Олимпиада 2026. Математика 11 класс

Вариант 1

Задача 1. (10 баллов) Известно, что для некоторого числа x числа $\frac{1}{sin\ x}$ и $\frac{1}{cos\ 2x}$ – целые. Найдите значение x.

Решение. Пусть $\frac{1}{sin\ x} = n$, тогда $\frac{1}{cos\ 2x} = \frac{1}{1-sin^2 x} = \frac{1}{1-\frac{2}{n^2}} = \frac{n^2}{n^2-2} = 1 + \frac{2}{n^2-2}$.

Заметим, что так как второе число целое, то $n^2 - 2$ n является делителем числа 2. $n-$ целое число, не равное 0, значит из четырех делителей числа 2 $(\pm 1; \pm 2)$ подходят только случаи $n^2 = 1$ и $n^2 = 4$.

В первом случае $\sin x = \pm 1$, откуда $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, где $n \in Z$

Во втором случае $\sin x = \pm\frac{1}{2}$, откуда $x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi n$ и $x = \pm\frac{5\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$.

Ответ: $\boldsymbol{x = \frac{\pi}{2} + \pi n}$, $\boldsymbol{x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi n}$ и $\boldsymbol{x = \pm\frac{5\pi}{6} + \pi n}$, **где** $\boldsymbol{n \in Z}$.

Критерии оценивания решений

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача полностью решена	+	10
Установлено, что $\frac{1}{sin\ x}$ является делителем числа 2, но в записи решений допущены ошибки (например, выписаны не все решения), посторонних решений нет	+–	6
Решения с $\sin x = \pm 1$ и $\sin x = \pm\frac{1}{2}$ указаны, посторонних решений нет, но не доказано, что других решений нет	–+	4
Решение содержит существенные ошибки, не приведено или не завершено	–	0

Задача 2. (10 баллов) Для действительного числа $a>1$ найдите все положительные корни уравнения $\log_{a+x-1}\frac{4}{x+1} = \log_a 2$.

Решение.

Заметим, что при положительных x основание логарифма левой части является положительным числом и под логарифмом стоит положительное число, то есть левая часть уравнения определена.

Перейдем в левой части к логарифму по основанию a:

$$\frac{\log_a \frac{4}{x+1}}{\log_a(a+x-1)} > \log_a 2$$

$$\log_a(\frac{4}{x+1}) = \log_a 2^{\log_a(a+x-1)}$$

$$\frac{4}{x+1} = 2^{\log_a(a+x-1)}$$

Заметим, что при положительных x в левой части стоит монотонно убывающая функция, а в правой части стоит монотонно возрастающая функция. Значит, у уравнения не более одного решения.
Заметим, что $x = 1$ является корнем уравнения.
Ответ: $x = 1$.

Критерии оценивания решений

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача полностью решена	+	10
Решение уравнения найдено, но его единственность не доказана	–+	2
Решение содержит существенные ошибки, не приведено или не завершено	–	0

Задача 3. **(12 баллов)** Диагонали AC и BD четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Известно, что $\angle BAC = \angle DAC$, $\angle BCA = \angle ADC$, $AO = OC = 3$, $BO = 2 \cdot OD$. Найдите CD.

Решение. Положив $CD = x$, $AB = b$, $AD = d$, $\angle BAC = \alpha$, рассмотрим треугольник ACD. В нём $AC = AO + OC = 6$ и $x^2 = d^2 + 36 - 12d\cos\alpha$ (1) согласно теореме косинусов.

Значения b, d и $\cos\alpha$ можно найти из соотношений

$b = 2d$ (2)

$bd = 36$ (3)

$\frac{2bd}{b+d}\cos\alpha = 3.$ (4)

Равенство (2) справедливо, поскольку AO – биссектриса в треугольнике ABD, следствием чего являются равенства $AB:AD = BO:OD = 2:1$. Равенство (3) вытекает из пропорции $AB:AC = AC:AD$, которая выполняется, поскольку, ввиду условий $\angle BAC = \angle DAC$ и $\angle BCA = \angle ADC$, треугольники ABC и ACD подобны. Наконец, равенство (4) – это формула для длины биссектрисы AO в треугольнике ABD.

Установив, что $b = 6\sqrt{2}$, $d = 3\sqrt{2}$, $\cos\alpha = \frac{3\sqrt{2}}{8}$, из (1) находим $x = 3\sqrt{3}$.

Ответ: $3\sqrt{3}$.

Критерии оценивания решений

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача полностью решена	+ +	12
Выписаны соотношения, из которых искомая длина может быть найдена.	+ –	6
Решение содержит существенные ошибки, не приведено или не завершено	–	0

Задача 4. **(12 баллов)** При каких значениях параметра $\boldsymbol{p}$ уравнение $[x]\cdot\{x\}=p-x$ имеет ровно 2026 положительных корней? (Здесь $[x]$ – целая часть числа $\boldsymbol{x}$, то есть наибольшее целое число, не превышающее $\boldsymbol{x}$, $a\{x\}=x-[x]$ – дробная часть числа $\boldsymbol{x}$.)

Решение. Обозначив $[x]$ и $\{x\}$ через m и α соответственно, преобразуем равенство $\alpha m=p-m-\alpha$ к виду $(1+\alpha)(m+1)=p+1$. А поскольку очевидно, что наличие положительных корней у исходного уравнения означает, что $p>0$, то можно перейти к равенству

$\frac{m+1}{p+1}=\frac{1}{1+\alpha}$.

Заметим, что $\frac{1}{2}<\frac{m+1}{p+1}\le 1$. Следовательно, если рассматриваемое уравнение имеет ровно 2026 положительных корней, то целые части наибольшего и наименьшего из них равны $[p]$ и $[p]-2025$ соответственно. При этом

$$[p]-2025=\left[\frac{p+1}{2}\right] \qquad (*)$$

поскольку $\frac{\left[\frac{p+1}{2}\right]+1}{p+1}>\frac{1}{2}\ge\frac{\left[\frac{p+1}{2}\right]}{p+1}$ для любого $p>0$.

Положив теперь $\left[\frac{p+1}{2}\right]=n$, $\left\{\frac{p+1}{2}\right\}=\beta$, разберём два случая.

1) $\beta<\frac{1}{2}$, откуда $[p]=[2n+2\beta-1]=2n-1$. Равенство (*), записанное в виде $2n-2026=n$, даёт $n=2026$. Это значит, что $4051\le p<4052$.

2) $\beta\ge\frac{1}{2}$, откуда $[p]=2n$. Из (*) находим $n=2025$. А тогда $4050\le p<4051$.

В итоге установлено, что все искомые значения параметра $\boldsymbol{p}$ образуют полуинтервал $[4050; 4052)$.

Ответ: $\mathbf{4050\le p<4052.}$

Критерии оценивания решений

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача полностью решена	+ +	12

Установлены границы корней, но решение содержит существенные пробелы	+ –	5
Установлена только одна из этих границ	– *	2
Решение содержит существенные ошибки, не приведено или не завершено	–	0

Задача 5. (12 баллов) На декартовой плоскости xOy дан график функции $y = arctgx$. Масштабы на осях одинаковы, но не обозначены, асимптоты не проведены. Как с помощью циркуля и линейки провести асимптоты?

Решение. Укажем один из способов построения.

В верхней полуплоскости параллельно оси Ox проведём две пересекающие график прямые так, чтобы одна из них располагалась вдвое дальше от оси абсцисс, чем другая. Эти прямые будут иметь уравнения $y = t$ и $y = 2t$, где $\boldsymbol{t}$ – некоторое положительное число. Абсциссы точек их пересечения с графиком, равные tgt и $tg2t$ соответственно, окажутся связаны соотношением

$\operatorname{tg} 2t = \frac{2\operatorname{tg} t}{1-\operatorname{tg}^2 t}$. Далее $\operatorname{tg} t$ будем обозначать через s.

Выполним последовательно следующие стандартные операции:

1) построение отрезка длины $p = \frac{1}{2} \cdot \frac{2s}{1-s^2} = \frac{s}{1-s^2}$;

2) построение отрезка длины $q = \sqrt{ps} = \frac{s}{\sqrt{1-s^2}}$;

3) построение прямоугольного треугольника по катету длины q и опущенной на гипотенузу высоте длины s.

Длина другого катета в построенном треугольнике будет равна

$\frac{qs}{\sqrt{q^2-s^2}} = 1$. Дальнейшее ясно: проводим прямую $x = 1$, пересекающую график в точке $(1; \frac{\pi}{4})$, строим отрезок длины $\frac{\pi}{2}$ и, наконец, проводим прямые $y = \pm\frac{\pi}{2}$.

Критерии оценивания решений

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача полностью решена	+ +	12
Задача решена верно, хотя и без подробного описания стандартных построений	+ +	10
Построен набор отрезков, из которого стандартными построениями можно получить отрезок длины 1, но сами эти стандартные построения не перечислены	– +	3

Решение содержит существенные ошибки, не приведено или не завершено	–	0

Задача 6. **(14 баллов)** Про возрастающую арифметическую прогрессию известно, что все её члены являются корнями уравнения $P\big(Q(x)\big) = 0$, где *P(x)* – некоторый многочлен второй степени, а $Q(x)$ – некоторый многочлен третьей степени. Каким наибольшим может быть число членов такой прогрессии?

Решение. Прогрессия, о которой идёт речь в условии задачи, может быть четырёхчленной; например, числа -1, 0, 1, 2 удовлетворяют уравнению

$P(Q(x)) = 0$, где $P(x) = x^2 - 6x$, $(Q(x) = x^3 - x$.

Предположим, что нашлись числа $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5$, образующие возрастающую арифметическую прогрессию и удовлетворяющие аналогичному уравнению. Ясно, что многочлен *P(x)* имеет два различных корня $x_1 < x_2$, а все члены прогрессии входят в совокупность корней уравнений $Q(x) = x_1$ и $Q(x) = x_2$.

Пусть $Q(x) = c_0x^3 + c_1x^2 + c_2x + c_3$; можно считать, что $c_0 > 0$, а функция $f(x) = Q(x)$ имеет три промежутка монотонности: $(-\infty;\ q_1]$, $[q_1;\ q_2]$ и $[q_2;\ +\infty)$, где $q_1 < q_2$ – некоторые числа. Указанные полуинтервалы будут промежутками возрастания значений функции, а отрезок – промежутком убывания. Каждый из этих промежутков содержит не более двух членов рассматриваемой прогрессии (поскольку содержит не более чем по одному корню уравнений $Q(x) = x_1$ и $Q(x) = x_2$).

Допустим, что $a_1 < a_2 < q_1 < a_3 < a_4 < q_2 < a_5$. Тогда $Q(a_1) = Q(a_4) = x_1$, $Q(a_2) = Q(a_3) = x_2$. В силу теоремы Виета третий корень уравнения $Q(x) = x_1$ равен $-\frac{c_1}{c_0} - a_1 - a_4$, но это число совпадает (в силу равенства $a_1 + a_4 = a_2 + a_3$) с числом $-\frac{c_1}{c_0} - a_2 - a_3$ – третьим корнем уравнения $Q(x) = x_2$. Противоречие.

Аналогично придём к противоречию и в случаях, когда

$a_1 < a_2 < q_1 < a_3 < q_2 < a_4 < a_5$ или $a_1 < q_1 < a_2 < a_3 < q_2 < a_4 < a_5$. Следовательно, пятичленной прогрессии с требуемыми свойствами не существует.

Ответ: 4.

Критерии оценивания решений

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача полностью решена	+	14

Дан пример 4-членной прогрессии и многочленов с требуемыми свойствами:	– +	4
Решение содержит существенные ошибки, не приведено или не завершено	–	0

Задача 7. **(14 баллов)** Для каких натуральных чисел n правильный тетраэдр можно разбить на три равных выпуклых n-гранника?

Решение. Для $n = 4$ и $n = 5$ приведём примеры соответствующих разбиений. В правильном тетраэдре *ABCD* отметим точку *O* – центр его грани *ABC*, а также точки *K, L* и *M* – середины рёбер *AB, BC* и *AC* соответственно. Тогда тетраэдр *ABCD* можно разбить как на тетраэдры *AOBD*, *BOCD* и *AOCD*, так и четырёхугольные пирамиды *DAKOM, DBLOK* и *DCMOL.*

Теперь докажем, что число n не может превышать 5. В самом деле, у многогранника разбиения любая не лежащая в плоскостях *ABC, ABD, ACD* и *BCD* грань, может быть только гранью, по которой этот n-гранник примыкает к одному из двух других. В силу выпуклости это означает

$n \leq 4 + 2 = 6.$

Предположим, что тетраэдр удалось разбить на равные выпуклые шестигранники *P, Q* и *R.* Каждый из них тогда имеет по одной грани на каждой из граней тетраэдра *ABCD.* При этом ни в одной из вершин *A, B, C* и *D* не может сходиться два или три шестигранника. Действительно, пусть, например, *P* и *Q* сходятся в вершине *A,* а плоскость, отделяющая *P* от *Q*, пересекает ребро *BC* и не содержит внутренних точек ребра *BD.* Тогда один из шестигранников отделён этой плоскостью от всей грани *ABD* и, следовательно, не может иметь там свою грань.

Итак, каждая вершина тетраэдра может принадлежать только одному из шестигранников. Поэтому есть шестигранник, содержащий две из них, а значит, и ребро тетраэдра. Но любой отрезок в тетраэдре, отличный от ребра, короче ребра, и потому шестигранник, содержащий менее двух вершин тетраэдра, не содержит отрезков соответствующей длины. Тем самым мы установили, что все три шестигранника не могут быть равны.

Ответ: $\boldsymbol{n = 4}$ и $\boldsymbol{n = 5}$.

Критерии оценивания решений

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача полностью решена	+ +	14
Решение в целом верное, но есть недочёты в доказательстве неравенства $n < 6$	+ +	9-13
Приведены примеры и доказано, что $n \leq 6$	– +	6

Приведены только примеры	–*	2
Решение содержит существенные ошибки, не приведено или не завершено	–	0

Задача 8. **(16 баллов)** Пусть M – множество всех 256 четырёхзначных чисел, записываемых при помощи цифр 1, 2, 3 и 4. Диверсификатором назовём любое его подмножество D, обладающее следующим свойством: для любого числа $m \in M$ найдётся число $d(m) \in D$, такое, что m и $d(m)$ различаются во всех четырёх разрядах. Из какого наименьшего количества чисел может состоять диверсификатор?

Решение. Числа $d_1 = 1111$, $d_2 = 2222$, $d_3 = 3333$, $d_4 = 1234$, $d_5 = 2341$, $d_6 = 3412$ и $d_7 = 4123$ образуют диверсификатор. В самом деле, если число $m \in M$ не содержит единиц, двоек или троек, то оно отличается во всех разрядах от d_1, d_2 или d_3 соответственно. Если же единица, двойка, тройка и, возможно, четвёрка в записи числа m присутствуют, то, как показывает небольшой перебор, m отличается во всех разрядах хотя бы от одного из чисел d_4, d_5, d_6, d_7.

Докажем, что диверсикатор не может состоять из 6 чисел. Предположим, что нашлись числа $p = \overline{p_1p_2p_3p_4}$, $q = \overline{q_1q_2q_3q_4}$, $r = \overline{r_1r_2r_3r_4}$, $u = \overline{u_1u_2u_3u_4}$, $v = \overline{v_1v_2v_3v_4}$, $w = \overline{w_1w_2w_3w_4}$, образующие диверсификатор. Ни в каком разряде тогда нет трёх одинаковых цифр. (Действительно, в случае, например, равенств $p_1 = q_1 = r_1$ число $\overline{r_1u_2v_3w_4}$ в каждом разряде совпадало бы с каким-то из чисел p, q, r, u, v, w). Отсюда следует, что для каждого разряда среди этих чисел можно выделить две пары так, что в этом разряде цифры чисел, входящих в пару, будут совпадать.

При этом среди выделенных $2 \cdot 4 = 8$ пар найдутся две непересекающиеся, относящиеся к разным разрядам. В самом деле, пусть в первом разряде выделены пары (p, q) и (r, u). Тогда, если в какой-то паре для другого разряда появится число, отличное от p, q, r, u, например, выделенной окажется пара $(p,\ v)$, то вместе с парой (r, u), выделенной для первого разряда, она и составит пару пар, обладающую указанным свойством. Если же чисел, отличных от p, q, r, u в выделенных парах не появится, то пары пар, выделенных для разрядов, могут быть только трёх видов: $((p, q), (r, u))$, $((p,\ r), (q, u))$ и $\big((p, u), (q, r)\big)$. А поскольку разрядов четыре, то какая-то из этих трёх пар повторится. Можно считать, что во втором разряде выделены, как и в первом, пары (p, q) и (r, u).

Но тогда из равенств $p_1 = q_1$ и $r_2 = u_2$ следует, что число $\overline{p_1r_2v_3w_4}$ в каждом разряде совпадает хотя бы с одним из чисел p, q, r, u, v, w. Противоречие.

Ответ: 7.

Критерии оценивания решений

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача полностью решена	+ +	16
Доказано, что искомое количество больше 6	+ –	11
Приведён пример диверсификатора из 7 чисел	– +	5
Решение содержит существенные ошибки, не приведено или не завершено	–	0

Вариант 2

Задача 1. (10 баллов) Известно, что для некоторого числа x числа $\frac{1}{cos\ x}$ и $\frac{1}{cos\ 2x}$ – целые. Найдите значение x.

Решение. Пусть $\frac{1}{cos\ x} = n$, тогда

$\frac{1}{cos\ 2x} = \frac{1}{2cos^2x-1} = \frac{1}{\frac{2}{n^2}-1} = \frac{n^2}{2-n^2} = -\frac{n^2}{n^2-2} = -\frac{n^2-2+2}{n^2-2} = -1 + \frac{2}{2-n^2}$. Заметим, что так как второе число целое, то $2 - n^2$ является делителем числа 2. $n -$ целое число, не равное 0, значит из четырех делителей числа 2 $(\pm 1; \pm 2)$ подходят только случаи $n^2 = 1$ и $n^2 = 4$.

В первом случае $\cos x = \pm 1$, откуда $x = \pi k$, где $k \in Z$

Во втором случае $\cos x = \pm\frac{1}{2}$, откуда $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$ и $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in Z$.

Ответ: $\boldsymbol{x = \pi k}$, $\boldsymbol{x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k}$ **и** $\boldsymbol{x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k}$, **где** $\boldsymbol{k \in Z}$.

Критерии оценивания решений

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача полностью решена	+	10
Установлено, что $\frac{1}{sin\ x}$ является делителем числа 2, но в записи решений допущены ошибки (например, выписаны не все решения), посторонних решений нет	+–	6
Решения с $\cos x = \pm 1$ и $\cos x = \pm\frac{1}{2}$ указаны, посторонних решений нет, но не доказано, что других решений нет	–+	4
Решение содержит существенные ошибки, не приведено или не завершено	–	0

Задача 2. (10 баллов) Для действительного числа a>1 найдите все положительные корни уравнения $\log_{a+x-1}\frac{6}{x+1} = \log_a 3$.

Решение.

Заметим, что при положительных x основание логарифма левой части является положительным числом и под логарифмом стоит положительное число, то есть левая часть уравнения определена.
Перейдем в левой части к логарифму по основанию a:

$$\frac{\log_a \frac{6}{x+1}}{\log_a(a+x-1)} > \log_a 3$$

$$\log_a(\frac{6}{x+1}) = \log_a 3^{\log_a(a+x-1)}$$

$$\frac{6}{x+1} = 3^{\log_a(a+x-1)}$$

Заметим, что при положительных x в левой части стоит монотонно убывающая функция, а в правой части стоит монотонно возрастающая функция. Значит, у уравнения не более одного решения.
Заметим, что $x = 1$ является корнем уравнения.
Ответ: $x = 1$.

Критерии оценивания решений

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача полностью решена	+	10
Решение уравнения найдено, но его единственность не доказана	–+	2
Решение содержит существенные ошибки, не приведено или не завершено	–	0

Задача 3. (12 баллов) Дан треугольник ABC, в котором $AB = 23$, $BC = 17$. Найдите AC, если известно, что на продолжении медианы CM за точку M существует точка P, для которой $\angle PBA = \angle ACB$ и $\angle APB = \angle ABC$.

Решение. Пусть $\angle BAC = \alpha$, $AP = p$, $AC = x$.

Из равенств $\angle PBA = \angle ACB$ и $\angle APB = \angle ABC$ следует, что треугольники подобны, причём $\angle PBA = \alpha$. Отрезок $AM = \frac{AB}{2} = \frac{23}{2}$ является, таким образом, биссектрисой в треугольнике PAC, и по известной формуле имеем:

$$\frac{23}{2} = \frac{2px}{p+x}\cos\alpha.$$

В силу указанного подобия справедливо также равенство $\frac{AP}{AB} = \frac{AB}{AC}$, откуда $px = 23^2$.

Ещё одно соотношение даёт теорема косинусов, связывающая элементы треугольника ABC:

$$x^2 + 23^2 - 46x\cos\alpha = 17^2.$$

Из полученных уравнений находим $x = 7$.

Ответ: 7.

Критерии оценивания решений

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача полностью решена	+	12
Выписаны соотношения, из которых искомая длина может быть найдена.	+ –	6
Решение содержит существенные ошибки, не приведено или не завершено	–	0

Задача 4. (12 баллов) При каких значениях параметра q уравнение $[x]\cdot\{x\} = qx$ имеет ровно 2026 корней? (Здесь $[x]$ – целая часть числа x, то есть наибольшее целое число, не превышающее $\boldsymbol{x}$, а $\{x\} = x - [x]$ – дробная часть числа $\boldsymbol{x}$.)

Решение. При $q = 0$ множество корней уравнения бесконечно (все целые числа), а при $q < 0$ корень ровно один ($x = 0$). Заметим также, что $x = 0$ удовлетворяет уравнению при любом значении q. Далее будем считать, что $q > 0$, $x \neq 0$.

Пусть $[x] = m$, $\{x\} = \alpha$. Уравнение примет вид $\alpha m = q(m + \alpha)$; при сделанных предположениях это означает, что $\alpha m = 0$ и выполняется равенство: $\frac{1}{q} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{m}$. (*)

Если $q \leq 1$, то существует бесконечно много целых положительных чисел m, для которых $\frac{1}{q} - \frac{1}{m} > 1$. Для каждого такого m число $x = m + \frac{1}{\frac{1}{q} - \frac{1}{m}}$ будет корнем рассматриваемого уравнения.

Если же $q > 1$, то из (*) видно, что $m < 0$, причём $\frac{1}{m} < \frac{1}{q} - 1$. А поскольку $\frac{1}{m-1} > \frac{1}{m}$ при $(m-1)m \neq 0$, то целыми частями 2025 ненулевых корней уравнения должны быть числа -1, -2, -3, …, 2025 и только они. Следовательно, нам нужно найти все числа q, удовлетворяющие неравенствам $-\frac{1}{2025} < \frac{1}{q}-1\leq -\frac{1}{2026}$. Искомые значения образуют полуинтервал $\left[\frac{2026}{2025}; \frac{2025}{2024}\right)$.

Ответ: $\boldsymbol{\frac{2026}{2025} \leq q < \frac{2025}{2024}}$**.**

Критерии оценивания решений

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача полностью решена	+ +	12
Установлены границы корней, но решение содержит существенные пробелы	+ –	5
Установлена только одна из этих границ	– *	2
Решение содержит существенные ошибки, не приведено или не завершено	–	0

Задача 5. **(12 баллов)** На декартовой плоскости *xOy* дан график функции $y = \frac{1}{x}$. Масштабы на осях одинаковы, но не обозначены. Как с помощью циркуля и линейки построить отрезок длины 1?

Решение. Единичный отрезок можно получить способом, основанным на тождестве $\left(a+\frac{1}{a}\right)^2 - \left(a-\frac{1}{a}\right)^2 = 4$. Выбрав на положительной ветви данной гиперболы произвольную точку $\left(a; \frac{1}{a}\right)$, последовательно проделаем следующие стандартные построения.

1. Строим отрезки длинами a и $\frac{1}{a}$.
2. Строим отрезки длинами $a + \frac{1}{a}$. и $\left|a-\frac{1}{a}\right|$.
3. Строим прямоугольный треугольник с гипотенузой длины $a+\frac{1}{a}$ и катетом длины $\left|a-\frac{1}{a}\right|$. По теореме Пифагора другой катет будет равен $\sqrt{\left(a+\frac{1}{a}\right)^2 - \left(a-\frac{1}{a}\right)^2} = 2$.
4. Отрезок длины 2 делим пополам.

Критерии оценивания решений

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача полностью решена	+ +	12
Задача решена верно, хотя и без детального описания стандартных построений	+	10
Построен набор отрезков, из которого стандартными построениями можно получить отрезок длины 1, но сами эти стандартные построения не указаны	– +	3
Решение содержит существенные ошибки, не приведено или не завершено	–	0

Задача 6. **(14 баллов)** Про возрастающую арифметическую прогрессию известно, что все её члены являются корнями уравнения $P\big(Q(x)\big) = 0$, где $P(x)$ – некоторый многочлен второй степени, а $Q(x)$ – некоторый многочлен четвёртой степени. Каким наибольшим может быть число членов такой прогрессии?

Решение. Прогрессия, о которой идёт речь в условии задачи, может быть шестичленной; например, числа -5, -3, -1, 1, 3, 5 удовлетворяют уравнению

$P((Q(x)) = O$, где $P(x) = x^2 + 128x$, $(Q(x) = x^4 - 26x^2 + 25$.

Предположим, что нашлась арифметическая прогрессия $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5 < a_6 < a_7$, все члены которой являются корнями аналогичного уравнения. Ясно, что $P(x)$ должен иметь два различных корня $x_1 < x_2$, а все члены прогрессии – входить в совокупность корней уравнений $Q(x) = x_1$ и $Q(x) = x_2$. Пусть $Q(x) = c_0x^4 + c_1x^3 + c_2x^2 + c_3x + c_4$; можно считать, что $c_0 > 0$, а функция $f(x) = Q(x)$ имеет четыре промежутка монотонности: $(-\infty;\ q_1]$, $[q_1;\ q_2]$, $[q_2;\ q_3]$ и $[q_3;\ +\infty)$, где $q_1 < q_2 < q_3$ – некоторые числа.. Каждый из этих промежутков содержит не более двух членов рассматриваемой прогрессии, поскольку содержит не более, чем по одному корню каждого из уравнений $Q(x) = x_1$ и $Q(x) = x_2$.

Пусть, для определённости, уравнению $Q(x) = x_1$ удовлетворяет три члена прогрессии, а уравнению $Q(x) = x_2$ – четыре, причём последнее не имеет корня на промежутке $[q_2;\ q_3]$. Так как $x_1 < x_2$ и $Q(x)$ в силу неравенства $c_0 > 0$ убывает на $(-\infty;\ q_1]$ и $[q_2;\ q_3]$ и возрастает на $[q_1;\ q_2]$ и $[q_3;\ +\infty)$, имеем равенства $Q(a_1) = Q(a_4) = Q(a_5) = Q(a_7) = x_2$ и $Q(a_2) = Q(a_3) = Q(a_6)$. Согласно теореме Виета тогда $a_1 + a_4 + a_5 + a_7 = -\frac{c_1}{c_0}$, и этому же числу равна сумма $a_2 + a_3 + a_6 + t$, где t – четвёртый корень многочлена $Q(x) - x_1$.

Но $a_1, \ldots, a_7$ – прогрессия, а потому $a_1 + a_4 = a_2 + a_3$ и $a_5 + a_7 = 2a_6$. Отсюда $t = a_6$. Заметим теперь, что сумма квадратов корней многочлена $Q(x) = x_i$ не зависит от $\boldsymbol{i}$. (В самом деле, из теоремы Виета следует, что каждая из этих сумм равна $\left(\frac{c_1}{c_0}\right)^2 + 2\frac{c_2}{c_0}$). С другой стороны , $a_1^2 + a_4^2 + a_5^2 + a_7^2 = a_1^2 + (a_1 + 3\alpha)^2 + (a_1 + 4\alpha)^2 + (a_1 + 6\alpha)^2 = 4a_1^2 + 26a_1\alpha + 61\alpha^2$, тогда как $a_2^2 + a_3^2 + 2a_6^2 = (a_1 + \alpha)^2 + (a_1 + 2\alpha)^2 + 2(a_1 + 5\alpha)^2 = 4a_1^2 + 26a_1\alpha + 55\alpha^2$. (Через α здесь обозначена разность прогрессии.) Видим, что равенство сумм квадратов корней возможно только при $\alpha = 0$, а это противоречит условию возрастания членов прогрессии.

Аналогично придём к противоречию и в других случаях распределения чисел $a_1, \ldots, a_7$ по промежуткам монотонности функции $y = Q(x)$. Следовательно, семичленной прогрессии с требуемыми свойствами не существует.

Ответ: 6.

Критерии оценивания решений

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача полностью решена	+	14
Дан пример 6-членной прогрессии и многочленов с требуемыми свойствами:	– +	4
Решение содержит существенные ошибки, не приведено или не завершено	–	0

Задача 7. (14 баллов) Для каких натуральных чисел n куб можно разбить на три равных выпуклых n-гранника?

Решение. Куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ можно разбить на три четырёхугольные пирамиды (например, $AA_1B_1C_1D_1$, ABB_1C_1C и ACC_1D_1D), так и на три параллелепипеда (очевидным образом). Чтобы показать разбиение на три семигранника, обозначим через K, L, M, N, P и Q середины рёбер AA_1, A_1D_1, C_1D_1, C_1C, BC, и AB, а на отрезках A_1L и C_1M отметим точки L' и M' так, чтобы отрезки $L'M'$ и LM были параллельны. Тогда плоскости $KLMNPQ$ и $QL'M'P$ разрежут куб на три выпуклых семигранника.

На три тетраэдра куб разбить нельзя. В само деле, только на поверхности куба должно лежать не меньше, чем $6 \cdot 2 = 12$ граней тетраэдров, тогда как среди всех $3 \cdot 4 = 12$ их граней должны быть и такие, по которым тетраэдры примыкают друг к другу.

Предположив теперь, что куб разбит на три выпуклых n-гранника, докажем неравенство $n \leq 7$. Пусть $M(A)$ и $M(B)$ – два из этих n-гранников, причём $M(A)$ содержит вершину A, а $M(B)$ – вершину B. Плоскость, отделяющую $M(A)$ от $M(B)$, обозначим через π. Тогда, если прямая AB лежит в π, то либо $M(A)$ отделён этой плоскостью от грани $A_1B_1C_1D_1$, либо $M(B)$ – от грани CC_1D_1D. Если же π не содержит прямую AB, то либо $M(A)$ отделён этой плоскостью от грани BB_1C_1C, либо $M(B)$ – от грани AA_1D_1D.

Обязательно, таким образом, какой-то n-гранник отделён плоскостью π от какой-то грани куба и, в силу выпуклости, не может иметь на той грани свою грань. Но любая грань n-гранника должна либо лежать на одной из граней куба, либо быть одной из не более чем двух, по которым этот n-гранник граничит с другими. Поэтому $n \leq 6 - 1 + 2 = 7$.

Ответ: для $n = 5, 6, 7$.

Критерии оценивания решений

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача полностью решена	+ +	14

Решение в целом верное, но есть недочёты в доказательстве неравенства $n \leq 7$	+ -	9-13
Приведены примеры и доказано, что $n \geq 5$	– +	6
Приведены только примеры	–*	4
Решение содержит существенные ошибки, не приведено или не завершено	–	0

Задача 8. **(16 баллов)** Пусть M – множество всех четырёхзначных чисел, записываемых при помощи цифр 1, 2, 3. Диверсификатором назовём любое его подмножество D, обладающее следующим свойством: для любого числа $m \epsilon M$ найдётся число $d(m) \in D$ такое, что m и $d(m)$ различаются во всех четырёх разрядах. Из какого наименьшего количества чисел может состоять диверсификатор?

Решение. Пусть имеется диверсификатор D, состоящий из n чисел. Составим число $m = \overline{c_1 c_2 c_3 c_4}, m \epsilon M$, следующим образом. Цифру c_1 в его первый разряд возьмём такую, которая в первом разряде чисел D встречается не реже любой другой. В D будет не более $\left[\frac{2n}{3}\right]$ чисел, начинающихся с других цифр. Цифру c_2 выберем так, чтобы во втором разряде этих $\left[\frac{2n}{3}\right]$ она встречалась не реже любой другой цифры. В D окажется не более $\left[\frac{2}{3}\left[\frac{2n}{3}\right]\right]$ чисел, первая цифра каждого из которых отлична от c_1, а вторая – от c_2. Аналогично подберём c_3 и c_4.

В итоге в диверсификаторе окажется не более $\left[\frac{2}{3}\left[\frac{2}{3}\left[\frac{2}{3}\left[\frac{2n}{3}\right]\right]\right]\right]$ чисел d таких, что d и m различаются во всех разрядах. Следовательно, выполняется неравенство $\left[\frac{2}{3}\left[\frac{2}{3}\left[\frac{2}{3}\left[\frac{2n}{3}\right]\right]\right]\right] \geq 1$, откуда $n \geq 8$. Итак, D должен содержать не менее 8 чисел.

С другой стороны, можно пример диверсификатора из 8 чисел: (1123, 1232, 1331, 2211, 2312, 3133, 3222, 3321).

Ответ: 8.

Критерии оценивания решений

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача полностью решена	+ +	16
Приведён пример диверсификатора из 8 чисел	+ –	11
Доказано, что искомое количество больше 7	– +	5
Решение содержит существенные ошибки, не приведено или не завершено	–	0