

Код участника:

(заполняется организатором)

М 9-056

v2

Рассмотрим что может произойти с суммой цифр числа при прибавлении +1, т.е. перехода к следующему по порядку числу. (последовательному)

1) не происходит переход к след. десятку, например $23+1=24$.

Сумма цифр увеличивается на 1 т.к. последняя цифра увеличивается на 1.

2) переход через один десяток, например $89+1=90$

Сумма цифр уменьшается на $9-1=8$

3) переход через два десятка: $399+1=400$

Сумма цифр уменьшается на $9 \cdot 2 - 1 = 17$

4) переход через 3 дес.

уменьш. на $9 \cdot 3 - 1 = 26$

Итак, в варианте 1 к условию выполнено не может

т.к. $2m^2 - 2n^2 > 1$, где m и n - натуральные

$2m^2 - 2n^2 = 2(m^2 - n^2) = 2(m-n)(m+n) = 9k - 1$, где без ограничения общности $m > n$, m, n и k - натуральные.

$2(m-n)(m+n) + 1 = 9k \Rightarrow k$ - нечетное

Пусть $m=7, n=6$, тогда из ур-я выше $k=3$

Тогда числа $t=99999998999$ - его сумма $9 \cdot 10 + 8 = 98 = 49 \cdot 2 = 7^2 \cdot 2$

и число $t+1=99999999000$ - его сумма $9 \cdot 8 = 72 = 2 \cdot 36 = 6^2 \cdot 2$

Порождает пар условия.

Ответ: да, существуют.

Код участника:

(заполняется организатором)

М. 9- 036

Разобьём строки на ^{№1} пары произвольно, получим $\frac{12}{2} = 6$ пар.
Тогда сумма чисел во всей ~~таблице~~ таблице
будет больше, чем $6 \cdot 16 = 96$.

Так как $96 = 12 \cdot 8$, а сумма чисел в таблице больше,
чем 96, то по принципу Дирихле обязательно найдётся
~~столбец~~ столбец, сумма чисел в котором будет больше 8.
ч.т.д.

№3
Если сумма двух чисел делится на 11, то
и их сумма остатков делится на 11, т.к.
остаток при делении на 11 меньше или равен 10,
то сумма остатков равна числу, сумма которого
делится на 11 равна 0 или 11.
Чтобы сумма остатков была равна нулю необходимо
чтобы оба числа делились на 11.
Заметим, что если у выбранных трёх чисел остаток при делении
на 11 не 0, то сумма любых двух из них не всегда
делится на 11.
Потому что если у одного числа остаток 1, то у второго
остаток 10, у третьего не может быть такого остатка, чтобы
он в сумме с 10 или 1 давал 11 одновременно.
Аналогично если первое число имеет остаток 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.
Тогда понимаем, что для трёх выбранных чисел все делится
на 11. Чисел, делимых на 11 из промежутка от 1 до 1000
 $\frac{990}{11} = 90$ чисел. Тогда найдём кол-во вар-ов их выбора.

Код участника:

(заполняется организатором)

BL-9-036

№3 (продолжение)

Выбрать 3 числа из 90 способов 90 · 89 · 88,
а так как нам не нужно учитывать их «перестановки»,
т.е. последовательность их выбора то способов будет

$$\frac{90 \cdot 89 \cdot 88}{3!} = \frac{90 \cdot 89 \cdot 88}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 15 \cdot 89 \cdot 88 = 117480$$

$$\begin{array}{r} \times 88 \\ 15 \\ \hline 120 \\ 88 \\ \hline 1320 \\ 88 \\ \hline 1188 \\ 1056 \\ \hline 117480 \end{array}$$

Ответ: 117480

№4

$$\begin{aligned} a+b=1 &\Rightarrow (a+b)^2=1^2 \Rightarrow a^2+2ab+b^2=1 \Rightarrow a^2+b^2=1-2ab \\ \text{Тогда} \quad \frac{a^2}{1+b} + \frac{b^2}{1+a} &= \frac{a^2(1+a) + b^2(1+b)}{(1+b)(1+a)} = \frac{a^2+a^3+b^2+b^3}{1+a+b+ab} = \\ &= \frac{a^2+b^2+(b^3+a^3)}{1+(a+b)+ab} = \frac{a^2+b^2+(a+b)(a^2+ab+b^2)}{2+ab} = \frac{a^2+b^2+(a^2+b^2+ab)}{2+ab} = \\ &= \frac{2(a^2+b^2)+ab}{2+ab} = \frac{2-2ab+ab}{2+ab} = \frac{2-ab}{2+ab} \end{aligned}$$

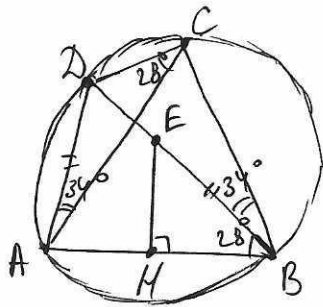
Так как $a > 0$ и $b > 0$ по условию, то $ab > 0$, тогда
 $2-ab < 2+ab \Rightarrow \frac{2-ab}{2+ab}$ — правильная дробь, а правильная
дробь по определению меньше 1 т.к. числитель меньше
знаменателя. Значит $\frac{2-ab}{2+ab} < 1$, а т.к. $\frac{a^2}{1+b} + \frac{b^2}{1+a} = \frac{2-ab}{2+ab}$, то
 $\frac{a^2}{1+b} + \frac{b^2}{1+a} < 1$. Ч.т.д.

Код участника:

(заполняется организатором)

М 9-036

н 5



$\angle DCA$ и $\angle DBA$ имеют ~~одну~~ общую опираются

на одну хорду AD , значит

AD — это хорда, а $\angle DCA = \angle DBA$ — вписанные

углы. Тогда вокруг четырёхугольника

выпуклого можно описать окружность.

Тогда $\angle CDA = 180^\circ - 34^\circ - 28^\circ = 180^\circ - 62^\circ = 118^\circ$, тогда

$\angle DAC = 62^\circ - 28^\circ = 34^\circ = \angle CBD$ — как вписанные, опирающиеся на одну дугу

$$EH = EB \cdot \sin 28^\circ = AD \cdot \sin 28^\circ, \quad \sin 28^\circ < 0,5$$

По т. косинусов в ~~треугольнике~~ $\triangle ACD$:

$$AC^2 = AD^2 + DC^2 - \cos(118^\circ) \cdot 2AD \cdot DC = AD^2 + DC^2 + \sin(28^\circ) \cdot 2AD \cdot DC$$

$$\cos 118^\circ = \cos(180^\circ - 62^\circ) = -\cos(62^\circ) = -\sin(28^\circ)$$

$$\sqrt{AD^2 + DC^2 + 2AD \cdot DC \cdot \sin 28^\circ} > \sqrt{AD^2 \sin^2 28^\circ + 2AD \cdot DC \cdot \sin 28^\circ + DC^2}$$

$$AD^2 + DC^2 + 2AD \cdot DC \cdot \sin 28^\circ > AD^2 \sin^2 28^\circ + 2AD \cdot DC \cdot \sin 28^\circ + DC^2$$

$$\underbrace{AD^2}_{>0} (1 - \sin^2 28^\circ) + \underbrace{2AD \cdot DC \cdot \sin 28^\circ}_{>0} > 0 \text{ — истина.}$$

$$\text{ч.т.д. } (>0 \text{ т.к. } \sin(28^\circ) < 0,5 \Rightarrow \sin(28^\circ) < 0,25 < 1)$$

Код участника:

(заполняется организатором)

М. 9-086

№ 7

Если каждый из 43 участников, пришедших на собрание будет знаком хотя бы с одним из остальных, то у ~~каждого~~ каждого есть хотя бы 1 знакомый из 42. Но чтобы это условие соблюдалось для любых 43 участников собрания, то человек, у которого ровно один друг на собрании должен иметь знакомство со всеми, кто не пришел на собрание т.е. с еще $83-43=40$ людьми. Потому что если он имеет знакомство с меньше, чем $40+1=41$ человеком, то все эти люди могут не оказаться на собрании и у этого человека на собрании не будет знакомых, что противоречит условию.

Тогда у каждого человека хотя бы 41 знакомый среди участников совета.

Рассмотрим двух участников совета. Кроме них в совете еще $83-2=81$ участник. Тогда каждый из них знает по 41 человеку из них по ранее доказанному, если они сами не знакомы.

Тогда если у них нет ~~ни~~ общих знакомых, то они знают 82 человека из совета, т.е. они либо знают друг друга, либо в совете $82+2=84$ человека, что противоречит условию. Значит любые два участника либо знакомы либо имеют хотя бы одного общего знакомого.

т.т.г

N 1.

Так как сумма чисел в любых двух строках ~~равна~~ больше 20, то сумма всех чисел в таблице больше 100 (таблица состоит из пяти пар строк, $5 \cdot 20 = 100$).

Предположим, что в таблице нет столбца, в котором сумма чисел больше 10. Так как таблица состоит из 10 столбцов, $10 \cdot 10 = 100$, то сумма всех чисел в таблице не больше 100.

Получим противоречие. Значит, такой столбец есть в таблице.

Ответ: да.

N 2.

Такие два натуральных числа существуют, например, числа 999 и 1000. Они являются последовательными и натуральными. Сумма цифр числа 999 ~~и~~ равна $9+9+9 = 27 = 3^3$. Сумма цифр числа 1000 равна $1+0+0+0 = 1 = 1^3$. Ответ: да.

N 3.

Если число n делится на 7, то его можно представить в виде $n = 7h + 0$, где $h \in \mathbb{N}$. ~~Значит~~ Так как на доске выписаны все числа от 1 до 500, то:

$$1 \leq 7h \leq 500$$

$$\frac{1}{7} \leq h \leq 71 \frac{3}{7}$$

т.к. $h \in \mathbb{N}$, то

$1 \leq h \leq 71$. Значит, из всех выписанных на доске чисел на 7 делится только 71.

N3 (продолжение)

стр. 2

Сумма двух чисел делится на 7 только тогда, когда каждое из них делится на 7. Значит, если из трех различных чисел ~~ка~~ сумма любых двух делится на 7, то каждое из этих трех чисел делится на 7.

Таким образом, количество ^{способов} выбрать ~~из~~ три различных числа из написанных ~~равно~~ требуемым в условии образом равно количеству способов выбрать три различных числа только из тех написанных чисел, которые делятся на 7. Значит, количество способов равно ~~$\frac{71 \cdot 70 \cdot 69}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 81270$~~ сочетания из 71 по 3, равно

$$\frac{71 \cdot 70 \cdot 69}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 71 \cdot 35 \cdot 23 = 57155. \text{ Ответ: } 57155.$$

Ответ: 57155 способов.

N4

$$\begin{aligned} a + b &= 1, \quad a > 0, \quad b > 0 \\ \frac{a(a^2+b)}{a+b^2} + \frac{b(a+b^2)}{a^2+b} &= \frac{a(a^2+b) + b(a^2+b^2)}{(a+b^2)(a^2+b)} = \\ &= \frac{a^3 + ab + ab + b^3}{a^3 + ab + a^2b^2 + b^3} = \frac{(a^3 + ab + b^3) + ab}{(a^3 + ab + b^3) + a^2b^2} \end{aligned}$$

Поскольку сумма a и b равна 1, то ~~также~~ каждое из них меньше единицы, значит, их произведение $ab < 1$.

$$1 > ab \quad | \cdot ab \neq 0$$

$$ab > a^2b^2 \quad | + (a^3 + ab + b^3)$$

$a^3 + ab + b^3 + ab > a^3 + ab + b^3 + a^2b^2$. Числитель дроби больше ее знаменателя. Значит, дробь больше 1 т. е. д.

N 6.

Сур. 3

по условиям

$$AB = BC; \angle BAC = \angle BCA.$$

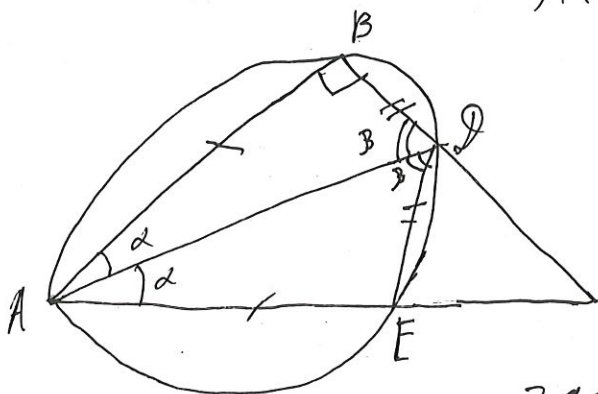
$\angle CBA = \angle BAC = \alpha$.

$\angle DAC = \angle BAO = \alpha$ н. к. AD - гаровую

Диссектриса $\angle BAC$ по условию.

$$\angle B D = \angle D E \quad \text{m.k. wx}$$

закрываются развиле высшие ушлы.



$BD = DE$, т.к. равные дуг стягиваются равными хордами. Т.к. в четырехугольнике $ADDE$ можно

Вписаны окружности, но $AB + DE = AE + BD$

$$AB + DF = AF + DE$$
$$AB = AE$$

Пусть $\angle BDA = \beta$
 $\angle ADE = \angle ADB = \beta$ как вертикальные и опирающиеся на
 равные дуги ($\because AB = AE$ и к. стягиваемые равными
 хордами).

III. К. четырехугольник $ABDE$ - вписанный, но

$$\angle BAE + \angle BDE = 180^\circ$$

$$\angle BAC = \angle BAD + \angle DAE + \angle EAC = 180^\circ$$

$$\alpha + \alpha + \beta + \beta = 180^\circ$$

$$\alpha + \beta = 90^\circ$$

П.к. сумма углов треугольника равна 180° !

$\triangle ABD: \angle ABD = 180^\circ - \angle BAD - \angle BDA = 180^\circ - (\alpha + \beta) = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ;$

$\rho_1 ABC$:

$$\angle BAC + \angle BCA + \angle ABC = 180^\circ$$

$$2 \angle BAC + 90^\circ = 180^\circ$$

$$\angle BAC = 45^\circ$$

$\angle BCA = \angle BAC = 45^\circ$. *Assim:* 45° ; 45° ; 90° .

№ 7.

стр. 4

Докажем, что каждый из участников имеет ~~не менее 50 знакомых~~. Больше 49 знакомых. Предположим, что человек N имеет не более 49 знакомых. Тогда, выбрав на секретное собрание его и 51 незнакомого ему человека V , получим, что человек N не знаком ни с одним из остальных присутствующих, что противоречит условию. Значит, каждый участник имеет более 49 знакомых. Так как число знакомых выражается натуральным числом, то каждый участник имеет не менее 50 знакомых.

Предположим, что найдены два участника A и B , которые не знакомы друг с другом и не имеют общих знакомых. Однако, ~~то~~ оба участника имеют не менее ~~каждых~~ 50 знакомых. Так как общих знакомых у них нет, то общее количество участников будет ^{не менее} $50 + 50 + 1 + 1 = 102$ (50 знакомых у A , 50 знакомых B и сами участники A и B). Но в секретном совете по условию участвует ровно 101 человек. Получили противоречие. Значит, ~~некоторые~~ ^{каждые} два участника A и B либо знакомы друг с другом, либо имеют общих знакомых и т.д.

Бланк ответа

Всероссийская олимпиада школьников «Миссия выполнима. Твоё призвание – финансист!»

Код участника:

(заполняется организатором)

119-013

4. $a+b=1$ (усл.) $\Rightarrow b=1-a$; Подст. вместо $b \rightarrow 1-a$. Получим.

$$\frac{a}{a+(1-a)^2} + \frac{1-a}{a^2+(1-a)} = \frac{a}{a^2+1-a} + \frac{1-a}{a^2+1-a} = \frac{1}{a^2+1-a}$$

$$1 > 0; a^2+1 \geq 2a, \text{ т.к. } a^2-2a+1 \geq 0$$

$$\underbrace{(a-1)^2}_{\text{квадрат действительного числа}} \geq 0$$

квадрат действительного числа.

Значит, $a^2+1-a \geq 2a-a=a>0$ (по усл.) $\Rightarrow$ знаменатель >0 и т.к. числитель $>0 \Rightarrow$ дробь >0 . Перенесём 1 в др. часть

$$\frac{1}{a^2+1-a} - 1 = \frac{1}{a^2+1-a} - \frac{a^2+1-a}{a^2+1-a} = \frac{a-a^2}{a^2+1-a} > 0 \text{ (док. ранее)}$$

$$a-a^2 = a(1-a) = ab, \text{ т.к. } a, b > 0 \Rightarrow \text{пр-е} > 0 \Rightarrow \text{числитель} > 0 \text{ т.к.}$$

0 0 (из усл. на сумму)

знаменатель $>0 \Rightarrow$ значение дроби >0 .

2. Т.к. натуральное число явл. целым $\Rightarrow$ оно сравнимо по мод. 9 со

~~2. 1; 8; 27; ... k^3 - точные кубы. Если сумма цифр числа b ($b \in \mathbb{N}$) - точный куб, то сам~~

2. Да, пример: 999 сумма цифр $9+9+9=27=3^3$

$$999+1=1000 \text{ сумма цифр } 1+0+0+0=1=1^3$$

Ответ: да, это, пример числа 999 и 1000 - чев. последовательные

1. Сумма в любых двух строках $> 20 \Rightarrow$ общая сумма всей таблицы (по строкам)

$$> \frac{\overset{\text{сумма}}{20 \cdot 10}}{2} = 100 \rightarrow \text{каждый строк}$$

делим на 2, т.к. сумма в любых двух, т.е. не обязательно в каждой строке. Сумма всей табл. (по строкам) $> 100 \Rightarrow$ сумма всей табл. (по столбцам) тоже > 100 , т.к. суммы по строкам и столбцам равны (Табл. одна и та же). Сумма всей табл. (по столб.) > 100 . Столбцов 10 (Табл. 10×10) $\Rightarrow \exists$ столбец > 10 . Да, существует обязательно.
где сумма

7. Приведём 1 гр. из 52 чел. У них по усл ≥ 1 знакомого на собрании.

Р-м человека, бывш. на 1 собрании. Заменяем оставшихся ($52-1=51$) на других, но тогда, т.к. всего людей 101, значит кто-то из оставшихся пойдёт на второе собр., встретит ~~на~~ рассматриваемого ранее на первом и ($101-51=50 < 51$, т.е. нельзя заменить всех из 1 собр. на "новых") вторым

собр.; у нас тогда 50 чел, которых не было на первом собр. Т.е. на каждом

собр. есть человек, знакомый с кем-то до этого собр. Из них тоже можно

взять гр. из 52 чел, там тоже будут знакомые, причем которых не было

ранее, т.к. рассужд. про знакомого до данного собр. верно для каждого из 101,

то ~~на~~ в любых 2 имеют общ. знакомого либо знакомы (из 101 ч. можно выбрать собр.)

7 В $ABDE$ можно впис. окруж (усл.) $\Rightarrow AB + DE = AE + BD$

$$\frac{AC}{DC} = \frac{AB}{EC} \quad \text{из } \sim \Delta \quad | \cdot \frac{DC}{AB}; \quad \frac{AC}{AB} = \frac{DC}{EC}$$

$$\stackrel{||}{\frac{DC}{BD}} \text{ (из об-ва бис-са)}$$

$$\Rightarrow BD = EC$$

$$\stackrel{||}{DE} \text{ (т.к. } \angle C = \angle EDC = 2\alpha \text{)}$$

из счѣта углов $\Rightarrow$
 $\triangle EDC$ - прѣ

$$AB + DE = AE + BD \Rightarrow AB = AE$$

$\left\{ \begin{array}{l} AD - \text{общ} \\ \angle DAE = \angle BAD = \alpha \text{ (} AD - \text{бис-са по усл.)} \end{array} \right. \Rightarrow \triangle ADE \text{ равен } \triangle ADE \text{ (Imp)}$

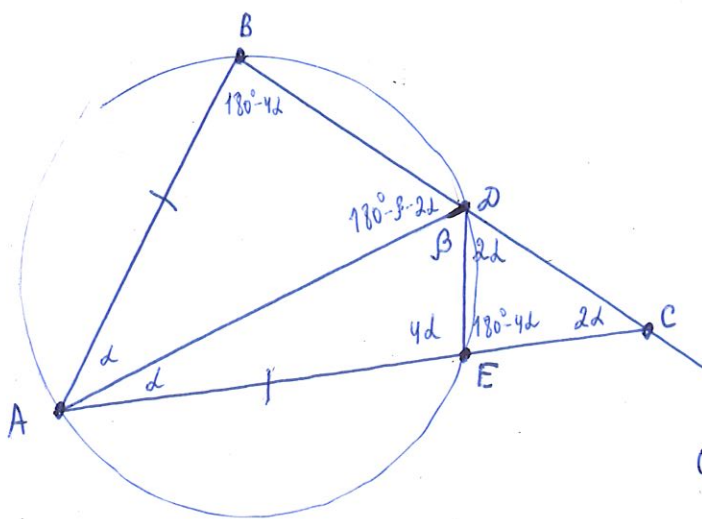
$$AB = AE \text{ (по к.)} \Rightarrow \angle AED = \angle ABD \text{ (соотв. элем.)}$$

$$\stackrel{||}{\angle 4\alpha} \quad \stackrel{||}{\angle 180^\circ - 4\alpha} \quad 180^\circ - 4\alpha = 4\alpha \Rightarrow \alpha = 24,5^\circ \Rightarrow \angle BAC = \angle C = 2\alpha = 49^\circ$$

$$\angle ABC = 180^\circ - \angle C - \angle BAC = 82^\circ \quad \text{по Т.О } \Sigma \text{ углов } \Delta \text{ для } \triangle ABC$$

$$\text{Отв: } 49^\circ; 49^\circ; 82^\circ$$

6.



AD - бис-са $\Rightarrow \angle BAD = \angle DAC = \alpha$
 $\angle BAC = \angle BAD + \angle DAC = 2\alpha$

$\triangle ABC$ - рд. $\left. \begin{array}{l} AC=BC \\ \angle C \end{array} \right\} \Rightarrow \angle C = \angle BAC = 2\alpha$

$\angle ADE = \beta \Rightarrow \text{т.к. около } ABDE \quad \square$

ОК-ть (усл., ~~вн. кас.~~ ~~вн. кас.~~) $\Rightarrow$
 Все A, B, D лежат на одной окруж., E - т. кас. окруж., $\angle ADE$ - $\angle ABE$

$\angle BAE + \angle BDE = 180^\circ$ (сумма против. $\angle = 180^\circ$) $\Rightarrow \angle ADB = \angle BDE - \angle ADE = 180^\circ - \beta - 2\alpha$
 $\angle BDE = 180^\circ - \angle BAE = 180^\circ - 2\alpha$; $\angle EDC + \angle BDE = 180^\circ$ (смен.) $\Rightarrow \angle EDC = 180^\circ - \angle BDE =$

$= 2\alpha$; $\angle AED = 180^\circ - \angle DAE - \angle ADE = 180^\circ - \alpha - \beta$ (из $\triangle ADE$ по т.о. Σ углов $\triangle$)
 $\parallel$
 $\angle DAC$ (один и тот же)

поэтому, $\angle AED = \angle EDC + \angle ECD = 4\alpha$ (как внешний для $\triangle EDC$)
 $\parallel$
 $\angle C$ (один и тот же)

$\Rightarrow 4\alpha = 180^\circ - \alpha - \beta = \angle AED$. Из $\triangle ADC$ по т.о. сумма углов $\triangle$

$180^\circ = \angle ACD + \angle DAC + \angle ADC = 5\alpha + \beta$
 $\parallel$
 $\angle C$ (один и тот же) $\angle ADE + \angle EDC$

~~Итак имеем с-у:~~
 $\begin{cases} 4\alpha = 180^\circ - \alpha - \beta \\ 5\alpha + \beta = 180^\circ \end{cases} \quad (1)$

$\angle DEC = 180^\circ - \angle AED = 180^\circ - 4\alpha$ (смен.)

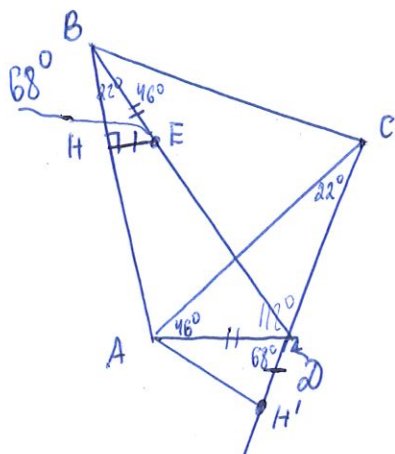
из св-ва бис-сы $AD \quad \frac{DC}{BD} = \frac{AC}{AB}$

$\angle C$ - общ.

$\angle C = \angle EDC = \angle BAC \Rightarrow \triangle DEC$ подобен $\triangle ABC$ (триг.)

$\frac{EC}{BC} = \frac{DC}{AC} = \frac{DE}{AB}$ (как соответ. стор.)

5.



Из $\triangle BEN$ по т.о. сумме углов

$$\angle BEN = 180^\circ - \angle BHE - \angle HBE = 68^\circ$$

" " $\angle ABD$ (один и тот же $\angle$)
(EH-перп по усл.)

$$\angle ABD = \angle ACD \text{ (усл.)} \Rightarrow AD \text{ видна под}$$

одинаковым углом. Из второго угла $\Rightarrow \angle CAD = \angle CBD = 46^\circ$. Из $\triangle ACD$ по т.о. сумме отсчитанного четырёхуг.

$$\text{Угол } \angle ADC = 180^\circ - \angle ACD - \angle CAD = 112^\circ. \text{ Отметим на продолжении } CD$$

Точку H' так, что $DH' = EH$, т.к. DH' - продолжение $DC \Rightarrow \angle ADH' = 180^\circ - \angle ADC = 68^\circ$ (как смежные, ведь DH' по постро.)

$$\begin{cases} AD = BE \text{ (усл.)} \\ DH' = EH \text{ (постр.)} \\ \angle ADH' = \angle BEN \text{ (так посм.)} \end{cases}$$

$\Rightarrow \triangle ADH'$ равен $\triangle BEN$ по I пр.

$$\Rightarrow \angle AH'D = \angle BNE = 90^\circ \text{ (соотв. элем.)}$$

$$\angle AH'D = 90^\circ \Rightarrow AC \text{ - гипот. } \triangle AH'C$$

(он пр-ый)

$$\Rightarrow AC > CH' = CD + DH' ; CH' = CD + DH' \text{ по постро. и т.д.}$$

(итоговый > любой другой) $\Rightarrow H$ (постр.)

3. По mod. ~~10~~ 7 напомним остатки всех чисел

$$\underbrace{(1; 2; 3; 4; 5; 6; 0)}_{1 \dots 7} \quad \underbrace{(1; 2; 3; 4; 5; 6; 0)}_{8 \dots 14} \quad \dots \quad (1; 2; 3)_{488; 489; 500}$$

Реш: I вариант^{се} число $\div 7 \Rightarrow$ оставшиеся 2 чис. $\div 7$, иначе пр-ие с усл. на парную сумму. Числ $\div 7 \rightarrow 71$, т.е. 71 не выбрать первое число $\div 7$, тогда второе число и третье число стое. выбрать 70 и 69 соотв (нельзя брать то же самое число, что ранее было выбрано). Умножим стоеба, выбор независим. В этом сл: $71 \cdot 70 \cdot 69$

выбора чисел независим

$$71 \cdot 70 \cdot 69$$

$$\frac{71 \cdot 70 \cdot 69}{3!} = 57155 \text{ сл.}$$

$3! \rightarrow$ делим на $3! = 6$, т.к. порядок

~~Реш~~:] число даёт ост. $\neq 0$ по mod-7.] этот остаток: $i \Rightarrow$

второе число в группе из трёх ост $7-i$, чтоб сумма в паре $\div 7$,

но тогда третье число остаток по mod-7 должно давать $7-i$, чтоб

сумма вместе с первым $\div 7$, но и сумма со вторым должна быть

$$\text{кратна } 7 \Rightarrow \underbrace{(7-i)}_{\text{ост. второго числа}} + \underbrace{(7-i)}_{\text{ост. третьего числа}} \div 7 = (14-2i) \div 7 \Rightarrow i \div 7, \text{ т.к. } (2; 7) = 1,$$

ост. второго числа

↑ чтоб сохр. делимость на 7

второго и третьего числа $\Rightarrow$ можно брать лишь числа $\div 7$, способы не выбирать см. ранее.

№1

1) В таблице можно выбрать 6 непересекающихся пар строк. Сумма чисел в каждой паре больше 16, тогда сумма чисел во всей таблице больше $16 \cdot 6 = 96$. Обозначим сумму чисел в таблице S , тогда мы получим, что $S > 96$.

2) Предположим противное: в таблице нет ни одного столбца с суммой цифр больше 8. Т.е. сумма цифр в каждом столбце меньше или равна 8, тогда сумма чисел во всей таблице меньше или равна $8 \cdot 12 = 96$. $S \leq 96$. Но в пункте 1) мы получили, что $S > 96$. Получаем противоречие, значит, предположение неверно и в таблице есть хотя бы один столбец с суммой цифр больше 8.

Ответ: да, обязательно.

№4

$$a+b=1, a>0, b>0$$

$$\text{Доказать: } \frac{a^2}{1+b} + \frac{b^2}{1+a} < 1$$

$$\frac{a^2}{1+b} + \frac{b^2}{1+a} = \frac{a^2(1+a) + b^2(1+b)}{(1+b)(1+a)} = \frac{a^2 + a^3 + b^2 + b^3}{1+a+b+ab} = \frac{(a+b)^2 - 2ab + (a+b)(a^2 - ab + b^2)}{a+b+1+ab} =$$

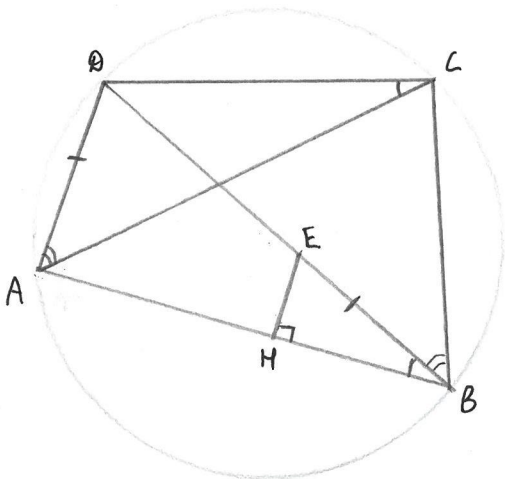
$$= \frac{1^2 - 2ab + 1(a^2 - ab + b^2)}{1+1+ab} = \frac{1 - 2ab + a^2 - ab + b^2}{2+ab} = \frac{(a^2 + b^2)^2 - 5ab + 1}{2+ab} = \frac{1^2 - 5ab + 1}{2+ab} = \frac{2-5ab}{2+ab}$$

$$2-5ab < 2+ab, \text{ т.к. } a, b - \text{положительные, значит, } \frac{2-5ab}{2+ab} < 1$$

$$\frac{a^2}{1+b^2} + \frac{b^2}{1+a^2} < 1$$

т.м.г.

№5



Дано: ABCD - выпуклый четырехугольник

$$\angle ABD = \angle ACD = 28^\circ, \angle CBD = 34^\circ$$

$$E \in BD, BE = AD$$

$$EH \perp AB, H \in AB$$

Доказать: $AC > EH + CD$

1

Код участника:

(заполняется организатором)

119-117

№5 (продолжение)

Доказательство:

- 1) $\angle ABA = \angle ACA$ и точки B и C лежат по одну сторону от прямой AD , значит, точки A, D, B и C лежат на одной окружности, т.е. четырехугольник $ABCD$ – вписанный
- 2) $ABCD$ – вписанный, тогда $\angle ADC + \angle ABC = 180^\circ$ по свойству вписанного четырехугольника
 $\angle ADC = 180^\circ - \angle ABC = 180^\circ - (\angle ABD + \angle CBD) = 180^\circ - (28^\circ + 34^\circ) = 180^\circ - 62^\circ = 118^\circ$.
- 3) В $\triangle BEM$ $\angle H = 90^\circ$, тогда $\angle BEN + \angle EBM = 90^\circ$ по сумме острых углов прямоугольного треугольника, тогда $\angle BEN = 90^\circ - \angle EBM = 90^\circ - 28^\circ = 62^\circ$
- 4) В $\triangle ADC$ по теореме косинусов
 $AC^2 = AD^2 + CD^2 - 2AD \cdot CD \cdot \cos 118^\circ$
 $- \cos 118^\circ = \cos(180^\circ - 118^\circ) = \cos 62^\circ$, тогда $AC^2 = AD^2 + CD^2 + 2AD \cdot CD \cdot \cos 62^\circ$
- 5) В $\triangle BEM$ $\angle H = 90^\circ$, тогда
 $\cos \angle BEN = \frac{EH}{BE}$

$$EH = BE \cdot \cos \angle BEN = BE \cdot \cos 62^\circ = AD \cdot \cos 62^\circ \quad (BE = AD \text{ по условию})$$

- 6) $AC \leq EH + CD$. $AC > 0$ и $EH + CD > 0$ по смыслу задачи, значит, можно возвести обе части в квадрат

$$\begin{aligned} AC^2 &\leq EH^2 + CD^2 + 2EH \cdot CD \\ AD^2 + CD^2 + 2AD \cdot CD \cdot \cos 62^\circ &\leq AD^2 \cdot \cos^2 62^\circ + CD^2 + 2AD \cdot \cos 62^\circ \cdot CD \\ AD^2 + 2AD \cdot CD \cdot \cos 62^\circ &\leq AD^2 \cdot \cos^2 62^\circ + 2AD \cdot CD \cdot \cos 62^\circ \\ AD + 2CD \cdot \cos 62^\circ &\leq AD \cdot \cos^2 62^\circ + 2CD \cdot \cos 62^\circ \\ AD &\leq AD \cdot \cos^2 62^\circ \end{aligned}$$

$$\cos 62^\circ < 1, \text{ тогда и } \cos^2 62^\circ < 1. \text{ Значит, } AD < AD \cdot \cos^2 62^\circ$$

$$AC^2 < EH^2 + CD^2 + 2EH \cdot CD$$

$$AC < EH + CD$$

т.т.д.

№7

Рассмотрим первых из человека для секретного собрания. Пусть среди них есть 1 человек, который знаком только с одним человеком. Если мы выберем из собрания знакомого 1 человека и спросим одного из оставшихся 40, то 1 человек обязан знать добавляемого иначе он не будет знать никого из собрания, что противоречит условию. Теперь заменим мы можем продолжить 40 раз (т.к. осталось $83 - 43 = 40$ людей), значит, 1 человек знает минимум 41 человека. Заметим, что если пер 1 человек знает в первоначальном составе собрания несколько людей, то логика не меняется: мы уже знаем их и ставим только те новых, среди которых он знает минимум 1 человека. Получаем, что каждый из 83 людей знаком хотя бы с 41 человеком

Код участника:

(заполняется организатором)

119-114

№7 (продолжение)

вторыми двумя людьми, незнакомых друг с другом. У каждого из них по 41 знакомому. Предположим, что среди их знакомых нет общих. Тогда общее количество людей будет $2 + 41 + 41 = 84$, что противоречит условию. Значит, предположение неверно. Получаем, что каждые двое людей либо знакомы, либо имеют хотя бы одного общего знакомого.

Ч. М. О.

№2

Сумма цифр какого числа имеет вид $2n^2$, т.е. является четной. Четность суммы цифр идущих подряд чисел чередуется. Исключения являются места переноса через разряд. Рассмотрим места переноса через разряд у двузначных чисел.

пара чисел	9, 10	19, 20	29, 30	39, 40	49, 50	59, 60	69, 70	79, 80	89, 90
сумма цифр	9, 1	10, 2	11, 3	12, 4	13, 5	14, 6	15, 7	16, 8	17, 9

Можно заметить, что суммы цифр чисел в паре отличаются на 8. Так будет и с другими числами. Тогда, если удвоенные квадраты отличаются на 8, то сами квадраты отличаются на 4 $\begin{cases} 2n_1^2 - 2n_2^2 = 8 \\ 2(n_1^2 - n_2^2) = 8 \\ n_1^2 - n_2^2 = 4 \end{cases}$. Рассмотрим первые несколько

соседних квадратов: 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81. Видим, что разность соседних квадратов увеличивается, а в начале разности, равной четырем, не было.

значит, нет чисел, квадраты

соседних чисел всегда отличаются на нечетное число, а 4 - число четное, значит, квадраты соседних чисел не подходят. Посмотрим на квадраты чисел через 1. Минимальная разность — $8(3^2 - 1^2)$, далее она будет только увеличиваться. Значит, разности, равная четырем, недостижима. Значит, нет чисел, квадраты которых отличаются на 4, тогда нет и чисел, подходящих под условие задачи.

Ответ: таких чисел не существует

Бланк ответа

Всероссийская олимпиада школьников «Миссия выполнима. Твое призвание – финансист!»

Код участника:

(заполняется организатором)

М-9-117

№3

возьмем тройку чисел. Пусть остаток 1 числа при делении на 11 равен x . Сумма 1 и 2 числа должна делиться на 11 по условию, тогда остаток 2 числа при делении на 11 равен $11-x$.

Сумма 1 и 3 числа по условию тоже должна делиться на 11, т.е. остаток 3 числа при делении на 11 равен $11-x$.

Сумма 2 и 3 числа по условию тоже делится на 11. Остаток суммы чисел при делении на какое-либо число равен сумме остатков от деления этих чисел на данные число. Тогда, остаток от деления на 11 суммы 2 и 3 числа равен $11-x+11-x=22-2x$

$22-2x$ должно делиться на 11, т.е. $22-2x=0$

$$2x=22$$

$$x=11$$

Остаток 11 при делении на 11 – это остаток 0.

Значит, есть единственная возможность выбрать тройку чисел, удовлетворяющую по условию: в ней все числа должны делиться на 11.

От 1 до 1000 всего 90 чисел делятся на 11 ($1000:11 \approx 90$). Тогда, количество троек равно $C_{90}^3 = \frac{90!}{3!(90-3)!} = \frac{90!}{3! \cdot 87!} = \frac{88 \cdot 89 \cdot 90}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{44 \cdot 89 \cdot 30}{1 \cdot 1 \cdot 1} = 117\,480$

Ответ: 117 480

№8

~~За ход за ход за ход за ход~~ Петя и Вова опустошают 5 корзин. Всего таких пар будет $200:5=40$. За время игры Петя опустошит $4:40=160$ корзин. В каждой корзине не может быть меньше 10 конфет, иначе общее количество конфет будет меньше 2000. Пете надо брать четверки, так, чтобы хотя бы в одной из корзин конфет было больше 10.

Каждый из 40 ходов Петя найдет такую корзину. Если бы корзина была пустой, то за ход Петя возьмет несколько конфет, в которых больше 10 конфет, но за освобожденными ходами он может брать по 4 и четверку конфет. Тогда у него точно будет 1600 конфет.

Докажем, что найдется 40 корзин с количеством конфет, большим или равным 10. При этом, что найдется 40 корзин с количеством конфет, большим или равным 10. При этом, что найдется 40 корзин с количеством конфет, большим или равным 10. При этом, что найдется 40 корзин с количеством конфет, большим или равным 10.

№1

По условию в любых двух строках сумма чисел больше 16.
Разобьем таблицу следующим образом:

716	{	_____	...
		_____	...
716	{	_____	...
		_____	...
716	{	_____	...
		_____	...
716	{	_____	...
		_____	...
716	{	_____	...
		_____	...
716	{	_____	...
		_____	...

Тогда во всех 12-ти строчках сумма чисел $716 \cdot 6 = 96$. В 12-ти строчках всего 144 числа, в одном столбце - 12 чисел. Тогда если сумма 144 числа больше 96, то сумма 12 чисел больше 8 (по пропорции) $\Rightarrow$ обязательно найдется такой столбец. Ответ: обязательно

№2

Понятно что числа вида ab и ac , где $c-b=1$, не подходят, так как не существует удвоенных квадратов различных натуральных чисел, разность между которыми равна единице. Тогда подходят числа типа $a \dots 9$ и $a \dots 0$. Приведем пример двух таких чисел:

I. $8 \dots 87999$; сумма чисел $= 98 = 2 \cdot 49 = 2 \cdot 7^2$, подходит

II. $8 \dots 8000$, сумма чисел $= 72 = 2 \cdot 36 = 2 \cdot 6^2$, подходит

Ответ: существуют

№3

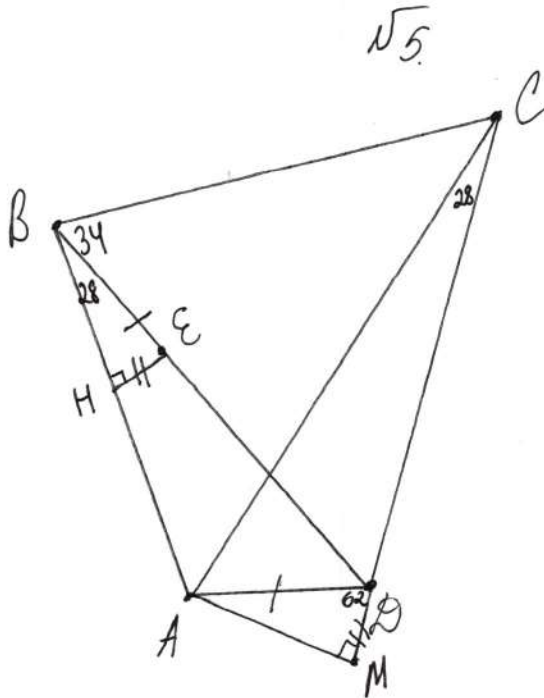
Чтобы сумма любых трех выбранных делилась на 11, сумма всех выбранных чисел должна быть делимой на 11, т.е. все числа должны делиться на 11. Таким образом, нам нужно найти, сколькими способами можно выбрать три числа из промежутка $[1; 1000]$, делимые на 11.

шорт 1 из 4

В одной сотне 9 чисел, делящихся на 11, тогда в 10 сотнях – 90 таких чисел. Нам нужно найти кол-во способов выбрать 3 числа из 90.

$$C_{90}^3 = \frac{90!}{87! \cdot 3!} = \frac{88 \cdot 89 \cdot 90}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 114480$$

Ответ: 114480

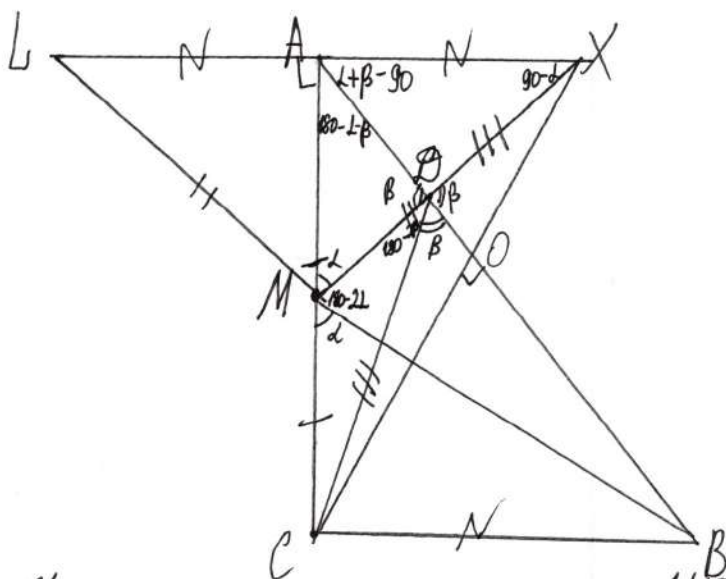
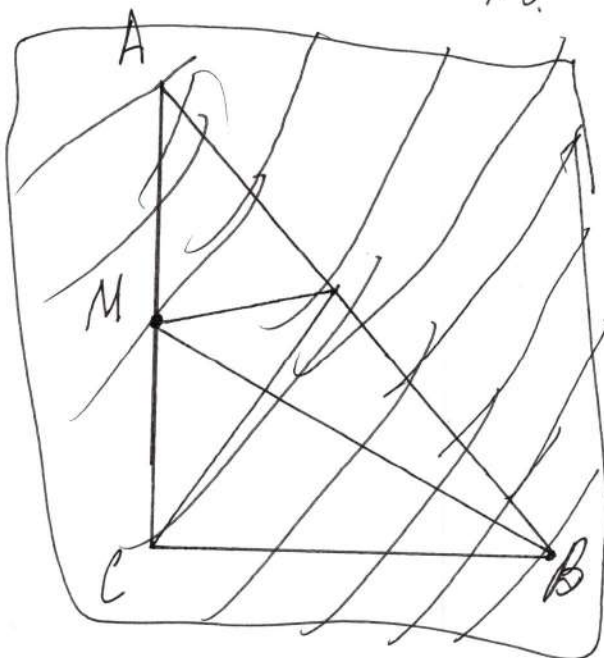


Продлим CD за точку D так, что DM = ME.

Решение.

$\angle ADB = \angle CAE \Rightarrow ABCD$ – вписанный четырехугольник ($\angle ADB = \angle CAE$ опираются на одну дугу). Тогда по свойству $\angle CDA = 180 - \angle ABC = 180 - 28 - 34 = 118 \Rightarrow \angle ADM = 180 - 118 = 62^\circ$. $\angle BEN = 180 - 28 - 90 = 62$. $AD = BE$ (по условию), $ME = DM$ (по построению), $\angle ADM = \angle BEN \Rightarrow \triangle BEN = \triangle ADM$ (по I признаку равенства треугольников). В $\triangle ACM$ тогда $\angle DMA = 90^\circ$ (как соотв. элементы). В $\triangle ACM$ AC – гипотенуза $\Rightarrow AC > CM$; $AC > CD + DM$; $AC > CD + EN$, ч.т.д.

№6.



Угол падения = углу отражения $\Rightarrow \angle AMP = \angle CMB, \angle ADM = \angle CDB$. Проверим $LX \parallel CB$,
 такую, что $ML = MX$. $\angle MXA = 90^\circ - \angle$. $\angle BDH = \angle MDA = \beta$. $AXCB$ - прямоугольник (из-за
 параллельности рисунка это не верно), т.к. $LA = AX \Rightarrow CO = OX$ (по св. паралл.) $\Rightarrow \triangle COX$ - р/б
 (биссектриса - это медиана) $\Rightarrow DO \perp CX$. Диагонали пересекаются под прямым
 углом только в ромбе, $CAXB$ - прямоуго. $\Rightarrow CAXB$ - квадрат (т.к. квадрат - это ромб.)
 Тогда $\angle ACB = \angle B = \angle CAB = \angle ABC = 45^\circ$
 Ответ: $45^\circ, 45^\circ$

№4.

Д-мб: $\frac{a^2}{1+b} + \frac{b^2}{1+a} < 1$

$$\frac{a^2}{1+b} + \frac{b^2}{1+a} = \frac{(1+a)a^2 + b^2(1+b)}{(1+b)(1+a)} = \frac{a^2 + a^3 + b^2 + b^3}{a+b+ab+1}$$

$a+b=1 \Rightarrow b=1-a$.

Подставим $b(1)$:

$$\frac{a^2 + a^3 + (1-a)^2 + (1-a)^3}{a+1-a+a(1-a)+1} = \frac{a^2 + a^3 + 1 - 2a + a^2 + 1 - 3a + 3a^2 - a^3}{a+1-a+a-a^2+1} = \frac{5a^2 - 5a + 2}{a-a^2+1}$$

При делении получаем, что это выражение равно $-5 + \frac{7}{a-a^2+1}$.

$-5 < 0, \frac{7}{a-a^2+1} < 1 \Rightarrow -5 + \frac{7}{a-a^2+1} < 0 \Rightarrow -5 + \frac{7}{a-a^2+1} < 1, \text{ ч. т. д.}$

№7.

Докажем, что у ^{каждого} человека ~~есть~~ ^{максимум} 41 знакомый. Если составить группу из 43 человек, где будет этот человек, то у него будет хотя бы один знакомый. Если мы будем каждый раз менять человека, который был знаком с человеком А, на другого, то новый тоже должен быть знаком с человеком А. Таким образом, у одного максимум $43 - 43 + 1 = 41$ знакомый. Составим группу из человека А, 41 его знакомых и одного незнакомца. Тогда А и его знакомые всегда будут иметь общего знакомого, т.к. у незнакомца также максимум 41 знакомый. Таким образом, мы доказали нужно утверждение.

Код участника:

(заполняется организатором)

49-3/4

Задача 1

1. Если сумма в одной строке будет меньше 8, то сумма во всех других строках будет больше 9 (чтобы сумма в любых двух строках была больше 16).

~~Пусть~~ Пусть есть строка a и строка b
тогда $S_a + S_b > 16$ (по условию)

2. Попробем от противного:

Пусть не сущ. столбец в котором сумма больше 8

~~то есть столбец в котором сумма больше 8~~

Сумма всех строк $\frac{12 \cdot 11}{2} = 66$ (к каждой строке есть пара j которой сумма > 16)

$\Rightarrow$ сумма всех чисел $> 66 \cdot 16$

НО ~~в каждой~~ каждая строка в этой сумме повторяется 11

раз $\rightarrow$ ~~тогда~~ $\frac{66 \cdot 16}{11} = 16 \cdot 6 = 96 \Rightarrow$ сумма всех чисел > 96

3. Найдем сумму всех чисел через столбцы

в каждом столбце «8 сумма» $\Rightarrow$ всего сумма $\leq 8 \cdot 12 = 96$

$$\begin{cases} S \leq 96 \\ S > 96 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ противоречие $\Rightarrow$ существует столбец

в котором сумма больше 8

Ответ: да

Код участника:

(заполняется организатором)

M9-214

Задача 4

$$a+b=1$$

$$a, b > 0$$

$$a=1-b \Rightarrow b=1-a$$

$$b+1=2-a$$

$$b^2 = 1 - 2a + a^2 \quad | \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{1+b} + \frac{b^2}{1+a} = \frac{a^2}{2-a} + \frac{1-2a+a^2}{a+1} = \frac{a^2 a^3 + 2 - 4a + 2a^2 - a + 2a^2 - a^3}{2a+2-a^2-a} =$$

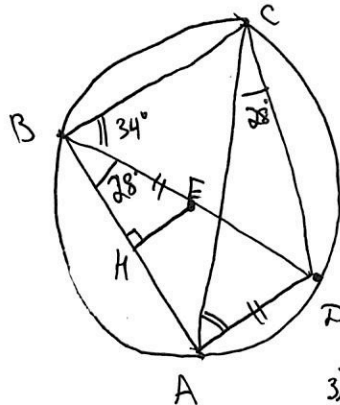
$$= \frac{5a^2 - 5a + 2}{-a^2 + a + 2} = \frac{5a^2 - 5a - 10}{-a^2 + a + 2} + \frac{12}{-a^2 + a + 2} = -5 + \frac{12}{-a^2 + a + 2} = -5 - \frac{12}{a^2 - a - 2}$$

$$a > 0 \Rightarrow a^2 - a - 2 > -2 \Rightarrow \frac{12}{a^2 - a - 2} > -6 \Rightarrow -\frac{12}{a^2 - a - 2} < 6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -5 - \frac{12}{a^2 - a - 2} < 1 \Rightarrow \frac{a^2}{1+b} + \frac{b^2}{1+a} < 1$$

ч.т.г.

Задача 5



Дано: $\angle ABD = \angle ACD = 28^\circ$; $\angle CBD = 34^\circ$; $BE = AD$; $E \in BD$

EH - высота

Доказать: $AC > EH + CD$

1) $\angle ABD = \angle ACD = 28^\circ \Rightarrow ABCD$ - вписанный

2) $\angle B = 28^\circ + 34^\circ = 62^\circ \Rightarrow \angle D = 180^\circ - 62^\circ = 118^\circ = 90^\circ + 28^\circ$ (т.к. $ABED$ - впис.)

3) $\angle D = 118^\circ$; $\angle ACD = 28^\circ \Rightarrow \angle CAD = 34^\circ = 90^\circ - 28^\circ \cdot 2$

$$4) \frac{AC}{\sin(90^\circ + 28^\circ)} = \frac{CD}{\sin(90^\circ - 28^\circ \cdot 2)} \quad (\text{по т. синусов})$$

$$\sin(90^\circ + 28^\circ) = \sin 90^\circ \cdot \cos 28^\circ + \cos 90^\circ \cdot \sin 28^\circ = \cos 28^\circ \cdot 1 + 0 \cdot \sin 28^\circ = \cos 28^\circ$$

$$\sin(90^\circ - 28^\circ \cdot 2) = \sin 90^\circ \cdot \cos 28^\circ \cdot 2 - \cos 90^\circ \cdot \sin 28^\circ \cdot 2 = \cos 28^\circ \cdot 2 = 2 \cos 28^\circ - 1 \Rightarrow$$

$$AC(2 \cos^2 28^\circ - 1) = CD \cdot \cos 28^\circ$$

$$5) \frac{AC}{\cos 28^\circ} = \frac{AD}{\sin 28^\circ}$$

$$\sin 28^\circ = \frac{EH}{BE} \quad (\text{т.к. EH - высота}) \Rightarrow BE = AD = \frac{EH}{\sin 28^\circ}$$

$$\Rightarrow \frac{AC}{\cos 28^\circ} = \frac{EH}{\sin 28^\circ} \Rightarrow \frac{AC}{\cos 28^\circ} = \frac{EH}{\sin 28^\circ}$$

Код участника:

(заполняется организатором)

МГ-314

Задача 5 (продолжение)

$$\frac{AC}{\cos 28^\circ} = \frac{EH}{\sin 28^\circ} \Rightarrow \frac{AC}{\cos 28^\circ} = \frac{EH}{1 - 2\cos^2 28^\circ} \Rightarrow AC(1 - \cos^2 28^\circ) = EH \cdot \cos 28^\circ$$

$$AC(1 - \cos^2 28^\circ) + AC(2\cos^2 28^\circ - 1) = EH \cdot \cos 28^\circ + CD \cdot \cos 28^\circ$$

$$AC(1 - \cos^2 28^\circ + 2\cos^2 28^\circ - 1) = \cos 28^\circ (EH + CD)$$

$$AC \cdot \cos^2 28^\circ = \cos 28^\circ (EH + CD)$$

$$AC \cdot \cos 28^\circ = EH + CD$$

$$0 < \cos 28^\circ < 1 \Rightarrow AC > EH + CD$$

з.т.б.

 $\sqrt{2}$

Пусть существуют числа a и $a+1$, которые равны $2n^2$ и $2m^2$ соответственно.

~~$$\text{Пусть } a \equiv 0 \Rightarrow a : 2 \Rightarrow a+1 \not\equiv 2 \Rightarrow a+1$$~~

$$a = 2n^2 \Rightarrow a : 2 \Rightarrow a+1 = 2m^2 \Rightarrow a+1 : 2 \Rightarrow a+1 \equiv 0 \Rightarrow a \equiv 1$$

$$\begin{cases} a \equiv 0 \\ a \equiv 1 \end{cases} \text{ - противоречие } \Rightarrow \underline{\text{Ответ: не существуют.}}$$

Код участника:

(заполняется организатором)

МГ-314

Задача 3

$$1 \leq a; b; c \leq 1000$$

$$1) \begin{cases} a+b \equiv 0 \\ a+c \equiv 0 \\ b+c \equiv 0 \end{cases}$$

пусть: $a \equiv x \Rightarrow c \equiv -x \Rightarrow b \equiv x \Rightarrow a+b \equiv 2x$

~~хорошо~~

$$\begin{cases} a+b \equiv 2x \\ a+b \equiv 0 \end{cases} \Rightarrow 2x \equiv 0$$

 $x \equiv 0 \Rightarrow a; b; c \equiv 0 \Rightarrow$ возможны только числа, кратные 11

2) всего $\frac{1000}{11} \approx 90$ чисел от 1 до 1000 кратных 11
тогда кол-во способов выбрать 3 числа из 90 =

$$= 90 \cdot 89 \cdot 88 = 704880$$

но ещё надо поделить на 6 т.к. ^{каждая} ~~каждая~~ тройка чисел

будет повторяться 6 раз.

$$\frac{704880}{6} = 117480$$

Ответ: 117480

Код участника:

(заполняется организатором)

М9-314

Задача 8

1) Рассмотрим частный случай когда конфет во всех корзинках одинаковое кол-во (по 100 штук)

тогда каждый свой ход Петя берет из 4 корзинок, а

Вася из одной $\Rightarrow$ за каждый ход Петя-Вася опустошаются

5 корзинок, 4 из которых забрал ~~Петя~~ $\Rightarrow$ он забрал $\frac{4}{5}$ всех конфет $\Rightarrow \frac{4}{5} \cdot 2000 = 1600$ - условие выполняется

2) Если в ~~каких~~ ^{каких} -то корзинках будет больше чем в других Петя будет брать 4 ~~корзинки~~ ^{корзины} так, чтобы среди них находилась наибольшая и чтобы ~~с~~ соседями к этим 4 не были корзинки где кол-во конфет меньше 361 т.к. если ~~Вася~~ ^{Вася} заберет корзинку с больше чем 361 конфетой у Пети не получится собрать 1600 конфет.

Таким образом Петя заберет в сумме больше чем $\frac{4}{5}$ всех конфет $\Rightarrow$ соберет больше 1600 конфет - условие выполняется

ч.т.д.

Задача 7

⊗ Пойдем от противного

Пусть существуют 2 таких человека А и В

А и В не знакомы друг с другом и не имеют общих знакомых

Пусть множество Х - это 42 человека и ~~А~~ ^А
А - не знаком ни с кем

Множество Y - это 42 человека и В
В - не знаком ни с кем

т.к. множество Y имеет 43 человека и по условию каждый знаком хотя бы с 1, то в множестве должен быть человек В, который должен быть знаком с В и не знаком с А

Код участника:

(заполняется организатором)

МГ-314

Задача 7 (продолжение)

т.к. B_i не может быть знаком с A , то мы можем получить множество

C , где A не будет знаком ни с кем $\Rightarrow$ Противоречие $\Rightarrow$

~~A~~ X и Y общего знакомы, либо знакомы друг

с другом $\Rightarrow$ любая 2 ~~любая~~ людей есть общ. знакомый
или они знакомы друг с другом

З.Т.Ф.

Код участника:
(заполняется организатором)

M9-065

w3

1) Отметки 3-х чисел при делении на 11:

1-е: x

2-е: $11-x$

3-е: $11-x$

Тогда $(11-x)(11-x) = 22-2x$ должно быть кратно 11
 Ил.к. $22:11$, то $x:11$

Из этого следует все три числа кратны 11

2) $\left[\frac{1000}{11} \right] = 90$ - числа кратные 11

$$C_{90}^3 = \frac{90!}{3!(90-3)!} = \frac{90!}{3! \cdot 87!} = \frac{90 \cdot 89 \cdot 90}{6} = 114480 - \text{словов}$$

Итого: 114480 словов

w4

Дано: $a+b=1$ Доказать: $\frac{a^2}{1+b} + \frac{b^2}{1+a} < 1$

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= 1 - 2ab \\ a^3 + b^3 &= 1 - 3a^2b - 3ab^2 \end{aligned}$$

$$\frac{a^2}{1+b} + \frac{b^2}{1+a} = \frac{a^2 + b^2 + a^3 + b^3}{1 + (a+b) + ab} = \frac{1 - 2ab + 1 - 3ab}{2 + ab} = \frac{2 - 5ab}{2 + ab} \geq \frac{1 - 6ab}{2 + ab} = 1 - \frac{6ab}{2 + ab}, \text{ т.к. } a > 0, b > 0$$

$$1 - \frac{6ab}{2 + ab} < 1 \Rightarrow \frac{a^2}{1+b} + \frac{b^2}{1+a} < 1, \text{ Доказано}$$

W 4

1) Найти мин. крив-во знающих функции A :

Плюс это нам число меньше чем: $\frac{83-1}{2} = 41$, т.е. 40

Тогда среди остальных 82 можно выбрать: $82 - 40 = 42$
 неизвестных с А, что противоречит условию, т.е. или ко-во
 знаковых у каждого участника: 41

2) Возьмем двух незнакомых учащихся, тогда у каждого из нас: 41 знакомых из оставшихся 81, т.е. есть как минимум 1 общий знакомый, что и требовалось доказать.

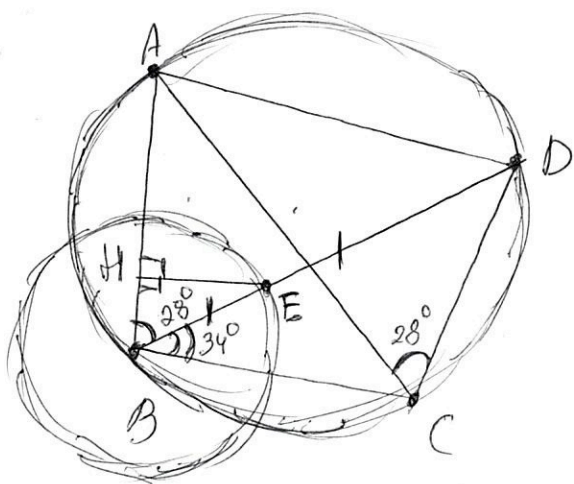
W2

De

Non-ep: $\underbrace{9999\dots 9}_{25}$: сумма $= 9+8+25-9=242=2\cdot 121=2\cdot 11^2$
 $\underbrace{9900\dots 0}_{25}$: сумма : $9+9=18=2\cdot 3^2$

Prüfung: Da.

W 5



Dane: $BE = AD$
 $EH \perp AB$
 $\angle ABD = \angle ACD = 28^\circ$
 $\angle DBE = 34^\circ$

Докажем: $AC > EH + CB$

Доказательство

Доказательство

1) $\angle ACH = \angle ABH$, они лежат на одной окружности, следовательно можно описать окружность вокруг четырехугольника.

2) $\angle DBC = \angle CAD = 34^\circ$, т.к. опираются на одну дугу
 $\cap CD$

3) мы можем описать окружность с центром в O , касающуюся BE - касательная

Код участника:

(заполняется организатором)

M9-069

№5 (продолжение)

4) $\angle CDA = 180^\circ - 28^\circ - 34^\circ = 118^\circ$, т.к. сумма противоположных углов $\neq 180^\circ$

$$5) CD = AC \cdot \frac{\sin 28^\circ}{\sin 118^\circ} = AC \cdot \frac{\sin 28^\circ}{\sin 62^\circ} \quad \text{т.к. } \sin 118^\circ = \sin 62^\circ, \text{ по формуле приведения}$$

6) AC – самая большая сторона в $\triangle ABC$, т.к. лежит напротив $\angle CDA = 118^\circ$, который является самым большим в $\triangle ABC$, значит, $AC > CD + EN$, что и требовалось доказать

№1

1) Допустим во всех магазинах сумма денег 8, тогда на всех по 8. $8 \cdot 12 = 96$ – не достигается

2) Предположим, что одна сторона и сумма денег 8, а на остальных по 16 (тогда сумма денег 16)

Получим сумму денег во всех: $16 + 8 \cdot 10 = 96$, сторона меньше 8 + любая из остальных

Противоречие

Ответ: нет.

1) Хоз. Тети: выбрать 4 разных идущие пенные корзинки
и забрать из них все конфеты
Хоз. Бабу: выбрать 1 пенную корзинку, у которой есть
хотя бы один мясной конфет, и забрать из нее все конфеты
Таким образом, чтобы Бабу удалось забрать корзинку,
она должна взаимодействовать с уже существующей корзинкой.
Заметим, что изначально все 100 корзиночек пенные, следовательно,
Бабу вообще не может ходить первой. Значит, действовать
должна Тетя ходит первой.

2) Поделим 100 корзиночек на 50 парных идущих групп по
4 корзинки $G_1 \{1; 2; 3; 4\}; G_2 \{5; 6; 7; 8\}; \dots; G_{50} \{199; 200; 201; 202\}$
каждая из этих групп содержит ровно 4 пенных конфеты

Заметим:

- В каждой из всех групп может быть 1000 конфет
- Тетя ходит первой, то Тетя может осуществить
во всех корзинках ~~всех~~ ~~корзиночек~~ одну из пенных конфет, если
все 4 корзинки в ней еще не пусты
Значит, идеальный шаг Тети – забрать целиком все
конфеты из как можно большего числа групп.
Если бы Тетя уже успела осуществить все 50 групп, она
бы забрала все 1000 конфет. Но Бабу, совершая следующий
ход.

Код участника:

(заполняется организатором)

МГ-065

№8 (продолжение)

- 3) 1) Петя ходит первым, заберет 4 подряд идущие корзинки. Петерь впервые появляется инициал, то какие - то корзинки стали пустыми - именно те 4, то Петя оставил.
- 2) Вася может воспользоваться оставшимися корзинками: если какая-то из оставшихся пустых корзин граничит с пустой, то Вася может ходить в ней.
- 3) Если этого хода, возможно, еще одна корзинка останется (та, к которой Вася взойдет). Это, в свою очередь, может дать Васе право хода по соседней ей... и т.д.
- Таким образом после каждого массового хода Петя может возмущать целую цепочку оставшихся ходов Васи, пока есть сосед с пустыми корзинками.

В итоге либо Петя так шаг за шагом уничтожит все 30 корзин, либо, если Вася всё же успеет кое-где прервать ходы, то суммарно он захватит себе не более 10% от всех корзин - и Петя получит очки как минимум 80% - 1600 монет.

Итого:

Макс. монет, которые сможет забрать Вася одним ходом, составит ≤ 400 , следовательно Петя заберет не менее 1600 монет, то и требовалось доказать.

Код участника:

(заполняется организатором)

19-066

$$a+b=1$$

$$a^2+b^2=1-2ab$$

$$a^3+b^3=1-3a^2b-3ab^2$$

$$\frac{a^2}{1+b} + \frac{b^2}{1+a}$$

$$= \frac{a^2+a^3+b^2+b^3}{(1+b)(1+a)}$$

$$= \frac{1-2ab+1-3ab(a+b)}{1+(a+b)+ab} = \frac{2-5ab}{2+ab}$$

$$= \frac{2-5ab}{2+ab} = 1 - \frac{6ab}{2+ab}$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{6ab}{2+ab} < 1$$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{1+b} + \frac{b^2}{1+a} < 1$$

$$a+b=1$$

$$a^2+b^2=1-2ab$$

$$a^3+b^3=1-3a^2b-3ab^2$$

$$\frac{a^2}{1+b} + \frac{b^2}{1+a} = \frac{a^2+b^2+a^3+b^3}{1+(a+b)+ab} = \frac{1-2ab+1-3ab}{2+ab} =$$

$$= \frac{2-5ab}{2+ab} = 1 - \frac{6ab}{2+ab} \quad \text{т.к. } a>0 \text{ и } b>0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{6ab}{2+ab} < 1 \Rightarrow \frac{a^2}{1+b} + \frac{b^2}{1+a} < 1 \quad \text{Доказано.}$$

1) Остатки 3-х чисел при делении на 11:

$$1-e: x$$

$$2-e: 11-x$$

$$3-e: 11-x$$

Тогда: $(11-x) + (11-x) = 22-2x$ Должно быть кратно 11

т.к. $22:11$, то $x:11$

Из этого, следует все 3 числа кратны 11

и 3 (продолжение)

$$2) \left[\frac{1000}{11} \right] = 90 - \text{чисел кратных } 11$$

$$C_{90}^3 = \frac{90!}{3!(90-3)!} = 117480 - \text{способов.}$$

Ответ: 117480

и 7.

1) Найдем минимальное кол-во знакомых у участника А:

Пусть это мин. число меньше чем $\frac{83-1}{2} =$

$= 41$, т.е. 40.

Тогда среди остальных 82 можно выбрать $(82-40)=42$ участника не знакомых с А, что противоречит условию

т.е. минимум мин. кол-во знакомых у каждого участника: 41

2) Возьмем двух знакомых участников, тогда у каждого из них 41 знакомых из оставшихся 81, т.е. есть как минимум 1 общий знакомый.

Доказано.

Код участника:

(заполняется организатором)

119-066

✓ 2.

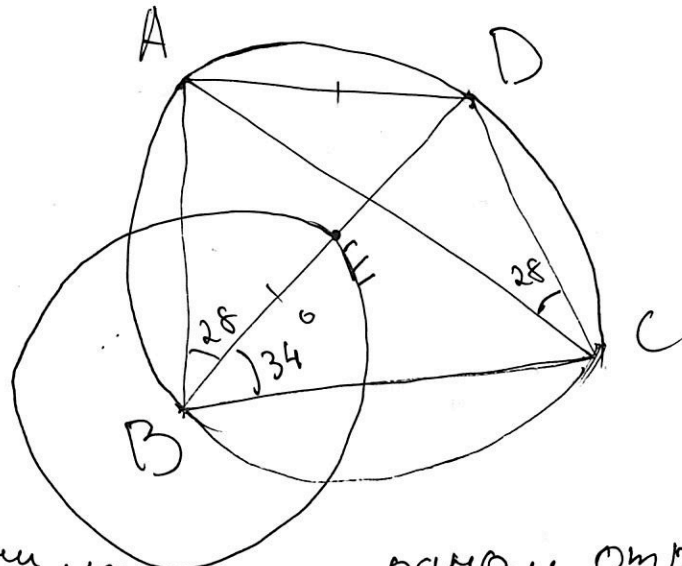
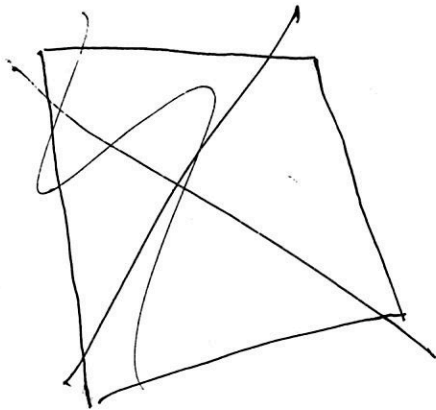
Да.

Например: $\underbrace{9899\dots9}_{25}$: сумма = $9 + 8 + 25 \cdot 9 = 242 =$
 $= 2 \cdot 121 = 2 \cdot 11^2$

$\underbrace{9900\dots0}_{25}$ сумма: $9 + 9 = 18 = 2 \cdot 3^2$

Ответ: $9a\dots$

✓ 5.



$$1) \angle ACD = \angle ABD$$

$\Rightarrow$ можно описать окружность около четырёхугольника $ABCD$ так как они лежат на одной отрезке $\Rightarrow$

$$2) \angle DBC = \angle CAD, \text{ т.к. они опираются на одну дугу } \overset{\frown}{CD}$$

3) Мы можем начертить окруж. с центром B,
 $\Rightarrow BE$ - радиус

$$4) \angle CDA = 180^\circ - 28^\circ - 34^\circ = 118^\circ, \text{ т.к. сумма противо-положных углов } = 180^\circ$$

$$5) CD = AC \cdot \frac{\sin 28^\circ}{\sin 118^\circ} = AC \cdot \frac{\sin 28^\circ}{\sin 62^\circ}, \text{ т.к. } \sin 118^\circ = \sin 62^\circ, \text{ по формуле приведения.}$$

$$6) EH = BE \cdot \sin(\dots) = AD \cdot \sin(\dots)$$

Код участника:

(заполняется организатором)

M9-066

4) AC – самая большая сторона в четырёхугольнике, т.к. лежит напротив самого большого угла $\angle B$.
 $\triangle ABCD \Rightarrow AC > CD + EN$, Доказано.

Допустим во ~~всех~~ строках сумма меньше 8, тогда на всей поле сумма меньше: $8 \cdot 12 = 96$ – не достигается.

Существует макс. одна строка с суммой меньше 8 (сам их 2, но сумма ~~меньше~~ таких строк меньше 16)

Тогда минимум суммы всего поля:

$$16 + 8 - 10 = 96$$

↓
строка меньше 8

+
любая из оставшихся

Противоречие

~~Ответ: да~~. Ответ: нет

Код участника:

(заполняется организатором)

119-066

1) Ход Тети выбрать и подряд идущих не пустые корзинки и забрать из них все конфеты. Ход Васи: выбрать одну ~~из~~ не пустую корзинку в которой есть хотя бы 1 пустой сосед, и взять из нее все конфеты, таким образом чтобы Васа удалось забрать корзинку, она должна соседовать с уже опустевшей корзинкой.

Заметим, что изначально все 200 корзинок не пустые $\Rightarrow$ Васа вообще не ~~может~~ может ходить первым, значит Тетя ходит первой.

2) Поделим 200 корзинок на 50 подряд идущих групп по 4 корзинки $G_1 \{1; 2; 3; 4\}$; $G_2 \{5; 6; 7; 8\}$, ..., $G_{50} \{197; 198; 199; 200\}$ каждая из этих групп содержит ровно 4 последовательных корзинки.

Заметим:

а) суммарно во всех группах летса по 2000 конфет.

б) Тетин ход обозначает, что он может опустошить все корзинки одной из этих групп, если все 4 корзинки всей еще не пусты.

Значит, идеальным план Тети взять целиком все конфеты из большого числа групп.

Если бы Тетя ~~успела~~ успела целиком опустошить все 50 групп

Код участника:
(заполняется организатором)

МГ-066

п 8 (продолжение)

Он бы забрал все все 2000 конфет. Но Васа совершает одиночные ходы.

Теня ходит первым забирая и подряд идущие корзинки (все их конфеты) теперь впервые появляется ситуация, что какие-то корзинки стали пустыми. — именно те и, которые Теня очистил.

Васа может воспользоваться опустевшими корзинками: если какая-то из оставшихся полных корзинок граничит с пустой, то Васа может ходить в нее.

После этого хода, возможно, еще одна корзинка опустела. Это в свою очередь может дать Васе право хода и на соседях ее...

и т.д.

Таким образом пока как каждого из нас сового хода Тени может возникнуть целая цепочка одиночных ходов Васы, пока есть соседи с пустыми корзинками.

Из этого либо Теня так шаг за шагом опустошит все 50 групп, либо если Васа всё же удастся кое-где прервать группу, то суммарно он сохранил себе не более 20% от всех конфет. и Теня получит остаток как минимум 80% — 1600 конфет. Максимальное кол-во которое сможет забрать Васа одиночными ходами

Код участника:

(заполняется организатором)

МГ-066

составляет $\leq 400 \Rightarrow$ денеж задирает
не менее 1600 копеек. Дока за ко.

Код участника:

(заполняется организатором)

МГ-033

$$\frac{a}{1+b} + \frac{b}{1+a} < 1 \quad \sim 4.$$

$$\frac{a^2+a^3+b^2+b^3}{(1+b)(1+a)} < 1$$

+ к. a и b – положительные числа,
 $a \neq 1$; $b \neq -1$, то

$$a^2+a^3+b^2+b^3 < (1+b)(1+a)$$

$$(a+b)^2 - 2ab + (a+b)(a^2-ab+b^2) < 1+b+a+ab \quad \text{т.к. } a+b=1, \text{ то:}$$

$$(a+b)(a+b-2ab+a^2-ab+b^2) < 2+ab$$

+ к. $a+b=1$, то:

$$(a+b-2ab+(a+b)^2-2ab-ab) < 2+ab$$

$$1+1-5ab < 2+ab$$

$$-5ab < ab, \quad \text{т.к. } ab \neq 0, \text{ поделим}$$

неравенство на ab

Это неравенство верно $\Rightarrow \frac{a^2}{1+b} + \frac{b^2}{1+a} < 1$

$a_1, a_2, \dots, a_n$

первое число – $2n^2$

второе число – $2k^2$ при этом $n < k$

$$2n^2 = 2k^2 - 1 \quad \overline{b_1, b_2, \dots, b_n} = \overline{a_1, a_2, \dots, a_n} + 1$$

$$2n^2 - 2k^2 = -1 \quad | \cdot (-1)$$

$$2k^2 - 2n^2 = 1$$

$$2(k^2 - n^2) = 1$$

$$k^2 - n^2 = \frac{1}{2}$$

$$(k-n)(k+n) = \frac{1}{2}$$

рассмотрим вариант при котором

$$\begin{cases} k-n=0,5 \\ k+n=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} k=0,5+n \\ k+n=1 \end{cases}$$

$$2n+0,5=1$$

$$2n=0,5$$

$$n=0,25$$

$$k=1,25$$

Код участника:

(заполняется организатором)

119-033

т.к. h и k — числа дробные, то при возведении их в квадрат ^{цифры} числа после запятой станут еще больше, при умножении на 2 дробная часть останется.

Тогда получаем, что $10a + b = h$, где h — десятичная дробь, что быть не может. Такой не ответ и получить, если все равно указанной системе взять другие числа (не 0,5 и 1), т.к. h и k будут получаться числами с десятичной дробью. h и k — некоторые натуральные числа $\Rightarrow$ противоречит условию, а значит таких натуральных чисел, сумма цифр каждого из которых является удвоенным полным квадратом, не существует.

Ответ: не.

Так как числа в столбце могут повторяться, то наиболее удачной будет следующая комбинация чисел:

3.
Возьмем три любых числа. Их остатки при делении на 11 могут быть следующими:

первое число: x второе число: $11-x$ третье число: $11-x$

Тогда $(11-x) + (11-x) = 22 - 2x$ должно быть кратно 11

т.к. $22 : 11$, то $x : 11$

Из этого следует, что три числа кратны 11

$\frac{1000}{11} = 90$ чисел, кратных 11.

$$C_{90}^3 = \frac{90!}{3!(90-3)!} = \frac{90!}{3! \cdot 87!} = \frac{87! \cdot 88 \cdot 89 \cdot 90}{87! \cdot 6} = 117480$$

Ответ: 117480.

Код участника:

(заполняется организатором)

MG-033

Каждому минимальное количество знакомых у одного участника:

Пусть это число меньше, чем $\frac{83-1}{2} = 41$, т.е. не 40.

Тогда среди остальных 82 можно выбрать $82-40 = 42$ участника, которые не знакомы с выбранным человеком.

Иными словами, минимальное количество знакомых человека — 41.

Выберем двух любых участников, тогда у каждого будет 41 знакомый из оставшихся 81 человека, т.е. как минимум 1 общий знакомый ($41+41 = 82$; $81 < 82$)

Пусть во ~~всех~~ ^в столбцах сумма меньше 8, тогда на всем поле сумма ~~меньше~~ ^{больше} 96 ($8 \cdot 12$) не достигается

Пусть во всех столбцах сумма меньше 8, тогда на всем поле сумма ~~меньше~~ ^{больше} 96 не достигается.

Существует максимум одна строка с суммой < 8

Тогда мин. сумма пол — 96 ($16 + 8 \cdot 10$)

↓
строка < 8

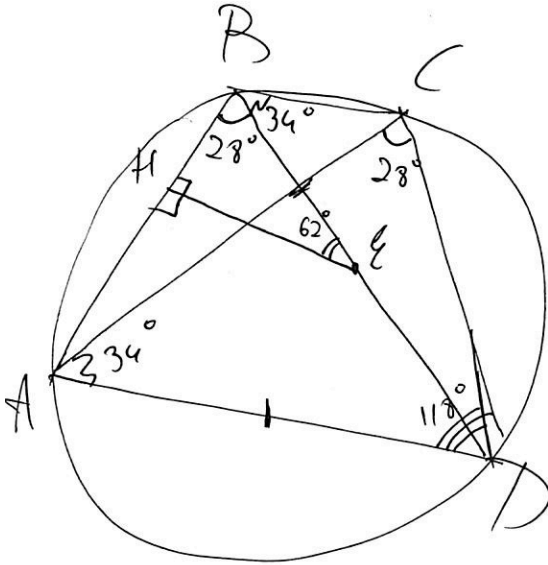
↓
любая из оставшихся

Мы получили противоречие $\Rightarrow$ обязательно найдется строка, в которой сумма чисел больше 8.

Код участника:

(заполняется организатором)

МГ-033



Дано: $\angle ABD = \angle ACD = 28^\circ$,
 $\angle CBD = 34^\circ$, $BE = EH$,
 $EH \perp BA$.

До-т.: $AC > EK + CD$

~ 5.

До-во:

- 1) ABCD вписан в окружность, т.к. $\angle ABD = \angle DCA$ и они лежат на одной прямой.
- 2) $\angle ADC = 118^\circ$, т.к. $\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$ по CB-BC вписанного в окр. четырехугольника. $\angle ABC = 62^\circ$.
- 3) $\angle BEH = 62^\circ$, т.к. $\triangle BHE$ — прямоугол.
- 4) $\angle C + D = \angle CBD = 34^\circ$, т.к. вписанные, опираются на одну дугу.
- 5)

Бланк ответа № 5

Всероссийская олимпиада школьников «Миссия выполнима. Твоё призвание – финансист!»

Код участника:

(заполняется организатором)

МГ-033

Код участника:

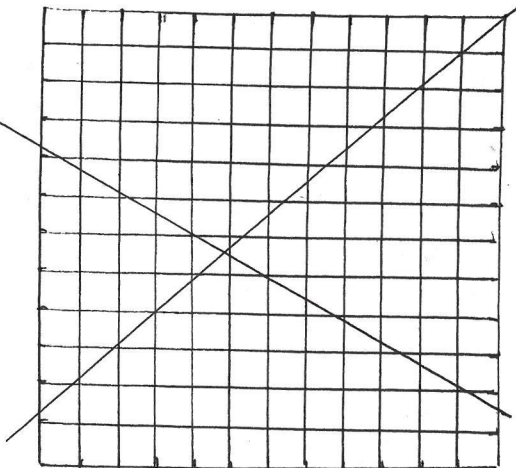
(заполняется организатором)

MG-028

Nr

Ответ: ~~нет~~^{да}, ~~не~~ обязательно.

~~Кривер:~~



Оценили сумму всех чисел.
Всего строчек 12, значит, на
строчек 8. В каждой паре
строчек сумма больше 16, значит,
~~Всего~~ ^{максимальная} сумма чисел больше
96. Предполагали, что такого
столбца нет, тогда ^{максимальная} ^{всех} ^{максимальная} ^{всех}
сумма чисел $12 \cdot 8 = 96$. Но с
другой стороны сумма чисел больше
96, значит, предположение не
верно, такой столбец будет
обязательно.

 $\sqrt{2}$

Выпишем первые несколько квадратов и удвоенных квадратов:

$$n^2: \quad 1 \quad 4 \quad 9 \quad 16 \quad 25 \quad 36$$
$$2n^2: 2 \quad 8 \quad 18 \quad 32 \quad 50 \quad 72 \dots$$

~~Вопрос~~ Предположим, что такие 2 числа существуют. Если между ними не было перехода через разряд, то сумма их цифр увеличивается на 1, тогда их суммы разной чётности, тогда ~~они не могут быть вида~~ они не могут быть вида $2n^2$. Значит, был переход через разряд. Тогда они вида $10x+9$ и $10(x+1)$. Пусть y — сумма цифр числа x , тогда у первого числа сумма цифр $y+9$, у второго — $y+1$. $(y+9)-(y+1)=8$, значит, между удвоенными квадратами разность должна быть 8. Исключение будет, когда второе число — степень 10. Но сумма цифр у такого числа всегда 1, нет такого удвоенного квадрата.

Разность между первыми 2 удвоенными квадратами 6, 10, 14 и т.д. Чем больше число, тем больше его квадрат и его удвоенный квадрат, значит, ^{разница между ними будет всё} найдём такие 2 ~~числа~~ подряд идущих числа, сумма ^{или разность} которых будет удвоенным квадратом.

7

Код участника:

(заполняется организатором)

49-028

№3

Пусть числа a, b, c удовлетворяют условию, тогда если $a \equiv x \pmod{11}$, $0 \leq x < 11$, то $b \equiv 11-x \pmod{11}$, т.к. $a+b \equiv 0 \equiv 11 \pmod{11}$. Тогда из условия $b+c \equiv 11 \pmod{11}$ $c \equiv x \pmod{11}$, тогда $a+c \equiv 2x \pmod{11}$. Рассмотрим все варианты x :

x	$2x$
0	0
1	2
2	4
3	6
4	8
5	10
6	1
7	3
8	5
9	7
10	9

$(a+c):11$, значит, $a+c \equiv 0 \pmod{11}$, тогда $2x \equiv 0 \pmod{11}$.

Такое может быть только при $x=0$. Значит, b каждой такой тройке все числа должны делиться на 11. Всего таких чисел от 1 до 1000 90.

$$C_{90}^3 = \frac{90!}{3!(90-3)!} = \frac{90!}{3! \cdot 87!} = \frac{90 \cdot 89 \cdot 88}{6} = 117480.$$

Ответ: 117480 способов.

№4

$$a+b=1, a>0, b>0$$

$$\begin{aligned} (a+b) - \left(\frac{a^2}{1+b} + \frac{b^2}{1+a} \right) &= \frac{a^2b + a^2 + ab + a + ab^2 + ab + b^2 + b - a^2 - a^3 - b^2 - b^3}{ab + a + b + 1} = \\ &= \frac{ab(a+b) + 2ab + a + b - (a^3 + b^3)}{ab + 2} = \frac{3ab + a + b - (a+b)(a^2 - ab + b^2)}{ab + 2} = \\ &= \frac{4ab + a + b - a^2 - b^2}{ab + 2} = \frac{4ab + 1 - (a^2 + b^2)}{ab + 2} = \frac{4ab + 1 - ((a+b)^2 - 2ab)}{ab + 2} = \\ &= \frac{6ab + 1 - 1 + 2ab}{ab + 2} = \frac{8ab}{ab + 2} > 0, \quad (ab > 0, 6ab > 0, ab + 2 > 0), \text{ значит,} \end{aligned}$$

$$\frac{a^2}{1+b} + \frac{b^2}{1+a} < a+b$$

$$\frac{a^2}{1+b} + \frac{b^2}{1+a} < 1.$$

№7

Найдём, сколько знаковых у каждого члена совета. Возьмём конкретного человека a . Кроме него в совете ещё 82 человека. Возьмём первых 42 человек из оставшихся, среди них у a хотя бы 1 знаковый. Уберём этого знакового и добавим ещё одного из оставшихся. Теперь у a уже 2 знаковых. Продолжим эту операцию пока не закончатся люди.

2

Код участника:

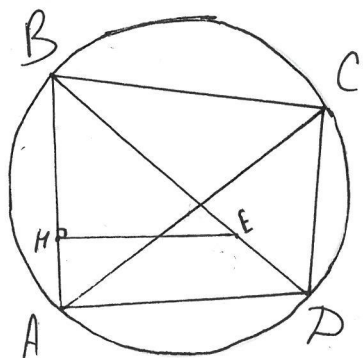
(заполняется организатором)

49-028

а может быть не знаком максимум с 41 человеком, иначе, если он не знаком хотя бы с 42 людьми, для секретного собрания из а и этих 42 людей условие выполняться не будет. Значит, у каждого человека хотя бы 41 знакомый.

Рассмотрим двух людей m и n , которые не знакомы между собой. Тогда кроме них в совете есть ещё 81 человек. Хотя бы 41 из них знаком с m . Предположим, что у m и n нет общих знакомых, тогда у n максимум $81 - 41 = 40$ знакомых, противоречие. Значит, либо два человека m и n либо знакомы, либо у них есть общий знакомый.

N5



Дано: $ABCD$ – выпуклый, $\angle ABD = \angle ACD = 28^\circ$,

$\angle CBD = 34^\circ$, $E \in BD$,

$BE = AD$

$EH \perp AB$, $H \in AB$

Доказать:

$AC > EH + CD$

Доказательство.

1. т.к. $\angle ABD = \angle ACD$, $ABCD$ – вписанный по признаку.

2. $\angle ABC = \angle ABD + \angle CBD = 28^\circ + 34^\circ = 62^\circ$,

$\angle ADC = 180^\circ - \angle ABC = 118^\circ$ т.к. $ABCD$ – вписанный,

$\cos ADC = -\cos ABC = -\cos 62^\circ$

3. $\angle BEH = 90^\circ - \angle ABD = 90^\circ - 28^\circ = 62^\circ$ т.к. $\angle BEH$ и $\angle ABD$ – острые углы в прямоугольном треугольнике.

4. $\triangle ACD$, по теореме косинусов

$$AC^2 = AD^2 + CD^2 - 2 \cdot AD \cdot CD \cdot \cos ADC$$

$$AC^2 = AD^2 + CD^2 + 2 \cdot AD \cdot CD \cdot \cos 62^\circ \quad (1)$$

5. $\triangle EBH$, $\angle H = 90^\circ$, $\cos BEH = \frac{EH}{BE}$, $EH = BE \cdot \cos BEH = AD \cdot \cos 62^\circ$

6. (1) $AC^2 = AD^2 + CD^2 + 2 \cdot CD \cdot EH$

$$AC^2 > CD^2 + 2 \cdot CD \cdot EH$$

Код участника:

(заполняется организатором)

МГ-028

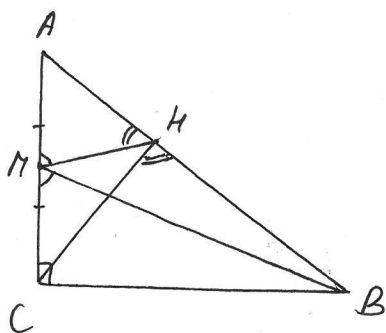
$AC > CD$ т.к. в $\triangle ACD$ $\angle ADC$ тупой, а $\angle CAD$ – острый,
значит,

$$\frac{AC^2}{AC} > \frac{CD^2 + 2 \cdot CD \cdot EH}{CD}$$

$$AC > CD + 2 \cdot EH$$

$$AC > EH + CD.$$

№6



Дано:

 $\triangle ABC$, $\angle C = 90^\circ$ M – середина AC, $H \in AB$ $\angle BMC = \angle AMH$, $\angle AHM = \angle BMC$

Найти:

 $\angle A$, $\angle B$ – ?

Решение:

- $\angle BMC = \angle AMH$ и $\angle AHM = \angle BMC$ т.к. углы "падения" равен углу "отражения".
- $\angle CMB = 90^\circ - \angle CBM$, тогда $\angle AMH = 90^\circ - \angle CBM$,
 $\angle AHM = 180^\circ - \angle A - \angle AMH = 180^\circ - \angle A - 90^\circ + \angle CBM = 90^\circ - \angle A + \angle CBM$, тогда
 $\angle CHB = 90^\circ - \angle A + \angle CBM$.
- ~~$S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin(\alpha + \beta)$~~
 $S(ABC) = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AB \cdot \sin \angle ABC$
 $S(ABC) = S(MBC) + S(ABM) = \frac{1}{2} BC \cdot BM \cdot \sin \angle CBM + \frac{1}{2} AB \cdot MB \cdot \sin \angle ABM$
 $\frac{1}{2} \cdot BC \cdot AB \cdot \sin \angle ABC = \frac{1}{2} BM (BC \cdot \sin \angle CBM + AB \cdot \sin \angle ABM)$
 $BC \cdot AB \cdot \sin \angle ABC = BM \cdot BC \cdot \sin \angle CBM + BM \cdot AB \cdot \sin \angle ABM$

Бланк ответа

Всероссийская олимпиада школьников «Миссия выполнима. Твоё призвание – финансист!»

Код участника:

(заполняется организатором)

МГ-028

В первый ход

№8
конфет из

Петя должен брать 4^ю крайнюю корзину. Тогда у Васи ход будет единственным. Далее Петя возьмёт конфеты из 6-9 корзинок, а Вася сможет взять только из 10 корзинки. Таким образом, Петя, ^{ходя так} ~~идя~~ хотя бы с одной стороны сможет забрать минимум 1600 конфет.

N1.

Обозначим сумму чисел в любых двух строчках за $\Sigma_{2 \text{ строк}}$, сумму чисел в 10 строчках за $\Sigma_{10 \text{ строк}}$, сумму чисел в одном столбце за $\Sigma_{1 \text{ столбец}}$, сумму чисел в 10 столбцах за $\Sigma_{10 \text{ столбцов}}$.

$$\Sigma_{2 \text{ строк}} > 20, \text{ значит } \Sigma_{10 \text{ строк}} > 20 \cdot 5 \left(\begin{array}{l} \text{т.к. } 10 \text{ строк} : 2 \text{ строк} \\ = 5 \text{ пар} \end{array} \right)$$

$$\Sigma_{10 \text{ строк}} > 100$$

Будем рассуждать от противного. Пусть не найдётся столбец, в котором $\Sigma_{1 \text{ столбец}} > 10$, т.е. будем $\Sigma_{1 \text{ столбец}} \leq 10$ (каждого столбца)

$$\text{Тогда } \Sigma_{10 \text{ столбцов}} \leq 10 \cdot 10$$

$$\Sigma_{10 \text{ столбцов}} \leq 100$$

Но $\Sigma_{10 \text{ строк}}$ и $\Sigma_{10 \text{ столбцов}}$ должны быть равны, т.к. это общая сумма всех чисел в таблице.

Получаем противоречие. Значит, обязательно найдётся столбец, в котором сумма чисел больше 10.

Ответ: да, обязательно

N4.

$$\left. \begin{array}{l} a+b=1 \\ a>0 \\ b>0 \end{array} \right\}$$

$\Rightarrow a$ и b – нецелые числа (дробные), принадлежащие $(0; 1)$, ~~лежащие~~

$$\frac{a(a^2+b)}{a+b^2} + \frac{b(a+b^2)}{a^2+b} > 1$$

$$\frac{a(a^2+b) + b(a+b^2)}{(a+b^2)(a^2+b)} > 1$$

$a+b^2 \neq 0$, $a+b^2 \neq 0$, т.к. в знаменателе $a^2+b \neq 0$

$$\frac{a^3 + ab + ab + b^3}{(a + b^2)(a^2 + b)} > 1$$

$$\heartsuit \frac{a^3 + ab + ab + b^3}{a^3 + ab + a^2b^2 + b^3} > 1$$

Рассмотрим числитель дроби ($\heartsuit$)

$$a^3 + ab + ab + b^3 = a^3 + 2ab + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) + 2ab$$

$$\text{т.к. } a+b=1 \text{ (дано)}$$

$$\text{Зн. } 1 \cdot (a^2 - ab + b^2) + 2ab = a^2 - ab + b^2 + 2ab = a^2 + ab + b^2$$

Рассмотрим знаменатель дроби ($\ast$)

$$a^3 + ab + a^2b^2 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) + ab + a^2b^2$$

$$\text{т.к. } a+b=1 \text{ (дано)}$$

$$\text{Зн. } 1 \cdot (a^2 - ab + b^2) + ab + a^2b^2 =$$

$$a^2 - ab + b^2 + ab + a^2b^2 = a^2 + a^2b^2 + b^2$$

$$\text{Значит, получаем } \frac{a^2 + ab + b^2}{a^2 + a^2b^2 + b^2} > 1$$

Чтобы дробь была больше 1, числитель должен быть больше знаменателя.

$$a^2 + ab + b^2 - a^2 - a^2b^2 - b^2 = ab - a^2b^2$$

П.к. a и b дробные числа, лежащие на промежутке $(0; 1)$, то при их возведении в квадрат, число будет уменьшаться, т.е. $a > a^2$; $b > b^2$

$$\text{Зн. } ab > a^2b^2$$

$$\text{Зн. } a^2 + ab + b^2 > a^2 + a^2b^2 + b^2$$

$$\text{Зн. } \frac{a^2 + ab + b^2}{a^2 + a^2b^2 + b^2} > 1$$

ч.т.д.

N2

999 и 1000

$$9+9+9=27=3$$

$$1+0+0+0=1=1$$

Значит, переход в следующий разряд
н.е. последней цифра в остатке числа 9
н.е. иначе (если последняя цифра не 9 и
перехода через разряд нет, послед. цифра ув. на 1)
сумма цифр двух чисел будет отличаться на
1, а таких кратных кубов подряд нет.

Ответ: да, существуют. Например, 999 и 1000.

N3.

от 1 до 500

При делении на 7 может быть остаток от 0 (т.е. делится на 7 без остатка) до 6.

Рассмотрим несколько вариантов.

① Пусть одно из выбранных чисел делится на 7 без остатка и кратно 7. Тогда $a = 7h$. Пусть два других из выбранных чисел b и c . Тогда по условию:

$$a + b = 7x$$

$$a + c = 7y$$

$$b + c = 7z$$

$$\left. \begin{array}{l} 7h + b = 7x \\ 7h + c = 7y \\ b + c = 7z \end{array} \right\} \Rightarrow b \text{ и } c \text{ тоже кратны } 7.$$

② Пусть среди выбранных чисел нет чисел, кратных 7. Значит, остаток от деления на 7 этих чисел $\neq 0$. Пусть эти числа a, b, c .

Пусть $a = 7n + r_1$ где n, m, k — натур.

$$b = 7m + r_2$$

$$c = 7k + r_3$$

r_1, r_2, r_3 — остатки от деления на 7 a, b и c соотв.

Тогда

$$7n + r_1 + 7m + r_2 = 7x \quad \text{где } x, y, z \text{ — натур.}$$

$$7n + r_1 + 7k + r_3 = 7y$$

$$7m + r_2 + 7k + r_3 = 7z$$

$$\left. \begin{array}{l} (r_1 + r_2) : 7 \\ (r_1 + r_3) : 7 \\ (r_2 + r_3) : 7 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

где r_1, r_2, r_3 — ~~различ.~~
целые остатки числа, при-
надлежащие $[1; 6]$

Зн. такого варианта быть не может (т.к. $r_1 + r_2, r_3 \in [1; 6]$, r_1 – целое число от $[1; 6]$ не может быть ~~то~~ ^{оба} раза равно $\frac{1}{2}$ числу, кратному 7.)

Зн. подходит только вариант (1)

Среди ~~500 чисел~~ чисел от 1 до 500

$500 // 7 = 71$ число делится ~~кратно~~ 7

где $//$ – целочисленное деление.

Первое a – можно выбрать 71 способами

b – 70 способами

c – 69 способами

$71 \cdot 70 \cdot 69 = 342\,930$ способами

Ответ:

$\frac{342\,930}{6} = 57\,155$, т.к. 6 вариантов перестановок

чисел внутри выбранной тройки

Ответ: 57 155 способами

N8.

П.к. Петя начинает первым, он может взять ~~то~~ все конфеты из любой подряд идущей девятки корзин. Петя ~~в~~ ^{в сумме} ~~если~~ Петя выберет девятку корзин, где конфет больше всего. Зн. первым ходом он возьмёт не больше 1409 конфет (если в 91 корзине по 1 конфете, а в подряд идущей девятке корзин в сумме $1500 - 91 = 1409$) и не меньше 135 конфет (если в каждой корзине будет по $1500 : 100 = 15$ конфет. т.к., если в какой-то корзине ~~будет~~ ^{идет} девятке корзин будет меньше 135 конфет, ~~знаю~~ ^{то} ~~в~~ ^{какой-то} ~~корзине~~ ^{хотя бы} в 1 корзине будет < 15 конфет $\Rightarrow$ в "другой" девятке будет больше > 135 конфет,

хотя бы в 1 корзине будет > 15 конфет. Тогда Петя возьмёт "другую" девятку.) Значит, первым ходом Петя гарантированно возьмёт ~~135~~ конфет. хотя бы 135 конфет. Таких ходов $100:10 = 10$, т.к. за пару "первый ход Пети + первый ход Васи" опустошится $9 + 1 = 10$ корзины. Если Петя в первый ход взял > 135 конфет, то он ~~уже ничего не сможет взять~~ разница, сложившаяся за счёт последних ходов < 135 конфет. Значит, $135 \cdot 10 = 1350$ конфет Петя сможет забрать гарантированно при любых изначальных расположении конфет и любых действиях Васи.

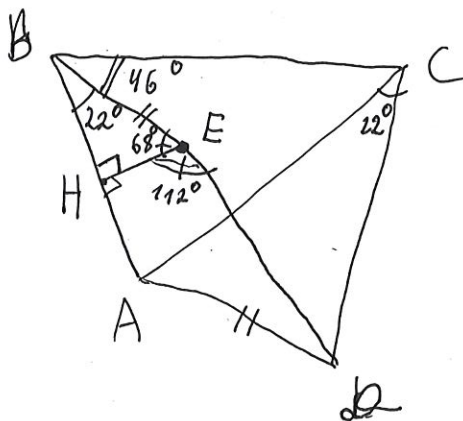
✗

ч.т.д.

N5.

Док-во:

 $\triangle HBE$ — прямой. с $\angle BHE = 90^\circ$

Зн. $\angle BEN = 90^\circ - \angle ABD = 90^\circ - 22^\circ = 68^\circ$
 $\angle HED = 180^\circ - \angle BEN = 180^\circ - 68^\circ = 112^\circ$, как смежный с $\angle BEN$


N7.

Пусть участники совета — вершины графа, а знакомства — рёбра графа. Будем решать с помощью графа. На собрании пришли 52 любых участника, каждый из которых знаком хотя бы с 1 из остальных 51, то в этом графе не менее хотя бы $\frac{52 \cdot 1}{2} = 26$ рёбер.

Да, существуют. пример - 999 и 1000.

$$99+9=17=3^3; 1+0+0+0=1=1^3$$

т.к. a и b - положительные и их сумма равна 1, то $a < 1$ и $b < 1$.

т.к. $a+b=1$, то $a \leq b$ $b=1-a$. тогда уравнение

$$\frac{a}{a+b^2} + \frac{b}{a^2+b} > 1 \quad \text{будет иметь вид} \quad \frac{a}{a+(1-a)^2} + \frac{1-a}{a^2+1-a} > 1.$$

$$\frac{a}{a^2+1-a} + \frac{1-a}{a^2+1-a} > 1; \quad \frac{1}{a^2+1-a} > 1; \quad 1 > a^2+1-a; \quad a^2 < a.$$

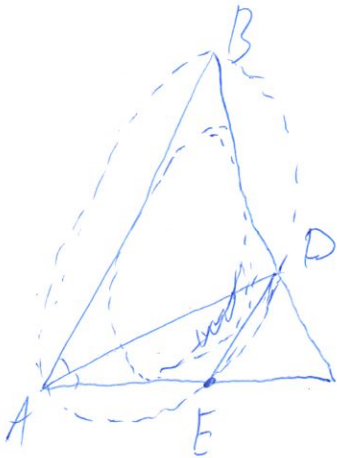
~~т.к. $a < 1$, то получим $a < 1$, что верно.~~ Ч.П.Д.

Предположим что это не так, тогда в каждой строке сумма цифр будет ≤ 10 , а значит сумма цифр во всех строках (то есть во всем квадрате) будет $\leq 10 \cdot 10 = 100$.

то есть сумма цифр во всем квадрате ≤ 100 , а значит и сумма

всех строк тоже ≤ 100 ; проверим строки сверху

вниз начиная от 1 до 10 и разобьем их на 5 пар: $1 \text{ и } 2; 3 \text{ и } 4; 5 \text{ и } 6; 7 \text{ и } 8; 9 \text{ и } 10$. тогда в каждой паре сумма чисел > 20 . т.к. эти 5 пар содержат все строки, то их сумма будет $> 20 \cdot 5 = 100$. то есть сумма всех строк (а значит и сумма во всем квадрате) > 100 , но мы уже получили что она ≤ 100 , противоречие.



№ 6.

пусть $\angle BAD = \angle$, тогда т.к. AD биссектриса
 $\angle DAC = \angle$, $\angle BCA = \angle BAC = 2\angle$.

т.к. ABDE - вписанный, то $\angle CDE = \angle BAE = \angle$.
 $\angle AED = \angle EDC + \angle ECD = 4\angle$. т.к. ABDE - вписанный,

то $\angle ABD = 180 - \angle AED = 180 - 4\angle$.

т.к. ABDE - описанный четырехугольник, то
и вписанный

как известно если его диагональ является биссектрисой для
одного угла, то она является биссектрисой для другого угла.

$\angle ADE = 180 - \angle DAE - \angle AED = 180 - 4\angle - \angle = 180 - 5\angle$.

$\angle ADB = \angle ADE = 180 - 5\angle$. тогда в $\triangle ABD$ сумма углов равна:

$180 - 4\angle + 180 - 5\angle + \angle = 180$; $180 = 8\angle$; $\angle = 22,5$. $\angle BAC = 2 \cdot 22,5 = 45$
 $\angle BCA = \angle BAC = 45$, $\angle ABC = 180 - \angle BAC - \angle BCA = 180 - 45 - 45 = 90^\circ$.

№ 3.

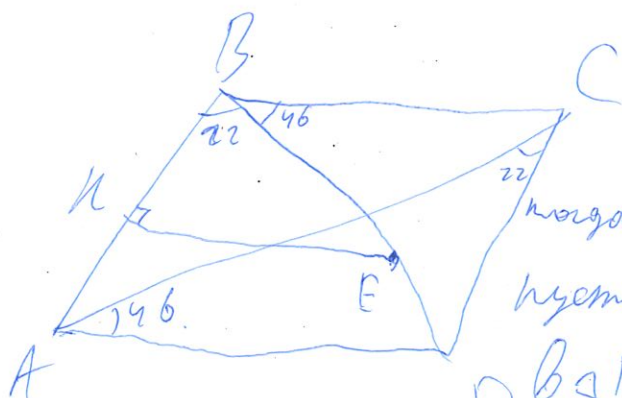
(a; b; c)

Предположим мы выбрали различные числа, каждое из
которых имеет разный остаток при делении на 7.
Если сумма каких-то двух делится на 7 (без потери общности
будем считать что эти 2 числа - a и b). Но раз $a + b \equiv 0 \pmod{7}$, то a+c можно
из-за того что b и c имеют разные остатки при делении на 7,
следовательно мы не можем выбрать 3 различных числа,
имеющих различные остатки при делении на 7.
Предположим мы выбрали 3 различных числа (a, b, c) где
b₁ и b₂ имеют одинаковый остаток по mod 7, а число a - отличный
от b₁ и b₂. тогда пусть $a + b_1 \equiv 0 \pmod{7}$ или $b_1 + b_2 \equiv 0 \pmod{7}$, тогда
 $a + b_2 \equiv 0 \pmod{7}$ значит мы не можем выбрать такие 3 числа.
Или $b_1 + b_2 \equiv 0 \pmod{7}$ тогда мы не можем выбрать такие 3 числа.
Или $b_1 + b_2 \not\equiv 0 \pmod{7}$ т.к. $a \not\equiv b_1 \pmod{7}$ следовательно мы не можем
выбрать такие 3 числа.
Отсюда мы можем выбрать только такие 3 числа, что
их остатки по mod 7 одинаковы. Следовательно любые 3 числа с
одинаковыми остатками дадут 0 по mod 7.

Защитили все такие остатки.

$0+0 \equiv 0 \pmod{7}$; $1+1 \not\equiv 0 \pmod{7}$; $2+2 \not\equiv 0 \pmod{7}$; $3+3 \not\equiv 0 \pmod{7}$; $4+4 \not\equiv 0 \pmod{7}$;
 $5+5 \not\equiv 0 \pmod{7}$; $6+6 \not\equiv 0 \pmod{7}$; получаем что для выполнения
 условия ~~и~~ на можем использовать только числа нечетные
 ≤ 7 . Ч.к. $500 = 71 \cdot 7 + 3$, то веро таких чисел - 71. а значит
 кол-во вариантов = $71 \cdot 70 \cdot 69 = 342930$.

25



т.к. $\angle ABD = \angle ACD$, то $ABCD$ - вписанная.

22/ karena $\angle CAD = \angle DBC = 46^\circ$.

hence $AD = x$, maka $BE = AD = x$.

В $\triangle BEK$ ~~BE~~ $KE = \sin 22^\circ \cdot BE \approx 0,375x$.

$$\begin{aligned} \triangle ACD \quad \cos 46^\circ &= \frac{AD}{AC}, \quad AC = \frac{AD}{\cos 46^\circ} = \frac{x}{\cos 46^\circ} \approx 1.439x \\ \sin 46^\circ &= \frac{CD}{AC}, \quad CD = \sin 46^\circ \cdot AC = \frac{x \cdot \sin 46^\circ}{\cos 46^\circ} = 1.036x \end{aligned}$$

$\sin 46^\circ = \frac{CD}{AC}$; $CD = \sin 46^\circ \cdot AC = \frac{0,5 \sin 46^\circ}{\cos 46^\circ} = 0,36 \cdot x$.
 тогда $ЕК + CD = 0,375x + 0,36x = 0,735x < 0,739x = AC$. Ч.т.д.
 т.е. $ЕК$ и CD окружатся в большую сторону, AC - в меньшую.
 и.е.

2-7

пусть группа с 52 участниками - первая, а с 51 - вторая.

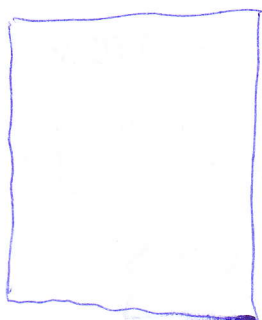
пусть человек А из группы 1 знает человека Б из группы 2.
Пусть человек А из группы 1 знает человека В из группы 2.
тогда перейдем к следующему этапу из группы 1 местами. Тогда
пусть человек А из группы 1 знает человека С из группы 2, перейдем
его в группу 1. Предполагаем так и поступим с тем В из группы 1
будет 51 человек знакомый с А. перейдем их всех в
группу 1, а всех из группы 2 - в 1. Тогда из группы 1 ~~каждому~~
и группы 2, а всех из группы 2 - в 1. Тогда из группы 1 ~~каждому~~
~~будет знакомыми все будут знакомы с кем-то из группы 2.~~
из группы 2. Пусть те, кто знает А - кругом, тогда оставшим
А в группе 2, а остальных вернем в группу 1. В группе 1 будет
теперь кругом и не кругом. Если они знакомы с А то они ~~кругом~~
50 столкнутся кругом или нет их считаем с кем-то из группы 2 (не А)
Если все знакомы с А но задача решена.

Код участника:

(заполняется организатором)

M9-032

Задание 1.



Пусть не обязательно. Тогда разобьём 12 строк на 6 пар. Тогда всего сумма чисел в таблице больше $16 \cdot 6 = 96$. Но если в каждом столбце сумма чисел ≤ 8 , то всего сумма чисел в таблице $\leq 8 \cdot 12 = 96$. Противоречие $\Rightarrow$ Обязательно.

Задание 2.

Пусть существуют. Тогда есть 2 варианта:

1) Нет перехода через десяток. Тогда суммы цифр различны на 1 и $2x^2 + 1 = 2y^2 \Rightarrow 7 + 4 \neq 7$. Не бывает.

2) Есть переход. Тогда наше число — это $\overline{n \cdot \dots \cdot 9}$ — где n — это натур. число (не обязательно цифра). Когда $+1$, то будет число $\overline{n+1 \cdot 0 \cdot \dots \cdot 0}$. Тогда пусть сумма цифр n равна a . Тогда суммы цифр:

$$a + 9t = 2x^2$$

$$a + 1 = 2y^2 \Rightarrow a = 2y^2 - 1 \Rightarrow 2y^2 - 1 + 9t = 2x^2$$

$$8 \equiv 9t - 1 = 2(x^2 - y^2) \pmod{9} \Rightarrow 2(x^2 - y^2) \equiv 8 \pmod{9}$$

$\Rightarrow x=7, y=3, a=17, t=9$ Подходит. 2 числа.

Сумма цифр $17 + 9 \cdot 9 = 98 = 2 \cdot 7^2$

$$16 + 2 = 18 = 2 \cdot 3^2$$

(Да)

1) $\overbrace{1 \dots 1}^{17} \overbrace{9 \dots 9}^9$
 2) $\overbrace{1 \dots 1}^{16} \overbrace{2 \dots 0}^2 \overbrace{0 \dots 0}^9$

Код участника:

(заполняется организатором)

119-032

Задача 3.

Пусть остаток mod 11 у одного шара — это x .

$\Rightarrow$ у двух других $11-x$ и $11-x$. $\Rightarrow 22-2x : 11$

Но тогда единственный вариант: $x=0$. $\Rightarrow$

все наши 3 шара : 11. Всего чисел : 11

у нас $\left[\frac{1000}{11} \right] = 90$. Выбираем 3. Всего $C_{90}^3 =$

$$= \frac{90!}{3! \cdot 87!} = \frac{88 \cdot 89 \cdot 90}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 117480.$$

Задача 4.

$$\frac{a^2}{1+b} + \frac{b^2}{1+a} \stackrel{?}{\leq} 1. \quad | \cdot (1+b)(1+a) \text{ и раскроем скобки.}$$

$$a^2 + a^3 + b^2 + b^3 \stackrel{?}{\leq} 1 + a + b + ab. \quad \text{Т.к. } a+b=1, \text{ то:}$$

$$a^2 + a^3 + (1-a)^2 + (1-a)^3 \stackrel{?}{\leq} 2 + a(1-a)$$

$$\underline{a^2 + a^3 + 1 - 2a + a^2 + 1 - 3a + 3a^2 - a^3} \stackrel{?}{\leq} 2 + a - a^2$$

$$6a^2 - 6a \stackrel{?}{\leq} 0$$

$$a^2 - a \stackrel{?}{\leq} 0$$

$$a(a-1) \stackrel{?}{\leq} 0. \quad a > 0 \text{ и т.к.}$$

$$\text{числа полож., то } a-1 = -b < 0.$$

$\Rightarrow$ Произведение ≤ 0 .

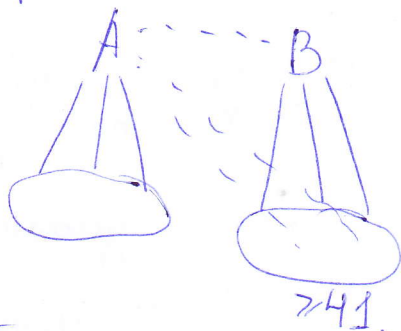
Код участника:

(заполняется организатором)

Мг - 032

Задача 7.

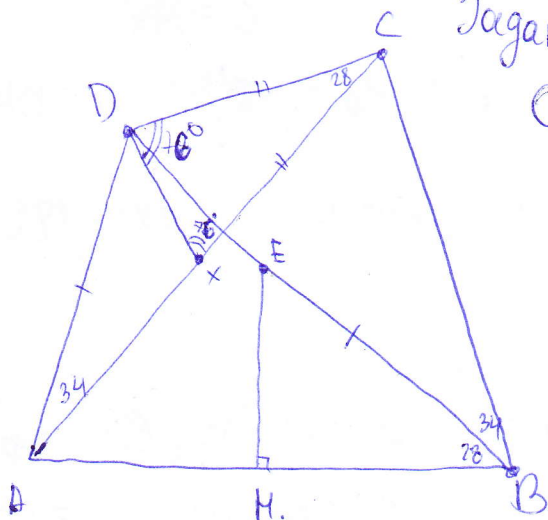
Пусть есть чел. А, который не знает В и у них нет общего знакомого. $\Rightarrow$ мн-ва знакомых А и В не пересекаются.



Всего людей кроме А и В 81
 $\Rightarrow$ у кого-то из них ≤ 40 знакомых (Пусть у А)
 $\Rightarrow$ у В тогда ≥ 41 знакомых.

Тогда возьмем А, В и каких-то знакомых В, чтобы всего было 43 чел. А не знает ни одного по предположению. Противоречие. $\Rightarrow$ Он знает или В, или знакомого В.

Задача 5.



Отметим на AC точку X, чтобы $CD = CX$. Т.к. $\angle DAC = \angle DBC = 34^\circ$
 $\Rightarrow \angle ABC = \angle ADC$

Т.к. $\angle DCA = \angle DBA = 28^\circ \Rightarrow ABCD$ впис.
 $\Rightarrow \angle DBC = \angle DAC = 34^\circ$

$\triangle CDX$ равнобедр. $\Rightarrow \angle DXC = 76^\circ$

$AC = AX + XC = AX + DC$. Полеми $AX > EH$

Из $\triangle HEB$: $EH = EB \cdot \sin 28^\circ$. $\angle ADX = 180^\circ - 28^\circ - 34^\circ - 76^\circ = 42^\circ$

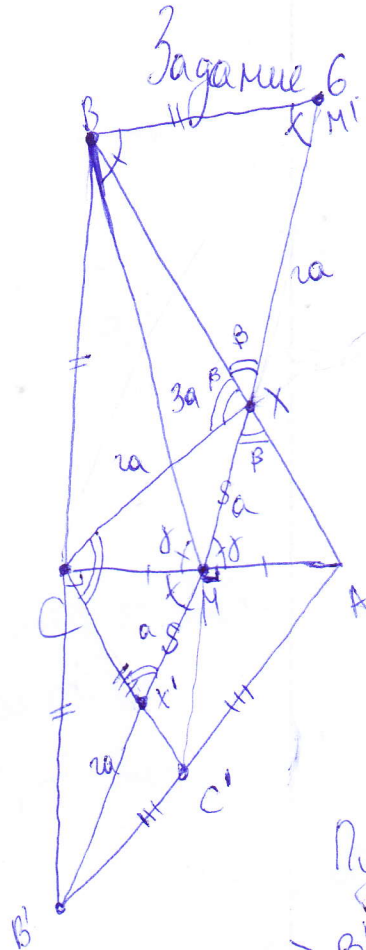
Из $\triangle ADX$: $\frac{AX}{\sin 28^\circ} = \frac{AD}{\sin 42^\circ} = \frac{AX}{\sin 76^\circ} \Rightarrow AX = \frac{AD \sin 42^\circ}{\sin 76^\circ}$, т.к. $AD = EB$, то $\sin 28^\circ \leq \frac{\sin 42^\circ}{\sin 76^\circ}$. Это правда.

Код участника:

(заполняется организатором)

МГ - 032

~~Это правда, т.к. $\sin 42^\circ$ и $\sin 76^\circ < 1$, но тогда, когда мы делим их друг на друга, то число будет $> 1 > \sin 28^\circ$.~~



Оразим B относ. AC.

Тогда $\angle CMB = \angle CMB' = \angle XMA$
 $\Rightarrow X, M, B'$ — 1 прямая.

Удвоим медиану XM.

$XCX'A$ — параллелограмм

и X' лежит на XB' .

$CX' \parallel XA$ и C — середина

$BB' \Rightarrow CX'$ — сред. линия

$\triangle BXB' \Rightarrow B'X' = \frac{1}{2} B'X$.

Пусть $MX = a = MX'$

$\Rightarrow B'X = 4a \Rightarrow B'M = 3a = BM$.

Если $\angle CXB = \angle XMA = \beta$ и из $XA \parallel CX'$ $\angle CXX' = \beta$. $\angle CXX' = 180^\circ - 2\beta$
 $\Rightarrow \triangle CX'X$ — равнобед. $\Rightarrow XX' = CX$
 $\parallel 2a$.

Отсимметрируем M' относительно стороны AB $\angle CXB = \angle BXM'$

$= \angle XMA \Rightarrow MXM'$ — 1 прямая. $\Rightarrow$ т.к. $MX = a$, $CX = XM' = 2a$ и

$MB = 3a \Rightarrow \triangle MBM'$ — равнобед. $\Rightarrow$ Если $\angle CMB = \angle XMA = \gamma$, то

$\angle MBM' = \gamma = \angle MM'B \Rightarrow BM' \parallel CA \Rightarrow \triangle XMA \sim \triangle BXM'$ по 2 углам.

$\Rightarrow \frac{MX}{XM'} = \frac{BM}{MA} = \frac{BC}{CA} = \frac{3a}{2a} = \frac{3}{2}$

Код участника:

(заполняется организатором)

Mg - 032

Задача 6 (продолжение).

$$\frac{1}{2} = \frac{MX}{XM'} = \frac{MA}{BM'} = \frac{MA}{BC} \Rightarrow BC = 2MA = AC. \Rightarrow \Delta \text{ равнобедренный.}$$

Острые углы 45° и 45° .

Задача 8.

Пусть первым ходом Петьа возьмёт четвёрку, где в сумме больше всего конфет. Пусть их там a . Тогда

Вася заберёт кол-во конфет $\leq a-3$ (если $\geq a-2$, то Петьа возьмёт эту корзиночку и 3 следующих, там хотя бы по 1 конфете, в сумме $\geq a+1$).

Когда Петьа не может сделать ход?

Когда промежутки между группами конфет ≤ 3 . Тогда Петьа гарантированно делает $\lfloor 100/7 \rfloor = 28$ ходов.

Петьа каждый раз берёт четвёрку, где больше всего конфет. Изначально в первой четвёрке $7 \cdot \frac{100}{4} = 175$ конфет.

N 1.

1) Разобьем все 10 строк на 5 пар, в каждой из которых по условию, сумма чисел больше 20.

Значит сумма всех чисел в таблице больше чем $5 \cdot 20 = 100$.

2) Пусть таблица с суммой чисел больше 10 не окажется, тогда в каждой строке сумма чисел не больше 10, тогда сумма всех чисел в таблице не больше 100, что противоречит пункту 1 $\Rightarrow$ ^{обязательно} найдётся строка, в которой сумма чисел больше 10.

Ответ: обязательно

N 2.

Сумма цифр в двух последовательных натуральных числах может отличаться на 1 (88; 89) на 8 (69; 70) на 17 (99; 100) и так далее, прибавляя 10, т.е. либо на 1, либо на $9n-1$.

Если один из ^{таких} кубов будет единица то второй будет $9n-1+1=9n$, а $9=3^2$, т.е. при $n=3$ $9n=27$, т.е. ^{полный} ^{к-во}.

Ответ: да, например 999; 1000

N 3.

Пусть три выбранных числа это k, m, n , тогда

$$\begin{cases} n+m \div 7 \\ k+m \div 7 \\ k+n \div 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} n \text{ отличается от } k \text{ на число кратное } 7, \\ k \text{ от } m \\ m \text{ от } n \end{matrix} \text{ т.к. } n+m \text{ и } k+m \text{ делятся на } 7 \text{ при неизменной } m. \text{ Забывчив.}$$

Пусть ^{больше} ~~n отличается~~ от k на $7x$, тогда $n+k = k+k+7x = 2k+7x$.

$$\frac{2k+7x}{7} = 2\frac{k}{7} + x \Rightarrow k \text{ делится на } 7; \text{ } m \text{ и } n \text{ аналогично.}$$

Получается, что условия выполняются только, если выбранные числа кратны 7. От 1 до 500 таких чисел 71 $\Rightarrow$ способов выбрать три из них $C_{71}^3 = \frac{71!}{68! \cdot 3!} = \frac{69 \cdot 70 \cdot 71}{2 \cdot 3} = 23 \cdot 35 \cdot 71 = 57155$ Ответ: 57155 способов.

N 4.

$$a+b=1$$

$$a>0 \Rightarrow a<1$$

$$b>0 \Rightarrow b<1$$

$$\begin{cases} \cancel{b=a} + b=1-a \\ \frac{a}{a+b^2} + \frac{b}{a^2+b} > 1 \end{cases} \quad \begin{cases} \cancel{b=a} + b=1-a \\ \frac{a}{a+a^2-2a+1} + \frac{1-a}{a^2+1-a} > 1 \end{cases}$$

$$\frac{a}{a^2-a+1} + \frac{1-a}{a^2-a+1} > 1$$

$$\frac{1}{a^2-a+1} > 1 \text{ т.к. } a>0, \text{ то } 1 > a^2-a+1$$

и $a^2-a < 0$, т.е. надо доказать, что $a^2-a < 0$ или $a^2 < a$,
а т.к. $a < 1$, то $a^2 < a$

N 7

Примеру всех участников от 1 до 101.

Пусть номер i присутствует на всех рассматриваемых собраниях

1) приходят с 1 по 52 и 1 знает 2.

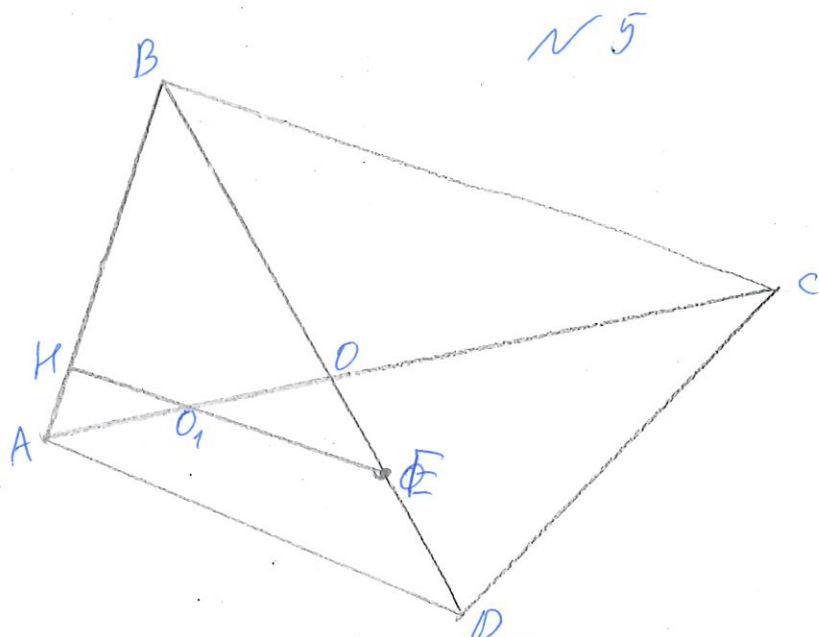
2) приходят 1; с 3 по 53 и 1 знает 3

3) приходят 1; с 4 по 54 и 1 знает 4.

50) приходят 1; с 51 по 101 и 1 знает 51

т.е. 1 знает как минимум 50 человек, для всех остальных аналогично $\Rightarrow$ каждый знает как минимум 50 человек.

Если два случайных участника не знают друг друга, то среди остальных 99 участников каждый имеет по 50 знакомых, т.е. как минимум один общий.



Дано: четырёхугольн. $ABCD$

$$\angle ABD = \angle ACD = 22^\circ$$

$$\angle CBD = 46^\circ$$

$$E \in BD$$

$$BE = AD$$

$$EH \perp AB$$

Доказать: $AC > EH + CD$

Решение

$\angle ABD = \angle ACD \Rightarrow$ окол. $ABCD$ можно описать окружность.

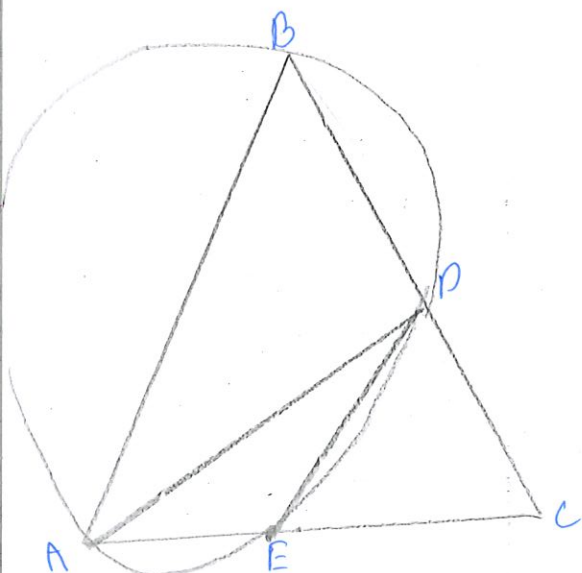
$$\Rightarrow \angle B + \angle D = 180^\circ \text{ и } \angle A + \angle C = 180^\circ$$

$$\angle D = 180 - 22 - 46 = 112^\circ$$

$\angle DBC = \angle DAC = 46^\circ$, т.к. опираются на одну дугу

$$\angle BEH = 180 - 90 - 22 = 68^\circ$$

т.к. в треугольнике против большего угла лежит большая сторона докажем, что $\angle AHO_1 > \angle HAO_1$, $\angle O_1EO > \angle O_1OE$, $\angle CDO > \angle COD$.



Дано: $\triangle ABC$, $AB = BC$.

AD - биссектриса

~~окр.~~ $окр.(A; B; D) \cap AC = E$

$ABDE$ можно впис. окр.

Найти: $\angle A$; $\angle B$; $\angle C$.

Решение

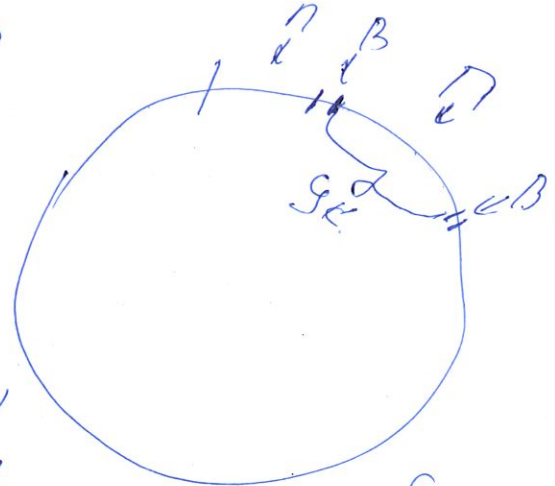
центр опис. окр. окол. A - пересечение серединных перпендикуляров.
т.к. в $ABDE$ впис. окр., то $AB + DE = AE + BD$.

N 8.

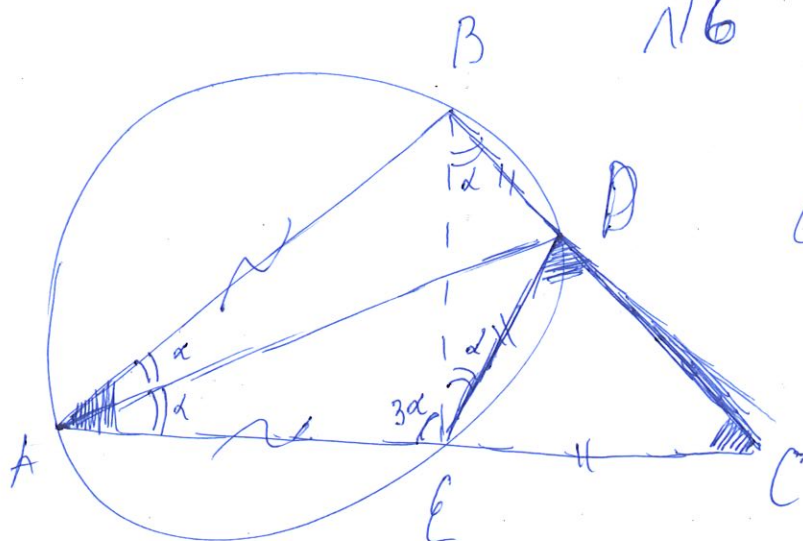
Если во всех корзинах одинаково количество конфет, то Тёма заберёт ровно 1350 конфет, если нет, то в каких-то корзинах больше чем 15 и если Тёма не будет давать всем возможность взять эти конфетки Тёма наберёт 71350 конфет.

идут так: 0123... 910012345... 91001234 и т.д. поэтому у нас получится это сечение). В кругу образуются свободное место по краям которого стоят корзинки из группы X. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Взяв ~~корзину~~ по правилам обязан взять корзинку группы X. Следующим ходом, Петя берет у корзинок так, чтобы корзинка, взятая Васей оказалась между корзинами Петей. Тогда Вася снова будет обязан брать корзинку из группы X. Петя играет по этой стратегии до конца игры. Таким образом Вася не сможет взять не одной корзинки не из множества X. $\Rightarrow$ у него будет ≤ 150 копеек, тогда у Петя ≥ 1350 . Чтд.



№6



Пусть $\angle BAC = 2\alpha$. Тогда
 $\angle BAD = \angle DAC = \alpha$; $\angle BCA = 2\alpha$.
 Четырехугольник ABDE – вписанный
 $\Rightarrow \angle DAE = \angle EBD = \alpha$;
 $\angle BAD = \angle BED = \alpha$. т.к.
 $\angle DBE = \angle BCD = \alpha$ то
 $BD = DE$. т.к. ABDE –

– описанный $\Rightarrow AB + DE = AE + BD \Rightarrow AB = AE$. $\Rightarrow \angle AEB = \angle ABE$. Посчитаем эти углы. $\angle BDE = 180^\circ - \angle BAE = 180^\circ - 2\alpha$
 $\angle EDC = 180^\circ - \angle BDE = 2\alpha$. $\angle AED = \angle EPC + \angle DCE = 4\alpha$.
 $\angle AEB = \angle AED - \angle BED = 3\alpha$. $\angle APB = \angle BCP = 3\alpha$. $\angle ADE =$
 $= 180^\circ - \angle ADB - \angle EPC = 180^\circ - 5\alpha$. $\angle ABE = \angle ADC = 180^\circ - 5\alpha$.
 т.к. $\angle AEB = \angle ABE$ то $3\alpha = 180^\circ - 5\alpha$. Откуда $2\alpha = 45^\circ$
 $\Rightarrow \angle BAC = \angle BCA = 45^\circ$; $\angle ABC = 90^\circ$. Ответ: $45^\circ; 45^\circ; 90^\circ$.

№7

Нам известно что среди любых 52 участ-
 ков секретного совета каждый знает
 хотя бы одного из остальных 51 участ-
 ков, это значит что каждый человек из 101
 участник секретного совета знаком с хотя бы
 50 участниками (из 101) секр. совета. Иначе, если какой-то
 участник совета знаком с ≤ 49 участниками то тогда
 можно создать собрание с этим участником и 51 участ-
 ником, с которыми он не знаком, для которого

N1

Да, обязательно. Докажем это от противного. Пусть не существует такого столбца где сумма чисел > 10 тогда во всех столбцах сумма чисел ≤ 10 . Значит сумма чисел во всей таблице ≤ 100 (т.к. столбцов 10). С другой стороны сумма чисел в 1-ой и 2-ой строках > 20 , сумма чисел в 3-ей и 4-ой строках > 20 , ..., сумма чисел в 9-ой и 10-ой строках > 20 . $\Rightarrow$ сумма чисел во всей таблице > 100 . Но сумма чисел не может быть одновременно ≤ 100 и > 100 . Противоречие.

N2

~~Да, существуют. Например числа 999...999 и 10000...0000. Сумма цифр первого числа 81, а сумма цифр второго 1. Тогда сумма цифр 82, что не делится на 7.~~

Да, существуют. Например числа $\underbrace{999 \dots 999}_{81 \text{ девятка}}$ и $\underbrace{10000 \dots 0000}_{81 \text{ ноль}}$. Сумма цифр первого числа $81 \cdot 9 = 729 = 9^3$, а сумма цифр второго $1 + 0 \cdot 81 = 1 = 1^3$.

N3

Для начала, докажем, что если в наборе из трёх чисел есть число которое не делится на 7 то этот набор нам не подходит. Пусть есть числа a, b, c выбранные из написанных на доске и какое то из них не делится на 7. Без ограни-

Бланк ответа

Всероссийская олимпиада школьников «Миссия выполнима. Твоё призвание – финансист!»

Код участника:
(заполняется организатором)

119-197

Бланк ответа

Всероссийская олимпиада школьников «Миссия выполнима. Твоё призвание – финансист!»

Код участника:

(заполняется организатором)

М9-187

Код участника:

(заполняется организатором)

MG-155

№2

Ответ: да.

Пример:

$$1) \overbrace{7 \dots 7}^{10 \text{ циф.}} 1999$$

$$S_{\text{цифр}} = 98 = 7^2 \cdot 2;$$

$$2) \overbrace{7 \dots 7}^{10 \text{ циф.}} 2000$$

$$S_{\text{цифр}} = 72 = 6^2 \cdot 2.$$

№3

Предп., что есть 3 числа: a, b, c ($a \not\equiv b \not\equiv c$)

$$\rightarrow \begin{cases} a+b \equiv 11 \\ a+c \equiv 11 \end{cases} \rightarrow b-c \equiv 11$$

 $\Rightarrow b \not\equiv c$ - противоречие

$\rightarrow$ все числа имеют одинаковый остаток при делении на 11, обозн. k (ост. при делении)

$$a \equiv b \equiv c \equiv k$$

$a+b \equiv 2k \equiv 0 \rightarrow k \equiv 0 \rightarrow a, b, c \equiv 0$,
всего чисел: 11 и $\in (0; 1000]$;

$$\frac{1000}{11} = 90 \rightarrow C_{90}^3 = \frac{90!}{3! \cdot 87!} = \frac{90 \cdot 89 \cdot 88}{6} = 117480.$$

Код участника:

(заполняется организатором)

МГ-155

№1

$$S(\text{всех чисел}) \geq 16 \cdot \left(\frac{12}{2}\right) = 8 \cdot 12$$

↑
всех цифрах

↑
кол-во пересек. пар
из 2-х цифр.

столбцов 12.

Согласно принципу Державе, найдется хотя бы один столб, с суммой $\geq \frac{8 \cdot 12}{12} = 8$

Ответ: да.

Код участника:

(заполняется организатором)

МГ-155

$$N4 \quad \frac{a^2}{1+b} + \frac{b^2}{1+a} < a+b=1$$

поскольку $\frac{a^2}{1+b} < a$ и т.к. $1+b > a(a+b)$

и $\frac{b^2}{1+a} < b$ т.к. $1+a > b(a+b)$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{1+b} + \frac{b^2}{1+a} < a+b=1.$$

N7.

Для решения применим метод ирри.

1) Обозн. уг. совета, как вершин графов. Если два уг. знакомы, то ребра между ними есть (очев.). По условию, если взять 43 вершины, то каждая будет соедин. хотя бы с 1/42 ост. $\rightarrow$ изолированных вершин нету.

2) Предп. что есть знакомство А и В, где то, чтобы удовн. усл. задачи, найдут из них тоже и имеют знакомство среди ост. 81 уг. Обозн. знакомая А как $x_1, x_2, \dots, x_m$; знакомая В как $y_1, y_2, \dots, y_n$.

3) Если А и В имеют знакомства, которые не пересекаются, то в худшем случае у нас есть $1+m+n$ уг., где m и n - кол-во знакомств А и В. Если $m+n < 41$, то мы не можем выбрать 43 уг. удовн. усл., что противоречит предположению.

См. БЛАНК №4

№7 (продолж.)

Код участника:

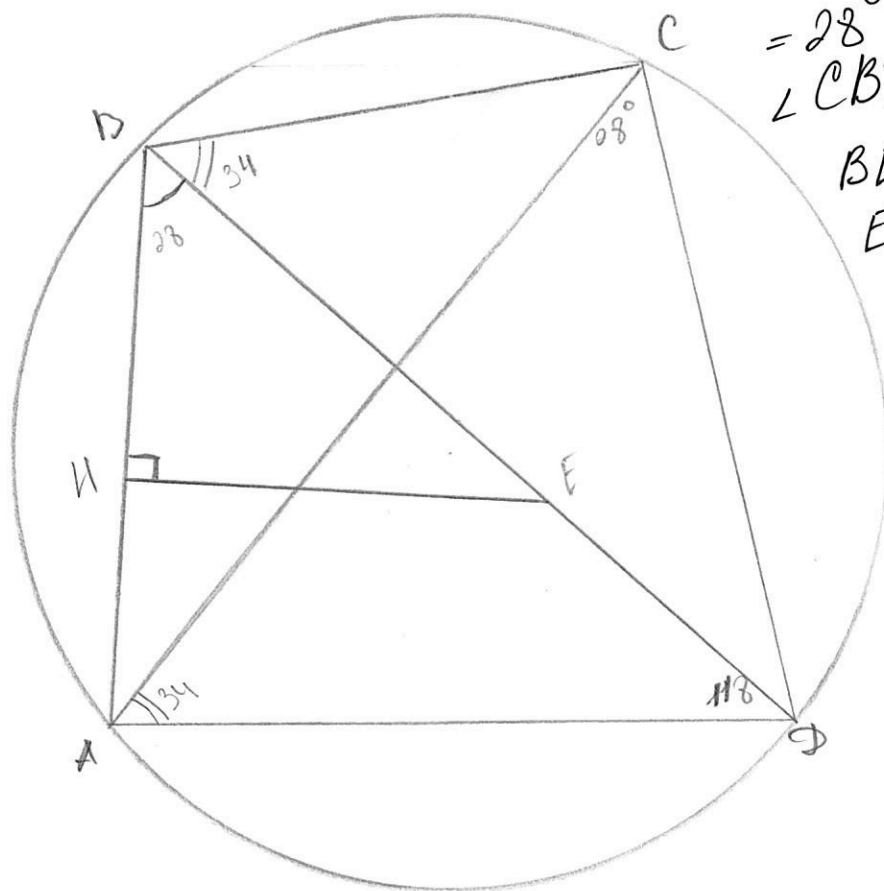
(заполняется организатором)

МГ-155

Таким образом, если A и B - не знакомы, то они должны иметь общего знакомого, чтобы удовол. усл. $\rightarrow$ любые два уч. либо знакомы, либо имеют общего знакомого,

Ч. Т. Д.

№5



Дано:
 $\angle ABD = \angle ACB = 28^\circ$
 $\angle CBD = 34^\circ$

$BE = AD$
 $EH \perp AB$

Док-ть:
 $AC > EH + CD$

№5 (продолж.)

Код участника:

(заполняется организатором)

МГ-155

Решение: т.к. $\angle ABD = \angle ACD \Rightarrow$
около $ABCD$ можно описать окружность

$\Rightarrow \angle CAD = \angle CBD = 34^\circ$, т.к. оцпр. на $\vee CD$

$$\frac{EH}{BE} = \sin 28^\circ \quad 2R = \frac{AD}{\sin 28^\circ} = \frac{CD}{\sin 34^\circ} \text{ (по тх. синусов)}$$

т.к. $AD = BE$ по усу. $\Rightarrow BE = \frac{EH}{\sin 28^\circ}$

$$\frac{EH}{\sin 28^\circ} = \frac{CD}{\sin 34^\circ}, \quad \angle ADC = 180 - 34 - 28 = 118^\circ$$

$$\frac{AC}{\sin 118} = 2R \quad \frac{AC}{\sin(90^\circ + 28)} = 2R$$

$$\frac{AC}{\cos 28} = 2R = \frac{AD}{\sin 28^\circ} \quad \frac{AD}{AC} = \tan 28^\circ$$

2. Предположим, что такие два последовательных натуральных числа существуют. Тогда может быть 2 варианта:

1) Нет перехода через десяток. В этом случае числа различаются на 1 и тем же, сумма их цифр тоже различаются на 1. Это противоречит условию, т.к. нет кубов, которые различаются на 1.

2) Есть переход через десяток. Для того, чтобы он был, первое из чисел должно заканчиваться на 9 (или быть цифрой 9). Значит, сумма цифр не может быть равна ~~7~~ $1^3=1$ и $2^3=8$, т.к. это меньше 9.

Если сумма цифр первого числа равна $3^3=27$ и последняя цифра этого числа 9, то наименьшее такое число – это 999. Следующее за ним число это 1000, сумма его цифр равна $1+0+0+0=1$. Из 1 является кубом 1, значит, такие два числа существуют.

Другие числа с суммой цифр 27 и последней цифрой 9 не подходит, т.к. сумма цифр второго числа не будет являться кубом.

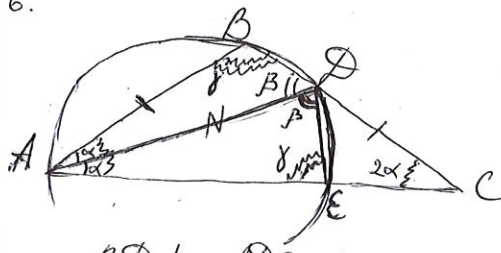
Ответ: да.

8. Т.к. все конфеты распределяется между игроками, посчитаем среднее кол-во конфет в корзиночке $\frac{1500}{100} = 15$ конфет.

Каждые 2 хода опустошается 10 корзиночек (т.к. Тетя опустошает 9 корзиночек, а Васа – одну, $9+1=10$). Значит, каждые 2 хода Тетя и Васа в сумме забирают себе в среднем $15 \cdot 10 = 150$ конфет. Таким образом, количество конфет ~~кон-то Тетя и 2 хода~~ (в данном случае кон состоит из двух ходов – Тети и Васи) равно $\frac{1500}{150} = 10$.

За 10 ходов Васа съест ^{примерно} $15 \cdot 10 = 150$ конфет. Значит Тетя съест $1500 - 150 = 1350$ конфет.

6.



1) $AB = BC$ по условию

Т.к. $\triangle ABC$ равнобедренный, то $\angle BAC = \angle BCA$

2) Т.к. AD – биссектриса, то $\angle BAD = \angle DAE$. Пусть $\angle BAD = \angle DAE = \alpha$.
 $\angle BAD = \angle DAE = \alpha$, $\angle BAC = \angle BCA = 2\alpha$.

3) Т.к. в $\triangle ADE$ четырехугольнике $ABDE$ можно вписать окружность,

то $\angle BDA = \angle ADE = \beta$.

4) Т.к. $\angle BAD = \angle DAE$, $\angle BDA = \angle EDA$ и AD – общая сторона $\triangle ABD$ и $\triangle AED$, то $\triangle ABD = \triangle AED$.

Т.к. соответствующие элементы в равных треугольниках равны, то $\angle ABD = \angle AED = \gamma$.

5) По теореме о сумме углов треугольника

в $\triangle ABD$:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

в $\triangle ABC$:

$$2\alpha + 2\alpha + \gamma = 180^\circ$$

$$4\alpha + \gamma = 180^\circ$$

6) Т.к. в четырёхугольнике $ABDE$ можно вписать окружность, то

$$2\alpha = 180^\circ - 2\beta$$

Составим и решим систему.

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 180^\circ \\ 4\alpha + \gamma = 180^\circ \\ 2\alpha = 180^\circ - 2\beta : 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = 90^\circ - \beta \\ 90^\circ - \beta + \beta + \gamma = 180^\circ \\ 4\alpha = 180^\circ - \gamma \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = 90^\circ - \beta \\ \gamma = 90^\circ \\ \alpha = \frac{90^\circ}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \gamma = 90^\circ \\ \alpha = 22,5^\circ \\ \beta = 67,5^\circ \end{cases}$$

$$\angle BAC = \angle BCA = 2\alpha = 2 \cdot 22,5^\circ = 45^\circ$$

$$\angle ABC = \gamma = 90^\circ$$

Ответ: ~~22~~ $45^\circ; 45^\circ; 90^\circ$.

4. Т.к. $a+b=1$, $a>0$, $b>0$, то $a=1-b$.

$$\frac{a}{a+b^2} + \frac{b}{a^2+b} = \frac{1-b}{1-b+b^2} + \frac{b}{(1-b)^2+b} = \frac{1-b}{b^2-b+1} + \frac{b}{1-2b+b^2+b} = \frac{1-b}{b^2-b+1} + \frac{b}{b^2-b+1} = \frac{1-b+b}{b^2-b+1} = \frac{1}{b^2-b+1}$$

Т.к. ~~$a+b=1$~~ , ~~$a \neq 0$~~ , ~~b~~ $a+b=1$, $a \neq 0$ и $b \neq 0$, то $b < 1$

Т.к. ~~b~~ $b \neq 0$, то $b^2 > 0$

Т.к. $1+b^2 > |1-b|$, то $1+b^2-b > 0$, $1+b^2-b \neq 0$

$$\frac{1}{b^2-b+1} < 1 \quad | : (b^2-b+1) > 0$$

$$\frac{1}{b^2-b+1} > 1$$

з.м.г.

В.1. Предположим, что такого столбца не найдётся. Тогда в каждом из 10 столбцов сумма чисел не больше 10. Тогда наибольшая сумма всех чисел равна $10 \cdot 10 = 100$ и в каждой строке не более $\frac{100}{10} = 10$.

~~М.к. в любых двух строках сумма чисел~~

М.к. в любых двух строках сумма чисел больше 20, но в одной строке - не менее 10.

Если сумма чисел ^{в одной строке} равна 10, то в двух $2 \cdot 10 = 20$. 20 равно 20, а не больше.

Получили противоречие.

Значит, обязательно найдётся столбец, в котором сумма чисел больше 10.

3. Чтобы из трёх выбранных чисел сумма любых двух из них делилась на 7, надо чтобы все три числа были кратны числу 7.

$$\frac{500}{7} \approx 71 \text{ - только так}$$

Пусть n чисел - тех кол-во чисел, кратных 7, $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{500}{7} \geq n$$

$$n \leq 71 \quad n = 71$$

$$C_{71}^3 = 71 \cdot 70 \cdot 69$$

Бланк ответа

Всероссийская олимпиада школьников «Миссия выполнима. Твоё призвание – финансист!»

Код участника:
(заполняется организатором)

MS-002

Бланк ответа

Всероссийская олимпиада школьников «Миссия выполнима. Твоё призвание – финансист!»

Код участника:

(заполняется организатором)

118-002

М1.

Таблица имеет 10 строк и 10 столбцов. Разобьем таблицу на 5 частей:
~~2 строки~~ по 2 строчки в каждой; тогда из условия задачи получим:
 сумма чисел в каждой части больше 10, а частей 5; Тогда сумма чисел
 из всех 5 частей, и следовательно сумма чисел на доске больше $10 \cdot 5 = 50$ больше 100.
 И если у нас нет ни одного столбца с суммой больше 10, то так значение
 суммы чисел таблицы = $10(\text{столбцов}) \cdot 10 = 100$; 100 не больше 100, а значит есть
 хотя бы 1 столбец в котором сумма чисел больше 10. Ч.Т.Д.
 Ответ: Да.

М2.

Да, существуют, например 999 и $999 + 1 = 1000$;
 $999: 9 + 9 + 9 = 27 = 3^3$
 $1000: 1 + 0 + 0 + 0 = 1 = 1^3$

Ответ: Да, существуют.

М3.

Представим 3 числа в виде: $(k; y; z < 7; \text{каждая буква может быть равна } 0)$
 нужно что-бы: (по условию)

$$\begin{matrix} 7a+k \\ 7b+y \\ 7c+z \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} 7a+k+7b+y &: 7 \Rightarrow 7(a+b)+k+y: 7; 7(a+b): 7 \Rightarrow k+y: 7 \\ 7a+k+7c+z &: 7 \Rightarrow 7(a+c)+k+z: 7; 7(a+c): 7 \Rightarrow k+z: 7 \\ 7b+y+7c+z &: 7 \Rightarrow 7(b+c)+y+z: 7; 7(b+c): 7 \Rightarrow y+z: 7 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} k+y: 7 \\ k+z: 7 \\ y+z: 7 \end{cases}$$

$k, y, z < 7 \Rightarrow$ сумма 2 чисел < 14 и равна или 7; Если считать 3 числа,
 получится на 7, то получим число $: 7$ и тогда получим:

$$k+y+k+z+y+z: 7 \Rightarrow 2k+2y+2z: 7 \Rightarrow 2(k+y+z): 7; k, y, z < 7 \Rightarrow k+y+z < 21$$

и получим что все суммы $= 7$ или равны 0; т.к. если это не так, то
 сумма > 14 ;
 сумма 2 из $x, y, z = 0$; т.к. каждое $> 7 \Rightarrow$ два > 14 ;
 и получим что все суммы $= 7$ или равны 0; т.к. если это не так, то
 сумма > 14 ;
 сумма букв $= 0$; каждое из этих букв $= 0$ (т.к. неотрицательно) и если сумма 0, то третье
 число $= 7$; то третье число $= 7$ - невозможно.

Код участника:

(заполняется организатором)

МГ-236

Тогда два варианта:

$$I: \begin{cases} x+y=7 \\ x+z=7 \\ y+z=7 \end{cases}; \text{случаем}$$

$$2x+2y+2z=21$$

$$2(x+y+z)=21$$

Чем же не подходит, противоречие.

Из чего получаем — все числа, выделенные от 1 до 500 : 7

От 1 до 500; 71 число : 7 и тогда остается лишь посчитать кол-во способов выбрать 3 числа из 71 : $\frac{71!}{3! \cdot (71-3)!} = \frac{71!}{3! \cdot 68!} = \frac{69 \cdot 70 \cdot 71}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 57755$. $\left(\frac{n!}{m! \cdot (n-m)!} \right)$

ответ: 57755 способов.

НЧ.

Дано:

$$a+b=1$$

До-то:

$$\frac{a}{a+b^2} + \frac{b}{a^2+b} > 1; \quad a+b=1 \Rightarrow a=1-b, \text{ подставим.}$$

$$\frac{1-b}{1-b+b^2} + \frac{b}{(1-b)^2+b} > 1 \quad (1-2b+b^2+b = b^2-b+1)$$

$$\frac{1-b}{b^2-b+1} + \frac{b}{b^2-b+1} > 1$$

$$\frac{1}{b^2-b+1} > 1 \quad | \cdot b^2-b+1$$

$$1 > b^2-b+1 \quad | -1$$

$$0 > b^2-b$$

$$b > b^2, \text{ если } b > b^2, \text{ то и } \frac{a}{a+b^2} + \frac{b}{a^2+b} > 1; \text{ а } b > b^2, \text{ т.к. } b > 0 \text{ по условию, то т.к. } a > 0; b=1-a < 1$$

$$1 > b > 0; \text{ а при возведении в квадрат, числа } < 0 \text{ и } > 1 \text{ уменьшаются } \Rightarrow b > b^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{a}{a+b^2} + \frac{b}{a^2+b} > 1$$

ч.т.д.

Код участника:

(заполняется организатором)

М9-236

№7.

Получим человека в совете $101-1=100$ человек, и он будет знаком как бы с 50, ведь если он знает только 49 или меньше, то можно выбрать $100-49=51$ (если >49 , то можно выбрать еще больше) с которыми он не знаком, что противоречит условию задачи $\Rightarrow$ у любого как бы 50 знакомых;

Рассмотрим 2 любых человека, и докажем, что они знакомы или незнакомы со всем знакомым. 2 варианта: I - они знакомы: тогда условие выполняется; II - они не знакомы, тогда можно был в совете еще $101-2=99$ чел; первый знаком как бы с 50, и если у них нет общих знакомых, то минимум 50 знакомых второго в $99-50=49$ оставшихся человек (это так); Но $50 > 49$, и из 49 человек нельзя выбрать 50 - противоречие, получаются среди 99 человек у них есть общий знакомый $\Rightarrow$ они либо знакомы, либо незнакомы с остальными ч.т.д.

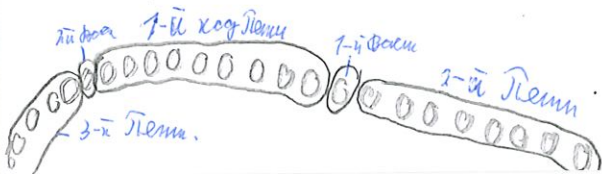
Ответ:

№8.

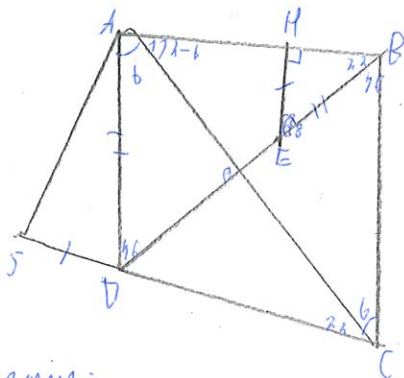
В кругу 100 корзин, соответственно мы можем разбить их на 10 групп по 10 штук, тем, что бы расстояние между 2 корзинами группы было равно 9 корзинам, мы можем выбрать группу, где корзин ≤ 150 , т.к. если во всех 10 группах по 151 корзинке или больше, то корзин всего $151 \cdot 10 = 1510 > 1500$. После выбора данной группы Петя берет корзинки из 9 корзинок между 2 корзинами из одной группы, Вова обязан брать корзину из этой группы, и тогда Петя берет корзинки слева/справа от корзины, что выбрал Вова, и Вова тоже должен брать из этой группы, и когда он берет ~~Петя~~ снова берет корзинку из 9 соседних корзин, снова вынуждая Вову брать корзинку из 9 соседних корзин, и т.д. После 10 ходов Вова возьмет все корзинки из 1 группы, а как объявлять и доказывать ранее в ней ≤ 150 корзин, и в итоге, где Вова берет так - 150; Петя берет $1500-150=1350$. И Петя сможет получить как бы 1350 корзин ч.т.д.

(это пример как ходить).

(за 2 хода можно увеличить количество на 9+1=10 корзин, и 100:10, или наоборот 3 это сделать)



Ms.



Femmine:

Дан. ромб. SD - диагональ CD за O ; $= HE$;
 AC пересечает BD в точке O .
 $AOB = \dots$

$\angle AOB = \angle COD$; $\angle ABO = \angle OCF \Rightarrow \triangle OCD$ подобен $\triangle AOB$ по 2 углам;
 тогда $\frac{AO}{OB} = \frac{OC}{OD} \Rightarrow$ по пропорции

Тогда как $\angle DBC = \angle ADB = 46^\circ \Rightarrow BC \parallel AD$.
 Пусть $\angle BCA = \alpha$; тогда $\angle DAC = \alpha$.
 $\angle AOC = \angle AOC$

Решение: $\angle BCA = b$; тогда $\angle DAC = b$; $2x + 46^\circ + b + \angle BAC = 780$; $\angle BAC = 112 - b$;
и. Разумею, что $\angle SAB = \angle HEB$;
наибольшая сторона

и. Разучим, что $\angle SAB = \angle HEBK$, а значит и 90° центральн.

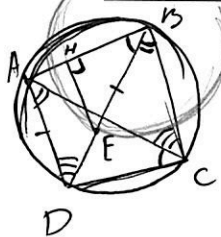
Бланк ответа

Всероссийская олимпиада школьников «Миссия выполнима. Твоё призвание – финансист!»

Код участника:

(заполняется организатором)

МГ-236



~ 5 Доказано: $\angle AKB = \angle ACB$;
 $BE = AD$; $EN \perp AB$; $\angle CKB = 34^\circ$
 Доказано: $AC > EN + CD$
 Доказано

четырёхугольник вписан в окружность т.к. $\angle AKB = \angle ACB$ и опирается на одну и ту же хорду AD. Из этого следует, что $2\angle CKB = \angle PAC = 34^\circ$, т.к. опирается на одну хорду.

Сделаем доп. построение: окружностью с центром в точке B и радиусом BE
 $\angle CBA = 180^\circ - 28^\circ - 34^\circ = 118^\circ$ т.к. сумма противоположных углов равна 180°

По формулам Приведения

$$CB = AC \cdot \frac{\sin 28^\circ}{\sin 118^\circ} = AC \cdot \frac{\sin 88^\circ}{\sin 62^\circ} (\sin 118^\circ = \sin 62^\circ)$$

AC - самая большая сторона, т.к. находится напротив наибольшего угла.

Из этого следует

$$AC > CB + EN$$

т.т.д.

№1
 Пусть во всех столбцах сумма меньше 8, тогда на всем поле сумма меньше $8 \cdot 12 = 96$ - условие не достигается
 Существует максимум одна строка, сумма чисел в которой меньше 8 (но если их 2, то сумма таких строк меньше 16)
 Тогда минимум всего поля: $16 + 8 \cdot 10 = 96$
 Строки меньше 8 + любая оставшаяся

И тут уже получается противоречие с условием

Итак
~~Вывод~~ должны быть строки с суммой чисел больше 8
 Ответ: да

(заполняется организатором)

MG-138

Вадимовичу

[illegible]

0	1	0	9	8	7	6	5	4	3	2	1
0	1	0	5	8	8	9	6	7	5	4	3
0	1	0	0	9	8	4	2	3	8	3	2
0	1	0	5	3	3	3	4	3	3	3	3
0	1	0	5	5	5	3	4	4	4	4	5
0	1	0	0	3	6	7	9	9	2	6	5
0	1	0	3	1	1	0	2	3	4	2	1
0	0	6	0	3	5	5	4	4	1	6	2
0	0	0	2	8	1	2	1	0	5	8	4
0	0	2	6	6	6	6	7	7	9	5	3
0	0	0	1	8	8	2	9	1	2	0	6
1	0	1	0	9	2	9	9	6	2	1	9

$\frac{d}{dt} \ln \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = \frac{1}{L} \frac{dL}{dt}$

Edw.

Нет, не существует, т.к. сумма квадратов двух последовательных чисел n и $n+1$ всегда будет оканчиваться на 1. Из этого следует, что произведение двух квадратов должно оканчиваться на 1 следовательно мы можем сказать, что одно из них должно быть четным, а второе нечетным. И этого быть не может, т.к. при умножении любого числа

[Signature]

~2

Два таких числа существуют
9899...9 9900...0

$9999 \dots 9$ и $9900 \dots 0$
 $\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{25}$ $\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{25}$
 $8 + 9 + 25 = 42$

$$\begin{aligned} 8 + 9 + 25 + 9 &= 42 = 2 \cdot 1 \cdot 1 = 2 \cdot 11^2 \\ 9 + 9 + 25 \cdot 0 &= 18 = 2 \cdot 9 = 2 \cdot 3^2 \end{aligned}$$

John Da

Код участника:

(заполняется организатором)

M9-138

Задача № 3

1) Составим 3-х чисел при делении на 11:

1-е: x

2-е: $11-x$

3-е: $11-x$

Тогда: $x + (11-x) + (11-x) = 22 - 2x$. $22 - 2x$ должно быть : 11, т.к. $22 : 11$, то

$x : 11$

Из этого сделаем вывод, что все 3 числа кратны 11.

2) $\left[\frac{1000}{11} \right] = 90$ - числа : 11

$$C_{90}^3 = \frac{90!}{(90-3)! 3!} = \frac{90!}{87! 3!} = 117480 \text{ способов}$$

Решит 117480 способов.

№ 4

Первым делом найдём минимальное количество знакомых у шовина А

Пусть оно меньше, чем $\frac{83-1}{2} = 41$, т.е. 40. В таком случае среди оставшихся могли выбрать: $82 - 40 = 42$ участника

А это не сходится с условием

Во втором варианте предположим, что мы взяли двух знакомых шовина, тогда у каждого из них ~~но~~ 41 знакомый из 81 оставшегося, точнее как минимум 1 общий знакомый.

т.т.д.

Код участника:

(заполняется организатором)

MG-138

Задание №4

Дано:

$$a+b=1$$

$$a>0 \quad b>0$$

Докажем: $\frac{a^2}{1+b} + \frac{b^2}{1+a} < 1$

Докажем: $\frac{a^2(1+a) + b^2(1+b)}{(1+b)(1+a)} < 1$

$$\frac{a^2 + a^3 + b^2 + b^3}{(1+b)(1+a)} < 1$$

$$\frac{(a+b)(a^2+ab+b^2) + a^2+b^2 - (1+b)(1+a)}{(1+b)(1+a)} < 0$$

$$\frac{(a+b)(a^2-ab+b^2) + a^2+b^2 - 1 - a - b - ab}{(1+b)(1+a)} < 0$$

~~$$\frac{(a^2+ab+b^2)}{(1+b)(1+a)}$$~~

$$\frac{(a^2-ab+b^2) + a^2+b^2 - ab - 1 - b - a}{(1+b)(1+a)} < 0$$

$$\frac{2(a^2-ab+b^2) - 2}{(1+b)(1+a)} < 0$$

$$\frac{2(a^2-ab+b^2-1)}{(1+b)(1+a)} < 0 \quad \left| : \frac{2}{(1+b)(1+a)} \right|; \frac{2}{(1+b)(1+a)} \neq 0$$

$$a^2-ab+b^2-1 < 0$$

$$a^2-3ab+2ab+b^2-1 < 0$$

$$(a+b)^2 - 3ab - 1 < 0$$

$$1-3ab-1 < 0$$

$$-3ab < 0$$

Т.к. $a>0$ и $b>0$ по условию, $a-3 < 0$ и $b-3 < 0$, то $\frac{a^2}{1+b} + \frac{b^2}{1+a} < 1$
 т.т.д.

н 8

Петя собрал $\frac{4}{5}$ всех конфет $\Rightarrow$
 $\Rightarrow 2000 : 5 \cdot 4 = 400$ конфет - одна часть.

Значит Петя получил примерно 1600 конфет

(заполняется организатором)

MG-138

[Handwritten signature]

[illegible]

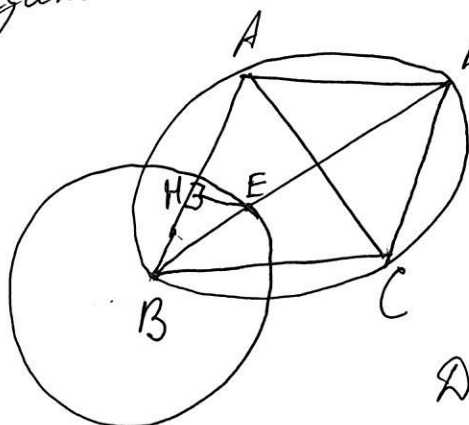
~~Рассказ~~
 а также, когда собираюсь 2 собрания из 4 и 5 и 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100, 101, 102, 103, 104, 105, 106, 107, 108, 109, 110, 111, 112, 113, 114, 115, 116, 117, 118, 119, 120, 121, 122, 123, 124, 125, 126, 127, 128, 129, 130, 131, 132, 133, 134, 135, 136, 137, 138, 139, 140, 141, 142, 143, 144, 145, 146, 147, 148, 149, 150, 151, 152, 153, 154, 155, 156, 157, 158, 159, 160, 161, 162, 163, 164, 165, 166, 167, 168, 169, 170, 171, 172, 173, 174, 175, 176, 177, 178, 179, 180, 181, 182, 183, 184, 185, 186, 187, 188, 189, 190, 191, 192, 193, 194, 195, 196, 197, 198, 199, 200, 201, 202, 203, 204, 205, 206, 207, 208, 209, 210, 211, 212, 213, 214, 215, 216, 217, 218, 219, 220, 221, 222, 223, 224, 225, 226, 227, 228, 229, 230, 231, 232, 233, 234, 235, 236, 237, 238, 239, 240, 241, 242, 243, 244, 245, 246, 247, 248, 249, 250, 251, 252, 253, 254, 255, 256, 257, 258, 259, 260, 261, 262, 263, 264, 265, 266, 267, 268, 269, 270, 271, 272, 273, 274, 275, 276, 277, 278, 279, 280, 281, 282, 283, 284, 285, 286, 287, 288, 289, 290, 291, 292, 293, 294, 295, 296, 297, 298, 299, 300, 301, 302, 303, 304, 305, 306, 307, 308, 309, 310, 311, 312, 313, 314, 315, 316, 317, 318, 319, 320, 321, 322, 323, 324, 325, 326, 327, 328, 329, 330, 331, 332, 333, 334, 335, 336, 337, 338, 339, 340, 341, 342, 343, 344, 345, 346, 347, 348, 349, 350, 351, 352, 353, 354, 355, 356, 357, 358, 359, 360, 361, 362, 363, 364, 365, 366, 367, 368, 369, 370, 371, 372, 373, 374, 375, 376, 377, 378, 379, 380, 381, 382, 383, 384, 385, 386, 387, 388, 389, 390, 391, 392, 393, 394, 395, 396, 397, 398, 399, 400, 401, 402, 403, 404, 405, 406, 407, 408, 409, 410, 411, 412, 413, 414, 415, 416, 417, 418, 419, 420, 421, 422, 423, 424, 425, 426, 427, 428, 429, 430, 431, 432, 433, 434, 435, 436, 437, 438, 439, 440, 441, 442, 443, 444, 445, 446, 447, 448, 449, 450, 451, 452, 453, 454, 455, 456, 457, 458, 459, 460, 461, 462, 463, 464, 465, 466, 467, 468, 469, 470, 471, 472, 473, 474, 475, 476, 477, 478, 479, 480, 481, 482, 483, 484, 485, 486, 487, 488, 489, 490, 491, 492, 493, 494, 495, 496, 497, 498, 499, 500, 501, 502, 503, 504, 505, 506, 507, 508, 509, 510, 511, 512, 513, 514, 515, 516, 517, 518, 519, 520, 521, 522, 523, 524, 525, 526, 527, 528, 529, 530, 531, 532, 533, 534, 535, 536, 537, 538, 539, 540, 541, 542, 543, 544, 545, 546, 547, 548, 549, 550, 551, 552, 553, 554, 555, 556, 557, 558, 559, 560, 561, 562, 563, 564, 565, 566, 567, 568, 569, 570, 571, 572, 573, 574, 575, 576, 577, 578, 579, 580, 581, 582, 583, 584, 585, 586, 587, 588, 589, 590, 591, 592, 593, 594, 595, 596, 597, 598, 599, 600, 601, 602, 603, 604, 605, 606, 607, 608, 609, 610, 611, 612, 613, 614, 615, 616, 617, 618, 619, 620, 621, 622, 623, 624, 625, 626, 627, 628, 629, 630, 631, 632, 633, 634, 635, 636, 637, 638, 639, 640, 641, 642, 643, 644, 645, 646, 647, 648, 649, 650, 651, 652, 653, 654, 655, 656, 657, 658, 659, 660, 661, 662, 663, 664, 665, 666, 667, 668, 669, 670, 671, 672, 673, 674, 675, 676, 677, 678, 679, 680, 681, 682, 683, 684, 685, 686, 687, 688, 689, 690, 691, 692, 693, 694, 695, 696, 697, 698, 699, 700, 701, 702, 703, 704, 705, 706, 707, 708, 709, 710, 711, 712, 713, 714, 715, 716, 717, 718, 719, 720, 721, 722, 723, 724, 725, 726, 727, 728, 729, 730, 731, 732, 733, 734, 735, 736, 737, 738, 739, 740, 741, 742, 743, 744, 745, 746, 747, 748, 749, 750, 751, 752, 753, 754, 755, 756, 757, 758, 759, 760, 761, 762, 763, 764, 765, 766, 767, 768, 769, 770, 771, 772, 773, 774, 775, 776, 777, 778, 779, 780, 781, 782, 783, 784, 785, 786, 787, 788, 789, 790, 791, 792, 793, 794, 795, 796, 797, 798, 799, 800, 801, 802, 803, 804, 805, 806, 807, 808, 809, 810, 811, 812, 813, 814, 815, 816, 817, 818, 819, 820, 821, 822, 823, 824, 825, 826, 827, 828, 829, 830, 831, 832, 833, 834, 835, 836, 837, 8

Код участника:

(заполняется организатором)

МГ-130

Задание №5.



Дано:

$$\angle ACD = \angle ABD = 28^\circ$$

$$\angle CBD = 34^\circ$$

$$BE = AD$$

$$EH \perp AB$$

$$\text{Док-ать: } AC > EH + CD$$

Доказательство.

- 1) Опшем около четырехугольника окружность (мы можем это сделать, т.к. $\angle ACD = \angle ABD$ и они опираются на один отрезок)
- 2) $\angle DBC = \angle CAD$ т.к. опираются на одну дугу.
- 3) Сделаем еще одну дугу. построена: построим окружность с центром в точке B и радиусом BE.
- 4) $\angle CDA = 180^\circ - 28^\circ - 34^\circ = 118^\circ$ т.к. сумма противоположных углов равна 180° .
- 5) По формулам приведения: $CD = AC \cdot \frac{\sin 48^\circ}{\sin 118^\circ} = AC \cdot \frac{\sin 58^\circ}{\sin 62^\circ}$ ($\sin 118^\circ = \sin 62^\circ$)
- 6) AC – самая большая сторона, т.к. находится напротив самого большого угла.

$$AC > CD + EH$$

Задание №8.

ч. т. д.

Петя собирает $\frac{4}{5}$ всех конкрет

$$2000 : 5 \cdot 4 = 1600 \text{ шт.} - \text{одна часть,}$$

значит Петя получит 1600 конкрет.

Код участника:

(заполняется организатором)

M9-130

Задача №1.

Пример:

0	1	2	5	6	0	8	4	5	3	1	6
0	0	0	3	1	3	9	2	9	3	6	2
0	1	0	1	3	5	0	8	5	7	3	
0	0	0	8	0	3	6	1	7	1	4	0
0	1	0	9	8	8	9	2	6	4	9	1
0	0	2	5	1	1	5	0	9	3	8	6
0	1	0	4	4	2	9	3	1	0	2	4
0	0	0	3	1	3	1	2	5	2	4	5
0	1	5	4	5	8	6	4	5	6	5	8
0	0	0	6	1	0	3	8	2	8	1	9
0	1	0	6	8	4	9	5	4	3	5	4
0	0	2	3	4	9	4	8	4	1	4	3

Задача №4.

Д-ать: $\frac{a^2+b^2}{1+b} + \frac{b^2}{1+a} < 1$

$$\frac{a^2+b^2}{1+b} + \frac{b^2}{1+a} - 1 < 0$$

$$\frac{a^2(1+a) + b^2(1+b) - (1+b)(1+a)}{(1+b)(1+a)} < 0$$

$$\frac{a^3 + b^3 + a^2 + b^2 - (1+b+a+ab)}{(1+b)(1+a)} < 0$$

$$\frac{(a+b)(a^2+ab+b^2) + a^2+b^2 - 1 - b - a - ab}{(1+b)(1+a)} < 0$$

$$\frac{(a^2-ab+b^2) + (a^2-ab+b^2) - 1 - (a+b)}{(1+b)(1+a)} < 0$$

$$\frac{2(a^2-ab+b^2) - 2}{(1+b)(1+a)} < 0 \quad / \cdot (1+b)(1+a)$$

$$2(a^2-ab+b^2) - 2 < 0$$

$$2(a^2-ab+b^2-1) < 0 \quad / : 2$$

$$a^2-ab+b^2-1 < 0$$

$$a^2-3ab+2ab+b^2-1 < 0$$

$$(a+b)^2-3ab-1 < 0$$

$$1^2-3ab-1 < 0$$

$$-3ab < 0$$

, $a > 0$, $-3 < 0$, Показано.

Код участника:

(заполняется организатором)

М9-130

Задание №3.

Во-первых, найдем остатки 3-х чисел при делении на 11:

первое: x второе: $11 - x$ третье: $11 - x$ Тогда: $(11 - x) + (11 + x) = 22 - 2x$, выражение должно быть кратно 11, тогдакрatны 11. $22 : 11$, то $x : 11$, из этого следует, что все три числа

Во-вторых, найдем кол-во чисел, кратных 11, в промежутке от 1 до 1000.

$$\left[\frac{1000}{11} \right] = 90 \text{ чисел кратно } 11.$$

$$C_{90}^3 = \frac{90!}{3!(90-3)!} = 114480 \text{ способов группировки}$$

Ответ: 114 480 способов.

Задание №2.

Такие 2 числа существуют:

$$\underbrace{98,999\dots9}_{25} \quad \text{и} \quad \underbrace{99,00\dots0}_{25}$$

$$9 + 8 + 25 \cdot 9 = 242 = 2 \cdot 121 = 2 \cdot 11^2$$

$$9 + 9 + 25 \cdot 0 = 18 = 2 \cdot 9 = 2 \cdot 3^2$$

Ответ: да, существуют.

Задание №1.

1) Допустим во всех столбцах сумма меньше восьми тогда на все по-
не сумма меньше $8 \cdot 12 = 96$ — это условие не достигается.2) Существует максимум одна строка, сумма чисел в которой
меньше 8, (если их 2, то сумма ^{таких строк} меньше 16)

$$\text{Тогда минимум всего полей: } 16 + 8 \cdot 10 = 96$$

↓
строка меньше 8
любая из оставшихся.

Противоречие.

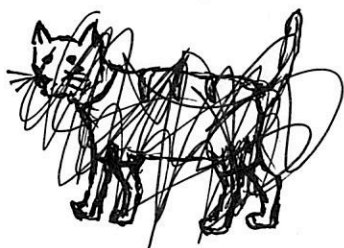
Ответ: должны быть строки, с суммой чисел ^{большее} ~~меньше~~ 8.

MG-130

[illegible]

~~Ответ: не может быть~~

Задание №4.

[illegible]

Во-первых, найдем минимальное кол-во знакомых у участника x .

Предположим, что оно меньше чем $\frac{83-1}{2}$, то есть 41 то есть 40. Тогда среди оставшихся могли выбрать $82 - 40 = 42$ участника.

Это противоречит данному условию.

Во-вторых, Предположим, что мы взяли двух знакомых человек, из этого следует, что у каждого из них 41 знакомый из оставшихся 81, т.е., у них есть как минимум один общий знакомый.

r. m. g.

Задание №3

Во-первых, найдем кол-во чисел, делящихся на 11, в диапазоне от 1 до 1000. В числах от 1 до 100 есть 9 чисел. В числах от 100 до 1000 есть 9 чисел. Всего мы имеем 18 чисел, делящихся на 11.

Во-вторых, найдем сколько способов есть разбить их на пары, чтоб

$$\frac{(18 \cdot 14)}{2} = 126 \text{ чаша } 4005$$

В третьих, найдем кол-во чисел комбинаций, в которых ^{сумма} 2 из 3-х чисел будет равна 11.

$$153 \cdot (1000 - 2) = 152694 \text{ комбинации.}$$

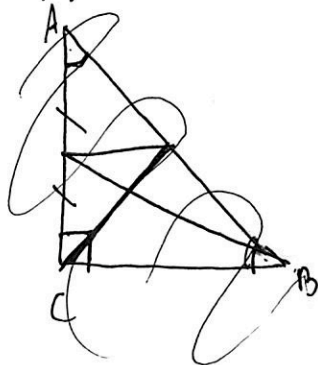
Ответ: 152694 комбинации. 3 996 990.

Задание №2.

На протяжении двух тысячелетий человечество пыталось решить задачу, связанную с измерением времени. В древности для этого использовались естественные явления, такие как движение солнца, лунных фаз и звезд. Однако эти методы были недостаточно точными. В XVII веке Галилео Галилей и Исаак Ньютон внесли значительный вклад в развитие механики, что привело к созданию более точных часов. В XIX веке появились механические часы, а в XX веке — электронные и атомные часы. Сегодня мы используем атомные часы, которые обеспечивают высочайшую точность измерения времени.

Ответ: не может быть.

Задание № 4.



Код участника:

(заполняется организатором)

МГ-113

 $\delta \neq 2$.

Тогда 2-шага существует:

$$9 \underbrace{899 \dots 9}_{25} \quad \text{и} \quad 99 \underbrace{00 \dots 0}_{25}$$

$$9 + 8 + 25 \cdot 9 = 242 = 2 \cdot 121 = 2 \cdot 11^2$$

$$9 + 9 + 25 \cdot 0 = 18 = 2 \cdot 9 = 2 \cdot 3^2$$

 $\delta \neq 1$.

1) Допустим во всех строках сумма меньше 8, тогда на всем поле сумма меньше 8 · 12 = 96 - не достигается

2) Существует максимум 1 строка с суммой больше 8 (если же 2 ~~то~~ то сумма меньше 16) строки меньше 16)

Тогда максимум суммы всего поле: $16 + 8 \cdot 10 = 96$

↓
строка
меньше
8

+

оставшаяся

Противоречие!

Код участника:

(заполняется организатором)

М9-113

до 4

$$\frac{a^2}{1+b} + \frac{b^2}{1+a} < 1$$

$$\frac{a^2}{1+b} + \frac{b^2}{1+a} - 1 < 0$$

$$\frac{a^2(1+a) + b^2(1+b) - (1+b)(1+a)}{(1+b)(1+a)} < 0$$

$$\frac{(a+b)(a^2-ab+b^2) + a^2 + b^2 - 1 - b - a - ab}{(1+b)(1+a)} < 0$$

$$\frac{(a^2-ab+b^2) + (a^2-ab+b^2) - 1 - (a+b)}{(1+b)(1+a)} < 0$$

$$\frac{2(a^2-ab+b^2) - 2}{(1+b)(1+a)} < 0 \quad / \cdot (1+b)(1+a)$$

$$2(a^2-ab+b^2) - 2 < 0$$

$$a^2-ab+b^2-1 < 0$$

$$a^2-3ab+2ab+b^2-1 < 0$$

$$(a+b)^2-3ab-1 < 0$$

$$1^2-3ab-1 < 0$$

$$-3ab < 0$$

мы знаем, что a и $b \geq 0$

$\Downarrow$

$$-3ab - \text{всегда} < 0$$

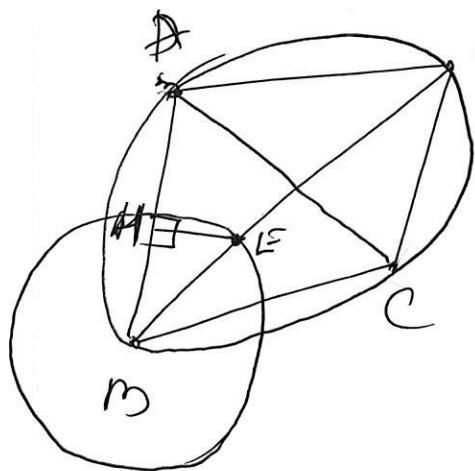
т.т.г.

Код участника:

(заполняется организатором)

119-113

Д-5

Дано: $\angle ACP = \angle ABD = 28^\circ$ $\angle CBD = 34^\circ$ $BF = AD$ $EH \perp AB$ Док-ть: $AC > EH + ED$

Доказательство.

- 1) ~~на~~ Анализируем данное четырехугольник окружности (мы можем это считать т.к. $\angle ACP = \angle ABD$ и они опираются на один отрезок)
- 2) $\angle DBC = \angle CAD$ т.к. опираются на одну дугу.
- 3) Сделаем ещё одну гон. построения: построим окружность с центром в точке B и радиусом BF.
- 4) $\angle CPA = 180^\circ - 28^\circ - 34^\circ = 118^\circ$ т.к. сумма противоположных углов равна 180°
- 5) По формулам приведения: $CD = AC \cdot \frac{\sin 42^\circ}{\sin 118^\circ} = AC \cdot \frac{\sin 38^\circ}{\sin 62^\circ}$ ($\sin 118^\circ = \sin 62^\circ$)
- 6) AC – самая большая сторона, т.к. противолежит самому большому углу.

$$AC > CD + EH \quad \text{т.т.т.}$$

Д.8.

1) Если Петя: выбрать n подряд идущих и не пустых корзинок и забрать из них все конфеты.

Если Вася: выбрать 1 не пустую корзинку в которой есть зефир $\&$ конфет и взять её.

Заметим, что изначально все 200 корзинок не пустые $\Rightarrow$ Вася вообще не может ходить первым, значит Петя всегда ходит первым.

2) Поделим 200 корзинок на 50 подряд идущих групп по 4 корзинки $A\{1; 2; 3; 4\}; A_1\{5; 6; 7; 8\} \dots$

$A_{50}\{197; 198; 199; 200\} \Rightarrow$ каждая из этих групп содержит ровно 4 последовательных корзинок.

Заметим:

а) Вушиарто во всех группах может по 200 конфет.

б) Петя же обозначает, что он может опустошить все 4 корзинки в ней, которые еще не пусты.

Значит, идеальный план Петя взять целиком все конфеты из любого своего числа групп

Если бы Петя успел целиком все 50 групп он бы смог забрать все конфеты, но у Васи всё ещё есть динозавр.

Бланк ответа №5

Всероссийская олимпиада школьников «Миссия выполнима. Твоё призвание – финансист!»

Код участника:

(заполняется организатором)

МД-113

№ 8 (продолжение)

Код участника:

(заполняется организатором)

119-113

Задача 3.

1) Остатки 3-х шеек при делении на 11:

$$1\text{-е} : x$$

$$2\text{-е} : 11 - x$$

$$3\text{-е} : 11 - x$$

Тогда: $(11-x) + (11-x) = 22 - 2x$ должно быть кратно 11

т.к. $22 : 11$, то $x : 11$

Из этого следует: все 3 шеек кратны 11.

2) $\left[\frac{1000}{11} \right] = 90$ - шеек кратных 11,

$$C_{90}^3 = \frac{90!}{3!(90-3)!} = 117480 - \text{способов}.$$

Задача 4.

1) Найдем минимальное кол-во знакомых у участника А:

Допустим это самый маленький $\frac{23-1}{2} = 11$, т.е. 10.

Тогда среди оставшихся можно выбрать:

$$22 - 10 = 12 \text{ участника.}$$

Это противоречит условию

2) Предположим, что мы взяли двух неизвестных участников, тогда у каждого из них 11 знакомых из оставшихся 21, т.е. как минимум 1 общий знакомый т.е. 9.

Код участника:

(заполняется организатором)

119-037

№1

$\sum$ чисел в любых 2 строках > 20 , можно разбить все строки на пары, получим 5 пар $\Rightarrow$ сумма чисел во всех таблицах > 100 ($> 20 \cdot 5$)

Пусть это не так, то есть ^{не} найдётся таблица, в которой сумма чисел больше 10, значит в любой таблице сумма чисел ≤ 10 . А значит сумма чисел всех таблиц меньше или равно 50. $\nexists$ найдётся хотя бы одна таблица, в которой сумма чисел больше 10.

Ответ: да, обязательно

№2

Существовать, пример пары таких чисел 999 и 1000

$$9+9+9=27=3^3 \quad 1+0+0+0=1=1^3 \quad 999+1=1000$$

Ответ: существовать

№3

Если сумма чисел делится на 7, то их остатки от деления на 7 в сумме дают число, делящееся на 7.

Так как в нашей сумме сумма 2 чисел должна делиться на 7, то максимальная сумма остатков $= 6+6=12$, а мин $= 0$, тогда

сумма делится на 7, ~~если~~ сумма остатков двух чисел должна быть равно либо 0, либо 7.

Пусть x, y, z - остатки 3 чисел при делении на 7.

То известно:

$$x+y:7$$

$$x+z:7$$

Если $x+y \geq 0$, то $x=0$ и $y=0$, тк остаток от деления натуральных числа на натуральное не может быть отрицательным.

$\Rightarrow x+z=0$, тк если 7, то $z=7$, а максимальный остаток при делении на 7 равен шести. $\Rightarrow z=0$ и x и y и $z=0$, т.е. все 3 числа делятся на 7.

Если $x+y > 7$, то x как минимум 1 ($y \leq 6$), значит $x+z=7 \Rightarrow y=2$, также мы знаем, что $y+z:7$, т.е. $2y=7$ (случай с 0 уже рассмотрен) $\Rightarrow y=3.5$, чего не может быть (число натуральное)

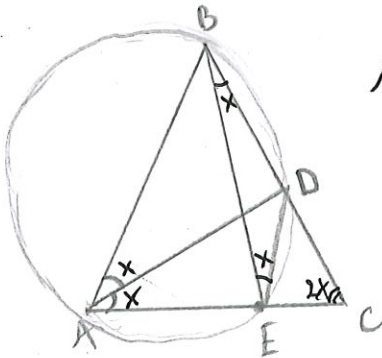
№3 (продолжение)

Значит, все три числа поделены на 7. Также чисел от 1 до 500 ~~есть~~ ^{есть} 71. ($500:7=71(\text{ост } 3)$)

Вот это есть сумма, посчитав количество вариантов выбора 3 чисел из 71. Это равно $\frac{71 \cdot 70 \cdot 69}{6}$ ^{где первое число выбираем из 71, где 2-70, так как уже выбрали}
32305 ^{каждо перестановке}

Ответ: способ выбора таких чисел 32305

№6



Пусть $\angle BAD = x$

1) $\angle BAD = \angle DAC$ (по оп. бис-сы)
4 ~~х~~ - KABDE - вписанный в окружность
 $\angle DAE = \angle EBD = x$ (по теореме об углах)
 $\angle BAD = \angle BED = x$ (как опр. углы при перес. хорд)

$\Downarrow$

$\triangle BDE$ - $\triangle$ (по признаку $\triangle$)

$\Downarrow$

$|BD| = |DE|$ (по опр. $\triangle$)

2) $\triangle ABC$ - $\triangle$ (по усл.)

$\Downarrow$

$2x = \angle BAC = \angle BCA$ (по св-ву $\triangle$)

$\angle BDE = 180 - 2x$ (по сумме углов $\triangle$)

$\Downarrow$
 $\angle EDC = 2x$

$\Rightarrow \triangle DEC$ - $\triangle$ (по признаку $\triangle$)

$\Downarrow$

$|DE| = |EC|$ (по определению)

3) Так в 4 ~~х~~ - KABDE можно вписать окружность (по усл.)

$AB + ED = AE + BD$ (по св-ву)

$DE = DB$ (н.т.)

$\Rightarrow AB = AE \Rightarrow \triangle ABE$ - $\triangle$ (по опр.)

$\Downarrow$
 $\angle BAE = 2x$

~~по усл.~~

$\angle ABE = 90 - x$ (по т.о. $\sum \angle \triangle$)

$\angle EBD = x$ (н.т.)

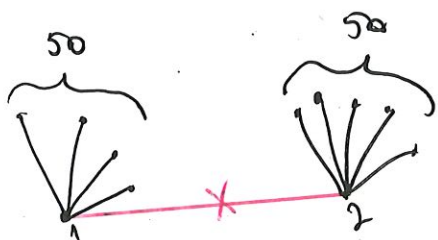
$\Rightarrow \angle ABC = 90^\circ \Rightarrow \angle BAC = 45^\circ$
 $\angle BCA = 45^\circ$

Ответ: $\angle ABC = 90^\circ$; $\angle BAC = 45^\circ$; $\angle BCA = 45^\circ$

№4

Пусть это не так, тогда существуют 2 человека, у которых нет общего знакомых (хотя бы 1) и они не ~~знают~~ знакомы между собой.

Так если придут 52 человека и каждый из них будет знаком хотя бы с одним, то каждый человек знаком как минимум с 51 человеком (максимум 50 человек). Это условие выполняется и для 2 людей, которые были знакомы в начале.



Если выполняются условия, которое было прописано изначально, то всего людей: $50 + 50 + 1 + 1 = 102$, а не 101.

✓ ~~на~~ $\rightarrow$ наше предположение было неверным.

$\rightarrow$ не существуют 2 человека, у которых нет общего знакомых или они ~~не знакомы~~ знакомы.

№4

условие:
 $a + b = 1$

$$\frac{a}{a+b^2} + \frac{b}{a^2+b} > 1$$

Приводим к общему знаменателю:

$$\frac{a^3 + 2ab + b^3}{a^3 + a^2b^2 + b^3 + ab} > 1$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^2 - ab + b^2$$

(по условию)

$$\frac{a^2 + ab + b^2}{a^2 + a^2b^2 + b^2} > 1 \quad \Bigg| \cdot a^2 + a^2b^2 + b^2 \rightarrow a^2 + ab + b^2 > a^2 + a^2b^2 + b^2$$

Теперь нужно доказать, что $ab > a^2b^2$

Если a и $b = 1$ и 0 , то $2 > 1$ - не выполняется

Если нету $0 < a < 1$ и $0 < b < 1$, то a и b можно представить в виде дроби $\frac{1}{n}$ и $\frac{1}{m}$

$a^2 = \frac{1}{n^2}$ - что меньше чем a ($\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n}$), так если 1 разделить на большее число, получится число меньше

Код участника:

(заполняется организатором)

MB-037

№4 (продолжение)

Это же самое для b : $\frac{1}{m} > \frac{1}{m^2}$

Если перемножить 2 больших числа, то на произведение будет больше, чем произведение меньших чисел $\Rightarrow$

$$\Rightarrow ab > a^2/b^2$$

ч.т.д.

№8

Если изначально во всех корзинах одинаковое количество конфет (не по 15), то каждый раз Тёма берёт 45 конфет, а Вова 15. Причём Вова берёт из корзины, соседней с той крайней из которой брал Тёма $\Rightarrow$ в любой момент времени нужные корзины будут стоять рядом (Тёма может так сделать) $\Rightarrow$ Тёма съедит 10 раз. И соберёт в итоге 1350 конфет (9 корзины $\cdot$ 15 конфет в каждой).

Теперь ~~надо~~ нужно понять, что будет, если в какой-то/каких-то корзинах будет $>$ конфет, чем 15 ($\Rightarrow$ в какой-то/каких-то корзинах будет меньше, чем 15 конфет).

Бланк ответа

Всероссийская олимпиада школьников «Миссия выполнима. Твоё призвание – финансист!»

Код участника:
(заполняется организатором)

М8-037