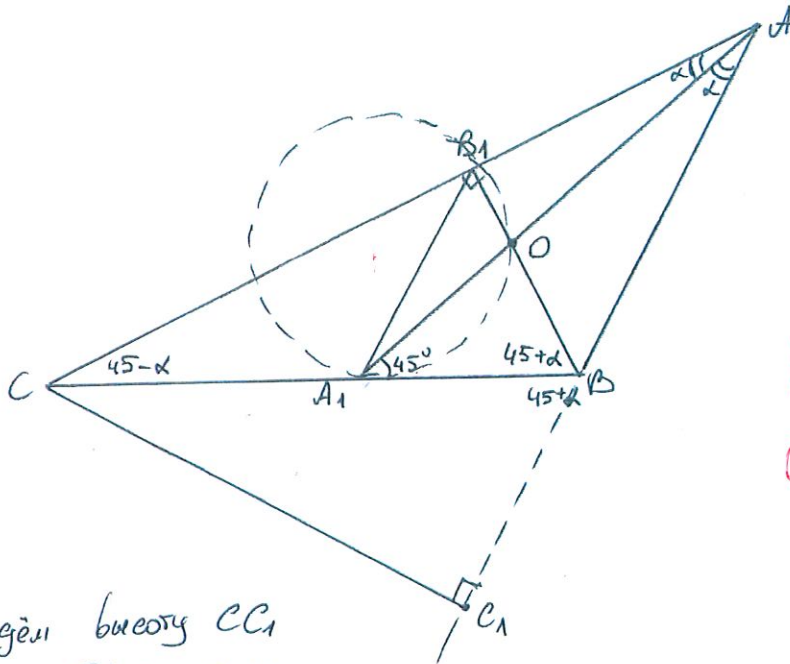
Тогда сумма чисел по столбцам $= 1 + 2 + \dots + 70 = \frac{70 \cdot 71}{2} = 2485 > 2450$.

противоречие.

Значит, предположение неверно

т.е. г.

+12

№4Проведём высоту CC_1 1) Пусть $\angle BAA_1 = \angle BAA_1 = \alpha$ тогда $\angle ACA_1 = 45 - \alpha$ (т.к. $\angle AAB = 45^\circ$ - внеш.) $\Rightarrow \angle CBB_1 = 90^\circ - \angle ACA_1 = 90^\circ - (45 - \alpha) = 45 + \alpha$ $\angle CBC_1 = 45 + \alpha$ (внешний для $\triangle ABC$)2) $\triangle CBB_1$ и $\triangle CC_1B$ CB - общ. $\angle CB_1B = \angle CC_1B = 90^\circ$ $\angle CBB_1 = \angle CBC_1 = 45 + \alpha$ $\Rightarrow \triangle CBB_1 = \triangle CC_1B \Rightarrow CB_1 = CC_1$ (*)3) ~~из $\triangle ABB_1$: $\sin 2\alpha = \frac{BB_1}{AB}$~~ ~~из $\triangle ACC_1$: $\sin 2\alpha = \frac{CC_1}{AC}$~~ $\angle CBB_1 = \angle CC_1B = 90^\circ$ $\angle CA_1C = \angle BAA_1 = 2\alpha$ $\Rightarrow \triangle CA_1C \sim \triangle BAA_1 \Rightarrow \frac{BB_1}{CC_1} = \frac{AB}{AC}$ из (*) $\Rightarrow \frac{BB_1}{CC_1} = \frac{BB_1}{CB_1} = \frac{AB}{AC}$ 4) AA_1 - биссектр. $\Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{A_1B}{A_1C}$ $\frac{AB}{CB_1} = \frac{AB}{AC} = \frac{A_1B}{A_1C} \Rightarrow B_1A_1$ - биссектр. (по св-ву биссектр.) $\Rightarrow$ $\Rightarrow \angle OB_1A_1 = \angle CB_1A_1 = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ = \angle OA_1B \Rightarrow A_1B$ - касат. к окруж. (A_1OB_1)
(по св-ву касат. и хорд)

неверно ч.т.д.

(3)

$$\underline{25} \quad 1) \quad f(4) = f(2+2) = \sqrt{f^2(2) + f^2(2)} = f(2) \cdot \sqrt{2} \quad | \Rightarrow$$

$$f(2) = f(1+1) = f(1) \cdot \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow f(4) = f(1) \cdot 2$$

$$f(4) + f(1) = 12$$

$$2f(1) + f(1) = 12$$

$$f(1) = 4 \quad +$$

$$2) \quad f(2^{2024}) = f(2^{2023} + 2^{2023}) = \sqrt{2} \cdot f(2^{2023}) =$$

$$= \sqrt{2} \cdot f(2^{2022} + 2^{2022}) = \sqrt{2^2} \cdot f(2^{2022}) = \dots = \sqrt{2^{2023}} \cdot f(2) =$$

$$= \sqrt{2^{2024}} \cdot f(1) = \sqrt{2^{2024}} \cdot 4 = 2^{1012} \cdot 2^2 = 2^{1014}$$

$$\text{Ответ: } f(2^{2024}) = 2^{1014} \quad +$$

$$\underline{27} \quad \text{Ответ: } \underline{55}$$

Пример: числа $1, 2, 2^2, 2^3, 2^4, \dots, 2^{10}$

тогда все произведения на доске – степени 2

$$\text{от } 1 \text{ до } 1+2+\dots+10 = \frac{10 \cdot 11}{2} = 55 \quad \checkmark \quad x_2 \dots x_{11} \quad x_1 > x_2 > \dots > x_{11}$$

Идея: Обозначим числа за $x_1 > x_2 > x_3 > \dots > x_{11}$ т.е.

Заметим, что никакие 2 произведения, отличающиеся
? одним множителем $\neq 1$ не могут быть равны

$$1+2+\dots+9+11 = \underline{56}$$

п. 6 ОПС

М 10-027

Код участника
(заполняется организатором)



**Олимпиадная работа
заключительного этапа
«Всероссийская олимпиада школьников "Миссия
выполнима. Твоё призвание - финансист!" 2023-2024
г.»
«(Математика 10 класс)»**

Вариант № 2

«27 января 2024 г.»

Никакие другие записи на титульном листе делать не разрешается

Дополнительный бланк №

Всероссийская олимпиада школьников «Миссия выполнима. Твоё призвание – финансист!»

Код участника:

(заполняется организатором)

1110-027

Код участника

Всероссийская олимпиада школьников «Миссия выполнима. Твое
призвание – финансист!» 2023/2024 уч.г.

Бланк проверки работы

Математика 10 класс

№ задания	ФИО эксперта	Балл	ФИО эксперта	Балл	Итоговый балл
1	Степанян	10	Минашени	10	10
2	Разумов	10	Сунин	10	10
3	Иванова	6	6	Тюрисова	6
4	Франкисов	12	Угрозов	12	12
5	Иванова	12	12	Тюрисова	12
6	Берзин	12	Мандра	12	12
7	Киреева	0	Иванова	0	0
8	Киреева	0	Иванова	0	0
ИТОГО					58

Задача 2.

Пусть $\text{НОД}(a, b) = x$, $\text{НОК}(a, b) = a \cdot b \cdot x$ $x \in \mathbb{N}$

Тогда $a = x \cdot a_1$, $b = x \cdot b_1$, $(a_1, b_1) = 1$ (взаимно просты)

Перепишем равенство из ~~условия~~ условия!

$$\begin{array}{c} \text{НОК} \\ \downarrow \\ a \cdot b \cdot x + 4 \cdot x = (a_1 x + b_1 x)^2 + 1 \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{НОД} \\ \downarrow \\ x \end{array}$$

$$x \cdot (a_1 b_1 + 4) = x^2 \cdot (a_1 + b_1)^2 + 1$$

П.т.к. $x \in \mathbb{N}$, то левая часть делится на x , тогда и правая часть должна делиться

Отсюда $x^2 \cdot (a_1 + b_1)^2 + 1 : x$

$$\begin{array}{c} \Downarrow \\ 1 : x, \text{ т.к. } x^2 \cdot (a_1 + b_1)^2 : x \\ \Downarrow \\ x = 1 \end{array} \quad \checkmark$$

$$a_1 b_1 + 4 = a_1^2 + b_1^2 + 2a_1 b_1 + 1$$

$$a_1^2 + b_1^2 - a_1 b_1 - 3 = 0$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 1 & 1 \end{array}$$

При $a_1, b_1 \neq 1$ выражение ~~не~~ ^{строгое} больше 0.

$$\Downarrow \\ x = 1, a_1 = b_1 = 1$$

$$a = b = 1$$

Проверка:

$$\text{НОК}(1, 1) = 1, \text{НОД}(1, 1) = 1$$

$$5 = 1 + 4 = 2(1+1)^2 + 1 = 5$$

Верно.

Ответ: $a, b = (1, 1)$

✓

Задача 3.

Сумма в такой таблице равна максимуму 4900, тогда разность равна 2450, то в таблице 2450 единиц и 2450 нулей.

Предположим, что ни в каких двух строках нет одинаковой суммы. Тогда в строке сумма ≤ 70 , раз во всех строках разное число единиц, то сумма равна хотя бы

Задача 5.

$$f(x+y) = \sqrt{f^2(x) + f^2(y)}$$

$$x=y=1$$

$$f(2) = \sqrt{2f^2(1)} = \sqrt{2} \cdot f(1)$$

$$x=y=2$$

$$f(4) = \sqrt{2f^2(2)} = \sqrt{2} \cdot f(2) = 2 \cdot f(1) +$$

$$f(1) + f(4) = 3f(1) = 12$$

$$f(1) = 4 +$$

$$f(2^k) = \sqrt{2} \cdot f(2^{k-1}) = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot f(2^{k-2}) = \dots = (\sqrt{2})^k \cdot f(1) = (\sqrt{2})^k \cdot 4$$

$$k = 2024$$

$$f(2^{2024}) = (\sqrt{2})^{2024} \cdot f(1) = f(1) \cdot (2^{1012}) = 4 \cdot 2^{1012} = 2^{1014} +$$

125

Задача 3. Пусть нет одинаковых строк / столбцов.

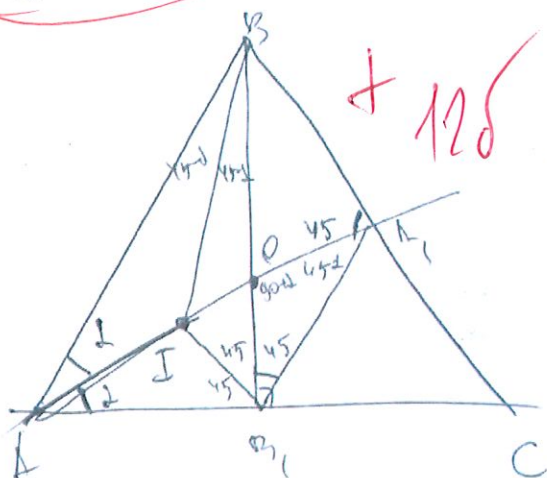
Заметим, что раз в каждой строке и столбце разное число единиц, то у нас есть пустая строка и пустой столбец. Пусть нас нет, тогда сумма в каждой строке (для столбцов аналогично) хотя бы 1, тогда сумма в таблице $\geq 1+2+3+\dots+70 = \frac{71 \cdot 70}{2} > \frac{70 \cdot 70}{2} = 2450$, противоречие. Тогда удалим пустую строку и пустой столбец, это не повлияет на то, что сумма в строках разная и не повлияет на сумму в таблице. Тогда у нас в строке ≥ 1 единица и они все разные, тогда сумма $\leq 1+2+3+\dots+69 = \frac{70 \cdot 69}{2} < \frac{70 \cdot 70}{2} = 2450$, противоречие, з.т.с.

Код участника:

(заполняется организатором)

И 10-027

Задание 4.



Что такое I — ? Показ пересечения биссектрис в $\triangle ABB_1$.

Проведем BI и B_1I — биссектрисы $\angle B$ и $\angle B_1$.
 Т.к. биссектриса BI — это биссектриса $\angle B$,
 $\angle OIBB_1 = \angle IBA = 45 - \alpha$, где $2\alpha = \angle ABB_1$
 $\angle ABB_1 = 90 - 2\alpha$.

Тогда также $\angle BB_1I = 45 - \angle IBA =$
 $= \angle BAI, O \Rightarrow \angle BB_1I = \angle BAI, IO = 45$
 то BI, B_1I — биссектрисы.

Отсюда $\angle IAB = \angle IBA = 45 - \alpha$, $\angle AOB = \angle OBA + \angle OAB = 90 + \alpha$
 $\Rightarrow \angle OBA_1 = 180 - 135 + \alpha - \alpha = 45 = \angle BAO$. Тогда BA_1 — касательная
 к окружности, описанной около $\triangle AOB$, по соотв. углам
 — односторонней паре углов.



Задание 1.

Пусть $n = 2a + 31$

перед Гриней $a + 31$ человек, после него a людей.

Значит, мы посчитаем общее количество шурр среди

$$a + (a + 22) \cdot 2 = 2a + 53$$

↑ ↑
однозн. камер двузн. камер

Т.к. человек с котаном стоит сзади, то перед Гриней много
 только с однозн. и двузн. камерами.

Посчитаем общее кол-во шурр сзади

$$2 \cdot (99 - a - 31) + 3 \cdot (2a + 31 - 99) = 6a - 2a + 2 \cdot 68 + 3 \cdot 68 =$$

↑ ↑
двузн. камер трехзначных

$$= 4a - 68$$

$$\text{Тогда } 1,2 \cdot (2a + 53) = 4a - 68$$

$$2,4a + 53,2 = 4a - 68$$

$$1,6a = 53,2 + 68$$

$$16a = 53,2 + 680$$

$$a = 53,2 + 680 / 16$$

т.е. а нецелое, т.е. а нецелое, такое невозможно.

10

Код участника:

(заполняется организатором)

М 10-027

Задача 6.

$$a^3 + b^3 + 3abc = (a+b)(a^2 + ab + b^2) + 3abc = (a+b)(c^2 + 3abc) = c^3 \quad | : c$$

$$(a+b)c^2 + 3abc = c^3$$

$$c \cdot (a+b+c) = 4(a+b)^2$$

$$(a+b) \cdot c + 3ab = c^2$$

Отсюда следует

$$③ c = 4$$

$$4a^2 + 4b^2 + 8ab = c^3$$

$$16a^2 + 16b^2 - 4ab = 4c^2$$

$$\frac{12ab = c^3 - 4c^2}{3ab = \frac{c^3 - 4c^2}{4}} \quad | : 4$$

$$(a+b)c + \frac{c^3}{4} - c^2 = c^2 \quad | : c$$

$$4(a+b) + c^2 = 8c$$

$$a+b = \frac{8c - c^2}{4}$$

$$(2a+2b)^2 = \left(\frac{8c - c^2}{2}\right)^2 = c^3$$

$$8c^2(8-c)^2 = 4c^3$$

$$c^2(64 + c^2 - 16c) = 4c^3$$

$$64 + c^2 - 16c = 4c$$

$$64 + c^2 - 16c = 4c$$

$$c^2 - 20c + 64 = 0$$

$$D = 400 - 4 \cdot 64 = 144 = 12^2$$

$$① c_1 = \frac{20 - 12}{2} = 4$$

$$② c_2 = \frac{20 + 12}{2} = 16$$

$$① 3ab =$$

$$3ab = 16 - 16 = 0$$

$$a+b = \frac{8 \cdot 4 - 16}{4} = 4$$

Одно из чисел a, b равно 0, другое $= 4$

$$③ c = 0$$

$$3ab = 0$$

$$a+b = 0$$

$$② 3ab = 1024 - 256 = 768$$

$$ab = 256$$

$$a+b = \frac{8 \cdot 16 - 16^2}{4} = -\frac{2 \cdot 16}{4} = -8$$

$$a = -16 - b$$

$$a(-16-b) \cdot b = 256$$

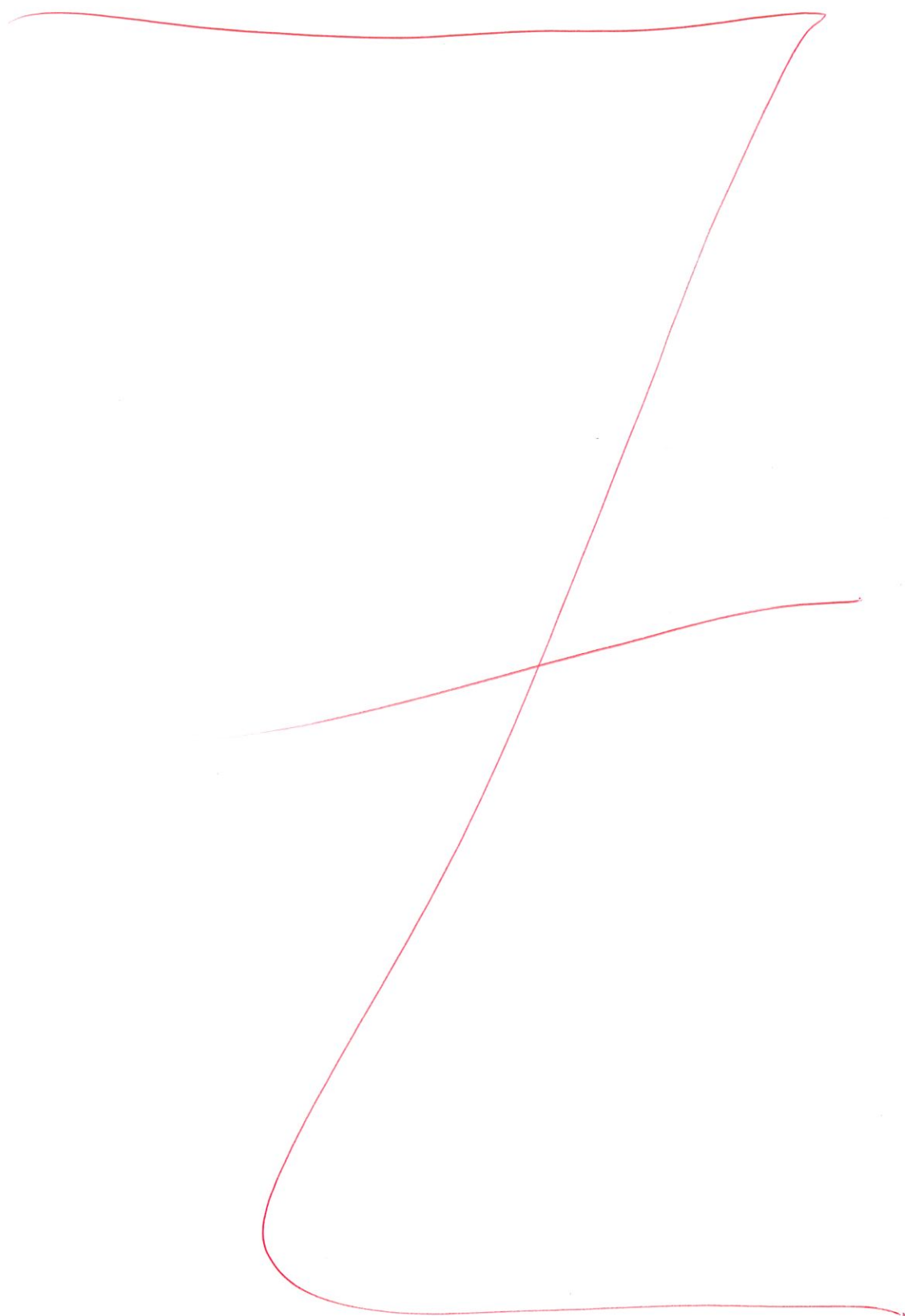
$$b^2 + 16b - 256 = 0$$

$$D = 16^2 + 256 \cdot 4 = 256 \cdot 5 = (16\sqrt{5})^2$$

$$a = -8 + 8\sqrt{5} \quad b = -16 - 16\sqrt{5}$$

$$a = -8 - 8\sqrt{5} \quad b = -16 + 16\sqrt{5}$$

32



Бланк ответа

Всероссийская олимпиада школьников «Миссия выполнима. Твоё призвание – финансист!»

Код участника:
(заполняется организатором)

№ 10-027

М10-098
Код участника
(заполняется организатором)



**Олимпиадная работа
заключительного этапа
«Всероссийская олимпиада школьников "Миссия
выполнима. Твоё призвание - финансист!" 2023-2024
г.»
«(Математика 10 класс)»**

Вариант № 2 (второй)

«27 января 2024 г.»

Никакие другие записи на титульном листе делать не разрешается

Дополнительный бланк №

Всероссийская олимпиада школьников «Миссия выполнима. Твоё призвание – финансист!»

Код участника:

(заполняется организатором)

410-098

Код участника

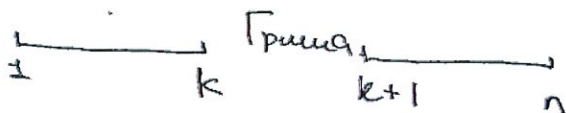
Всероссийская олимпиада школьников «Миссия выполнима. Твое
призвание – финансист!» 2023/2024 уч.г.

Бланк проверки работы

Математика 10 класс

№ задания	ФИО эксперта	Балл	ФИО эксперта	Балл	Итоговый балл
1	Колесов	10	Липашина	10	10
2	Овчинникова	10	Басанов	10	10
3	Иванова	12	Берман	12	12
4	Дубинский	0	Брисов	0	0
5	Гостева- лова	12	Олехова	12	12
6	Берузи	14	Марагва	14	14
7	Зинько	0	Грузин	0	0
8	Зинько	0	Грузин	0	0
ИТОГО					58

Задача 1.



Друга умови:

Друга умовелл:

- 1). Номер 400 ~~тако афган~~ ~~судн~~ $\Rightarrow k \leq 99$.

2). количество людей ~~у~~ больше на 31 человек, чем до.

$$\Downarrow k-31 = n-k$$

$$2k = n + 31 \Rightarrow h = 2k - 31.$$

3). Из атом-бондированной цепи на 20% высокие темпер.

III. и. по условию $k \leq 99 \Rightarrow$ перед каждой ставит
модуль с квадратичным и единичными показателями.
Тогда суммарное количество цифр на их
весах = сумме единичных и квадратных чисел.

① $S_{\text{однозначн}} = 9 \cdot 2$; $S_{\text{двузначн}} = (k-9) \cdot 2$.

$$S_y \text{ netto} = S_{\text{ort}} + S_{\text{gaf.}} = 9 + 2k - 18 = 2k - 9.$$

Аналогично после Триссаево число номеров 100, значит. я могу иметь карты с двузначными, а еще прекрасными номерами (различными) на τ_k . $k \leq 99$ $n \leq 2k-31 \Rightarrow n \leq 167$.

В. П. Погодинский Верно и правильно.

$$\sum_{i=1}^n \text{Specwork}_i = (99 - k) \cdot 2 \quad \text{and} \quad \sum_{i=1}^n \text{Specwork}_i = (n - 99) \cdot 3.$$

$$y_{\text{gross}} = (n - 99) \cdot 3 + (99k) \cdot 2 = (2k - 130) \cdot 3 + 198 - 2k =$$

$$(\text{погрешность } \Delta = 2k - 3) \cdot 2 = 6k - 390 + 198 - 2k = 4k - 192$$

Итак, известно, что $\Delta = 2k-3$ и $6k-390+198-2k=4k-192$.
 (24) $\Delta = 2k-3$ и $4k-192$ — это Δ и Δ (3 условия)

$$\begin{aligned} (2k-8) + 1 + 2 + 4k + 9 &= 2 \\ 2 + 4k - 10 + 8 &= 4k - 10 + 2 \end{aligned}$$

$$(4k - 192) \cdot 0,8 = 2k - 8$$

$$3, 2k-153, 6 = 2k-9$$

$$1,2k = 144.6$$

$12k - 1446$

$$2K = 241 =$$

$$n = 2k - 31 = 192$$

Но по условию $1 \leq 99 \Rightarrow$ противоречие. ~~Отсюда: 210~~

Код участника:

(заполняется организатором)

1110-098

Мит 2.

Задание 2.

$$\text{НОК}(a, b) + 4\text{НОД}(a, b) = (a+b)^2 + 1$$

$$\text{НОК}(a, b) = a \cdot b : \text{НОД}(a, b)$$

(т.к. неправильное $\frac{a \cdot b}{\text{НОД}(a, b)^2}$ по ст-ву).

$$\frac{ab}{\text{НОД}(a, b)} + 4\text{НОД}(a, b) - (a+b)^2 = 1.$$

↑
: $\text{НОД}(a, b)$
и у того, что
написано
выше).

↑
: $\text{НОД}(a, b)$

т.к. каждое a и b $\text{НОД}(a, b) \mid a$ и b ,
 $a \mid b : \text{НОД}(a, b) \Rightarrow a+b : \text{НОД}(a, b) \mid$
 $(a+b)^2 \neq \text{НОД}(a, b)$.

т.к. каждое a и b $\text{НОД}(a, b) \mid a$ и b ,
 $\text{НОД}(a, b) \mid a+b$ и $\neq 0$ (т.к. $a, b \neq 0$).
 $\Rightarrow$ правая часть не может быть $\text{НОД}(a, b)$.

$$\Leftrightarrow 1 : \text{НОД}(a, b) \Rightarrow \text{НОД}(a, b) = 1.$$

Подставим $\text{НОД}(a, b) = 1$ в первое уравнение.

$$ab + 4 = a^2 + 2ab + b^2 + 1.$$

$$\Leftrightarrow 3 - ab = a^2 + b^2.$$

$$\text{т.к. } a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N} \Rightarrow a^2 + b^2 > 0.$$

$$3 - ab > 0.$$

$$ab < 3 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases} \quad \begin{cases} a=2 \\ b=1 \end{cases} \quad \begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases}$$

(1) (2) (3)

(1): $3 - 1 \cdot 1 = 1 + 1$
 $0 > 0$.

(2): $3 - 2 \cdot 1 \neq 1 + 4$
 не подходит

(3): $3 - 2 \cdot 1 \neq 1 + 4$
 не подходит

Ответ: $(1; 1)$.

44-10-098

Зараши 3.

Рассмотрим упрямо в таблицах, например.
длина всего 70 ~~раз~~ ~~раз~~ радиусом упрямо.

~~Министерство Коммунального хозяйства~~
~~№ 25-0 до-189-69~~

~~Урагу~~

~~$$1 + 2 + 3 + \dots + 70 + 71 = 70 \times \frac{71}{2} = 2485$$~~

~~Рассказы~~

Так как 70 делится на 7 , и в каждом столбце 70 делится $\Rightarrow$ каждый столбец имеет разность от 0 до 70 .

судебная 71 вариант учета.

Известно, что функция $f(x)$ является 2450 $\Rightarrow$

2450 единиц и $70 \cdot 70 - 2450 = 2450$ рублей.

Всё среднее в таблице дано по разности

Вина за право $\frac{70}{2} \cdot 71 = 2485$. (ценно отозво.
от 1 го 70).

неоднократно убит. ~~орган~~ ~~на~~ ~~таких~~ ~~ураганах~~

по требоват с нулем. Малоб вариант еривенд.
 (помоще, 1999, в. 1, к. 1, с. 10)

Итак (помимо того все другие варианты уже
использованы) — 4-м вариантом является ~~3~~
связка с 55 функциями, но все эти функции

Но перевернув мобилку, мы видим, что на экране, это
у-я ~~от~~ ~~бизнеса~~ ~~бизнеса~~ ~~бизнеса~~ с 70 сиренями террак.

а) разность чисел = $0 + 1 + 2 + \dots + 69 = 69 \cdot 70 = 2415$

$$69 \cdot 35 = 2415 < 2450 \Rightarrow \text{противоречие.}$$

12

Митч

Задание 5

$$f(x+y) = \sqrt{f^2(x) + f^2(y)},$$

$$f(n) > 0.$$

$$\text{Известно, что } f(1) + f(4) = 12.$$

⊗

$$f(2) = f(1+1) = \sqrt{f^2(1) + f^2(1)} = \sqrt{2f^2(1)}$$

$$f(3) = f(2+1) = \sqrt{f^2(2) + f^2(1)} = \sqrt{f^2(1) + f^2(1) + f^2(1)} = \sqrt{3f^2(1)}$$

$$f(4) = f(3+1) = \sqrt{f^2(3) + f^2(1)} = \sqrt{f^2(1) + f^2(1) + f^2(1) + f^2(1)} = \sqrt{4f^2(1)}$$

⚡ Обобщим, что функция f имеет следующий вид:

$$f(n) = \sqrt{n} f(1)$$

Можно доказать индукцией обратное:

База индукции: допустим $f(2) = \sqrt{2} f(1)$

$$f(k+1) = f(k+1) = \sqrt{f^2(k) + f^2(1)}$$

⚡ и т.д.

или индукция: допустим $f(n)$ того же вида, рассмотрим $f(n+1)$.

$$f(2024) = \sqrt{2024} f(1)$$

По условию

$$f(1) + f(4) = 12$$

$$f(1) + \sqrt{4} f(1) = 12$$

$$f(1) + 2f(1) = 12$$

$$f(1) = 4.$$

$$f(2024) = \sqrt{2024} f(1)$$

$$= \sqrt{2^{1012} \cdot 4} \cdot 4 = 2^{1012} \cdot 4 = 2^{1014}$$

Ответ: 2^{1014}

12

Мит 5

Задача 6.

$$\begin{cases} a^3 + b^3 + 3abc = c^3 \\ (2a+2b)^2 = c^2 \\ a^2 - ab + b^2 = c^2 \end{cases} \Rightarrow a^3 + b^3 + 3ab > 0 \Rightarrow \frac{a^3}{b^3} > -3 \Rightarrow \frac{a}{b} > -\sqrt[3]{3}$$

(0; 0; 0) является решением!

Сделаем замену. - уравнение симметрическое

$$\begin{cases} a+b=x \\ ab=y \end{cases}$$

$$(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3xy \Rightarrow x^3 - 3xy = a^3 + b^3$$

$$x^3 - 3xy + 3yc = c^3 \quad (1)$$

$$4x^2 = c^2 \quad (2)$$

$$x^2 - 3y = c^2 \quad (3)$$

$$(1): x(x^2 - 3y) = c^2(c^2 - 3y)$$

$$\begin{aligned} x^3 - c^3 &= 3xy - 3yc \\ (x-c)(x^2 + xc + c^2) &= (x-c)3y \\ (x-c)(x^2 + xc + c^2 - 3y) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x=c \\ c^2 + c^2 + xc - 3y = 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} c=a+b \\ c^2 + c^2 + xc = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c=a+b \\ c(2c+x)=0 \end{cases}$$

при $2c = -a-b$.

$$4(a+b)^2 = -(a+b)^3$$

$$-32 = a+b \Rightarrow a = -16$$

$$\text{из (3): } (a+b)^2 - 3ab = c^2$$

$$(a+b)^2 = 3ab$$

$$ab = 256 \Rightarrow a = -16, b = -16$$

$$-32b - b^2 = 256$$

$$b^2 + 32b + 256 = 0$$

$$b = -16$$

$$a = -16$$

при $c=0$ 18. решение (0; 0; 0).

при $c=a+b$:

$$4(a+b)^2 = (a+b)^3$$

$$(a+b)^2 - 3ab = (a+b)^2$$

$$3ab = 0 \Rightarrow a=0 \text{ или } b=0$$

$$(0; 4; 4) \text{ или } (4; 0; 4)$$

$$\begin{aligned} & \text{Ответ:} \\ & (0; 0; 0) \\ & (4; 0; 4) \\ & (0; 4; 4) \\ & (-16; -16; 16) \end{aligned}$$

148

Код участника:

(заполняется организатором)

1110-098

лист 1.

Задача 4.

Дано: $\triangle ABC$ – туп.

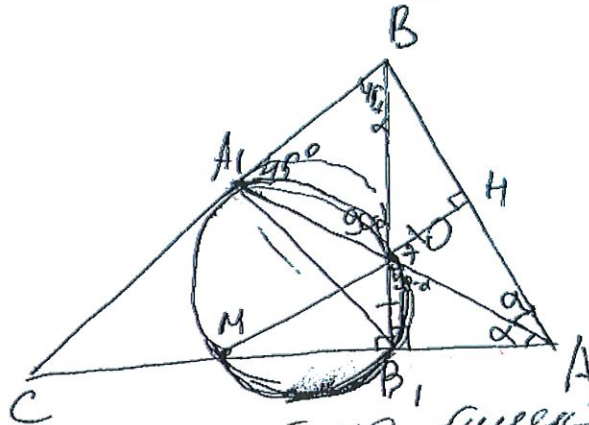
AA_1 – биссектриса

BB_1 – высота

$AA_1 \cap BB_1 = T. O.$

$\angle AA_1B = 45^\circ$

ω , описанная
около $\triangle A_1OB_1$



0.5 балла

т.о. линия из биссектрисы $AA_1 \Rightarrow$
по в-бу биссектрисы M у ω на AB
 $\angle AC \Rightarrow OB_1 = \text{прям.}$ OH на AB .

по сгр. биссектрисы

$\angle AOH = \angle AOB_1 = \alpha$ (обозначим так).

по сумме углов в $\triangle AOB_1$ и $\triangle AOH$:

$\angle AOH = 90 - \alpha = \angle AOB_1$

по вертикальным углам B_1OA и A_1OB :

$\angle A_1OB = 90 - \alpha \Rightarrow$ по сумме углов $\angle A_1BO = 45 + \alpha$

Пусть $\angle M = \omega \cap AC$.

в $\triangle OMB$, также видно 6 ω

$OB_1M = 90^\circ \Rightarrow OM$ – диаметр

не доказано

нужны
условия

М 10-116

Код участника
(заполняется организатором)



**Олимпиадная работа
заключительного этапа
«Всероссийская олимпиада школьников "Миссия
выполнима. Твоё призвание - финансист!" 2023-2024
г.»
«(Математика 10 класс)»**

Вариант № 2

«27 января 2024 г.»

Никакие другие записи на титульном листе делать не разрешается

М10-116

Код участника

Всероссийская олимпиада школьников «Миссия выполнима. Твое призвание – финансист!» 2023/2024 уч.г.

Бланк проверки работы

Математика 10 класс

№ задания	ФИО эксперта	Балл	ФИО эксперта	Балл	Итоговый балл
1	Конников	10	Степанов	10	10
2	Сунин	10	Разумов	10	10
3	Васильев	12	Гурьянова и.а.	12	12
4	Борисов	2	Дубинский	2	2
5	Иванова	12	Постовалова	12	12
6	Борисов	0	Дубинский	0	2
7	Зинин	10	Гузев	10	10
8	Зинин	0	Гузев	0	0
ИТОГО					58

- №1 1) $n > 100 \Rightarrow$ все двузначные номера встречаются $\Rightarrow$
 $\Rightarrow$ Гриша не может быть среди первых 9 человек,
 т.к. кол-во двузначных чисел $>$ кол-во однозначных,
 а кол-во человек перед Гришей $>$ кол-ва человек за
 Гришей $\Rightarrow$ перед Гришей есть двузначные номера.
 2) кол-во двузн. чисел $<$ кол-ва трехзн.; трехзн. номера
 начинаются за Гришей; кол-во человек спереди $>$
 $>$ кол-ва человек сзади $\Rightarrow$ четырехзначных номеров
 нет.

Пусть перед Гришей стоит a человек. Тогда
 за Гришей $99 - a$ двузначных номеров и b трехзн.,
 причем $99 - a + b = a - 31 \Rightarrow b = 2a - 130$

Общее кол-во цифр спереди: $2a - 9$ (т.к. 9 из них — однознач.)

Общее кол-во цифр сзади: $(99 - a) \cdot 2 + (2a - 130) \cdot 3 = 4a - 192$

по условию 2:

$$1, 2(2a - 9) = 4a - 192$$

$$1, 6a = 181, 2$$

$$a = 113, 25$$

10

$$\underline{2} \quad \text{НОК}(a, b) + 4 \text{НОД}(a, b) = (a+b)^2 + 1$$

Заметим, что $\text{НОК}(a, b) : \text{НОД}(a, b);$

$$4 \text{НОД}(a, b) : \text{НОД}(a, b);$$

$$(a+b)^2 : \text{НОД}(a, b)$$

$$\Rightarrow 1 : \text{НОД}(a, b) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{НОД}(a, b) = 1 \Rightarrow \text{НОК}(a, b) = ab$$

$$ab + 4 = (a+b)^2 + 1$$

$$3 = a^2 + b^2 + 2ab - ab$$

$$3 = a^2 + b^2 + ab$$

$$\text{т.к. } a, b \in \mathbb{N}, \text{ то } a^2 + b^2 + ab \geq 1 + 1 + 1 = 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = b = 1$$

Ответ: $a = 1; b = 1$

+

3 Предположим, что это не так.

Заметим, что если нет строки с суммой 70, то сумма всех чисел по строкам $= 0 + 1 + 2 + \dots + 69 = \frac{69 \cdot 70}{2} = 2415 < 2450$

(т.к. по предположению все строки суммы различны) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ строка с суммой 70 есть — в ней все единицы $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ нет столбца с суммой 0.

$$\text{Тогда сумма чисел по столбцам} = 1 + 2 + \dots + 70 = \frac{70 \cdot 71}{2} = 2485 > 2450.$$

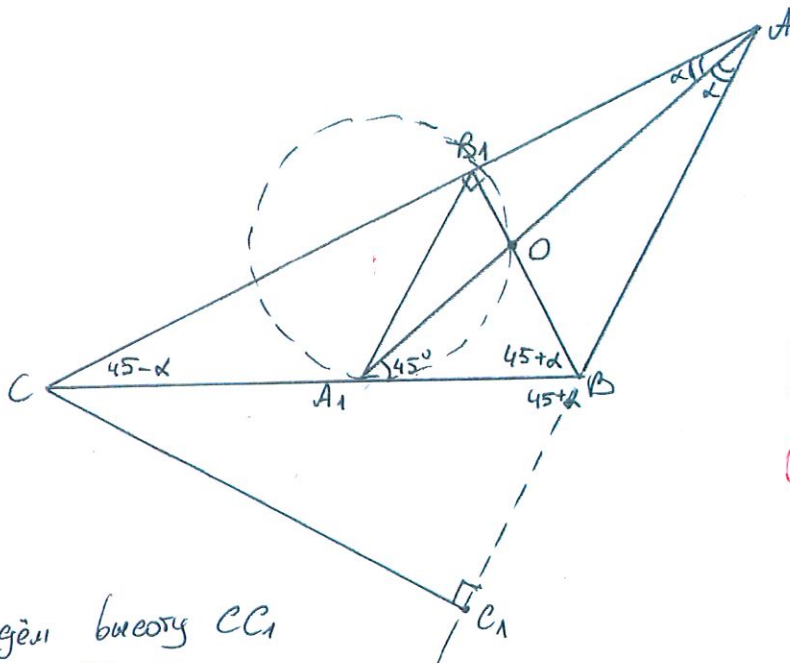
противоречие.

Значит, предположение неверно

т.е. г.

+12

24



2 балла

Проведём высоту CC_1

1) Пусть $\angle BAA_1 = \angle A_1AB = \alpha$

тогда $\angle ACA_1 = 45 - \alpha$ (т.к. $\angle A_1AB = 45^\circ$ - внеш.) $\Rightarrow \angle CBB_1 = 90^\circ - \angle ACA_1 = 90^\circ - (45 - \alpha) = 45 + \alpha$

$\angle CBC_1 = 45 + \alpha$ (внешний для $\triangle ABC$)

2) $\triangle CBB_1$ и $\triangle CC_1B$

CB - общ.

$\angle CB_1B = \angle CC_1B = 90^\circ$

$\angle CBB_1 = \angle CBC_1 = 45 + \alpha$

$\Rightarrow \triangle CBB_1 \cong \triangle CC_1B \Rightarrow CB_1 = CC_1$ (*)

3) ~~из $\triangle ABB_1$: $\sin 2\alpha = \frac{BB_1}{AB}$~~

~~из $\triangle ACC_1$: $\sin 2\alpha = \frac{CC_1}{AC}$~~

$\angle CBB_1 = \angle CC_1B = 90^\circ$

$\angle CA_1C = \angle B_1AB = 2\alpha$

$\Rightarrow \triangle CA_1C \sim \triangle B_1AB \Rightarrow \frac{BB_1}{CC_1} = \frac{AB}{AC}$

из (*) $\Rightarrow \frac{BB_1}{CC_1} = \frac{BB_1}{CB_1} = \frac{AB}{AC}$

4) AA_1 - биссектр. $\Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{A_1B}{A_1C}$

$\frac{AB_1}{CB_1} = \frac{AB}{AC} = \frac{A_1B}{A_1C} \Rightarrow B_1A_1$ - биссектр. (по св-ву биссектр.) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle OB_1A_1 = \angle CB_1A_1 = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ = \angle OA_1B \Rightarrow A_1B$ - касат. к окруж. (A_1OB_1)
(по св-ву касат. и хорд)

неверно ч.т.г.

(3)

$$\underline{25} \quad 1) \quad f(4) = f(2+2) = \sqrt{f^2(2) + f^2(2)} = f(2) \cdot \sqrt{2} \quad | \Rightarrow$$

$$f(2) = f(1+1) = f(1) \cdot \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow f(4) = f(1) \cdot 2$$

$$f(4) + f(1) = 12$$

$$2f(1) + f(1) = 12$$

$$f(1) = 4 \quad +$$

$$2) \quad f(2^{2024}) = f(2^{2023} + 2^{2023}) = \sqrt{2} \cdot f(2^{2023}) =$$

$$= \sqrt{2} \cdot f(2^{2022} + 2^{2022}) = \sqrt{2^2} \cdot f(2^{2022}) = \dots = \sqrt{2^{2023}} \cdot f(2) =$$

$$= \sqrt{2^{2024}} \cdot f(1) = \sqrt{2^{2024}} \cdot 4 = 2^{1012} \cdot 2^2 = 2^{1014}$$

$$\text{Ответ: } f(2^{2024}) = 2^{1014} \quad +$$

$$\underline{27} \quad \text{Ответ: } \underline{55}$$

Пример: числа $1, 2, 2^2, 2^3, 2^4, \dots, 2^{10}$

тогда все произведения на доске – степени 2

$$\text{от } 1 \text{ до } 1+2+\dots+10 = \frac{10 \cdot 11}{2} = 55 \quad \checkmark \quad x_2 \dots x_{11} \quad x_1 > x_2 > \dots > x_{11}$$

Идея: Обозначим числа за $x_1 > x_2 > x_3 > \dots > x_{11}$ т.е.

Заметим, что никакие 2 произведения, отличающиеся
? одним множителем $\neq 1$ не могут быть равны

$$1+2+\dots+9+11 = \underline{56}$$

п. 6 ОПС

М10-078

Код участника
(заполняется организатором)



**Олимпиадная работа
заключительного этапа
«Всероссийская олимпиада школьников "Миссия
выполнима. Твоё призвание - финансист!" 2023-2024
г.»
«(Математика 10 класс)»**

Вариант № 2 (второй) _____

«27 января 2024 г.»

Никакие другие записи на титульном листе делать не разрешается

М 10 - 078.

Код участника

Всероссийская олимпиада школьников «Миссия выполнима. Твое призвание – финансист!» 2023/2024 уч.г.

Бланк проверки работы

10.
Математика 8-9 класс

№ задания	ФИО эксперта	Балл	ФИО эксперта	Балл	Итоговый балл
1	Копцев	10	Степанян	10	10
2	Балашов	4	Авдеев	4	4
3	Иванов	12	Берзин	12	12
4	Борисов	0	Дубинский	0	0
5	Вологова	12	Зайников	12	12
6	Борисов	1	Дубинский	1	3 (три Бер)
7	Зинин	(135)	Грузин	13	13
8	Зинин	0	Грузин	0	0
ИТОГО					54

Задание 1

Пусть x – число людей, стоящих сзади Гриши.

Тогда из 2-ого условия:

людей спереди $x+31$.

Всего людей $n = x + x + 31 = 2x + 31 \Rightarrow x = \frac{n-31}{2}$ (людей сзади)

Значит, $x+31 = \frac{n-31}{2} + 31 = \frac{n+31}{2}$ (людей спереди)

Из 1-ого условия: $x+31 \leq 99$ (т.к. последний, стоящий перед Гришей, имел талон не больше 99-ого).

Тогда $x \leq 68 \Rightarrow \frac{n-31}{2} \leq 68$

$$n \leq 167.$$

Из 3-его условия:

Заметим, что перед Гришей нет людей с трёхзначными номерами талонов из-за 1-ого условия. Заметим, что из ограничения $n \leq 167$ и факта самого присутствия 99-ого талона выходит, что сзади Гриши стоят люди с двухзначными и трёхзначными талонами.

Если люди с однозначными талонами стоят впереди Гриши, т.к. иначе $\frac{n+31}{2} \leq 9 \Rightarrow n \leq -13$, что невозможно. Тогда общее количество цифр на их талонах равно 9, также перед Гришей стоят $(\frac{n+31}{2} - 9)$ людей с двухзначными талонами.

Сзади Гриши $(n-99)$ людей с трёхзначными талонами и $(\frac{n-31}{2} - n + 99)$ людей с двухзначными талонами.

Сходя из вышеперечисленного и 3-его условия:

$$2 \cdot (9 + 2 \cdot (\frac{n+31}{2} - 9)) = 3 \cdot (n-99) + 2 \cdot (\frac{n-31}{2} - n + 99)$$

$$= 195,5 \Rightarrow \text{Гриша ошибся, т.к. } n \in \mathbb{N} \text{ и } n \leq 167.$$

10

Задание 2

Заметим, что если пара $(a; b)$ является решением, то и пара $(b; a)$ является решением, т.к.:

$$\begin{aligned} \text{НОК}(a, b) &= \text{НОК}(b, a) \\ \text{НОД}(a, b) &= \text{НОД}(b, a) \\ (a+b)^2 &= (b+a)^2 \end{aligned} \quad \left| \begin{array}{l} \text{Без ограничения общности} \\ \Rightarrow \text{можем принять, что } a \geq b. \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} \text{НОК}(a, b) &\geq \max(a, b) = a \\ \text{НОД}(a, b) &\leq \min(a, b) = b \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \text{НОК}(a, b) + \\ + 4\text{НОД}(a, b) &\leq a + 4b \end{aligned}$$

$$\text{Потому } (a+b)^2 + 1 \leq a + 4b.$$

$$a^2 + b^2 + 2ab + 1 \leq a + 4b$$

Заметим, что т.к. $a, b \in \mathbb{N}^+$, то $a^2 \geq a$ (равенство при $a=1$),
 $b^2 \geq 4b$ при $b \in \mathbb{N}^+ \setminus \{1\}$, $2ab + 1 > 0$.

Потому есть лишь 4 возможных решения при усло-

вии $a \geq b$:

$$(1, 1) \Rightarrow 1 + 4 \cdot 1 = (1+1)^2 + 1 - \text{верно.}$$

$$(1, 2)$$

По предположению $a \geq b$, но a может быть равно лишь 1 $\Rightarrow b \leq 1 \Rightarrow$ Ед. возможное решение – $(1, 1)$.

Проверим эту пару:

$$\begin{aligned} \text{НОК}(a, b) &= 1 \\ \text{НОД}(a, b) &= 1 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} 1 + 4 \cdot 1 &= (1+1)^2 + 1 \\ 5 &= 5 - \text{верно} \end{aligned}$$

Значит, $(1, 1)$ – решение, симметричного кото-
 рому нет, т.к. $a=b=1$.

Ответ: $(a=1; b=1)$

Задание 3

Заметим, что в таблице 70×70 ровно 4900 клеток. Значит, раз суммы равна $2450 = \frac{4900}{2}$, а в таблице стоят лишь нули и единицы $\Rightarrow$ в таблице 2450 нулей и 2450 единиц.

Одинаковая сумма чисел при таком условии означает, что в строках / столбцах одинаковое число единиц, т.к. только они влияют на сумму.

Пусть не нашлось пары столбцов или строк, удовлетворяющих условию. Тогда во всех строках разная сумма чисел.

Рассмотрим строки (для столбцов аналогично). В них может быть любая сумма от 0 до 70, т.е. ~~одна~~ из 71 вариантов. Но строк ровно 70. Значит, ках-
дая сумма, кроме одной, не найдется в таблице.

Посчитаем сумму чисел от 0 до 70: $\frac{70 \cdot (70+1)}{2} = 2485$, но в нашей таблице сумма ~~2485~~ ²⁴⁵⁰, значит в таблице не будет стро-
к с суммой $2485 - 2450 = 35$.

Значит, у нас есть строки с суммой 0 и 70, а так же столбцы с суммой 0 и 70 $\Rightarrow$ т.е. в них либо все нули, либо все единицы.

Но если есть строка, в которой расположены только единицы, то во всех строках как минимум 1. А у нас обязан быть столбец с суммой 0. Значит, получено противоречие $\Rightarrow$ предположение было неверно и необходимы пары строк или столбцов найдутся.

г.м.в.

Задание 4

Дано: $\triangle ABC$; AA_1 – биссектриса;
 BB_1 – высота; $AA_1 \cap BB_1 = O$;
 $\angle AA_1B = 45^\circ$; R – центр опис. $\triangle A_1OB_1$

Доказать: R касается $\triangle ABC$.

Доказательство:

1) Покажем, что R лежит вне $\triangle A_1OB_1$:

Пусть $\angle A_1AB = \alpha \Rightarrow \angle A_1AB_1 = \alpha$

Тогда $\angle B_1OA = 180 - 90 - \alpha = 90 - \alpha$

Тогда $\angle B_1OA_1 = 180 - 90 + \alpha = 90 + \alpha$ как смежный с $\angle B_1OA$.

Это есть $\angle B_1OA_1$ – тупой $\Rightarrow R$ лежит вне $\triangle A_1OB_1$ за стороной A_1B_1 .

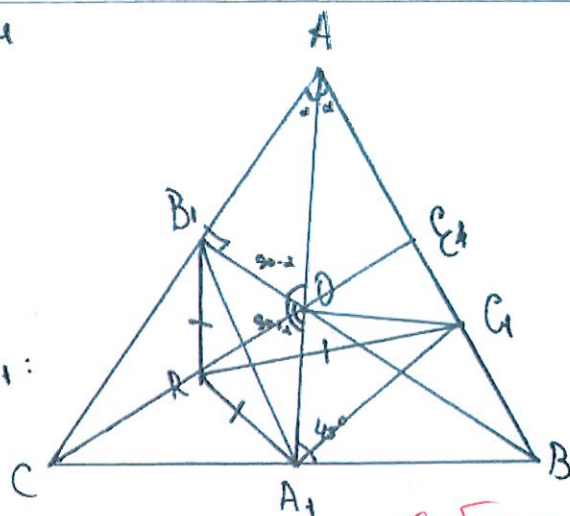
2) R не может касаться сторон AC и BC , т.к. RB_1 и RA_1 – радиусы, но R лежит вне $\triangle A_1OB_1$. Значит, R касается стороны AB .

Пусть точка касания R и AB – это C_1 .

3) Пусть точка касания R и AB – это C_1 .

Тогда OC_1 и OC_1 не совпадают. Тогда $OC_1 \neq OR$.

не решено



Задача 5

$$f(x+y) = \sqrt{f^2(x) + f^2(y)}$$

$$f(1) + f(4) = 12 \quad ; \quad f(2^{2014}) = ? \quad , \quad f(x) \geq 0$$

1) Подставим в равенство из условия $x:=a$ и $y:=a$

$$f(a+a) = \sqrt{f^2(a) + f^2(a)}$$

в 2 раза

$$f(2a) = f(a)\sqrt{2} \Rightarrow \text{при умножении аргумента}$$

значение функции увеличивается в $\sqrt{2}$ раз.

Отсюда $f(4) = f(2 \cdot 2) = \sqrt{2} \cdot f(2) = \sqrt{2} \cdot f(2 \cdot 1) = 2f(1)$.

$$f(1) + f(4) = f(1) + 2f(1) = 3f(1) = 12$$

$$\underline{f(1) = 4}$$

3) Заметим, что $f(2^{2014}) = f(1 \cdot 2^{2014})$.

Значит, аргумент функции $f(1)$ 2014 раза увеличен в 2 раза $\Rightarrow$ значение ~~$f(2^{2014})$~~ функции выросло в

$(\sqrt{2})^{2014}$ раз.

$$f(2^{2014}) = f(1) \cdot (\sqrt{2})^{2014} = 4 \cdot 2^{1012} = 2^{1014}$$

Ответ: 2^{1014} .

Задание 7

Рассмотрим наибольшее число из данных 11 (можно предварительно их упорядочить, тогда $a_1 \leq a_2 < a_3 < \dots < a_{11}$). Тогда в паре с любым из оставшихся 10 чисел оно образует произведение, которого ранее не было на доске, т.к. $ab = ac$ только если $b = c$ (при $a > 0$), но у нас числа различные.

Теперь рассмотрим произведение 3 чисел, 2 из которых — a_{10} и a_{11} (т.е. наибольшие). Максимальное произведение двух чисел равно $a_{10}a_{11}$, тогда любое произведение 3 чисел будет больше $a_{10}a_{11}$, т.к. оно представимо в виде $ka_{10}a_{11}$, где $k \geq 1$. Единственное исключение: $k=1$. Если 1 выписано на доске, то это число равно a_1 , т.к. оно очевидно будет наименьшим. Тогда $a_{10}a_{11} = a_1a_{10}a_{11}$. Рассмотрим случай с $a_1 = 1$ в ко-
нуре, пока примем, что $a_1 \geq 2$.

Заметим, что если нам нужно выписать все произведе-
ния i чисел, то среди них будет как минимум
(12-i) новых.

Для доказательства этого возьмём (i-1) наибольших
чисел, выписанных на доске. Тогда к ним можно
«добавить» каждое из (12-i) оставшихся чисел и по-
лучить произведение, которого ещё не было на доске
потому что $a_k \cdot a_{k-i} \cdot a_{k-i-1} \cdot \dots \cdot a_{10} \cdot a_{11} > a_{12-i} \cdot a_{12-i-1} \cdot \dots \cdot a_{10} \cdot a_{11}$
для $k \in [1; 12-i]$, $k \in \mathbb{N}$, $a_k \neq 1$ по предположению. и
все a_j различны по условию.

Значит, на доске будет как минимум $\sum_{i=2}^{11} (12-i) = 55$ чисел.

Код участника: 110-078

(заполняется организатором)

Теперь пусть $a_1 = 1$. Тогда на каждом шаге (при каждом i от 2 до n) мы будем получать на 1 новое число меньше, чем при случае $a_1 \neq 1$. Тогда у нас такими манипуляциями получится лишь не менее 46 различных произведений.

Но заметим, что в таком случае появится другие 9 новых произведений: пары a_1 со всеми a_k , где $k \in [2; 10]$.

Любое число вида $a_1 a_k = a_k$, но его еще не было на доске, т.к. любое умноженное ранее произведение было больше (не меньше) a_{11} , но $a_k < a_{11}$.

Значит, на самом деле при $a_1 = 1$ различных произведений тоже как минимум 55.

Теперь покажем, что есть пример на 55:

$1, 2, 2^2, 2^3, 2^4, \dots, 2^9, 2^{10}$.

Всевозможные группы произведений данных чисел дадут степени двойки не больше $\sum_{i=1}^{10} i = 55$.

При этом среди произведений будет каждая натуральная степень двойки, т.к. любое число от 1 до 55 можно представить в виде суммы чисел от 1 до 10.

И.е. на доске будут выписаны числа $2^1, 2^2, 2^3, \dots, 2^{54}, 2^{55}$.

Ответ: 55 //

Задание 8

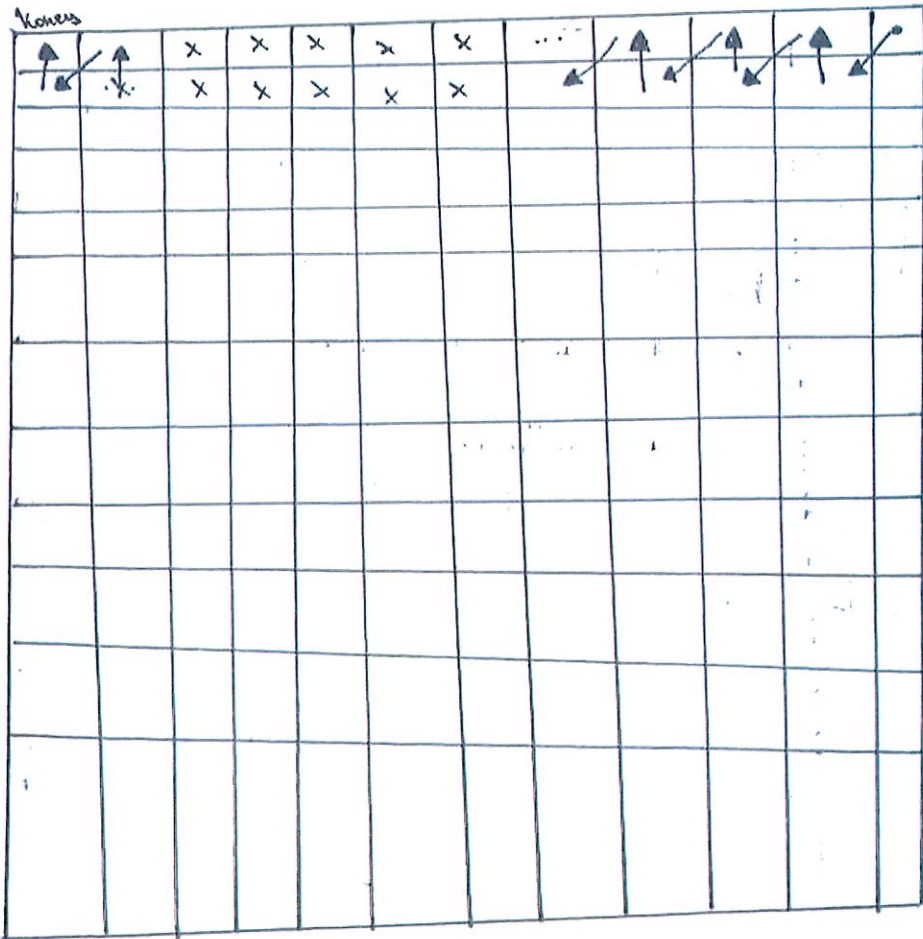
Выигрывает Волк.

Изпишем стратегията за Волка:

Вопи ставит, ориентируясь в верхний правый угол.
В таком случае у Зайца будет лишь 1 вариант
хода: влево-вниз (см. рисунок).
Вопи надо вернуться на верхнюю стр

После этого Волку надо вернуться на верхнюю строку.
Тогда Задю попадает в аналогичную ситуацию:
у него только 1 вариант хода.

у него только 1 вариант
Волк может продолжать такие действия, пока не
дойдет до левого верхнего угла. И из него у
Зайца нет хода, т.к. единственная возможная для
хода клетка уже была использована ранее (правая
нижняя относительно угла). Значит, Волк выиграл!



Imbem. Bonu

Задание 6

$$\begin{cases} a^3 + b^3 + 3abc = c^3 \\ (2a + 2b)^2 = c^3 \\ a^2 - ab + b^2 = c^2 \end{cases}$$

1) Из 3-его ур-я:

$$a^2 - ab + b^2 = c^2 \quad \text{---} \quad a \neq -b$$

$$\frac{a^3 + b^3}{a + b} = c^2 \Rightarrow a^3 + b^3 = c^2(a + b)$$

2) Из 1-ого ур-я с учётом $\uparrow$:

$$c^2(a + b) + 3abc = c^3 \quad | : c \neq 0$$

$$c(a + b) + 3ab = c^2$$

$$3ab = c(-a - b + c) \Leftrightarrow 3ab = c(c - a - b)$$

б) Заметим, что тройка $(0, 0, 0)$ удовлетворяет системе:

$$\begin{cases} 0^3 + 0^3 + 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0 \\ (2 \cdot 0 + 2 \cdot 0)^2 = 0 \\ 0^2 - 0 \cdot 0 + 0^2 = 0 \end{cases}$$

3) Заметим, что тройка $(0, 0, 0)$ подходит;

$$\begin{cases} 0^3 + 0^3 + 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0 \\ (2 \cdot 0 + 2 \cdot 0)^2 = 0 \\ 0^2 - 0 \cdot 0 + 0^2 = 0 \end{cases} \quad \text{①}$$

Также заметим, что система симметрична относительно a и b :

$$\begin{cases} a^3 + b^3 + 3abc = c^3 \\ (2a + 2b)^2 = c^3 \\ a^2 - ab + b^2 = c^2 \end{cases}$$

 $\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} b^3 + a^3 + 3bac = c^3 \\ (2b + 2a)^2 = c^3 \\ b^2 - ba + a^2 = c^2 \end{cases}$$

То есть если (a, b, c) – решение, то и (b, a, c) – тоже решение.

Также заметим, что $c > 0$ т.к. $c^3 = k^2$ (2-ое ур-е).

Задание 6

Продолжение

4) Вернёмся к ур-ю 2!

Решим его как квадратное относительно a и b .

$$a^2 + 2ab + b^2 - \frac{c^3}{4} = 0$$

1. Относительно a :

$$D = (2b)^2 - 4(b^2 - \frac{c^3}{4}) = c^3$$

$$a = \frac{-2b \pm \sqrt{c^3}}{2} = -b \pm \sqrt{\frac{c^3}{4}}$$

2. Относительно b :

$$D = (2a)^2 - 4(a^2 - \frac{c^3}{4}) = c^3$$

$$b = \frac{-2a \pm \sqrt{c^3}}{2} = -a \pm \sqrt{\frac{c^3}{4}}$$

Пусть $a_1 = \sqrt{\frac{c^3}{4}} - b$, $a_2 = -b - \sqrt{\frac{c^3}{4}}$, $b_1 = \sqrt{\frac{c^3}{4}} - a$, $b_2 = -a - \sqrt{\frac{c^3}{4}}$

Если $a_1 = \sqrt{\frac{c^3}{4}} - b$, то $a_1 = \sqrt{\frac{c^3}{4}} - b - \sqrt{\frac{c^3}{4}} + a = a$

Поэтому $a + b = \pm \sqrt{\frac{c^3}{4}}$.

1 балл.

Ответ: (0; 0; 0).

М10-167

Код участника
(заполняется организатором)



**Олимпиадная работа
заключительного этапа
«Всероссийская олимпиада школьников "Миссия
выполнима. Твоё призвание - финансист!" 2023-2024
г.»
«(Математика 10 класс)»**

Вариант № 1

«27 января 2024 г.»

Никакие другие записи на титульном листе делать не разрешается

Код участника

Всероссийская олимпиада школьников «Миссия выполнима. Твое призвание – финансист!» 2023/2024 уч.г.

Бланк проверки работы

Математика 10 класс

№ задания	ФИО эксперта	Балл	ФИО эксперта	Балл	Итоговый балл
1	Зайкина	10	Гоздеева	10	10
2	Гоздеева	10	Гурьянова И.Т.	10	10
3	Амалова Т.Т.	12	Гурьянова И.Т.	12	12
4	Чуров	3	Врлова	3	3
5	Ш	3	Шамов	3	3
6	Гавина С.В.	0	Маслов Р.Н.	0	0
7	Киселев А.И.	0	Гуля	0	0
8	Александров	16	Зайкина	16	16
ИТОГО					54

①

n – количество людей
 $n \in \mathbb{N}$
 $n \geq 100$ (по условию)

Пусть Гриша встал перед x -м человеком ($x \in \mathbb{N}, x < n$),
 тогда перед ним стоит $x+23$ человека, тогда
 в очереди было $2x+23$ людей, исходя из
 этого, в очереди было нечетное количество людей.

Проверка 3-его условия

1) $n=115$; Гриша встал за $\frac{115-23}{2}+23=69$ -м человеком, тогда количество цифр
 на талонах у людей спереди: $9+2 \cdot 60=129$; тогда сзади: $30 \cdot 2+16 \cdot 3=108$
 $108 \cdot \frac{5}{4}=135$; $135 \neq 129$, значит $n \neq 115$

2) $n=113$; Гриша встал за $\frac{113-23}{2}+23=68$ -м человеком; кол-во цифр на талонах
 у людей спереди: 127 ; сзади: 104 ; $104 \cdot \frac{5}{4}=130$; $130 \neq 127$; $n \neq 113$

3) $n=111$, Гриша встал за 67 -м человеком, количество цифр на талонах у
 людей спереди: 125 ; сзади: 100 ; $100 \cdot \frac{5}{4}=125$; $125=125$, верно.

105

Ответ: $n=111$

②
 $\chi \text{НОК}(a, b) + \text{НОД}(a, b) = (a+b)^2 + 1$

$(a, b) = 7$

$a \in \mathbb{N}$
 $b \in \mathbb{N}$, значит

$(a+b)^2 + 1 = \{5, 10, 17, 26, 37, 50, \dots\}$

1) $\chi \text{НОК}(a, b) + \text{НОД}(a, b) = 5$ ($a=1; b=1$) 2) $\chi \text{НОК}(a, b) + \text{НОД}(a, b) = 10$ ($a=2; b=1$ или $a=1; b=2$)
 $\chi \text{НОК}(1, 1) + \text{НОД}(1, 1) = 5$
 $\chi \text{НОК}(2, 1) + \text{НОД}(2, 1) = 10$
 $\chi \cdot 1 + 1 = 5$
 $5 = 5$ – верно

$\chi \cdot 2 + 1 = 10$
 $9 = 10$ – неверно

$(1, 1)$ – подходит

3) $\chi \text{НОК}(a, b) + \text{НОД}(a, b) = 17$ ($(2, 2)$ или $(3, 1)$)

$\chi \cdot 2 + 2 = 17$
 $8 + 2 = 17$

$\chi \cdot 3 + 1 = 17$
 $12 + 1 = 17$

При последующем увеличении a и b , $(a+b)^2 + 1$ будет больше, чем $\chi \text{НОК}(a, b) + \text{НОД}(a, b)$

3

Таблица 50×50 клеток, значит она состоит из 2500 клеток, сумма всех клеток 1250, значит половина клеток "0", а половина "1".

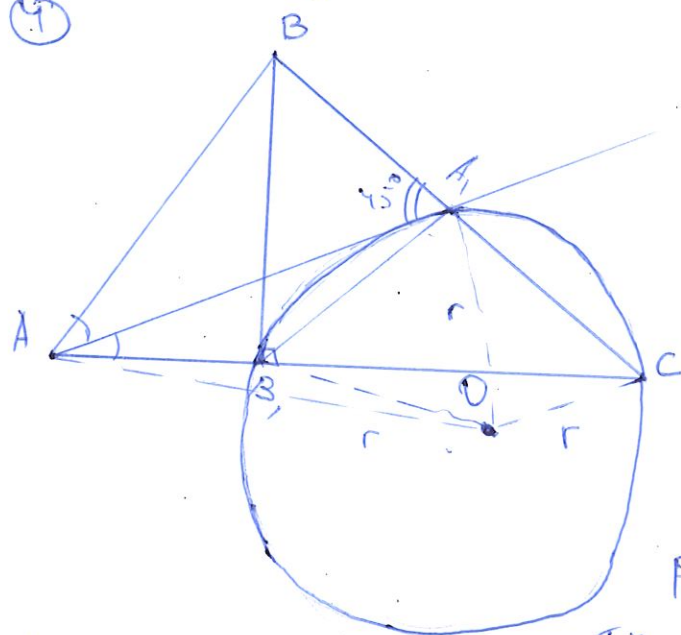
Пойдем от обратного. Пусть во всех столбцах или строках стоит разное количество единиц, то есть (от 1 до 50 запрашиваемых клеток)

$$1+2+3+4+\dots+49+50 = \frac{50+1}{2} \cdot 50 = (51 \cdot 25) = 1275, \text{ что больше } 1250$$

(от 0 до 49): $0+1+2+\dots+48+49 = \frac{49+0}{2} \cdot 50 = 1225, \text{ что меньше } 1250$
 единиц на строках или столбцах должны быть меньше (если сумма больше 1250), или больше (если сумма меньше 1250), что приведет к наличию одинаковых сумм чисел на каких-то строках или столбцах.

1250

4



Дано:

$\triangle ABC$

AA_1 – биссектр.

BB_1 – высота

ω описана вокруг $\triangle ABC$

с центром O

$\angle AA_1B = 45^\circ$

Док-ать:

AA_1 – касательная к окружности с центром O ;

Решение:

В описанной окружности $\triangle ABC$, то нужно доказать, что $OA_1 \perp AA_1$, или $\angle OAA_1 = 90^\circ$

$AO = OC$ (как радиусы окружности) $\rightarrow \triangle A_1OC$ – р/б (по шпр. р/б А)

$\angle AA_1C = 135^\circ$ (как смежный с $\angle AA_1B$)

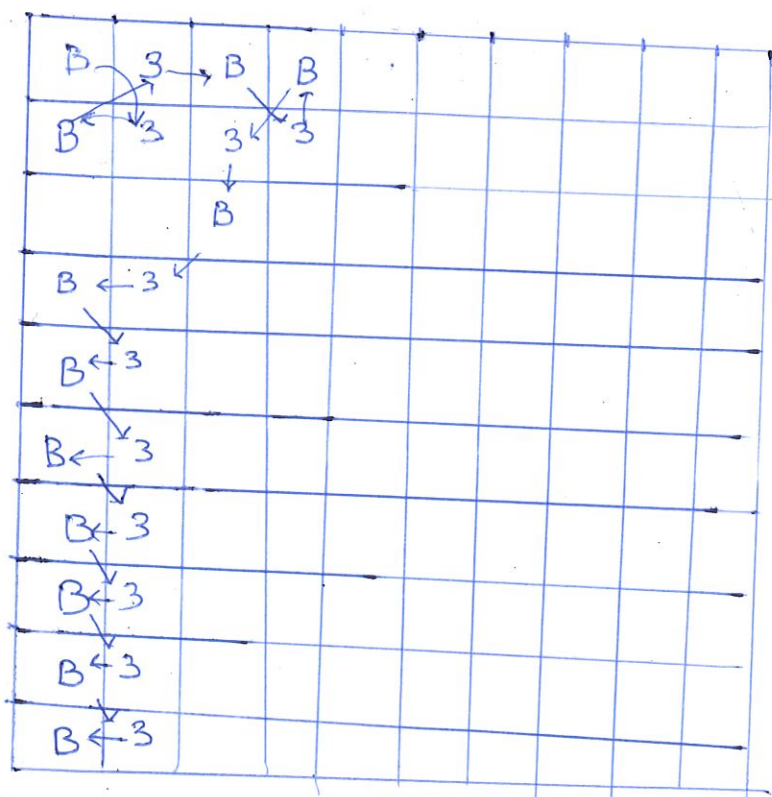
Код участника:

(заполняется организатором)

8

Всегда, при правильной игре будет победить волк. Основная задача волка – передвигать фишку к краю доски, ограничивая количество точек, куда может прыгнуть заяц. Подходя к диагональному краю доски будет совершён последний ход волка.

Частный случай, где волк поставил фишку на край доски:



16

5

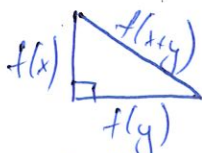
$$f(x+y) = \sqrt{f^2(x) + f^2(y)}$$

$$1) f(1) + f(4) = 9 \quad \uparrow^2$$

$$(f(1) + f(4))^2 = 81$$

$$f^2(1) + 2f(1)f(4) + f^2(4) = 81$$

$$f^2(5) = 81 - 2f(1)f(4)$$



$$f(x) \geq 0$$

$$f(y) \geq 0$$

$$f(2^{2023}) = 7$$

$$2) f(1) + f(4) = 9$$

замена

$$f(1) = f^2(x)$$

$$f(4) = f^2(y)$$

$$f^2(x) + f^2(y) = 9$$

$$f^2(x+y) = 9$$

$$f(x+y) = 3$$

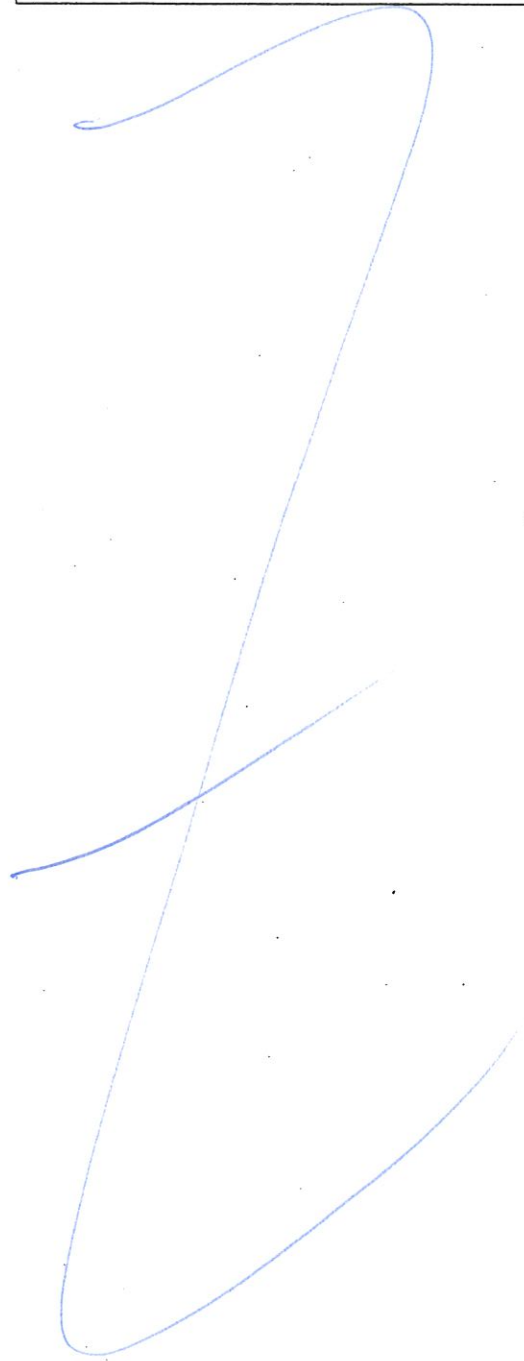
35

Бланк ответа

Всероссийская олимпиада школьников «Миссия выполнима. Твоё призвание – финансист!»

Код участника:

(заполняется организатором)

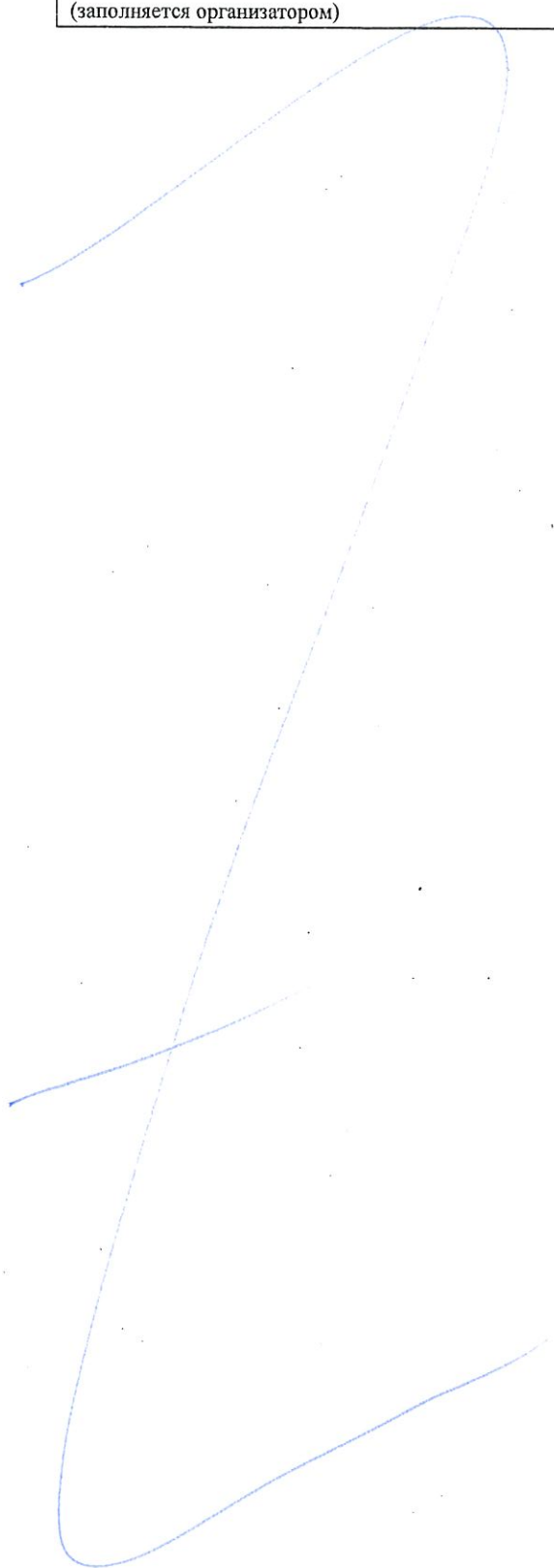


Бланк ответа

Всероссийская олимпиада школьников «Миссия выполнима. Твоё призвание – финансист!»

Код участника:

(заполняется организатором)



M1D-129

Код участника
(заполняется организатором)



**Олимпиадная работа
заключительного этапа
«Всероссийская олимпиада школьников "Миссия
выполнима. Твоё призвание - финансист!" 2023-2024
г.»
«(Математика 10 класс)»**

Вариант № 2

«27 января 2024 г.»

Никакие другие записи на титульном листе делать не разрешается

M10 - 129

Код участника

Всероссийская олимпиада школьников «Миссия выполнима. Твое призвание – финансист!» 2023/2024 уч.г.

Бланк проверки работы

Математика 10 класс

№ задания	ФИО эксперта	Балл	ФИО эксперта	Балл	Итоговый балл
1	Волосова	4	Забиткова	4	4
2	Гузанин	10	Разумов	10	10
3	Касимов	2	Гурьянова и.э.	2	2
4	Борисова	5	Дубинский	5	5
5	Волосова	12	Забитков	12	12
6	Борисова	0	Дубинский	0	0
7	Зинин	14	Груздев	14	14
8	Зинин	0	Груздев	0	0
ИТОГО					47

M10 - 129

Код участника

Всероссийская олимпиада школьников «Миссия выполнима. Твое призвание – финансист!» 2023/2024 уч.г.

Бланк проверки работы

Математика 10 класс

№ задания	ФИО эксперта	Балл	ФИО эксперта	Балл	Итоговый балл
1	Волосова	4	Забиткова	4	4
2	Гузанин	10	Разумов	10	10
3	Васильев	2	Гурьянова и.э	2	2
4	Борисова	5	Аубинская	5	5
5	Волосова	12	Забиткова	12	12
6	Борисова	0	Аубинская	0	0
7	Гузанин	14	Гузанин	14	14
8	Гузанин	0	Гузанин	0	0
ИТОГО					47

Задача №2

$$\text{НОК}(a,b) + 4 \text{НОД}(a,b) = (a+b)^2 + 2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2$$

Пусть $\text{НОД}(a,b) = d$

$$\text{НОК}(a,b) : d$$

$$4 \text{НОД}(a,b) : d$$

$$a^2 : d$$

$$b^2 : d$$

$$2ab : d$$

$$\begin{aligned} 2 : d &\Rightarrow \text{НОД}(a,b) = 2 \\ \text{НОК}(a,b) \text{НОД}(a,b) &= ab \\ \text{НОК}(a,b) &= ab \end{aligned}$$

$$ab + 4 = a^2 + 2ab + b^2 + 2$$

$$a^2 + b^2 + ab = 3$$

$$\text{При } a > 2 \text{ или } b > 2 \quad a^2 + b^2 + ab > 3$$

$$\downarrow$$

$$a=2 \quad b=2 \quad \text{— единственное подходящее решение}$$

Задача №3

Допустим, среди строк нет двух (одинак. сумм).
Сумма чисел в строке может принимать 78 различных
значений от 0 до 70. $S = 2450 = \frac{0+70}{2} \cdot 78 - X$

$$X \text{ — значение, которого нет} \Rightarrow X = 78 \cdot 35 - 2450$$

$X = 35$. Это значение единственное т.к. сумма
строк фиксирована. Аналогично для столбцов
также нет значения 35. Значит, что в этом
случае не есть строка и не сумма чисел 70,
тогда в ней везде стоит 1, но есть столбец
в котором сумма = 0 $\Rightarrow$ там стоят все

① нули, но во всех столбцах есть хотя бы одна 1

+ 2 балла

Задача №5

$$f(x+y) = \sqrt{f^2(x) + f^2(y)}$$

$$f(1) + f(4) = 12$$

Положим $x=y=1$

$$f(2) = \sqrt{2} f(1)$$

$$x=y=2$$

$$f(4) = \sqrt{2} f(2) \quad \text{и аналогично:}$$

$$3f(2) = \sqrt{2} (f(4) + f(1))$$

$$f(2^2) = f(2) = 4\sqrt{2} \Rightarrow f(8) = 4$$

$$f(4) = 8 = f(2^2)$$

$$f(8) = \sqrt{2} f(4) = 8\sqrt{2}$$

$$f(16) = \sqrt{2} f(8) = 16$$

$$\Rightarrow f(32) = \sqrt{2} f(16) = 16\sqrt{2}$$

Далее по индукции, то $f(2^n) = 2^{n+1}$

База доказана выше.

Пусть где n верноЕсли $n=2k$, то есть четное, то

$$x=y=2^n \quad f(2^{n+1}) = \sqrt{2} f(2^n)$$

подставим

 $\Rightarrow$ где $n+1$ верноТеперь $n \equiv 2k+1$

$$x=y=2^n \quad f(2^{n+1}) = \sqrt{2} f(2^n)$$

Замечание, то подставим $x=y=2^n$:

$$f(2^{n+1}) = f(2^n) \cdot \sqrt{2}$$

$$\text{Далее по индукции, то } f(2^n) = 4(\sqrt{2})^n$$

База доказана выше.

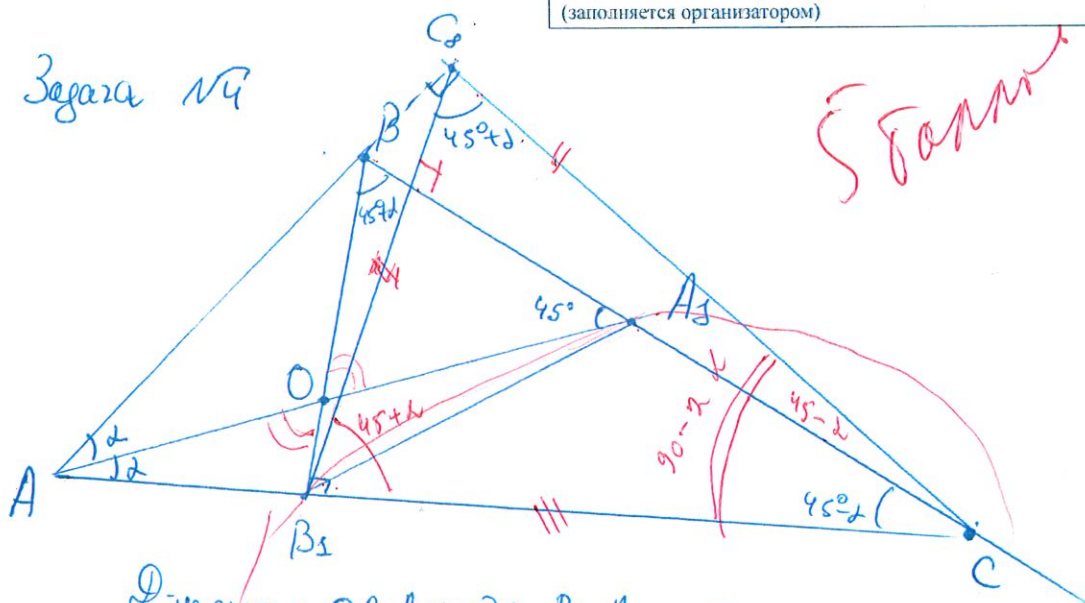
Пусть где n верно:

$$\text{и } n+1: f(2^{n+1}) = 4(\sqrt{2})^n \cdot \sqrt{2} = 4\sqrt{2}^{n+1} - \text{верно} \Rightarrow$$

2

$$\Rightarrow f(2^{2014}) = 2^{4014}$$

Задача №4



Д-вимо $\angle OBA = 45^\circ \Rightarrow B \in A$ - Successor $\angle BBA < BBA$.

Тогда по теореме, обратная теорема $OB \perp$ между касательной и хордой BC будет касательной ($OB \perp A_2$)

$B_3 A_2 - \text{success} \Rightarrow \frac{B B_3}{B_3 C} = \frac{B A_3}{A_3 C}$ - *свойство взаимной сукцессии*

\$\Rightarrow\$ No change in force AA is

$$\Rightarrow (i) \frac{BB_2}{B_1C} = \frac{AB}{AC} \quad \frac{BB_2}{AB} = \sin 2\alpha$$

$$\Rightarrow (1) \frac{BC}{AC} = \sin \alpha \text{ верно.}$$

$$\text{Верно } AC = \frac{CC_s}{\sin 2\alpha} \Rightarrow (1) \quad BC = CC_s \quad \text{Верно.}$$

$$\angle AOB_1 = \angle BOA_1 = 90^\circ - \alpha \Rightarrow \angle OBC = 180^\circ - 90^\circ + \alpha - 45^\circ = 45^\circ + \alpha$$

$$\Rightarrow \angle BC_2 B_2 = \angle BC B_1 = 45^\circ - \alpha$$

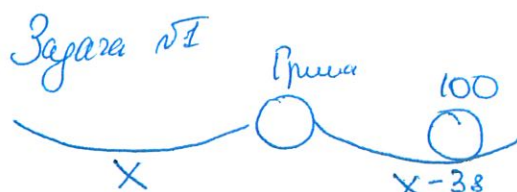
Тогда по теореме о внешних $\angle \angle GBC = 45^\circ + \alpha$

из внешнего $\angle C$ $BC = \angle C_1 B_1 C = 45^\circ \Rightarrow$

$$\Delta \text{CBrC} - \mu/\delta \Rightarrow \text{BrC} = \text{CCl}$$

3

Из приведенного (верного) не следует, что AA_1 - касат.



Посчитаем общее число узер на чатиках слева,
там находимся числа $< 100 \Rightarrow$

$$S = 9 + 2(x - 9)$$

↑ ↑
однозначные двузначные

Теперь справа от Гриши:

Там стоят оставшиеся двузначные + трехзначные,
чтобы их количество было не меньше т.к. ~~$x > x - 38$~~

$$100 > x > x - 38.$$

Тогда $S = 2(\overset{\text{двузначные}}{99 - x}) + 3(\overset{\text{трехзначные}}{2x - 38 - 100 + 9})$

~~$16(2x - 9) = 4x - 142$~~ $12(2x - 9) = 24x - 108$ $198 - 2x + 6x - 490$

~~$20x - 90 = 8 \cdot (198 - 490) + 32x$~~

~~$42x = 8(490 - 198) - 90$~~

~~$6x = 4 \cdot 292 - 45$~~

$16x = 490 - 198 - 12 \cdot 9$

$x = \frac{2920 - 12 \cdot 9}{16} = \frac{2812}{16} = 175,75$

$n = 2x - 38 = \text{~~351,5~~} 353,5 - 38 = 320,5$

(4)

Решение не завершено.

Бланк ответа

Всероссийская олимпиада школьников «Миссия выполнима. Твое призвание – финансист!»

Код участника: **M1D-129**

(заполняется организатором)

Задача 5б

$$\begin{cases} a^3 + b^3 + 3abc = c^3 \\ 4(a+b)^2 = c^3 \\ a^2 - ab + b^2 = c^2 \end{cases}$$

Решение: (0; 0; 0)

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

$c \neq 0$ так как тогда $a = -b$

$$2a^2 \neq a^2$$

$c > 0$ так как $(a+b)^2 > 0$

Таким образом, то если (a, b, c) - решение то $(-a, b, c)$ - решение

$$\begin{aligned} & (a+b)c^2 + 3abc = c^3 \\ * & (a+b)c + 3ab = c^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (a+b)c + 3ab &= a^2 - ab + b^2 \\ (a+b)c &= a^2 - 4ab + b^2 \end{aligned}$$

$$a^2 - 4ab + b^2 = c^2$$

$$y(*) : a = \frac{c^2 - bc}{c + 3b} \quad b = \frac{c^2 - ac}{c + 3a}$$

$$\text{Пусть } f(x) = \frac{c^2 - cx}{c + 3x}$$

Заметим, что

$$a = f(b)$$

$$b = f(a)$$

не решение
0. Ганнол

5

Задача 57

Пример: 4 числа $1, p, p^2, \dots, p^{10}$

p – простое число. Заметим, что среди чисел, выписанных на доску всевозможные степени p . Очевидно, что среди выписанных чисел присутствуют все степени p от 0 до 55 $\Rightarrow$ всего 56 чисел и никаких больше.

Оценка.

Пусть наши числа $a_1 > a_2 > a_3 > \dots > a_n$

Заметим, что изначальное количество чисел 10 (из них 9 чисел) никак не равно между собой. Если бы было равно, то $a_i = a_j$ $\neq$. Это из условия 10 чисел может быть равно произведению 11 чисел $\Rightarrow$ пока чисел 22 разное число. $\neq$ Произведение

будет $a_1 \cdot A$, где A – набор a_i от 1 числа до 8 чисел

Будем выписывать на доску все такие числа сначала где $A=1$ потом где $A=2$

a_1	$a_1 a_2$	$a_1 a_2 a_3$	$\dots$	$a_1 a_2 \dots a_8 a_9$
$a_1 a_2$	$a_1 a_2 a_3$	$a_1 a_2 a_3 a_4$	$\dots$	$a_1 a_2 \dots a_8 a_9 a_{10}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$a_1 a_8$	$a_1 a_8 a_9$	$a_1 a_8 a_9 a_{10}$	$\dots$	$a_1 a_8 \dots a_9 a_{10}$

+ число $a_1 a_2 \dots a_9 a_{10}$

$A=8$

Почему то из 10 чисел такого вида не равно группе чисел такого вида. ~~Всего~~ Всего будет выписано $10 + 9 + 8 + 7 + \dots + 2 + 1 = 55$ чисел

(+)

МЮ - 002

Код участника
(заполняется организатором)



**Олимпиадная работа
заключительного этапа
«Всероссийская олимпиада школьников "Миссия
выполнима. Твоё призвание - финансист!" 2023-2024
г.»
«(Математика 10 класс)»**

Вариант № 2 .

«27 января 2024 г.»

Никакие другие записи на титульном листе делать не разрешается

М 10-002

Код участника

Всероссийская олимпиада школьников «Миссия выполнима. Твое призвание – финансист!» 2023/2024 уч.г.

Бланк проверки работы

Математика 10 класс

№ задания	ФИО эксперта	Балл	ФИО эксперта	Балл	Итоговый балл
1	Геманян	10	Липанин	10	10
2	Григорьев	10	Исмет	10	10
3	Иванова	12	Исмет	12	12
4	Постолова	2	Шамин	2	2
5	Постолова	12	Олежко	12	12
6	Шарипов Р.В.	0	Манора	0	0
7	Постолова	0	Олежко	0	0
8	Шамин	0	Постолова	0	0
ИТОГО					46

Задача 5. ✓

$$f(x+y) = \sqrt{f^2(x) + f^2(y)}$$

$$f^2(x+y) = f^2(x) + f^2(y)$$

$$f^2(2^{2024}) = f^2(2^{2023}) + f^2(2^{2023}) = 2f^2(2^{2023}) =$$

$$= 2(f^2(2^{2022}) + f^2(2^{2022})) = 4f^2(2^{2022}) =$$

$$= 2^2 f^2(2^{2022}) = 2^3 f^2(2^{2021}) = \dots = 2^{2022} f^2(2^2) =$$

$$= 2^{2023} f^2(2) = 2^{2024} f^2(1)$$

$$2^{2022} f^2(4) = 2^{2024} f^2(1)$$

$$f^2(4) = 4 f^2(1)$$

$$f(4) = \begin{cases} 2f(1) \\ -2f(1) \end{cases} \text{ не уст. } \text{ так-то } f(t) \geq 0$$

$$f(1) + f(4) = 12$$

$$f(1) + 2f(1) = 12$$

$$f(1) = 4$$

$$f^2(2^{2024}) = 2^{2024} f^2(1) = 2^{2024} \cdot 4^2 = 2^{2028}$$

$$f(2^{2024}) = 2^{1014} \quad (f(2^{2024}) \geq 0)$$

$$\text{Ответ: } 2^{1014}$$

12

Задание 3.

Сумма всех чисел в таблице равна 2450 $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ в таблице 2450 единиц $\Rightarrow 70 \cdot 70 - 2450 = 2450$ - нулей в таблице.

Пусть выполняется усл-е*, что в любых двух строках / столбцах разное число единиц, т.е. разное кол-во единиц.

В столбце может быть от 0 до 70 единиц.

Чтобы во всех столбцах было разное кол-во единиц, нужно выбрать 70 чисел из набора $\{0, \dots, 70\}$, т.е. не выбрать 1 число. Т.к. сумма единиц равна 2450, то мы не выберем число

$$\frac{71 \cdot 70}{2} - \frac{70 \cdot 70}{2} = 35.$$

Значит, в столбцах будет от 0 до 34 и от 36 до 70 единиц.

Аналогично для строк. Но заметим, что при заполнении столбцов единицами, в одном столбце оказалось 70 единиц, а значит, у нас не будет строк в которых нет единиц, тогда чтобы усл-е* выполнялось в строках должно быть от 1 до 70 единиц, но тогда их сумма $\frac{71 \cdot 70}{2} > 2450$. $\Rightarrow$ противоречие $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ значит, в каких-то двух строках / столбцах одинаковое кол-во единиц, а следовательно, одинаковое число единиц.

Задача 2.

$$\text{НОК}(a, b) + 4 \text{НОД}(a, b) = (a+b)^2 + 1$$

1) если $\text{НОД}(a, b) = 1$:

$$ab + 4 = (a+b)^2 + 1$$

$$a^2 + b^2 + ab = 3$$

$$a, b \in \mathbb{N} \Rightarrow a^2 \geq 1, b^2 \geq 1, ab \geq 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + ab \geq 3, \text{ но } a^2 + b^2 + ab = 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a=1 \\ b=1 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $(1; 1)$.

2) если $\text{НОД}(a, b) = d$:

$$a = dm$$

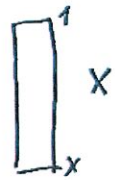
$$b = dn$$

$$dmn + 4d = d^2(m+n)^2 + 1$$

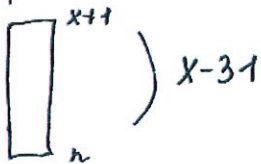
$$d^2(m+n)^2 - d(mn+4) + 1 = 0$$

$$D = (mn+4)^2 - 4(m+n)^2 = (mn+4-2m-2n) \cdot$$

$$\cdot \underbrace{(mn+4+2m+2n)}_{>0} \geq 0$$

Задание 1.

Принимая

Пусть x м. перед Тришей.
 $31 < x < 100$

$$n = 2x - 31$$

1-9 м. - 9 цифр

10- x м. - $2(x-9) = 2x-18$ цифр $(x+1)$ -99 м. - $2(99-x) = 198-2x$ цифр $100-n$ м. - $3(2x-31-99) = 6x-390$ цифр

Реш.

$$1,2(9 + 2x - 18) = 198 - 2x + 6x - 390$$

$$-10,8 + 2,4x = 4x - 192$$

$$1,6x = 181,2$$

$$x = \frac{1812}{16} = 113 \frac{1}{4} \text{ м. ур.}$$

Ø

Ответ: нет решений.

105.

Задание 7.

Ответ: 55. (-)

Пример.

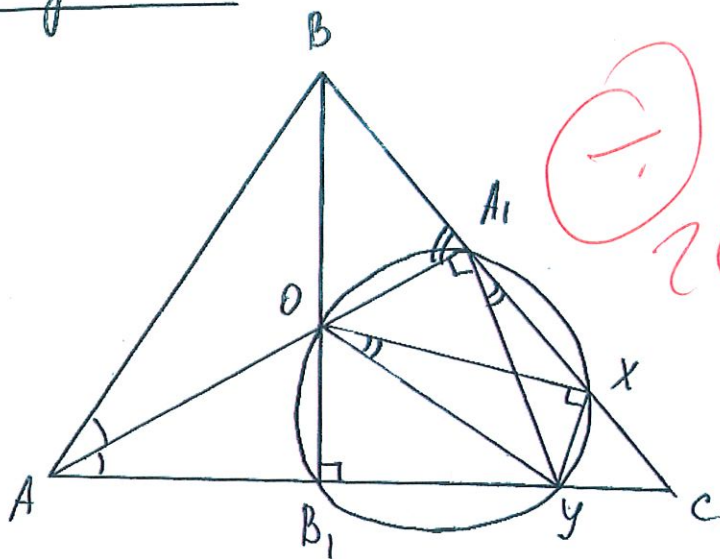
$$1, 2, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6, 2^7, 2^8, 2^9, 2^{10}$$

Возм. произв-е: $2, 2^2, 2^3, 2^4, \dots, 2^{55}$ - всего 55 шт.

(-)

05.

Задание 4.



- $$\begin{aligned} 1) \angle O B_1 Y &= 90^\circ \Rightarrow \\ &\Rightarrow OY - \text{перпендикуляр} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \angle O X Y = \angle O A_1 Y = 90^\circ. \\ 2) \angle X A Y &= 180^\circ - \angle B A_1 O - \\ &\quad - \angle O A_1 Y = 45^\circ \\ 3) \angle X A_1 Y &= \angle X O Y = 45^\circ. \end{aligned}$$

Задание 8.

Выиграет Волк рис того ему нужно подготовить
грешку в угол роски и после какого-то хода зайца,
~~то~~ вернуть грешку на край роски. Тогда,
когда "круг замкнется" (~~все готово~~, грешка обойдет
всю роску по кругу), Заяц не сможет съесть ход.
Ответ: Волк.

Решение не верное (Р5)

Ombens: Bonn.

Решение не верное (08)

№ 6 ОТГЗТКБ.

М10-130

Код участника
(заполняется организатором)



**Олимпиадная работа
заключительного этапа**
**«Всероссийская олимпиада школьников "Миссия
выполнима. Твоё призвание - финансист!" 2023-2024
г.»**

«(Математика 10 класс)»

Вариант № 1

«27 января 2024 г.»

Никакие другие записи на титульном листе делать не разрешается

Дополнительный бланк №

Всероссийская олимпиада школьников «Миссия выполнима. Твоё призвание – финансист!»

Код участника:
(заполняется организатором)1410-130
Код участника

М 10-130

Всероссийская олимпиада школьников «Миссия выполнима. Твое
призвание – финансист!» 2023/2024 уч.г.

Бланк проверки работы

Математика 10 класс

№ задания	ФИО эксперта	Балл	ФИО эксперта	Балл	Итоговый балл
1	Волосова	10	Зеленков	10	10
2	Велицкий	10	Богачев	10	10
3	Курсанова	12	Гурьянов И.А.	12	12
4	Арутинский	0	Борисова	0	0
5	Волосова	12	Зеленков	10	10
6	Берзин	4	Мокрух	4	4
7	Курсанова	0	Жид	0	0
8	Трунцев	0	Жид	0	0
ИТОГО					46

Код участника:
(заполняется организатором)

11 10-130

21

Пусть людей перед Гришей было $x+23$.
Тогда сразу Гриши было x человек.

Мы знаем, что человек с талоном 100 стоял сразу Гриши.

$\Rightarrow$ все, кто стоял перед ним имели талоны с однозначными или двузначными номерами.

У людей, стоявших за Гришей не могли быть четырехзначные номера, так как тогда у них должны были быть все трехзначные т.е. кол-во цифр было бы больше, чем $900 \cdot 3 = 2700$.

А кол-во цифр от 01 до 99 = $9 + 90 \cdot 2 = 189$.
(противоречие, т.к. по условию

у тех, кто стоял сразу, общее кол-во цифр было больше на 25%)

$\Rightarrow$ четырехзначных талонов не было.

~~сумма цифр~~ А

кол-во цифр у людей, стоявших перед Гришей:

$$9 + 2(x+23-9)$$

↑ ↑

(однозначные) (т.е. числа двузначные)

(все однозначные были сразу, т.к. людей сразу Гриши $x+23 > 9$)

кол-во цифр у людей за Гришей:

$$2 \cdot (90 - (x+23-9)) + 3 \cdot (x - 90 + (x+23-9)) = 2(90-x-14) + 3(x-90+x+14) = 2 \cdot 76 - 2x + 6x - 3 \cdot 76 = 4x - 76$$

кол-во те, которые всего двузначных
 двузначных стояли перед за Гришей за Гришей
 в двузначном талоном

Мы знаем, что людей за Гришей было на 25% меньше, чем перед, тогда:
 $1,25(4x-76) = 9 + 2(x+23-9)$
 $5x-95 = 2x+37 \quad 3x = 132 \quad x=44$ - людей, стоявших за Гришей, $\Rightarrow$ перед ним
 $\Rightarrow$ всего $67+44=111$ $44+23=67$

Ответ: 111 человек

Код участника:

(заполняется организатором)

11 10-130

12.

$$4 \text{НОК}(a; b) + \text{НОЗ}(a; b) = (a+b)^2 + 1$$

$$a, b \in \mathbb{N}$$

Рассмотрим несколько случаев:
1 случай: $a=b=1$.

$$4 \text{НОК}(1; 1) + \text{НОЗ}(1; 1) = (1+1)^2 + 1$$

$$4 + 1 = 4 + 1$$

$\Rightarrow$ этот случай нам подходит.

2 случай:

$$\begin{aligned} a &= kt \\ b &= kn \end{aligned} \quad ; \quad \begin{aligned} & k \text{ и } n - \text{взаимнопросты} \\ & (\text{НОЗ}(t; n) = 1) \\ & k > 1, \text{ тогда } k = \text{НОЗ}(a; b) \end{aligned}$$

$$4 \text{НОК}(kt; kn) + \text{НОЗ}(kt; kn) = (kt+kn)^2 + 1$$

$$\begin{aligned} 4ktn + k &= k^2t^2 + 2k^2tn + k^2n^2 + 1 \\ \vdots k \quad \quad \quad \vdots k \quad \quad \quad \vdots k \quad \quad \quad \vdots k \quad \quad \quad \vdots k \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 1 : k \Rightarrow k = 1$$

получаем противоречие с тем, что $k > 1$.

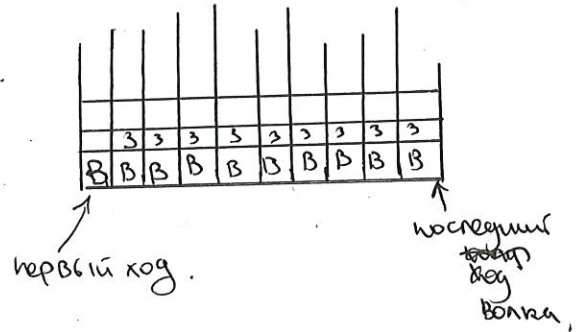
$\Rightarrow$ нам подходит только одна пара чисел
 $(a; b) = (1; 1)$

Ответ: $(1; 1)$

28.

Волк всегда побеждает. Ему достаточно поставить фишку в угол доски. Тогда у зайца будет ровно один ход. (поставить на главную диагональ).

Далее Волк будет возвращать запись на ту же горизонталь, тем самым забирая еще последний ход. и ограничивая ходы зайца (у зайца нет выбора хода)



24.

Дано:
 $\triangle ABC$
 AA_1 - бис-са
 BB_1 - высота
 $\angle A_1AB = 45^\circ$

Доказать:

AA_1 - кас
 $к \omega(AB_1C)$

Решение:

① Обозначим $\angle BAA_1 = \angle CA_1A = 2\alpha$
 и обозначим $\angle B_1AA_1 = 0$ (т.к. AA_1 - бис-са)

② $\angle ABB_1 = 180^\circ - 90^\circ - 2\alpha = 90 - 2\alpha$
 (из $\triangle ABB_1$)

③ $\triangle ABA_1$:

$$\angle OBA_1 = 180^\circ - \alpha - (90 - 2\alpha) - 45^\circ = 45 + \alpha$$

(180° - $\angle BAA_1$ - $\angle B_1AA_1$ - $\angle ABB_1$)

④ $\angle EBC = 180^\circ - \angle ABC = 180^\circ - \angle ABB_1 - \angle B_1BC = 180^\circ - 90 + 2\alpha - 45 - \alpha = 45 + \alpha$

⑤ $\angle B_1BC = \angle EBC \Rightarrow BC$ - бис-са внешнего угла $\triangle ABC$.

⑥ AA_1 - бис-са внутреннего угла $\triangle ABC$. $AA_1 \perp BC = A_1 \Rightarrow A_1$ - центр вневпис. окружности

а B_1, A_1 - бис-са внешнего угла $\triangle ABC$ ($\angle B_1BC$) $\Rightarrow$ т.к. BB_1 - высота, а $\angle BB_1C = 90^\circ$, то $\angle A_1B_1C = \frac{1}{2} \angle BB_1C = 45^\circ \Rightarrow \angle A_1B_1C = 45^\circ = \angle CA_1A$ (как верт), а $\angle A_1B_1C = 45^\circ$, то по признаку касательной т.к. $\angle A_1B_1C = \angle CA_1A$, то AA_1 - касательная к $\omega(AB_1C)$

0 баллов

26

$$\begin{cases} a^3 + b^3 + 3abc = c^3 \\ (3a + 3b)^2 = c^2 \\ a^2 - ab + b^2 = c^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^3 + b^3 + 3abc = c(a^2 - ab + b^2) \\ (3a + 3b)^2 = c^2 \\ a^2 - ab + b^2 = c^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^3 + b^3 = c(a^2 - ab + b^2) \\ (3a + 3b)^2 = c^2 \end{cases}$$

Замена:

$$\begin{cases} x+y=a \\ x-y=b \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+b=x \\ ab=y \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a+b)(a^2 + 2ab + b^2 - 3ab) + 3ab \cdot c = c^3 \\ 9(a+b)^2 = c^3 \\ (a+b)^2 - 3ab = c^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(x^2 - 3y) + 3yc = c^3 \\ 9x^2 = c^3 \\ x^2 - 3y = c^2 \end{cases}$$

подставим первое в третье

$$x^2 + 3yc = c^3$$

$$c(c^2 - xc - 3y) = 0$$

$$\begin{cases} c = 0 \\ c^2 = xc + 3y \end{cases}$$

① если $c=0$, то

$$\begin{cases} 9x^2 = c^3 = 0 \\ x(x^2 - 3y) + 3yc = c^3 \\ x^2 - 3y = c^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9x^2 = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

$$x^2 - 3y = c^2$$

$$0 - 3y = 0$$

$$y = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ ab=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 + b^2 + 2ab = 0 \\ ab = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=0 \\ b=0 \\ c=0 \end{cases}$$

② $c^2 = xc + 3y$; $c \neq 0$

$$\begin{cases} x(x^2 - 3y) + 3yc = c(xc + 3y) \\ 9x^2 = c^3 \\ x^2 - 3y = c^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(x^2 - 3y) - c^2x = 0 \\ 9x^2 = c^3 \\ x^2 - 3y = c^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(x^2 - 3y - c^2) = 0 \\ 9x^2 = c(xc + 3y) \\ x^2 - 3y = c^2 \end{cases} \quad (*)$$

$$(*) \begin{cases} x=0 \\ x^2 - 3y = c^2 \end{cases}$$

① $x=0$, тогда $c=0$, но $c \neq 0$

$\Rightarrow$ этот случай не подходит

② $x^2 - 3y = c^2$ - верно, т.к. оно у нас в системе.

+4

Ответ: $(a, b, c) = (0, 0, 0)$

Код участника:

(заполняется организатором)

М 10-130

УЗ

Таблица $50 \times 50 \Rightarrow$ всего 50 столбцов/строк. $\max$ сумма в столбце = 50
 $\min$ сумма в столбце = 0

сумма чисел в таблице равна 1250.

Пусть сумма чисел во всех столбцах разная.

Тогда нужно рассмотреть, какие значения может принимать

сумма в столбце. Так как всего столбцов 50, то рассмотрим

"наименьший" возможный вариант. Сумма чисел в столбце

будет принимать значения от 0 до 49. (50 быть не может, так как

в одном из столбцов сумма 0). Сумма чисел от 0 до 49 =

$$\begin{aligned} \text{сумма от 1 до 50} - 50 &= \frac{(1+50) \cdot 50}{2} - 50 = \frac{2500 + 50}{2} - 50 = \\ &= \frac{2500 - 50}{2} = \frac{2450}{2} = 1225 \end{aligned}$$

а у нас сумма должна быть 1250. $\Rightarrow$ этот вариант нам не подходит.

Еще один вариант, если сумма в одном из столбцов равна

$$50. \text{ тогда } \sum_{\text{в табл}} \text{чисел} : \frac{(1+50) \cdot 50}{2} = \frac{2500 + 50}{2} = 1250 + 25 = 1275, \text{ что больше,}$$

чем сумма чисел в таблице (по усл. она равна 1250)

$\Rightarrow$ найдутся два столбца/строки, в которых суммы чисел в ~~столбцах~~ совпадают.

+12

Код участника:

(заполняется организатором)

М 10-130

25

$$f(x+y) = \sqrt{f^2(x) + f^2(y)}$$

$$f(x+y) \geq 0$$

$$f(1+0) = \sqrt{f^2(1) + f^2(0)}$$

$$f(1) + f(0) = 9$$

$$f(1) = 9 - f(0)$$

$$f^2(1) = f^2(1) + f^2(0)$$

$$f^2(0) = 0$$

$$f(1) \geq 0$$

$$f(1) \geq 0$$

$$f^2(4) = \sqrt{f^2(1) + f^2(3)}$$

$$\Rightarrow f^2(4) = f^2(1) + f^2(3) = f^2(1) + 3f^2(1) = 4f^2(1)$$

$$f(3) = \sqrt{f^2(1) + f^2(2)}$$

$$\Rightarrow f^2(3) = f^2(1) + f^2(2) = f^2(1) + 2f^2(1) = 3f^2(1)$$

$$f(2) = \sqrt{f^2(1) + f^2(1)}$$

$$\Rightarrow f^2(2) = 2f^2(1)$$

$$\Rightarrow f(5) = f(4+1) = \sqrt{f^2(4) + f^2(1)}$$

$$f^2(5) = f^2(4) + f^2(1) = 5f^2(1) \quad \text{и т.д.}$$

$$\Rightarrow \textcircled{1} \quad f^2(4) = 4f^2(1)$$

$$f(4) = 2f(1) \quad (\text{т.к. функция неотриц.})$$

$$\Rightarrow f(1) + f(4) = f(1) + 2f(1) = 3f(1) = 9$$

$$\underline{f(1) = 3}$$

$$\textcircled{2} \quad f^2(n) = n f^2(1) \Rightarrow f^2(2^{2023}) = 2^{2023} f^2(1)$$

$$f^2(2^{2023}) = 2^{2023} \cdot 9$$

$$f(2^{2023}) = \sqrt{9 \cdot 2^{2023}}$$

$$f(2^{2023}) = 3 \cdot 2^{1011} \sqrt{2}$$

$$\text{Ответ: } 3 \cdot 2^{1011} \sqrt{2} = f(2^{2023})$$

М10-015

Код участника
(заполняется организатором)



**Олимпиадная работа
заключительного этапа
«Всероссийская олимпиада школьников "Миссия
выполнима. Твоё призвание - финансист!" 2023-2024
г.»
«(Математика 10 класс)»**

Вариант № 2

«27 января 2024 г.»

Никакие другие записи на титульном листе делать не разрешается

Код участника:
(заполняется организатором)

Код участника

Всероссийская олимпиада школьников «Миссия выполнима. Твое призвание – финансист!» 2023/2024 уч.г.

Бланк проверки работы

Математика 10 класс

№ задания	ФИО эксперта	Балл	ФИО эксперта	Балл	Итоговый балл
1	Генерален	10	Митанин	10	10
2	Сундур	10	Разумов	10	10
3	Васильев	5	Гурьянова	5	5
4	Уризов	0	ИД	0	0
5	Постованова	12	Олехова	12	12
6	Борисова	7	Дубинский	7	7
7	Постованова	0	Олехова	0	0
8	Шашкин	0	Темешев	0	0
ИТОГО					44

N2

$$\text{Пусть } \text{НОД}(a; b) = p \Rightarrow a; p; b; p; \\ \text{НОК}(a; b) : p \mid (a+b) : p \\ :p :p :p$$

$$\text{НОК}(a; b) + 4 (\text{НОД}(a; b)) = (a+b)^2 + 1$$

$$1 = \text{НОК}(a; b) + 4 (\text{НОД}(a; b)) - (a+b)^2 \equiv 0 \pmod{p}$$

$$1 : p \Rightarrow p=1 \Rightarrow \text{НОД}(a; b)=1 \Rightarrow$$

$$\text{НОК}(a; b) = ab$$

$$ab + 4 = (a+b)^2 + 1$$

$$a^2 + ab + b^2 - 3 = 0$$

$$D = b^2 - 4(b^2 - 3) \geq 0$$

$$-3b^2 + 12 \geq 0$$

$$b^2 \leq 4 \Rightarrow b \in [-2; 2] \Rightarrow b \in \mathbb{N} \Rightarrow$$

$$b \in \{1; 2\}$$

$$b=1$$

$$a^2 + a + 0 - 3 = 0$$

$$a^2 + a - 2 = 0$$

$$a=1 - \text{не год} \quad a=-2 \in \mathbb{N} - \text{не год.}$$

Проверим:

$$1+4 = (1+1)^2 + 1 \quad (\text{верно})$$

$$b=2.$$

$$a^2 + 2b + 4 - 3 = 0 \Rightarrow (a+1)^2 = 0 \Rightarrow a = -1 \in \mathbb{N} - \text{не год.}$$

Ответ: 1, -1

+

N5

$$f(x+y) = \sqrt{f^2(x) + f^2(y)}$$

Всегда верно при всех x и $y \Rightarrow$

$$y = x \Rightarrow$$

$$f(2x) = f(x) \sqrt{2} \Rightarrow$$

$$f(4t) = f(2t) \sqrt{2} = f(t) \cdot 2$$

При $t=1$

$$f(4) = 2f(1) \Rightarrow$$

$$f(1) = 4 \quad \times$$

$$f(2 \cdot 2^{2023}) = f(2^{2023}) \cdot \sqrt{2} =$$

$$= f(2^{2022}) \cdot 2 = f(2^{2020}) \cdot 4 = f(2^{2008}) \cdot 8 =$$

$$= \dots = f(2^0) \cdot 2^{\frac{2024}{2}} = f(1) \cdot 2^{1012} = 4 \cdot 2^{1012} = 2^{1014}$$

(H)

1025

Ответ: 2^{1014}

№3

Если нет 0 в столбиках.

То предположим, что не найдется.

Если нет 0 в столбиках.

То мин. сумма будет

1 + ... + 70 = 71 · 70 / 2

71 · 35 = 2485 > 2450 не может быть.

Значит есть 0.

Если есть 0.

То макс. сумма в одном столбце.

69. А их не считая 0 в столбцах.

1 + ... + 69 + 1 + ... + 69 =

Предположим. Максимальное количество

Всего 69 столбцов и максимальное число

69. В столбцах будут числа от

1 до 69 (Если нет, то какое то число от 1 до 69 не возьмем ⇒ чисел будет 68 - этого не хватит).

Σ столбцов = 1 + ... + 69 = 70 · 69 / 2 < 2450.

Этот вариант тоже не год. Изначальное предполож. было не верно. И.т.д.

± 5 баллов

Код участника: **М10-015**

(заполняется организатором)

№ 6

$$\begin{cases} 4(a+b)^2 = c^3 \\ (a+b)^2 - 3ab = c^2 \\ (a+b)((a+b)^2 - 3ab) + 3abc = c^3 \end{cases}$$

$$\frac{4(a+b)^2}{(a+b)^2 - 3ab} = c$$

$$(a+b)^2 - 3ab$$

$$a+b=x; 3ab=y \Rightarrow x^2 - 3y = c^2$$

$$\frac{4x^2}{x^2 - 3y} = c = \sqrt{x^2 - 3y} \Rightarrow \frac{x^2 - 6y}{x}$$

$$(4x^2)^2 = (x^2 - 3y)^3$$

$$xc^2 + 3abc = c^3$$

$$xc + 3y = c^2.$$

$$xc + 3y = x^2 - 3y.$$

$$xc = x^2 - 6y \Rightarrow c = \frac{x^2 - 6y}{x}.$$

Код участника: **Н10-015**
(заполняется организатором)

$$x(\sqrt{x^2 - 3y}) = x^2 - 6y$$

$$x^2(x^2 - 3y) = (x^2 - 6y)^2$$

$$x^2 = t$$

$$t(t - 3y) = (t - 6y)^2$$

$$t^2 - 3yt = t^2 - 12yt + 36y^2$$

$$36y^2 - 9yt = 0$$

$$9y(4y - t) = 0$$

$$y = 0 \Rightarrow a = 0 = b = c \text{ — не подходит. } y \neq 0$$

$$t = 4y = x^2, y > 0$$

$$(4 \cdot 4y)^2 = (4y - 3y)^3$$

$$(16y)^2 = y^3 \Rightarrow$$

$$y(y^2 - 16) = 0$$

$$y^2(y - 16) = 0$$

$$y = 16 \Rightarrow$$

$$y(y - 4)(y + 4) = 0$$

$$x = \pm 16 \cdot 4.$$

$$y = 4$$

$$y = -4 - \text{не подходит}$$

$$x^2 = 16 \Rightarrow x = \pm 4.$$

$$\begin{cases} ab = 16 \\ a + b = 16 \\ a + b = -16 \end{cases}$$

Код участника: **Н10-015**

(заполняется организатором)

$$\begin{cases} ab=4 \\ \begin{cases} a+b=-4 \\ a+b=4 \end{cases} \end{cases} \quad \begin{aligned} z^2 - 16 - 4z + 16^2 &= 0 \quad D < 0 \text{ не имеет} \\ z^2 + 16 - 4z + 16^2 &= 0. \quad D < 0 \text{ решений.} \end{aligned}$$

$$z^2 + 4z + 4 = 0 \quad \text{где } a, b \text{ это корни этого уравнения}$$

$$z^2 - 4z + 4 = 0$$

$$(z+2)^2 = 0 \quad a=-2=b \Rightarrow c = \sqrt[3]{16} - \text{не целое}$$

$$(z-2)^2 = 0 \quad a=2=b \quad c = \sqrt[3]{16} - \text{не целое.}$$

$$\text{II случай } y=0 \Rightarrow$$

$$a=0 \text{ (Упр. сим)} \quad \text{берем какую-нибудь}$$

$$x=b.$$

$$c = \frac{4x^2}{x} = 4. \quad x^2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 0.$$

$$4b^2 = c^3 = 4^3$$

$$b^2 = \frac{4^3}{4} = 4^2.$$

$$b = \pm 4. \quad \text{Упр. сим поэтому}$$

$$a = \pm 4; b = 0; c = 4$$

Ответ: {

$$x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 = b = a = c.$$

$$\text{Ответ: } (0; 0; 0), (\pm 4; 0; 4), (0; \pm 4; 4)$$

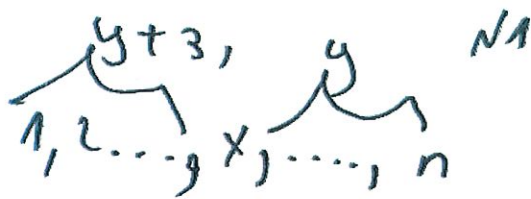
получено верно

только половине
решений

7 баллов

Код участника: **М10-015**

(заполняется организатором)



$$n = 2y + 31$$

$$y + 31 < 100 \Rightarrow$$

$$y < 100$$

$$\sum g_0 = g + 2(y + 31 - g)$$

$$\sum_{\text{nos}} \sum_{\text{nos}} = g + 2 \cdot 2(g_0 - (y + 31 - g))$$

$$2 \cdot \frac{1}{2}(gg - y \cdot 31) + 3(y - (gg - y \cdot 31))$$

$$1, 2 \sum g_0 = \sum_{\text{nos}}$$

$$1, 2(g + 2y + 22) = 2 \cdot 68 - 2y + 6y - 68 \cdot 3.$$

$$6(g + 2y + 22) = 5 \cdot 2 \cdot 68 - 10y + 30y - 68 \cdot 15.$$

$$54 + 12y + 6 \cdot 22 = 20y - 68 \cdot 5$$

$$8y = 54 + 6 \cdot 22 + 68 \cdot 5$$

$\underbrace{\quad}_{:4} \quad \underbrace{\quad}_{:4}$

y — не может быть натуральным.

Но если примерно считать $y = 65$ и $n \approx 120$

$$4y = 27 + 66 + 34 \cdot 5 \Rightarrow y = 65 \frac{3}{4} \Rightarrow n = 120$$

10

Код участника: **М10-015**

(заполняется организатором)

№7

Пример: $1, 2, 4, \dots, 2^{10}$

Да чтобы было нам удобнее всего, когда
будет меньше проставлять множит. лучше
когда 1.

№8

Введем систему координат
Тогда заметим, что Заяц своим ходом
сменяет координату. И по Ох и по
Оу. И А бок по оси Ох или Оу на 1.
Поэтому Заяц меняет координату
каждый раз на 1 по Ох или Оу.
~~И он может научиться. мы не возвращаемся~~
Заяц может координату по Ох или Оу
уменьшать или увеличивать $\Rightarrow$
будет где может. предт где координаты
наим и наибольшее

Ответ:

(05) Нет решения

М10-149

Код участника
(заполняется организатором)



**Олимпиадная работа
заключительного этапа
«Всероссийская олимпиада школьников "Миссия
выполнима. Твоё призвание - финансист!" 2023-2024
г.»
«(Математика 10 класс)»**

Вариант № 2

«27 января 2024 г.»

Никакие другие записи на титульном листе делать не разрешается

М/О -149

Код участника

Всероссийская олимпиада школьников «Миссия выполнима. Твое призвание – финансист!» 2023/2024 уч.г.

Бланк проверки работы

Математика 10 класс

№ задания	ФИО эксперта	Балл	ФИО эксперта	Балл	Итоговый балл
1	Степанян	10	Липашина	10	10
2	Балашов	10	Овчинников	10	10
3	Иванов	12	Берзин	12	12
4	Григорьев	0	Угроз	0	0
5	Иванова	12	Трифонов	12	12
6	Морозов Д.И.	0	Иванова	0	0
7	Григорьев	0	Зинь	0	0
8	Григорьев	0	Зинь	0	0
ИТОГО					44

Задание 2.

Известно, что $\text{НОД}(a, b) \cdot \text{НОК}(a, b) = ab$, тогда
 $5ab \geq \text{НОК}(a, b) + 4 \text{НОД}(a, b) = (a+b)^2 + 1$

$$a^2 - 3ab + b^2 + 1 \leq 0$$

$$(a-b)^2 - ab + 1 \leq 0$$

Поскольку $(a-b)^2 \geq 0$ по определению, то из
 полученного неравенства имеет $-ab + 1 \leq 0$
 $ab \leq 1$

Натуральные числа a, b для которых $ab \leq 1$,
 это $a=1$ и $b=1$

Ответ: $a=1$ и $b=1$ P.

Задание 5.

Подставим $x=y=2^{n-1}$, тогда

$$f(2^n) = \sqrt{f^2(2^{n-1}) + f^2(2^{n-1})} = \sqrt{2} \cdot f(2^{n-1}) \quad (1)$$

Применяя (1), получим

$$f(4) = 2f(2) \cdot f(2^n) = (\sqrt{2})^n \cdot f(2^0) = (\sqrt{2})^n \cdot f(1) \quad (2)$$

Из условия $f(1) + f(4) = 12$ Применяя (2), получим

$$f(2^{2024}) = 2^{1012} = 2^{1012} \cdot f(1), \quad f(4) = 2f(1).$$

Из условия $f(1) + f(4) = 12$, тогда $f(1) = 4$, $f(2^{2024}) = 2^{1012} \cdot 4 =$
 $= 2^{1014}$

Ответ: 2^{1014}

Задача 3.

Пусть во всех строках и столбцах разное количество единиц. Пусть также нет ни одной строки, заполненной единицами. Тогда единиц в квадрате не больше, чем $69+68+\dots+2+1+0=2415$ - не подходит.

Значит, есть хотя бы одна строка с 70 единицами, тогда нет ни одного столбца с 70 единицами. Тогда суммарно в столбцах как минимум $1+2+\dots+69+70=2485$ единиц. +

Снова противоречие, так как единиц 2450. Значит, исходное предположение неверно, и в каких-то строках или столбцах есть одинаковое количество единиц, то есть сумма чисел.

Ответ: Ч.т.д.

Задача 1.

Если человек с номером 100 стоит сразу за Гришей, то перед Гришей стоит 99 человек, а за 99-31=68 человек с номерами 100, 101, ..., 15

Количество цифр на табличке спереди $9+90=99$, за 3.68=204, но $99 \cdot 1,2 \neq 204$

Пусть человек с номером 100 стоит где-то за Гришей. Тогда перед ним $98 < 100$, за ним $x-31$.

Всего человек $n \geq 100$, $n = 2x - 31$,
 1) Всего цифр в колонках в очереди: 9-однозначных
 90-двузначных, $n-99$ -трёхзначных (так как $2x - 31 < 169$,
 Тогда $9 + 2 \cdot 90 + 3 \cdot (2x - 130) = 6x - 201$
 2) Цифр в колонке перед Гришей: 9-однознач-
 ных, $x-9$ -двузначных. Тогда $9 + 2 \cdot (x-9) = 2x-9$
 3) За ним на 20% больше, то есть $1,2 \cdot (2x-9)$,
 или разность всех цифр минус перед ним
 $(6x - 201) - (2x - 9) = 4x - 192$, $4x - 192 = 1,2 \cdot (2x - 9)$,
 $x = \frac{453}{4}$

Получили нецелое значение, значит, задача
 не имеет решения или в условии ошибка.
 Ответ: Задача не имеет решения или в усло-
 вии ошибка.

12

156 107

МПГ 10-8

Код участника
(заполняется организатором)



Олимпиадная работа

заключительного этапа

**«РЕГИСТРАЦИЯ ТОЛЬКО для победителей и
призеров ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНОГО ЭТАПА 2022-2023
учебного года "Миссия выполнима. Твоё призвание -
финансист!"»**

«(Математика 10 класс)»

Вариант № 2

«27 января 2024 г.»

Никакие другие записи на титульном листе делать не разрешается

МЛГ 10-8.

Код участника

Всероссийская олимпиада школьников «Миссия выполнима. Твое призвание – финансист!» 2023/2024 уч.г.

Бланк проверки работы

10
Математика 8-9 класс

№ задания	ФИО эксперта	Балл	ФИО эксперта	Балл	Итоговый балл
1	Копнов	10	Степанян	10	10
2	Васильев	10	Басов	10	10
3	Васильев	12	Гурьева И.Э	12	12
4	Борисов	0	Аруинский	0	0
5	Завякина	4	Орлов	4	4
6	Шорин В.Ф.	8	Аруинский	8	8
7	Зинин	0	Грузин	0	0
8	Зинин	0	Грузин	0	0
ИТОГО					44

Код участника:

(заполняется организатором)

МПГ 10-1

$$(a, b) = \text{НОД}(a, b)$$

$$[N, 2]$$

$$[a, b] = \text{НОК}(a, b) - \text{одозначение в решете}$$

$$[a, b] + 4(a, b) = (a+b)^2 + 1$$

$$(a, b) = d ; (a, b) \cdot [a, b] = ab \Rightarrow [a, b] = \frac{ab}{(a, b)}$$

$$a = a, d$$

$$b = b, d$$

$$(a, b) = 1$$

$$\frac{ab}{(a, b)} + 4(a, b) = (a+b)^2 + 1$$

$$\frac{a, b, d^2}{d} + 4d = a_1^2 d^2 + b_1^2 d^2 + 2a, b, d^2 + 1 \quad | \quad (d > 0)$$

$$a, b, d + 4d - a_1^2 d^2 - b_1^2 d^2 - 2a, b, d^2 = 1$$

$$d(a, b, + 4 - a_1^2 d - b_1^2 d - 2a, b, d) = 1$$

$$\text{Т.к. } d > 0 \text{ и } d \in \mathbb{N}, \text{ то } d = 1.$$

$$(a, b) = 1, [a, b] = ab$$

$$ab + 4 = a^2 + b^2 + 2ab + 1$$

$$a^2 + b^2 + ab - 3 = 0$$

$$a^2 + b^2 + ab = 3$$

$$\text{Т.к. } a, b \in \mathbb{N}, \text{ то } a, b \leq 1, \text{ иначе } a^2 \geq 4 > 3.$$

$$\text{Значит } a = b = 1$$

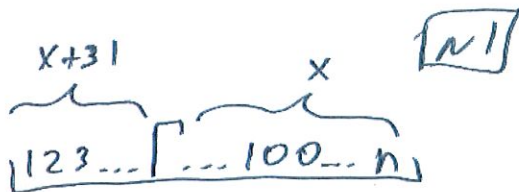
$$1^2 + 1^2 + 1 \cdot 1 = 3$$

$$\boxed{\text{Ответ: } (a, b) = (1, 1)}$$

Код участника:

(заполняется организатором)

МПГ 10-8



Пусть кол-во цифр переди Гринивы = S , тогда

сзади $1,2S = S \cdot \frac{6}{5}$, $(6,5)=1 \Rightarrow S:5$.

Т.к. переди хотя бы 32 человека, то $S \geq 9 + (32-9) \cdot 2 = 55$; $S \geq 55$.

$x+31 < 100 \Rightarrow x < 69 \Rightarrow x \leq 68 \Rightarrow$ всего
модей в 0 переди ~~2~~ $2x+31 \leq 2 \cdot 68+31=136+31=167$.
Значит $S \leq 9+90+68 \cdot 3=303$

При $S=135$ тогда $90:72 \Rightarrow$ после $72-31=41$.
Сумма цифр после с одной стороны $1,2S$; с другой
 $27 \cdot 2 + (41-27) \cdot 3 = 54 + 39 = 93 \neq 1,2S$. Значит $S \neq 135$

При $S=185$ тогда $90:182-90 \Rightarrow 9+(185-9):2 = 9+88=97$.
тогда после $97-31=66$ и сумма $2 \cdot 2 + 64 \cdot 3 = 4+192=196$
 $185 \cdot 1,2 = 222$ $222 > 196$ ~~тогда~~

При $S=175$ тогда $90:172-90 \Rightarrow 9+(175-9):2 = 9+83=92$.
тогда после $92-31=61$ и сумма $6 \cdot 2 + (61-6) \cdot 3 = 12+55 \cdot 3 = 177$.
 $177 < 1,2 \cdot 175$ ~~тогда~~

При $S=180$ тогда $90:180-90 \Rightarrow 9+(180-9):2 = 9+85=97$
Т.к. $x+31 < 100$, то $x+31 \leq 99 \Rightarrow S \leq 9+90 \cdot 2=189$

При $S=185$ тогда $90:185-90 \Rightarrow 9+\frac{185-9}{2} = 9+\frac{176}{2} = 9+88=97$,
тогда $97-31=66$ и сумма цифр $2 \cdot 2 + 3 \cdot 64 = 4+192=196$
 $1,2 \cdot 185 > 196 \Rightarrow S$ должно быть меньше.

Проверив все значения S убеждаемся, что такого не бывает.

Код участника:

(заполняется организатором)

МПГ 10-1

13

Давайте смотреть на выборы. Если в выборах участвуют

Померно, то в каждом из выборов у нас вернее

от 0 до 70. ~~Каждый~~ у нас от 1 до 70 $\frac{1+70}{2} \cdot 70 =$

$= 35 \cdot 71 = 2485$. Поскольку ~~с~~ выборов 70, а вернее

ных у нас в каждом из выборов 71, то чтобы во всех выбо-
рах было разн. у нас должны использоваться все у нас

кроме одной. Т.к. $2485 > 2450$, то одна из у нас от
1 до 70 заменяется на „0“. $2485 - x + 0 = 2450$

$$x = 35.$$

Тогда по аналогичным рассуждениям получаем, что
существует ситуация, в которой все „0“. Но тогда не существует
выбора с у нас 70, а он есть $\Rightarrow$ противоречие $\Rightarrow$
 $\Rightarrow$ наше-то 2 у нас повторяются в выборах.

+12

NS

$$f(x) \geq 0, \quad f(x+y) = \sqrt{f^2(x) + f^2(y)}$$

Подставим $x=x, y=x$ в f -функцию:

$$f(x+x) = f(2x) = \sqrt{f^2(x) + f^2(x)} = f(x)\sqrt{2}$$

($f(x)$ можно не брать в модуль так как $f(x) \geq 0$)

$$f(2) = f(1+1) = f(1)\sqrt{2}$$

$$f(4) = f(2+2) = f(2)\sqrt{2}$$

$$f(4) = f(2)\sqrt{2} = f(1)\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2f(1)$$

$$f(1) + f(4) = f(1) + 2f(1) = 3f(1) = 12 \Rightarrow f(1) = 4$$

$$\cancel{f(2^{2024})} \quad f(2^{2024}) = f(2 \cdot 2^{2023}) = f(2^{2023}) \cdot \sqrt{2}$$

$$f(2^{2023}) = f(2 \cdot 2^{2022}) = f(2^{2022}) \cdot \sqrt{2}$$

$$f(2^{2024}) = 2 f(2^{2023}), \text{ тогда}$$

$$+ \begin{cases} f(2^{2024}) = 2^{1012} \cdot f(1) \\ f(2^{2024}) = 2^{1010} \cdot f(4) \end{cases}$$

$$2 f(2^{2024}) = 2^{1010} (4f(1) + f(4)) = 2^{1010} (4f(1) + 2f(1)) =$$

$$= 2^{1010} \cdot 6f(1) = 2^{1010} \cdot 6 \cdot 4 = 2^{1012} \cdot 6 \Rightarrow f(2^{2024}) = 2^{1012} \cdot 3$$

Ответ: $f(2^{2024}) = 2^{1012} \cdot 3$

Код участника:

(заполняется организатором)

МПГ10-8

16

$$\begin{cases} a^3 + b^3 + 3abc = c^3 \\ (2a+2b)^2 = c^3 \\ a^2 - ab + b^2 = c^2 \end{cases}$$

1 случай: $c=0$:

$$4(a+b)^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a=0, b=0 \text{ или } a=-b$$

При $a=0, b=0$ подходит.

$$\text{При } a=-b \quad a^2 - ab + b^2 = b^2 + b^2 + b^2 = 3b^2 = 0 \Rightarrow b=0=a.$$

2 случай $c \neq 0$:

$$\text{Замена: } a+b=t, \quad ab=s.$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 + b^2 - ab) = (a+b)((a+b)^2 - 3ab) = t \cdot (t^2 - 3s)$$

$$\begin{cases} t \cdot (t^2 - 3s) + 3sc = c^3 \\ 4t^2 = c^3 \\ (a+b)^2 - 3ab = a^2 - ab + b^2 = c^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t(t^2 - 3s) + 3sc = c^3 \quad (1) \\ 4t^2 = c^3 \quad (2) \\ t^2 - 3s = c^2 \quad (3) \end{cases}$$

$$(3) \text{ в } (1): t c^2 + 3sc = c^3$$

$$tc + 3s = c^2$$

$$tc + 3s = t^2 - 3s$$

$$s = \frac{t^2 - tc}{6} \quad (4)$$

Подставим (4) в (1):

$$tc^2 + 3c \cdot \frac{t^2 - tc}{6} = c^3$$

$$tc^2 + c \cdot \frac{t^2 - tc}{2} = 4t^2$$

$$2tc^2 + ct^2 - tc^2 = 8t^2 \quad | : t \quad (t \neq 0, \text{ так как } a=b=0 \text{ - случай, когда } a=-b \text{ рассматривали потом})$$

$$2c^2 + ct - c^2 = 8t^2$$

$$c^2 = 8t^2 - ct$$

$$t = \frac{8c^2}{8-c} \quad (5) \quad c \neq 8$$

Код участника:

МТГ 10-8

(заполняется организатором)

№6 (продолжение)

$$\begin{cases} S = \frac{t^2 - tc}{6} \\ t = \frac{c^2}{8-c} \end{cases} \quad S = \frac{\frac{c^4}{(8-c)^2} - \frac{c^3}{8-c}}{6} = \frac{c^4 - 8c^3 + c^4}{(8-c)^2 \cdot 6} =$$

$$= \frac{c^4 - 4c^3}{(8-c)^2 \cdot 3}$$

$$\begin{cases} \frac{c^4 - 4c^3}{(8-c)^2 \cdot 3} = ab \\ \frac{c^2}{8-c} = a+b \end{cases} \rightarrow b = \frac{c^2}{8-c} - a = \frac{c^2 - 8a + ac}{8-c}$$

$$\frac{c^4 - 4c^3}{(8-c)^2 \cdot 3} = a \cdot \left(\frac{c^2 - 8a + ac}{8-c} \right)$$

(5) бо (2):

$$4t^2 = c^3$$

$$4 \left(\frac{c^2}{8-c} \right)^2 = c^3$$

$$4 \frac{c^4}{(8-c)^2} = c^3 \quad | : c^3$$

$$4c = (8-c)^2$$

$$c^2 - 20c + 64 = 0$$

Попробуем: $\begin{cases} c_1 + c_2 = 20 \\ c_1 c_2 = 64 \end{cases}$

$$\begin{matrix} c_1 = 16 \\ c_2 = 4 \end{matrix}$$

1 решение: $c=4$

$$b(5) \quad t = \frac{16}{8-4} = \frac{16}{4} = 4$$

$$b(4) \quad S = \frac{16 - 4 \cdot 4}{6} = 0$$

$$\begin{cases} a+b=4 \\ ab=0 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} a=0 & b=4 & c=4 \\ b=0 & a=4 & c=4 \end{matrix}$$

2 решения

2 решения: $c=16$

$$b(5) \quad t = \frac{256}{8-16} = \frac{256}{-8} = -32$$

$$b(4) \quad S = \frac{1024 + 32 \cdot 16}{6} = \frac{1024 + 512}{6} = \frac{1536}{6} = 256$$

$$\begin{cases} a+b=-32 \rightarrow a=-32-b \\ ab=256 \end{cases}$$

$$(-32-b)b = 256$$

$$b^2 + 32b + 256 = 0$$

$$(b+16)^2 = 0$$

$$\begin{matrix} b=-16 \\ a=-48 \\ c=16 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1-0 \\ \text{решение} \end{matrix}$$

25.

Код участника:

(заполняется организатором)

МПГ 10-8

3 шаг: $a = -b$; ~~свойство~~

$$(2a+2b)^2 = (2a-2b)^2 = c^2$$

$$0 = c^2 \quad c = 0 \text{ случай не рассматриваем в 1-м.}$$

Ответ: $(a, b, c) = (0, 4, 4)$

$(a, b, c) = (4, 0, 4)$

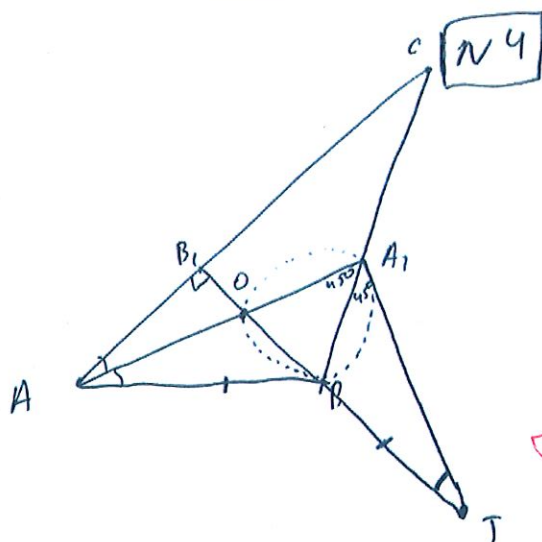
$(a, b, c) = (-48, -16, 16)$

Неверные обозначения

Будем г-р, что (A_1DB_1) касается AB .

Отметим такую точку T на плоскости, что $T \in BB_1$ и A_1B - выпукл. дуга окружности $\angle AA_1T$. Тогда $\angle AA_1T = 90^\circ = \angle A_1BT$. Тогда AB, A_1T - касательные. Тогда

Тогда неверный



$\angle B, AA_1 = \angle A_1TB$. Тогда $\triangle AA_1B = \triangle TA_1B$, т.к. $\angle A_1BT = \angle A_1BA$, $\angle AA_1B = \angle TA_1B$ и $AB = A_1B \Rightarrow AA_1 = A_1T$ и $AB = BT$. Если $AO \cdot AA_1 = AB^2$, то мы докажем, т.к. произведение отрезков секущей равно квадрату касательной из той же точки. ~~но не так~~

О Ганков

МЮ-079

Код участника
(заполняется организатором)



**Олимпиадная работа
заключительного этапа
«Всероссийская олимпиада школьников "Миссия
выполнима. Твоё призвание - финансист!" 2023-2024
г.»
«(Математика 10 класс)»**

Вариант № II

«27 января 2024 г.»

Никакие другие записи на титульном листе делать не разрешается

М10-079

Код участника

Всероссийская олимпиада школьников «Миссия выполнима. Твое призвание – финансист!» 2023/2024 уч.г.

Бланк проверки работы

Математика 10 класс

№ задания	ФИО эксперта	Балл	ФИО эксперта	Балл	Итоговый балл
1					
2					
3	Васильев	12	Гурьев	12	12
4	Желенков	12	Угрюмов	12	12
5					
6					
7	Алиханов		Степанов		
8	Желенков	0	Цыганов	0	0
ИТОГО					



ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМА.
ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ – ФИНАНСИСТ!»
ПО ПРЕДМЕТУ МАТЕМАТИКА 2023-2024 уч. года

ОЧНЫЙ ЭТАП

10 класс

Вариант 2

Задание 1 (10 баллов)

В очереди стояло n людей, каждый из них получил талон со своим номером в очереди (от 1 до n). Гриша влез внутрь очереди без талона. Он сразу заметил несколько фактов:

1. Человек с талоном номер 100 стоял сзади.
2. Спереди от Гриши количество людей на 31 больше, чем сзади.
3. Общее количество цифр на талонах у людей сзади на 20% больше, чем общее количество цифр на талонах у людей спереди Гриши.

После этого Гришу заметили и отправили в самый конец очереди. За это время кроме Гриши в очереди люди не уходили и никак не менялись. Сколько людей было в очереди перед приходом Гриши?

Задание 2 (10 баллов)

Найдите все такие пары натуральных чисел $(a; b)$, для которых

$$\text{НОК}(a, b) + 4 \text{НОД}(a, b) = (a + b)^2 + 1.$$

Задание 3 (12 баллов)

Дана квадратная таблица 70×70 . В каждой её клетке стоит либо единица, либо ноль, причём сумма всех чисел в таблице равна 2450. Докажите, что или в каких-то двух строках, или в каких-то двух столбцах одинаковая сумма чисел.

Задание 4 (12 баллов)

В треугольнике ABC биссектриса AA_1 и высота BB_1 пересекаются в точке O . Оказалось, что $\angle AA_1B = 45^\circ$. Докажите, что окружность, описанная около треугольника A_1OB_1 , касается одной из сторон $\triangle ABC$.

Задание 5 (12 баллов)

Функция, принимающая только неотрицательные значения, удовлетворяет равенству: $f(x + y) = \sqrt{f^2(x) + f^2(y)}$, при этом $f(1) + f(4) = 12$. Найдите $f(2^{2024})$.

Задание 6 (14 баллов)

Найдите a, b, c , удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} a^3 + b^3 + 3abc = c^3, \\ (2a + 2b)^2 = c^3, \\ a^2 - ab + b^2 = c^2. \end{cases}$$

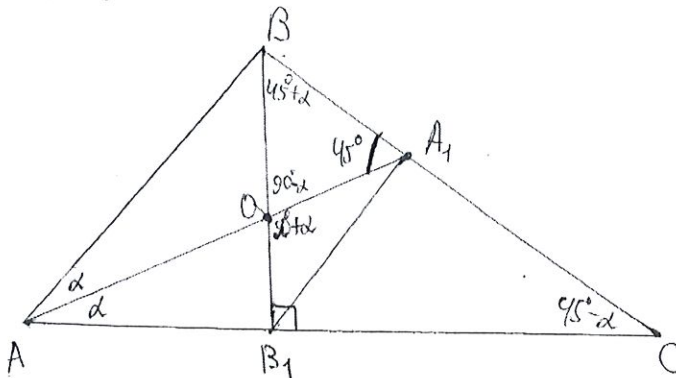
Задание 7 (14 баллов)

Дано 11 различных натуральных чисел. На доску выписали все эти числа и все возможные произведения, составленные из этих чисел (все произведения 2 чисел, все произведения 3 чисел, ..., произведение 11 чисел). Какое наименьшее количество различных значений могло оказаться на доске?

Задача 8 (16 баллов)

Заяц и Волк играют в игру на клетчатой доске 12×12 . Сначала Волк ставит фишку на одну из клеток. Далее, начиная с Зайца, игроки по очереди передвигают фишку. Заяц всегда передвигает фишку на 1 клетку по диагонали, а Волк на одну клетку по горизонтали или вертикали, причём нельзя ставить фишку на клетку, на которой фишка уже была. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?

Задача 4.



Id No:

 $\triangle ABC :$

AA₁-Succeknyuca

ВВ₁-Вввввв

$$\angle A_1AB = 45^\circ$$

Доказательство окр. отн. окр. A_1OB_1 , лежащих
одной из сторон $\triangle ABC$.

Доказательство: Пусть $\angle = \angle A_1AC = \angle A_1AB$

$$\Delta AOB_1 : \angle AOB_1 = 90^\circ - \alpha$$
$$\angle AOB_1 = \angle BOA_1 = 90^\circ - \alpha, \quad \angle A_1OB_1 = 180^\circ - (90^\circ - \alpha) = 90^\circ + \alpha$$
$$\Delta BOA_1: \angle OBA_1 = 180^\circ - 45^\circ - (90^\circ - \alpha) = 45^\circ + \alpha$$
$$\Delta BCB_1: \angle C = 90^\circ - (45^\circ + \alpha) = 45^\circ - \alpha; \quad \Delta ABO: \angle ABO = 90^\circ - \alpha - \alpha = 90^\circ - 2\alpha; \quad \text{marginal } \angle ABC = 90^\circ - 2\alpha + 45^\circ + \alpha = 135^\circ - \alpha$$

$\triangle ABC$: AA_1 - биссектриса, значит, по св-ву $\frac{AB}{AC} = \frac{A_1B}{A_1C}$

Найти отрезки AB и AC :

$$\Delta ABC: \text{ по известным углам: } \frac{AB}{AC} = \frac{\sin(40^\circ - \alpha)}{\sin \angle ABC} = \frac{\sin(40^\circ - \alpha)}{\sin(138^\circ - \alpha)}, \quad \text{---}$$

$$\sin(45^\circ - \alpha) = \sin 45^\circ \cdot \cos \alpha - \sin \alpha \cdot \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos \alpha - \sin \alpha)$$

$$\sin(135^\circ - \alpha) = \sin 135^\circ \cdot \cos \alpha - \sin \alpha \cdot \cos 135^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos \alpha + \sin \alpha)$$

$$\text{Therefore, } \frac{\sin(45^\circ - \alpha)}{\sin(75^\circ - \alpha)} = \frac{\cos \alpha - \sin \alpha}{\cos \alpha + \sin \alpha}, \text{ given, } \frac{AB}{AC} = \frac{\sin \alpha \cos \alpha - \sin^2 \alpha}{\cos \alpha + \sin \alpha}$$

$\triangle BB_1C : \angle B_1 = 90^\circ$; по теореме Пифагора:

$$\frac{BB_1}{B_1C} = \frac{\sin(45^\circ - \alpha)}{\sin(110^\circ - \alpha)}$$

$$\sin(45^\circ + \alpha) = \sin 45^\circ \cdot \cos \alpha + \sin \alpha \cdot \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos \alpha + \sin \alpha)$$

$$\text{Maximum, } \frac{AB}{AC} = \frac{\cos 2 - \sin 2}{\cos 2 + \sin 2} = \frac{AB}{AC}$$

Этими образи,

$$\frac{BB_1}{B_1C} = \frac{AB}{AC}$$

$$\frac{A_1 B}{A_1 C} = \frac{A_1 B}{A_1 C}$$

значит, $\frac{A_1B}{A_1C} = \frac{BB_1}{B_1C}$, значит, в $\triangle BB_1C$ по

по приложению B и A_1 - биссектриса $\angle BB_1C$, значит, $\angle A_1B_1C = 45^\circ$

$$\Delta A_1B_1C: \angle B_1A_1C = 180^\circ - 45^\circ - (45^\circ - \alpha) = 90^\circ + \alpha$$

Получили образцы, $\angle B_1A_1C = \angle B_1OA_1$, по признаку касательной (по углу между касательной и хордой): BC - касательная к окружности, описанной около $\triangle A_1OB_1$, что и требовалось доказать.

① 12

Код участника:

(заполняется организатором)

М10 078

Задача 3. Пусть в каждой ряду (ряд – или стлбец, или строка) – разная сумма значений, что в каждой ряду разное число единиц. Минимальное число единиц в ряду – 0, максимальное – 70. Таким образом, возможны следующие варианты

I. в одном ряду 0, в остальных от 2 до 70.

II. в одном 0, в остальных от 1 до 69

III. во всех от 1 до 70.

в I случае сумма = $\frac{2+70}{2} \cdot 69 = 2484 \neq 2450$

в II: $S = \frac{1+69}{2} \cdot 69 = 2445 \neq 2450$

в III: $S = \frac{1+70}{2} \cdot 70 = 2485 \neq 2450$

Спротиворечие с условием, значит, предположение неверно, значит, в каких-то двух строках или двух столбцах одинаковая сумма чисел, что и требовалось доказать. (+) 125.

Задача 2. $\text{НОК}(a,b) + 4\text{НОД}(a,b) = (a+b)^2 + 1$ (1), $a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$

$$\text{НОК}(a,b) : \text{НОД}(a,b)$$

$$4\text{НОД}(a,b) : \text{НОД}(a,b)$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 : \text{НОД}(a,b)$$

Таким образом, $(\text{НОК}(a,b) + 4\text{НОД}(a,b)) : \text{НОД}(a,b)$ и т.к. $(a+b)^2 : \text{НОД}(a,b)$ и не верно равенство (1), то $1 : \text{НОД}(a,b) \Rightarrow \text{НОД}(a,b) = 1$, значит, a и b взаимно просты, значит,

$$\text{НОК}(a,b) = ab$$

Значит, (1) равносильно:

$$ab + 4 = a^2 + 2ab + b^2 + 1$$

$$a^2 - ab + b^2 - 3 = 0$$

Введем это квадратное уравнение относительно a .

$$D = b^2 - 4(b^2 - 3) = -3b^2 + 12$$

итого у этого уравнения были корни: $D \geq 0$;

$$-3b^2 + 12 \geq 0$$

$$b^2 \leq 4$$

$$-2 \leq b \leq 2$$

т.к. $b \in \mathbb{N}$ возможные значения b : 1; 2.

400 072

$$a^2 + a - 2 = 0, a \in \mathbb{N}$$

$$\begin{cases} a=1 \\ a=-2 \end{cases}$$

$$\Pi. b=2:$$

$$a^2 + 2a + 1 = 0, a \in \mathbb{N}$$

$$(a+1)^2 = 0$$

Таким образом, $(1; 1)$ - единственное решение (1).

Ombem: $(1, 1)$.

3. Agave 7. Ornitho: 55.

Замечание: [Взяв все кадры из 11 шкал: 1 и 10 положительных степеней одного и того же шкала^a (~~они отличаются от 1~~)^c, а учитывая то, что среди этих степеней не может быть 0 и отрицательных, шкалы ~~являются~~ натуральными]

В такой случае при составлении всех произведений, указанных в условии, ~~степень~~ произведения будет представлять собой степень числа a с ^{натуральным} показателем в отрезке от наименьшего из показателей в исходном наборе до суммы всех показателей в исходном наборе; ~~тогда~~ эти же произведения 55 (т.е. показатели - сумма 10 ^{натуральных} чисел от 1 до 10)

✓ Возьмем набор из 11 чисел: 1 и 10 степеней двойки того же числа a (отличного от 1 и принадлежащего натуральным) с последовательными натуральными показателями

Меньше значений на доске не можно сказать, так как при по-другому построении кадра появляются приращения π и 2π и т.д., не совпадающие, но для которых отсутствуют совпадения с приращениями другого ряда множеств.

Код участника:

(заполняется организатором)

МШ 078

Задача 1. Пусть кол-во людей спереди y .

Тогда сзади: $y-31$, а всего людей $2y-31$.

$$\begin{cases} 2y-31 \geq 100 \\ y < 100 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \geq 66 \\ y < 100 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \geq 66 \\ y < 100 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \geq 66 \\ y < 100 \end{cases}$$

Пусть $y=66$. Кол-во людей спереди:

Пусть $y=66$. Кол-во людей спереди: $2 \cdot 66 - 31 = 101$;

Тогда кол-во людей сзади: $33 \cdot 2 + 3 \cdot 2 = 72$.

Если увеличивать y на k , то тогда попытаемся определить при каких y и k кол-во людей спереди и сзади будет подходить под соотношение из условия.

$$1,2(101 + 2k) = 72 + 2k$$

№ 8 веб

Бланк ответа №5

Всероссийская олимпиада школьников «Миссия выполнима. Твоё призвание – финансист!»

Код участника:

(заполняется организатором)

410 078

М10-089
Код участника
(заполняется организатором)



Олимпиадная работа
заключительного этапа
«Всероссийская олимпиада школьников "Миссия
выполнима. Твоё призвание - финансист!" 2023-2024
г.»
«(Математика 10 класс)»

Вариант № 2

«27 января 2024 г.»

Никакие другие записи на титульном листе делать не разрешается

Дополнительный бланк №

Всероссийская олимпиада школьников «Миссия выполнима. Твоё призвание – финансист!»

Код участника:

(заполняется организатором)

110-089

Код участника

Всероссийская олимпиада школьников «Миссия выполнима. Твое
призвание – финансист!» 2023/2024 уч.г.

Бланк проверки работы

Математика 10 класс

№ задания	ФИО эксперта	Балл	ФИО эксперта	Балл	Итоговый балл
1	Веканян	10	Алиашина	10	10
2	Разумов	8	Сурин	8	8
3	Васильев А.И.	12	Гурьянова	12	12
4	Дубинский	0	Борисов	0	0
5	Гасстова- лова	0	Олехова	0	0
6	Мерин	12	Борисов	12	12
7	Зинина	0	Гузнецов	0	0
8	Машин	0	Ш	0	0
ИТОГО					42

Задача №1.

Из утверждения 1 известно, что Гриша влез на место от 1 до 99 (т.е. последний человек за которым он мог встать 99) в таком случае количество человек в очереди будет следующим:

$99 + 31 = 130$ - человек позади от него
 $99 + 68 = 167$ - человек максимально могло быть в очереди.

Теперь определим минимальное кол-во людей в очереди. Гриша встал за человеком "x" (при этом ищет x min при котором первые 2 условия выполняются)

$x - 31$ - человек сзади

$x + x - 31$ - человек в очереди и это число больше или равно 100

$$2x - 31 \geq 100$$

$$2x \geq 131$$

$$x \geq 65,5$$

⇒ самый близкий к начелу человек, за которым мог встать Гриша - 66 (т.к. если он встанет за 65, то кол-во людей в очереди будет меньше 100), что не ур. усл. 2.

Таким образом $x \in [66; 99]$. Общее количество цифр таково: x людей спереди будет следующим: 9 первых цифр плюс $(x-9) \cdot 2$, таким образом " $2x-9$ " - общее кол-во цифр спереди.

Определим общее кол-во цифр сзади:

от $(x+1)$ до 100 (не включая) двузначные ⇒ $(100 - (x+1)) \cdot 2$, а также от 100 до n (включая) (включая) человек в очереди $(n-100) \cdot 3 + 3 = (n-99) \cdot 3$

$$12 \cdot (2x-9) = (n-99) \cdot 3 + (100-x) \cdot 2$$

$$2,4x - 10,8 = 3n - 99 \cdot 3 + 99 \cdot 2 - 2x$$

$$2,4x - 10,8 = 3n - 99 - 2x$$

$$4,4x = 3n - 99 + 10,8$$

$$4,4x = 3n - 88,2$$

Мы знаем, что всего в очереди

$$2x - 31 \text{ человек} \Rightarrow 2x - 31 = n$$

$$3n = 4,4x + 88,2$$

$$n = 2x - 31$$

$$6x - 93 = 4,4x + 88,2$$

$$1,6x = 88,2 + 93$$

$$1,6x = 181,2$$

$$x = \frac{181,2}{1,6}$$

Страница 1

Код участника:

(заполняется организатором)

М10-089

Продолжение задачи №1

если x (человек перед которым влез Гриша), меньше или равно 65, то кол-во людей в очереди (n) меньше 100.
если $x=66$, то $n=101 \Rightarrow n \in [101; 167]$

$$1,2(2x-9) = (n-99) \cdot 3 + (99-x) \cdot 2$$

$$n = 2x - 31$$

$$x = \frac{n+31}{2}$$

$$1,2(n+31-9) = (n-99) \cdot 3 + (99 - \frac{n+31}{2}) \cdot 2$$

$$1,2n + 1,2 \cdot 22 = 3n - 99 \cdot 3 + 99 \cdot 2 - n - 31$$

$$1,2n - 2n = -99 \cdot 3 - 1,2 \cdot 22$$

$$-0,8n = -130 - 1,2 \cdot 22$$

$$n = \frac{(130 + 1,2 \cdot 22) \cdot 8}{10} = \frac{156,4 \cdot 8}{10} = 125,12$$

Ответ: $n = 125,12$.

10

Далше ще етв задачи

№ 5 ОТК

№ 4 ОТК

Код участника:

(заполняется организатором)

M10-089

Задача 2.

$$\text{НОК}(a, b) + 4 \cdot (\text{НОД}(a, b)) = (a+b)^2 + 1.$$

Легко заметить, что данному равенству удовлетворяют значения $a=1; b=1$.

$$\left. \begin{array}{l} \text{НОК}(1, 1) = 1 \\ \text{НОД}(1, 1) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow 1 + 1 \cdot 4 = (1+1)^2 + 1 \text{ верно.}$$

Если числа a и b будут слишком большими, то квадраты их суммы будут сильно больше, чем НОК и $4 \cdot \text{НОД}$.
 Так как если числа будут больше 10 их суммы в квадрате будут сильно больше, то надо искать пары, в которых НОК и НОД максимально большие, а сами числа минимальны.
 Это одно из чисел (т.е.) $\text{НОК} = \min(a, b)$; $\text{НОД} = \min(a, b)$.

Тогда: $\min(a, b) + 4 \cdot \min(a, b) = (a+b)^2 + 1$ | оптимальное решение - это $a=b$
 Возьмем $n=1$, тогда $a=b$
 $a + 4a = (a+a)^2 + 1$
 $5a = (2a)^2 + 1$
 $5a = 4a^2 + 1$ | тогда квадрат будет не таким большим, а левая часть тем

Отсюда видно, что решением (корнем) данного ур-ня будет число $a=1 \Rightarrow b=1$.

Есть еще вариант, при котором возможно равенство.

$\exists a=26$, тогда

$$\text{НОК} = a \quad \text{НОД} = a$$

$$a + 4a = (36)^2 + 1.$$

$$5a = 96^2 + 1$$

$$a = 26$$

$$10b = 96^2 + 1$$

$$b = 1.$$

$$a = 2.$$

Аналогично может быть и с $b=2a \Rightarrow a=1, b=1$ тоже уг. усл.

Пусть $a=36$ ($n=3$)

$$\text{НОК} = a$$

$$\text{НОД} = a$$

$$a + 4a = (46)^2 + 1$$

$$5a = 166^2 + 1$$

$$156 = 166^2 + 1$$

Ответ: $\{1; 1\} \{1; 2\} \{2; 1\}$

Лист № 3

$$4(\text{НОД} + \text{НОК}) = 12$$

$$(a+b)^2 + 1 = 10$$

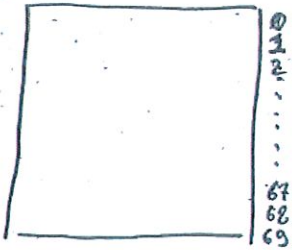
$$\text{НОК}(1; 2) = 2$$

$$\text{НОД}(1; 2) = 1$$

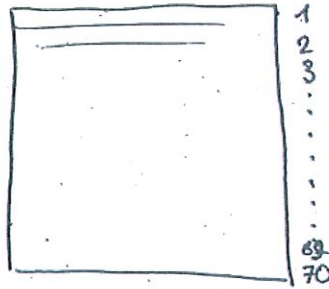
при $a=36$ (т.е. $n=3$) равенство не будет выполняться для $b \in \mathbb{N} \Rightarrow$ при дальнейшем увеличении n $(a+b)^2 \uparrow$ и решений больше не будет.

Задача №3.

Предположим, что это не так, то есть, что в каждой строке или в каждом столбце сумма чисел разная, тогда: (так как мы ставим либо 1 либо 0) это будет выглядеть следующим образом:



либо



тогда сумма чисел в таблице в том случае равна:
 $0+1+2+\dots+69 = 70 \cdot 34 + 35 = 2415$ (что не подходит)

а во втором случае сумма всех цифр равна: $1+2+3+\dots+70 = (41 \cdot 35) = 2485$. (что тоже не удовлетворяет условию оттого что сумма всех чисел 2450) Аналогично работает и со столбцами $\Rightarrow$ таким образом, чтобы сумма всех чисел в такой таблице была равна 2450 в каких либо двух строках или столбцах сумма должна повторяться +12

Задача №6

$$\begin{cases} a^3 + b^3 + 3abc = c^3 \\ (2a+2b)^2 = c^3 \\ a^2 - ab + b^2 = c^2 \end{cases} \begin{cases} (1) \text{ Разложим } b^3 + a^3 \text{ на сумму кубов} \\ (2) \text{ Вынесем из под квадрата, перенесем в правую часть и возьмем корень} \\ (3) \end{cases}$$

$$(1) \begin{cases} (a+b)(a^2 - ab + b^2) + 3abc = c^3 \\ (a+b)c^2 + 3abc = c^3 \end{cases} \quad \begin{cases} \text{Заменим } (a^2 - ab + b^2) \text{ на } c^2 \end{cases}$$

$$(2) \quad a+b = \sqrt{\frac{c^3}{4}} \quad \begin{cases} \text{подставим в ур-ие (1)} \end{cases}$$

$$(3) \quad \sqrt{\frac{c^3}{4}} \cdot c^2 + 3abc = c^3 \quad \begin{cases} \text{Далее из ур-ия (2) сделаем такой вид} \\ a^2 + 2ab + b^2 = \frac{c^3}{4} \end{cases}$$

Затем вычтем $3ab$

$$a^2 - ab + b^2 = \frac{c^3}{4} - 3ab$$

И заменим левую часть на c^2

$$c^2 = \frac{c^3}{4} - 3ab \Rightarrow 3ab = \frac{c^3}{4} - c^2 \quad \begin{cases} \text{заменим } 3ab \text{ на } \frac{c^3}{4} - c^2 \text{ в ур-ие 4} \end{cases}$$

Код участника:

(заполняется организатором)

МНО-089

Продолжение задания 6.

$$\frac{\sqrt{c^3}}{\sqrt{4}} \cdot c^2 + \left(\frac{c^3}{4} - c^2\right) \cdot c = c^3$$

$$\frac{c^4 \sqrt{c^3}}{\sqrt{4}} + \frac{c^4}{4} - c^3 - c^3 = 0$$

$$c^2 \left(\frac{\sqrt{c^3}}{\sqrt{4}} + \frac{c^2}{4} - 2c \right) = 0$$

$$\begin{aligned} c^2 &= 0 \\ c &= 0 \end{aligned}$$

$$c = 0$$

$$\frac{\sqrt{c^3}}{2} + \frac{c^2}{4} - 2c = 0$$

$$c \left(\frac{\sqrt{c}}{2} + \frac{c}{4} - 2 \right) = 0$$

$$\begin{aligned} \sqrt{c} &= 2 & \sqrt{c} &= -4 \\ c &= 4 & \text{не угод.} \end{aligned}$$

При $c=0$

$$\begin{cases} 2a + 2b = 0 \\ 3ab = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -b \\ -3b^2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = 0 \\ a = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

При $c=4$

$$(2a + 2b)^2 = 4^3 = 2^6$$

$$\begin{cases} 2a + 2b = 8 \\ \frac{4^3}{4} - 4^2 = 3ab \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + b = 4 \\ 3ab = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 4 - b \\ 3 \cdot (4 - b) \cdot b = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = 0 \\ a = 4 \\ c = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} b = 4 \\ a = 0 \\ c = 4 \end{cases}$$

Решим уравнение с $\sqrt{c}$ не известнойСделаем замену переменных, пусть $\sqrt{c} = t$, тогда: ($t \geq 0$)

$$\frac{t^2}{4} + \frac{t}{2} - 2 = 0$$

$$t^2 + 2t - 8 = 0$$

$$t = -4$$

$$t = 2$$

не угод. усл.

удовлетворяет.

Таким образом, системе удовлетворяют следующие решения:

- 1) $a=0; b=0; c=0$
- 2) $a=4; b=0; c=4$
- 3) $a=0; b=4; c=4$

3/4 125.

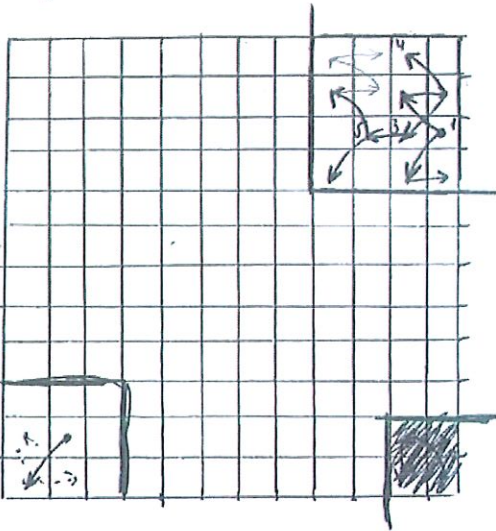
Код участника:

(заполняется организатором)

M10-089

Задача 8.

При правильной игре всегда будет выигрывать волк. Его задача лишь прижать зайца к стене. куда бы волк не поставил фишку, если он будет правильно ходить, то выигрывает. Итак, если волк ставит фишку



около стенки (пуст в центре 1) то первым ходит заяц, он по любой из двух стрелок, но волк прижимает фишку к стене (в любой из двух случаев) и тогда у зайца остается 2 варианта: (3 или 4) если 4, то следующим ходом волк идет к углу, — и заяц проиграл, если 3 волк на шаг отходит в (5) заяц прижимает в любую из двух сторон, но в любой из случаев остается зажатый к стене

Теперь докажем это. Пусть есть поле 2×8 а не 12×12 первый ходит заяц. Он занял клетку по диагонали (любой), тогда волк ходит в любую сторону и не зависимо от того, куда он пойдет след. ходом заяц сам себя загонит в ловушку. Это связано с тем, что волк всегда может попасть в любую клетку, а чтобы заяц и перейти в другую диагональ ему надо чтобы походил волк.

Задача 7.

Чтобы было максимальное количество одинаковых чисел, надо, чтобы во первых все числа на доске были минимальными, а во вторых Первые 4 числа это 1 2 3 4, остальные — их произведения друг на друга. то есть числа будут следующие:

1	2	3	4	6	8	12	18	24	16	32
				(2·3)	(2·4)	(2·6)	(3·6)	(3·8)	(2·8)	(2·16)
				(1·2·3)		(3·4)		(4·6)		

Продукты чисел 1 2 3 4 6 8 12 18 24 16 32

М10-083

Код участника
(заполняется организатором)



**Олимпиадная работа
заключительного этапа
«Всероссийская олимпиада школьников "Миссия
выполнима. Твоё призвание - финансист!" 2023-2024
г.»
«(Математика 10 класс)»**

Вариант № 2

«27 января 2024 г.»

Никакие другие записи на титульном листе делать не разрешается

Дополнительный бланк №

Всероссийская олимпиада школьников «Миссия выполнима. Твоё призвание – финансист!»

Код участника:

(заполняется организатором) 410-063 Код участника

Всероссийская олимпиада школьников «Миссия выполнима. Твое призвание – финансист!» 2023/2024 уч.г.

Бланк проверки работы

Математика 10 класс

№ задания	ФИО эксперта	Балл	ФИО эксперта	Балл	Итоговый балл
1	Лоздза 41	0	Вайсова	0	0
2	Башинов 6	0	Башинов	0	0
3	Васильев А.И.	12	Гурьева	12	12
4	Варисов	0	Дубинский	0	0
5	Вайсова	0	Лоздза	0	0
6	Морин	2	Дубинский	6	7
7	Эмел	4	Григорьев	4	4
8	Эмел	16	Григорьев	16	16
ИТОГО					39

Лист №1

Код участника:

(заполняется организатором)

M10-063

Задание 7.

Пусть числа, написанные на доске, это: a b c d e f g h k l m

Произведение двух чисел можно представить в виде таблицы:

ab	ba	...	ma
ac	bc		mb
ad	bd		mc
ae	be		md
...	...		...
am	bm		ml

Всего таких чисел будет: $\frac{11 \cdot 10}{2}$ (т.к. каждое произведение в таблице будет повторяться два раза)
(На первое место можно поставить любое из 11 чисел, а на второе ~~еще~~ можно поставить любое из оставшихся 10 чисел)

Для произведения трёх чисел: — — —

на первое место можно поставить любое из 11 чисел, на второе место — любое из 10 оставшихся, на третье — любое из 9. Если также составить таблицу, то каждое произведение трёх чисел будет повторяться шесть раз (например: abc, acb, bac, bca, cab, cba),

поэтому таких чисел будет: $\frac{11 \cdot 10 \cdot 9}{6}$

Для того, чтобы понять, сколько раз произведение n-чисел будет повторяться, надо: пусть произведение трёх чисел a, b, c: первое число можно взять любое из трёх, второе — из оставшихся двух, третье — только одно: $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

Аналогично для произведения четырёх чисел: $\frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{24}$

Для произведения пяти чисел: $\frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$

Для произв. шести чисел: $\frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$

Для произв. семи чисел: $\frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$

Для произв. восьми чисел: $\frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$

Произведение одиннадцати чисел будет одно.

Итого, наименьшее количество различных чисел могло получиться:

$$\frac{1 \cdot 10^5}{8} + \frac{11 \cdot 10^4}{63} + \frac{11 \cdot 10 \cdot 9^3}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} + \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8^2}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} + \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7^2}{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} + \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6^2}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} + \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5^2}{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} + \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4^2}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} + 1 = 55 + 165 + 330 + 462 + 462 + 330 + 165 + 55 + 1 = 2036$$

ответ: 2036

Alum $N^{\circ} 2$

53. (Задача 3)

так бы в таблице были только единицы, то сумма всех чисел была бы: $70 \cdot 70 = 4900$.

B1: $70 \cdot 70 = 4900$

$1800 : 2 = 900 \rightarrow$ значит в таблице было одинаковое кол-во единиц и нулей.
Рассмотрим...

Рассмотрим, как могут располагаться цифры в строке.

В строке могут быть:

1. Все еденицы
2. 69 едениц и один ноль
3. 68 едениц и два нуля

1. Все пункты

то в строке

Всего может быть 71 вариант исхода событий, но строк 70. Поэтому, по принципу Дирихле, в какой-то двух столбцах события будут повторяться, а значит и сумма чисел в них будет одинакова. Аналогично может быть и со строками.

Задача 8

Z.T.g.

ЗАДАНИЕ 8.

A 10x10 grid with handwritten numbers at the following intersections (row, column):

- Row 1: (1, 1)=3, (1, 5)=2, (1, 10)=3
- Row 2: (2, 4)=1, (2, 10)=2
- Row 3: (3, 5)=1
- Row 4: (4, 3)=1, (4, 8)=1
- Row 5: (5, 1)=2, (5, 6)=1, (5, 10)=3

3. Ответ: При правильной игре выиграет Заяц.
Пояснение: В каждой игре Волк вынужден выбирать, куда поставить первую фишку, выигрывает Заяц, поэтому

1. Если Волк поставит фишку в центр доски (т.е. в место, где фишка будет полностью окружена пустыми клетками, например, как показано на рисунке под цифрами "1"), то у них с зайцем будут одинаковые условия, и выиграет вариант сделать первый ход.

2. Если Волк поставит первую фишку рядом с "бортиками" (как указано на рисунке под цифрами "2"), то у зайца будет лишь два варианта сделать первый ход. Фишку в угол доски (как указано под цифрами "3"), один единственный вариант сделать первый ход. Если ход игрой падает

Если *е Волк поставит фишку в угол доски (как указано под цифрами, 2'), то у Зайца будет всего один единственный вариант сделать первый ход в любом случае. Если так игра пойдет, как показано на рисунке, то Заяц сможет зажать в тупик Волка, т.к. он будет двинуться

2.7.9

④

Код участника:

(заполняется организатором)

М10-063

Лист №3.

Задача 6. Ответ: $a=c=4; b=0$ или $b=c=4; a=0$. Проверим:

$$\begin{cases} a^3 + b^3 + 3abc = c^3 \\ (2a + 2b)^2 = c^3 \\ a^2 - ab + b^2 = c^2 \end{cases}$$

$$a^3 + b^3 = (a+b) \cdot (a^2 - ab + b^2) \Rightarrow a^3 + b^3 = c^2(a+b)$$

$$\begin{cases} c^2(a+b) + 3abc = c^3 \\ (2(a+b))^2 = c^3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c^2(a+b) + 3abc = c^3 \\ 4(a+b)^2 = c^3 \end{cases} \Rightarrow \text{значит "c" - четное}$$

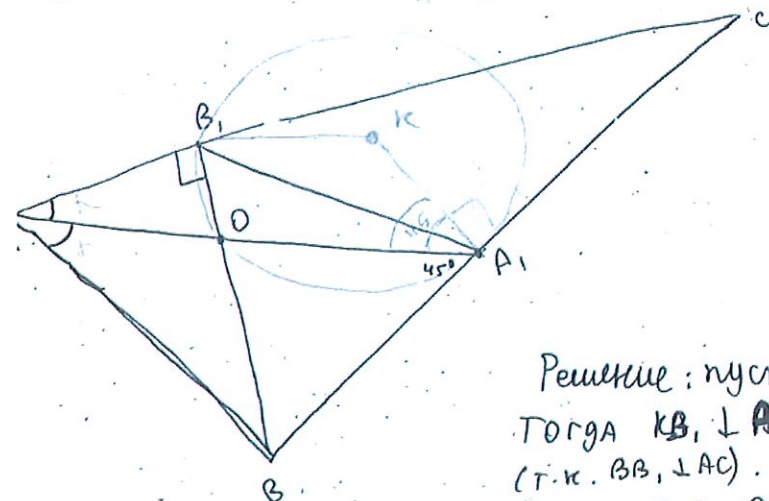
$$\begin{cases} c^2(a+b) + 3abc = c^3 \\ 4(c^2 + 3ab) = c^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c^2(a+b) + 3abc = 4(c^2 + 3ab) \\ ac^2 + bc^2 + 3abc = 4c^2 + 12ab \\ ac^2 + bc^2 - 4c^2 + 3abc - 12ab = 0 \\ c^2(a+b-4) + 3ab(c-4) = 0 \end{cases}$$

$$(a+b)^2 = c^2 - 3ab$$

2/4 75.

Ответ: $a=c=4; b=0$ или $b=c=4; a=0$.

Задача 4.



Дано: $BB_1 \perp AC$

$\angle BAA_1 = \angle BAA_1$

$\angle AA_1B = 45^\circ$

$\triangle B, OA_1$ - вписанный

K - центр описанной окружности

Доказать: окружность K касается одной из сторон $\triangle ABC$.

Решение: пусть окружность касается стороны AC . Тогда $KB_1 \perp AC$ (т.к. KB_1 - радиус). Но, по дано, $\angle BB_1C = 90^\circ$ (т.к. $BB_1 \perp AC$). Выходит, что $\angle BB_1C = \angle KB_1C \rightarrow$ противоречие т.к. $\angle KB_1C < \angle BB_1C$. Значит AC - не касательная.

Пусть окружность касается стороны BC .

Тогда $AK \perp BC$. $\angle AA_1C = 180 - \angle AA_1B = 180 - 45 = 135^\circ$. $\angle OA_1K = 135 - 90 = 45^\circ$.

Значит AA_1 - биссектриса

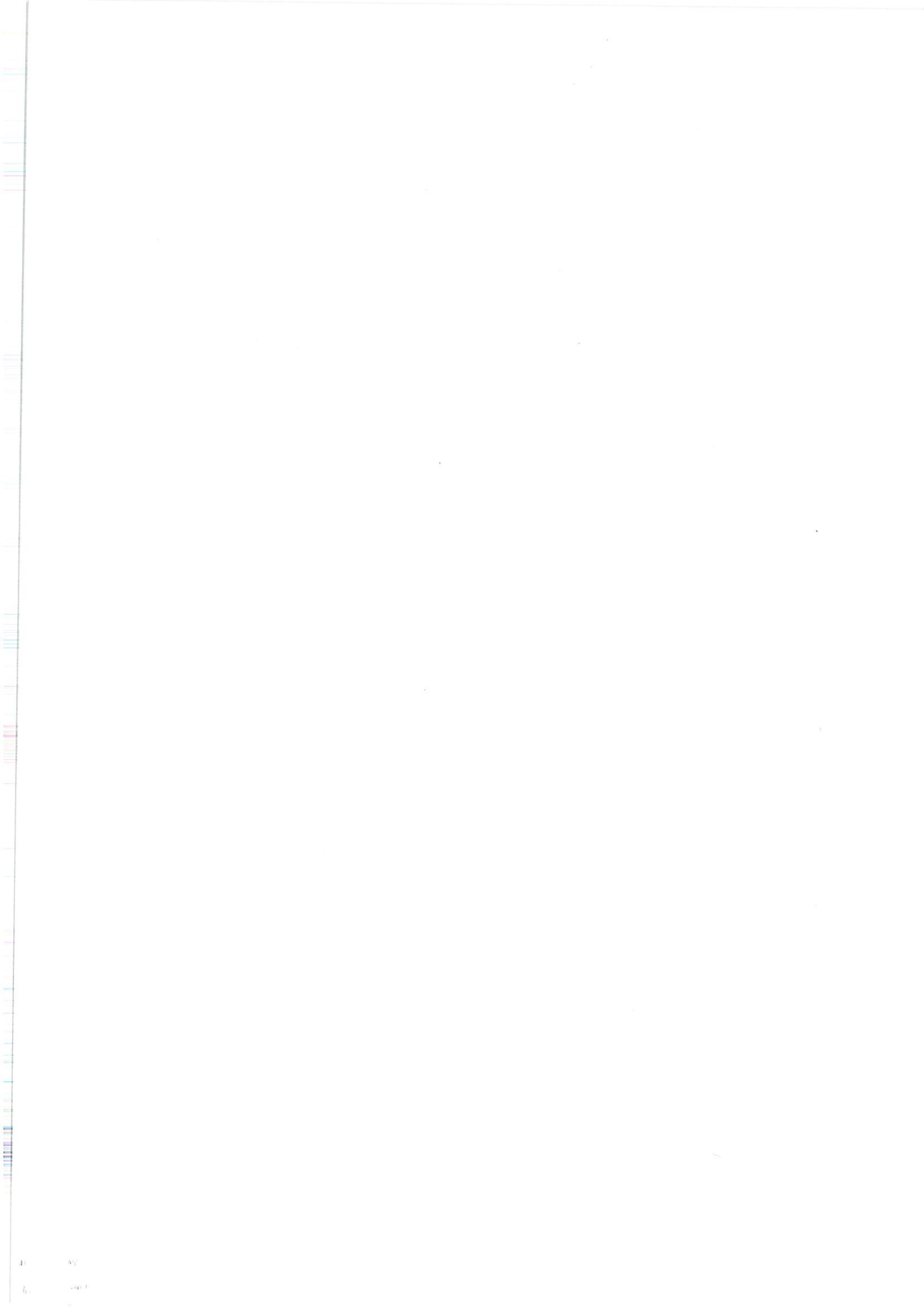
т.т.т.

Задача 1.

$K+31$ K K - кол-во людей среди

Ответ: 70

О Галенов



М10-134

Код участника
(заполняется организатором)



**Олимпиадная работа
заключительного этапа
«Всероссийская олимпиада школьников "Миссия
выполнима. Твоё призвание - финансист!" 2023-2024
г.»
«(Математика 10 класс)»**

Вариант № 2

«27 января 2024 г.»

Никакие другие записи на титульном листе делать не разрешается

№ 3

П.к. в таблице сумма чисел ²⁴⁵⁰ 2450 единиц и $70 \cdot 70 - 2450 = 2450$ нулей.

Взяв во всех столбцах и строках разную сумму чисел. Разберем столбцы. Если в 1 ст. будет 0 единиц, то в последнем их 69. Тогда сумма чисел в таблице будет $S_{70} = \frac{0+69}{2} \cdot 70 = 2415 (\neq 2450)$ - неур.

Если же в 1 ст. будет одна единица, а в последнем 70, то $S_{70} = \frac{1+70}{2} \cdot 70 = 2485 (> 2450)$ - неур. След-но, в каких-то двух столбцах будет пов-ся кол-во единиц, т.к. только так можно сделать сумму чисел ≤ 2485 и > 2415 . **З.Ф.Г. ± 105 стр. 206**

№ 7

Оценка: чтобы кол-во разных значений было наименьшим на доске должно быть написано число 1. Если взять некоторый пример, то, скорее всего, там найдется пара произведений, сост. из различных чисел, но которые при перемножении дают одинаковые значения. Например: $3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$ и $6 \cdot 10 = 60$. Чтобы кол-во таких одинак. знач. было наибольшим, необходимо увеличить множество таких произв., т.е. взять миллиарды наименьшего из них.

не доказано

Пример: $1 \ 2^1 \ 2^2 \ 2^3 \ 2^4 \ 2^5 \ 2^6 \ 2^7 \ 2^8 \ 2^9 \ 2^{10}$

1) Различ. знач. двоек с 1:

$$2^1, 2^2, 2^3, \dots, 2^{10} - 10$$

2) Различ. знач. двоек без 1:

$$\left. \begin{aligned} 2^1 \cdot 2^{10} &= 2^{11} \\ 2^2 \cdot 2^{10} &= 2^{12} \\ &\vdots \\ 2^9 \cdot 2^{10} &= 2^{19} \end{aligned} \right\} 9$$

Промежуточные умножения двоек без степени 10 можно не расписывать, т.к. они будут повторяться и не превышать 2^{19}

Дополнительный бланк №

Всероссийская олимпиада школьников «Миссия выполнима. Твое призвание – финансист!»

Код участника:
(заполняется организатором)М10-139
Код участника

Всероссийская олимпиада школьников «Миссия выполнима. Твое призвание – финансист!» 2023/2024 уч.г.

Бланк проверки работы

Математика 10 класс

№ задания	ФИО эксперта	Балл	ФИО эксперта	Балл	Итоговый балл
1	Кокмис	10	Липагин	10	10
2	Вашаков	0	Авсеев	0	0
3	Киселев А.И.	10	Гурьев	10	10
4	Курсанов	0	Дубинский	0	0
5	Курсанов	0	Иванов	0 отс.	10
6	Берзин	0	Шенгел	0	0
7	Александров	3 14	Мам	3	3
8	Шамков	16	Генерал	16	16
ИТОГО					39

3) Любые профиты с 1 дают уже имеющийся знак.

Различ. знак профит:

$$\left. \begin{aligned} 2^1 \cdot 2^9 \cdot 2^{10} &= 2^{20} - \text{мин} \\ 2^8 \cdot 2^9 \cdot 2^{10} &= 2^{27} - \text{макс} \end{aligned} \right\} 8$$

4) Числ. с 1 аналогично 3)

Различ. знак гетверок:

$$\left. \begin{aligned} 2^1 \cdot 2^8 \cdot 2^9 \cdot 2^{10} &= 2^{28} - \text{мин} \\ 2^7 \cdot 2^8 \cdot 2^9 \cdot 2^{10} &= 2^{34} - \text{макс} \end{aligned} \right\} 7$$

....

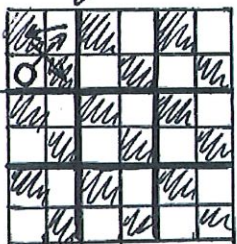
~~Все комбинации по 10 только с 1~~

$$10 + 9 + 8 + 7 + \dots + 1 + 0 = 55$$

Ответ: ~~55~~ ^{гетверки} ~~ответ не в срок~~ ^{но 11} **+ 14**

3

Раскрасим доску в шахматную раскраску. Волк передвигает фишку на клетку противоположного цвета, а заяц на клетку своего. Разделим условно доску на квадраты 2×2 .



Первый ходит заяц и двигает фишку на белую клетку в своем квадрате. Затем Волк сдвигает её на черную и заяц ходит по диагонали.

Волк переходит фишкой в следующий квадрат, т.к. Заяц всегда найдёт свободную клетку для хода в любом из квадратов. В конце игры Заяц последний раз сдвинет фишку, и все квадраты 2×2 будут заняты $\Rightarrow$ проигрывает Волк.

~ 1

$$\textcircled{1} \dots \textcircled{0} \textcircled{1} \textcircled{0} \dots \textcircled{n}$$

$$2x + 31 = n$$

$$\text{Знак числа справа} = 90 - (x + 31 - 9) = 68 - x$$

$$1,2 (9 + (x + 31 - 9) \cdot 2) = (68 - x) \cdot 2 + (x - (68 - x)) \cdot 3$$

Код участника:

M10-134

(заполняется организатором)

$$1,2 \cdot (9 + 2x + 44) = 136 - 2x + (2x - 68) \cdot 3$$

$$2,4x + 63,6 = 136 - 2x + 6x - 204$$

$$1,6x = 63,6 + 68$$

$$1,6x = 131,6$$

$$x = 82,25$$

$$n = 2 \cdot 82,25 + 31 = 164,5 \Rightarrow 165$$

Ответ: 165

~

10

Задача №6

Отсутствует



M10-092

Код участника
(заполняется организатором)



**Олимпиадная работа
заключительного этапа
«Всероссийская олимпиада школьников "Миссия
выполнима. Твоё призвание - финансист!" 2023-2024
г.»
«(Математика 10 класс)»**

Вариант № 1

«27 января 2024 г.»

Никакие другие записи на титульном листе делать не разрешается

М10-092

Код участника

Всероссийская олимпиада школьников «Миссия выполнима. Твое призвание – финансист!» 2023/2024 уч.г.

Бланк проверки работы

Математика 10 класс

№ задания	ФИО эксперта	Балл	ФИО эксперта	Балл	Итоговый балл
1	Волосова Н.В.	0	Коздизь С.	0	0
2	Балашиха	10.	Овчинникова	10	10
3	Курсанова	2	Берзин	3	3
4	Рубинский М.С.	0	Борисова А.Р.	0	0
5	Валасова	10	Орлова	10	10.
6	Берзин	14	Мандрика	14	14
7	Эминян	0	Овчинникова	0	0
8	Эминян	0	Овчинникова	0	0
ИТОГО					37

N 2

$$4 \text{НОК}(a, b) + \text{НОД}(a, b) = (a+b)^2 + 1$$

$$1) a=b \Rightarrow \text{НОК}(a, b) = a$$

$$\text{НОД}(a, b) = a$$

$$4a + a = (a+a)^2 + 1$$

$$4a^2 - 5a + 1 = 0$$

$$4 \cdot 1 - 5 \cdot 1 + 1 = 0$$

$$a=1$$

$$a = \frac{1}{4} \text{ из т. Виета: } a_1, a_2 = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow a=b=1$$

$$2) \text{НОК}(a, b) = ab \text{ (отсутствуют общие делители)}$$

$$\text{НОД}(a, b) = 1$$

$$4ab + 1 = a^2 + 2ab + b^2 + 1$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = 0$$

$$(a-b)^2 = 0$$

$$a=b \text{ (см. п. 1. ед. рсм. * 1)}$$

$$3) a=nk, b=mn \text{ (где } m \text{ и } k \text{ не имеют общих делителей, кроме 1)}$$

$$\text{НОК}(nk, mn) = nmk; \text{НОД}(nk, mn) = n$$

$$4nmk + n = (nk + mn)^2 + 1$$

$$4nmk + n = (nk)^2 + 2mnk + (mn)^2 + 1$$

$$4nmk - 2mnk - n^2(k^2 + m^2) + 2mnk(n-2) + 1 - n = 0$$

$$n^2(k^2 + m^2) + 2mn^2(k^2 + 2mk + m^2) - n(4mk + 1) + 1 = 0$$

$$n(k+m)^2 - n(4mk + 1) + 1 = 0$$

$$\textcircled{1} = (4mk + 1)^2 - 4(k+m)^2 = 16(mk)^2 + 8mk + 1 - 4k^2 - 8mk - 4m^2$$

№2

$$= 16(mk)^2 - 4k^2 - 4m^2 + 1 = 4k^2(4m^2 - 1) - (4m^2 - 1) =$$

$$= (4k^2 - 1)(4m^2 - 1)$$

$$n = \frac{4mk + 1 \pm \sqrt{(4k^2 - 1)(4m^2 - 1)}}{2(k+m)^2}$$

Числа $n \in \mathbb{N}$ $(4k^2 - 1)(4m^2 - 1)$ должны быть полным квадратом. Это возможно только если $k = m$, но $k + m$, $\Rightarrow$ нет решения.

Ответ: (1, 1)

9

№1

1) Пусть ка-во цифр k , тогда ^{спереди} ~~спереди~~ от 1,25k цифр всего. Количество человек ^{сзади} на 23 больше и все из них кроме первых 9 держат талон с 2 цифрами (100 сзади)

$\Rightarrow$ цифр ^{спереди} на $2 \cdot 23 = 46$ больше

$$1,25k = k + 46$$

$$0,25k = 46$$

$$k = \frac{46}{0,25} = 184$$

$$\text{Тогда всего цифр: } k + 1,25k = 2,25k = 2,25 \cdot 184 = 414$$

$$\text{А спереди их } 1,25k = 1,25 \cdot 184 = 230$$

Среди них 9 талонов состоят из 1 ^{цифры} ~~цифры~~ и 90 из 2

$$9 + 90 \cdot 2 = 207 \text{ 189}$$

$$414 - 207 = 207 \text{ цифр (3)}$$

$$225 : 3 = 75 \text{ человек с номерами } \leq 100$$

$$\text{Тогда всего было } 99 + 75 = 174 \text{ человека}$$

Ответ: 174

05

Код участника:

(заполняется организатором)

М 10-092

N 6

$$\begin{cases} a^3 + b^3 + 3abc = c^3 \\ (3a + 3b)^2 = c^3 \\ a^2 - ab + b^2 = c^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a+b)(a^2 - ab + b^2) + 3abc = c^3 \\ (a+b) = \sqrt{\frac{c^3}{9}} \\ a^2 - ab + b^2 = c^2 \end{cases}$$

$$\frac{\sqrt{c^3}}{9} \cdot c^2 + 3abc = c^3$$

$$3abc = c^3 \left(1 - \frac{\sqrt{c}}{3}\right)$$

$$ab = \frac{c^2 \left(1 - \frac{\sqrt{c}}{3}\right)}{3}$$

$$ab = \frac{c^2 \left(\frac{c}{9} - 1\right)}{3}$$

$$\begin{cases} ab = \frac{36^2 \left(\frac{36}{9} - 1\right)}{3} = 36^2 \\ ab = \frac{9^2 \left(\frac{9}{9} - 1\right)}{3} = 0 \end{cases}$$

$$3) a = \frac{36^2}{b}; c = 36$$

$$\left(\frac{36^2}{b}\right)^2 - 36^2 + b^2 = 36^2$$

Пусть $b^2 = t$ ($t > 0$)

$$\frac{36^4}{t} + t = 2 \cdot 36^2 \quad | \cdot t$$

$$t^2 - 2 \cdot 36^2 t + 36^4 = 0$$

$$2) \begin{cases} a^3 + b^3 + 3abc = c^3 \\ (a+b)^2 = \frac{c^3}{9} \\ a^2 - ab + b^2 = c^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 + 2ab + b^2 = \frac{c^3}{9} \\ a^2 - ab + b^2 = c^2 \end{cases}$$

$$3ab = \frac{c^2 \left(\frac{c}{9} - 1\right)}{3}$$

$$ab = ab$$

$$\frac{c^2 \left(1 - \frac{\sqrt{c}}{3}\right)}{3} = \frac{c^2 \left(\frac{c}{9} - 1\right)}{3} \quad (c \neq 0)$$

$$1 - \frac{\sqrt{c}}{3} = \frac{c}{9} - 1$$

$$\left(2 - \frac{c}{9}\right) = \frac{\sqrt{c}}{3} \quad | \cdot 9$$

$$18 - c = 3\sqrt{c} \quad \text{или } 3: \\ c \geq 0$$

$$(18 - c)^2 = 9c$$

$$18^2 - 36c + c^2 = 9c$$

$$c^2 - 45c + 18^2 = 0$$

$$D = (-45)^2 - 4 \cdot 18^2 =$$

$$= 9^2 \cdot 5^2 - 4 \cdot 9^2 \cdot 2^2 =$$

$$= 9^2 (5^2 - 4^2) = 9^2 \cdot 3^2$$

$$c = \begin{cases} \frac{45 + \sqrt{9^2 \cdot 3^2}}{2} = \frac{45 + 27}{2} = 36 \\ \frac{45 - \sqrt{9^2 \cdot 3^2}}{2} = \frac{45 - 27}{2} = 9 \end{cases}$$

№6 (прод)

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24

4) $ab=0$; $c=9$

$$\begin{cases} a=0 \\ b=0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 24 \\ \times 50 \\ \hline 1200 \end{array}$$

$$\begin{cases} a^2 - 0 + 0 = c^2 \\ b^2 - 0 + 0 = c^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 = 9^2 \\ b^2 = 9^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=9 \\ b=0 \\ b=9 \\ a=0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (a; b; c) &= (0; 9; 9) \\ (a; b; c) &= (9; 0; 9) \end{aligned}$$

Проверка:

$$\begin{aligned} 36^3 + 36^3 + 3 \cdot 36 \cdot 36 \cdot 36 &= 36^3 \cdot 5 \neq 36^3 \\ (-36)^3 + (-36)^3 + 3 \cdot 36 \cdot 36 \cdot (-36) &= 36^3 \\ -2 \cdot 36^3 + 3 \cdot 36^3 &= 36^3 \end{aligned}$$

145

$$D = (2 \cdot 36^2)^2 - 4 \cdot 36^4 = 0$$

$$t = \frac{2 \cdot 36^2}{2} = 36^2$$

$$b^2 = 36^2$$

$$b = \pm 36$$

$$\begin{cases} b=36 \\ b=-36 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} a &= \frac{36^2}{b} = \frac{36^2}{36} = 36 \\ a &= \frac{36^2}{-36} = -36 \\ a &= \frac{36^2}{36} = 36 \\ a &= \frac{36^2}{-36} = -36 \end{aligned}$$

$$(a, b, c) = (36; 36; 36)$$

$$(a, b, c) = (-36; -36; 36)$$

5) если $c=0$

50

$$\begin{cases} 9(a+b)^2 = 0 \\ a^2 - ab + b^2 = 0 \end{cases} \quad S_n = \frac{(1+49)}{50} \cdot 50$$

$$\begin{cases} a = -b \\ a^2 - ab + b^2 = 0 \end{cases} \quad 50; 50$$

$$b^2 - (-b)b + b^2 = 0$$

$$b=0 \Rightarrow a=0$$

$$(a, b, c) = (0; 0; 0)$$

ответ: $(0; 0; 0); (0; 9; 9); (9; 0; 9); (-36; -36; 36)$

№5

$$f(1) = 9 - f(4)$$



$$f(2) = \sqrt{f^2(1) + f^2(1)} = \sqrt{f^2(1) + 2f^2(1)}$$

$$f(2) = f(1)\sqrt{2}$$

$$f(3) = \sqrt{f^2(1) + f^2(2)} = \sqrt{f^2(1) + 2f^2(1)} = f(1)\sqrt{3}$$

$$f(4) = \sqrt{f^2(1) + f^2(3)} = \sqrt{f^2(1) + f^2(1)\sqrt{3}} = f(1)\sqrt{4} = 2f(1)$$

$$f(1) + 2f(1) = 9$$

$$f(1) = 3, \text{ тогда } f(2) = 3\sqrt{2}; f(3) = 3\sqrt{3}; f(4) = 6$$

Предположим, что

$$f(n) = 3\sqrt{n}, \text{ где } 3 = f(1)$$

$$\text{Тогда } f(n+1) = 3\sqrt{n+1}$$

$$f(k) = \sqrt{f^2(1) + f^2(k-1)} = \sqrt{f^2(1) + f^2(k-1) \sqrt{f^2(1) + f^2(k-2)}} =$$

$$= \sqrt{3^2 + (\sqrt{3^2 + 3^2 + \dots + (\sqrt{3^2 + 3^2})^2})^2} = 3\sqrt{k}$$

Тогда

$$f(2^{2023}) = 3\sqrt{2^{2023}}$$

$$\text{Ответ: } 3\sqrt{2^{2023}}$$

Не пояснено, почему так.
Строгая запись:

$$f(k) = \sqrt{f^2(1) + f^2(k-1)} =$$

$$= \sqrt{9 + 9(k-1)} = \sqrt{9k} = 3\sqrt{k}$$

№3

$$50 \cdot 50 = 2500 \text{ клеток} \Rightarrow \frac{2500}{1250} = 2, \text{ т.е. } \underline{\text{каждый клетка делится}} \text{ в каждой столбце}$$

1. Если предположить, что n -во 1 ~~везде~~ ^{во} разное, то:

$$n + n+1 + n+2 + n+3 + n+4 \dots n+50 = 1250$$

$$50n + 1200 = 1250$$

$n=1$, т.е. в каждой столбце должно быть от 1 до 50 единиц без повторений

2. Однако верно и обратное, что, зная в каждой строке n раз-

Код участника:

(заполняется организатором)

10-092

№3 (кросс)

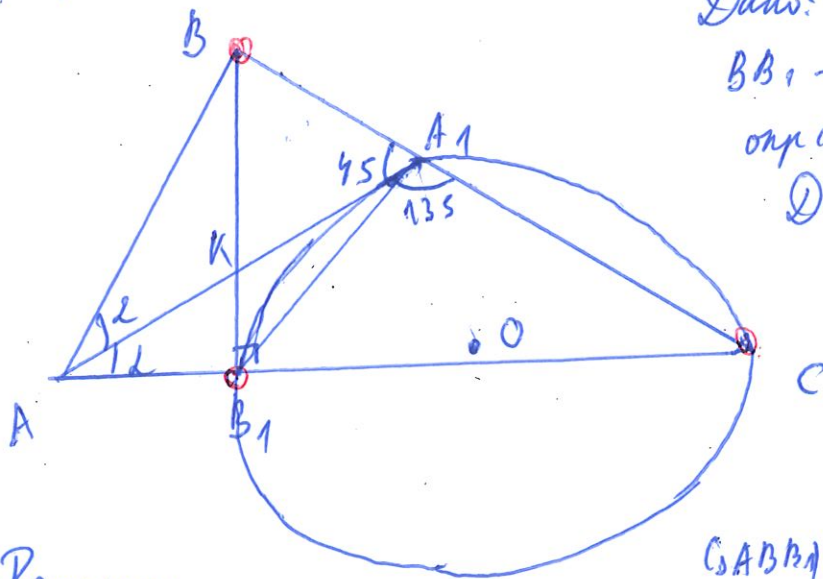
3-нее количество единиц, они должны быть распределены без повторений от 1 единицы в строке до 50. Тогда хотя бы в одной строке и столбце количество единиц совпадает

0	0	0	0	0
1	1	0	0	0
1	1	1	0	0
1	1	1	0	0
1	1	1	1	1

Решение только
иллюстрация, но не доказательство.

+2

№4



Дано: $\triangle ABC$; AA_1 – биссектриса
 BB_1 – высота; $\angle AA_1B = 45^\circ$
опр. $(O; R)$ описанная окружность $\triangle A_1B_1C$
Доказать: AA_1 – касательная

Общая

Решение:

$$\text{т.к. } \frac{A_1B}{\sin \angle A_1CB} = \frac{AB}{\sin \angle A_1AB}$$

$$\frac{A_1C}{\sin \angle A_1CB} = \frac{AC}{\sin \angle A_1AC}$$

$$\sin \angle A_1CB = \frac{A_1B \cdot \sin 45^\circ}{AB} = \frac{A_1C \cdot \sin 45^\circ}{AC}$$

т.к. AA_1 – биссектриса $\triangle ABB_1$

$$\frac{A_1B}{AB} = \frac{B_1A}{B_1B} \Rightarrow AB = \frac{B_1A \cdot B_1B}{B_1B}$$

$$\frac{A_1B}{AB} = \frac{B_1A}{B_1B}; \frac{A_1C}{AC} = \frac{A_1B}{AB}$$

$$\sin(180 - \angle AA_1B) = \sin \angle AA_1B = \sin 45^\circ$$

не решено

$$\frac{A_1B}{AB} \cdot \frac{A_1C}{AC} \Rightarrow AB = \frac{A_1B \cdot AC}{A_1C}$$

т.к. м. Менелая $\triangle BB_1C$

$$\frac{A_1B}{A_1C} \cdot \frac{AC}{AB_1} \cdot \frac{B_1A}{B_1B} = 1$$

верно

Код участника:

(заполняется организатором)

10-092

№ 8. Н. Круг

~~При правильной игре всегда выигрывает Волк.~~~~Всего 100 клеток, 4 из них уже заняты, из угла у зайца только один выход, у волка 2. Таким образом оказавшись~~

$$\frac{A_1 B}{A_1 C} \cdot \frac{AC}{AB_1} \cdot \frac{AB_1}{AB} = 1$$

$$\frac{A_1 B}{A_1 C} \cdot \frac{A_1 C}{A_1 B} = 1$$

по м. Менелая (A A A₁ C)

$$\frac{CB_1}{AB_1} \cdot \frac{AK}{KA_1} \cdot \frac{A_1 B}{BC} = 1$$

№ 8

При правильной игре победит Волк, т.к. на поле находятся 4 клетки, откуда у зайца только один выход (улит) $\Rightarrow$ в случае если Заяц попадет туда, он в любом случае проигрывает.



