Олимпиада 8-9 класс
Второй вариант

1. (**10 баллов**) Можно ли записать в каждую клетку таблицы 7×7 по одному действительному числу так, чтобы общая сумма чисел в таблице была отрицательна, но при этом сумма в любом прямоугольнике 1×3 (или 3×1) не являлась отрицательной?

2. (**10 баллов**) На координатной плоскости отметили точки $A(p;q)$ и $B(q;p)$, где числа p и q некоторые натуральные числа, для которых $p < q$. Сколько существует вариантов пар чисел $(p;q)$, если площадь треугольника, образованного началом координат и точками A и B равна 70?

3. (**12 баллов**) Дано натуральное число, большее 1000. Докажите, что в нём всегда можно изменить не более двух цифр так, чтобы после этого новое число было представимо в виде произведения 5 натуральных чисел, каждое из которых больше 2. Первую цифру изменять на ноль нельзя.

4. (**12 баллов**) В равнобедренном треугольнике ABC $(AB = AC)$ с $\angle BAC = 38^\circ$ на сторонах AB и AC отметили точки P и Q так, что $\angle PQC = 33^\circ a$ и $PQ = BC$. Докажите, что BPC – равнобедренный треугольник.

5. (**12 баллов**) Дима задумал натуральное число n и вычислил числа $2n-1$, $3n-1$ и $6n-5$. Первые два числа у него оказались квадратами натуральных чисел. Могло ли быть такое, что третье полученное им число оказалось простым?

6. (**14 баллов**) У Гриши есть 6 мармеладок разного веса, причём вес каждой мармеладки выражается натуральным числом граммов. Известно, что среди любых пяти его мармеладок можно выбрать одну, которая весит больше остальных четырёх вместе взятых. Гриша хочет откусить ровно 13 грамм от одной из мармеладок так, чтобы после этого вес любых двух мармеладок отличался не больше, чем в семь раз. Докажите, что он не сможет добиться желаемого вне зависимости от весов мармеладок.

7. (**14 баллов**) В остроугольном треугольнике ABC провели высоты AA_1 и CC_1, которые пересеклись в точке H, а также отметили середины сторон AB и BC точки M и N соответственно. Оказалось, что середина высоты BK треугольника ABC лежит на прямой A_1C_1. Докажите, что точки B, M, H, N лежат на одной окружности.

8. (**16 баллов**) Рита выписала все пятизначные числа, которые не содержат нулей, единиц и двоек в своей записи. Теперь она хочет зачеркнуть у каждого из этих чисел по две цифры. Может ли она сделать это так, чтобы новые трёхзначные числа принимали меньше 95 различных значений?