ОЛИМПИАДА 11 КЛАСС

ВАРИАНТ 2

1. (10 баллов) Известно, что для некоторого числа x числа $\frac{1}{cos\,x}$ и $\frac{1}{cos2x}$ – целые. Найдите значение x.
2. (10 баллов) Для действительного числа $a > 1$ найдите все положительные корни уравнения $\log_{a+x-1}\frac{6}{x+1} = \log_a 3$.
3. (12 баллов) Дан треугольник ABC, в котором $\mathrm{AB} = 23$, $\mathrm{BC} = 17$. Найдите AC, если известно, что на продолжении медианы CM за точку M существует точка P, для которой $\angle\mathrm{PBA} = \angle\mathrm{ACB}$ и $\angle\mathrm{APB} = \angle\mathrm{ABC}$.
4. (12 баллов) При каких значениях параметра q уравнение $[x]\cdot\{x\} = \mathrm{qx}$ имеет ровно 2026 корней? (Здесь $[x]$ – целая часть числа x, то есть наибольшее целое число, не превышающее x, а $\{x\}$ – дробная часть числа x).
5. (12 баллов) На декартовой плоскости xOy дан график функции $y = \frac{1}{x}$. Масштабы на осях одинаковы, но не обозначены. Как с помощью циркуля и линейки построить отрезок длины 1?
6. (14 баллов) Про возрастающую арифметическую прогрессию известно, что все её члены являются корнями уравнения $P\big(Q(x)\big) = 0$, где $P(x)$ – некоторый многочлен второй степени, а $Q(x)$ – некоторый многочлен четвёртой степени. Каким наибольшим может быть число членов такой прогрессии?
7. (14 баллов) Для каких натуральных чисел n куб можно разбить на три выпуклых n-гранника?
8. (16 баллов) Пусть M – множество всех четырёхзначных чисел, записываемых при помощи цифр 1, 2 и 3. Диверсификатором назовём любое подмножество D, обладающее следующим свойством: для любого числа $\mathrm{m}\in\mathrm{M}$ найдётся число $d(m) \in \mathrm{D}$ такое, что m и $d(m)$ различаются во всех четырёх разрядах. Из какого наименьшего количества чисел может состоять диверсификатор?