Олимпиада 10 класс

Решения и критерии оценивания

Первый вариант

1. (**10 баллов**) Назовём натуральное число счастливым, если все его натуральные делители можно разделить на две группы так, что сумма в одной группе была ровно в 11 раза больше, чем сумма в другой группе. Существует ли счастливое число, которое больше 1000?

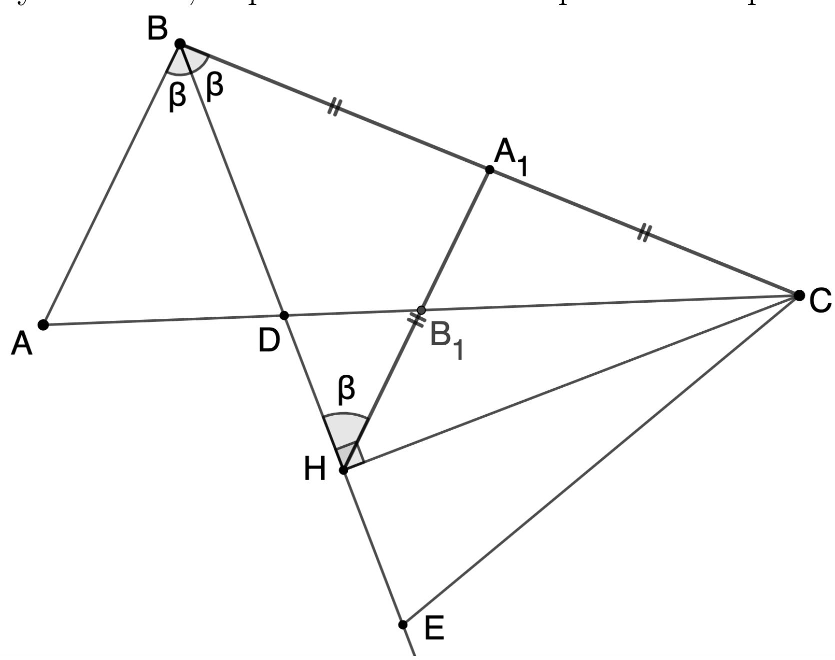
Ответ: да, существует.

Решение. Возьмём любое простое число p, большее 1000. Разобьём делители числа $11p$ на 2 группы: $1, p$ и $11, 11p$. Из такого разбиения следует, что $11p$ является счастливым числом.

Критерии проверки.

Содержание критерия	Оценка	баллы
Задача решена полностью, получен верный ответ	+	10
Найдено счастливое число, но оно не превосходит 1000	∓	3
Решение отсутствует или содержит существенные ошибки	-	0

2. (**10 баллов**) В неравнобедренном треугольнике ABC провели биссектрису BD. На луче BD отметили точку E так, что $CD = CE$. Докажите, что средняя линия треугольника, параллельная AB пересекает отрезок DE в его середине.



Решение. Пусть середина отрезка DE – точка H, тогда, так как треугольник DEC равнобедренный, то $\angle BHC = 90°$. Отметим середину стороны BC – точку A_1. Получаем, что медиана HA_1 прямоугольного треугольника BHC такова, что $HA_1 = A_1B$

и $\angle HBC = \angle A_1HB$. Так как BD – биссектриса, то $\angle ABD = \angle CBD = \angle A_1HB$, то есть $HA_1 \parallel AB$, то есть содержит среднюю линию треугольника ABC и проходит через середину AC, что и требовалось доказать.

Критерии проверки.

Содержание критерия	Оценка	баллы
Задача решена полностью, получен верный ответ	+	10
Решение отсутствует или содержит существенные ошибки	-	0

3. (**12 баллов**) Сколько существует 7-значных натуральных чисел, у которых сумма любых двух цифр является простым числом?

Ответ: 22.

Решение. Сначала посмотрим на чётные цифры, которые могут быть в нашем числе. Единственная простая сумма чётных цифр — это $0 + 2 = 2$, поэтому у нас либо ровно 2 чётные цифры 0 и 2, либо не больше одной чётной цифры. В любом из случаев мы имеем хотя бы 5 нечётных цифр. Если хотя бы одна из нечётных цифр не является единицей, то в сумме с любой другой нечётной цифрой они будут давать не простое число (их сумма чётна и больше двух). Отсюда получаем, что все нечётные цифры являются единицами, в таком случае использовать нули мы уже не можем, так как $0 + 1 = 1$ не является простым. Таким образом, чётных цифр не больше одной. Если чётных цифр ноль, то наше число определяется однозначно и состоит из всех единиц. Если чётная цифра одна, то она может быть $2, 4$ или 6, это еще $3 \cdot 7$ вариантов. Итого мы насчитали 22 подходящих числа.

Критерии проверки.

Содержание критерия	Оценка	баллы
Задача решена полностью, получен верный ответ	+	12
Упускается хотя бы одно подходящее число	$\pm$	не больше 10
В доказательстве не учитывается, что цифры могут быть нулями	$\pm$	не больше 10
Доказано, что все нечётные цифры являются единицами	$\mp$	не меньше 4
Доказано, что все нечётные цифры являются единицами	$\mp$	не меньше 4
Начисляется 1 балл за каждый верно указанный вид подходящих чисел	$\mp$	не больше 4
Доказано, что чётных цифр не больше двух	$-.$	не меньше 2
Решение отсутствует или содержит существенные ошибки	-	0

4. (**12 баллов**) Степан нарисовал две параболы: графики функций $y = x^2 + 5$ и $y = -x^2 + 2x - 2$. После этого он нарисовал общие касательные к параболам и отметил точки их касания (напоминаем, что общей касательной к параболе называется прямая, имеющая ровно по одной общей точке с каждой параболой). Докажите, что четыре отмеченные точки образуют вершины параллелограмма.

Решение. Перепишем вторую функцию: $y = -(x-1)^2 - 1$. Заметим, что вершина первой параболы находится в точке $(0;5)$, вершина второй параболы находится в точке $(1;-1)$. При центральной симметрии относительно точки $(\frac{1}{2};2)$ вершина первой параболы переходит в вершину второй параболы, ось первой параболы переходит в ось второй параболы (так как они параллельны). Поскольку каждую из двух парабол можно получить из параболы $y = x^2$ сдвигами, то эти параболы равны. При такой центральной симметрии первая парабола переходит во вторую, значит, общая касательная переходит в общую касательную. Таким образом точки касания попарно симметричны относительно центра симметрии и образуют параллелограмм, что и требовалось доказать.

Содержание критерия	Оценка	баллы
Задача решена полностью, получен верный ответ	+	12
Используется центральная симметрия, но не объясняется, почему параболы равны	±	8
Если задачу решали, пытаясь посчитать точки касания, при арифметической ошибке	-	0
Решение отсутствует или содержит существенные ошибки	-	0

5. (**12 баллов**) В ряд выписаны 99 действительных чисел. Известно, что каждое из чисел не меньше 5. Однако сумма любых двух чисел, между которыми находится ровно одно число, не превосходит 20. Какое наибольшее значение может принимать сумма всех 99 чисел?

Ответ: 995.

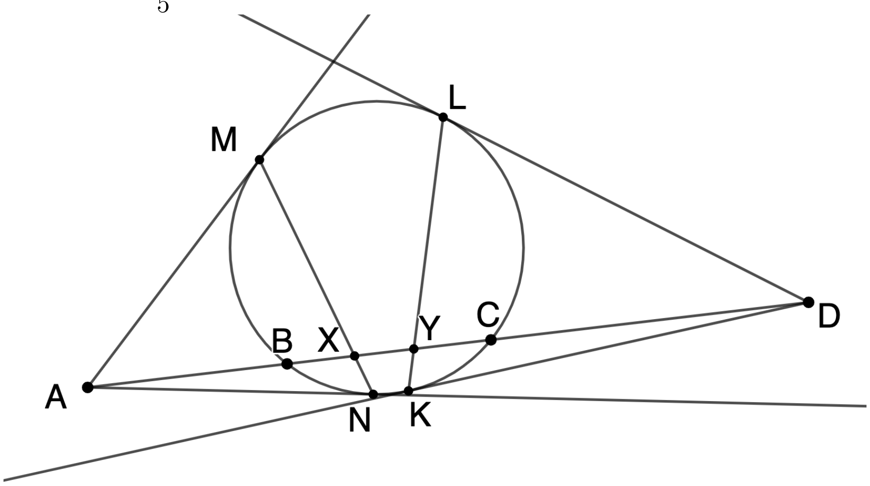
Решение. Обозначим данные числа $a_1, a_2, \ldots, a_{99}$ слева направо. Заметим, что сумма любых подряд идущих чисел $a_i, a_{i+1}, a_{i+2}, a_{i+3}$ в этом ряду не больше 40, т.к. $a_i + a_{i+2} \leq 20$ и $a_{i+1} + a_{i+3} \leq 20$. Разобьем все числа от a_4 до a_{99} на 24 четвёрки подряд идущих, отсюда получаем, что их сумма не больше, чем $24 \cdot 40$. Также мы знаем, что $a_1 + a_3 \leq 20$. По условию $a_2 + a_4 \leq 20$, при этом $a_4 \geq 5$, поэтому $a_2 \leq 15$. Складывая полученные оценки, получаем, что сумма всех чисел не превосходит $24 \cdot 40 + 20 + 15 = 995$.

Теперь приведём пример, в котором сумма будет равняться 995. Все a_i с нечётными i приравняем к 10. Для чётных i будем чередовать значения 15 и 5: $a_2 = 15, a_4 = 5, a_6 = 15, \ldots, a_{98} = 15$. Таким образом, сумма любых a_i и a_{i+2} будет равняться 20.

Содержание критерия	Оценка	баллы
Задача решена полностью, получен верный ответ	+	12
Полное доказательство верхней оценки	$\pm$	8
Верный пример с проверкой	$\mp$	4
Показано, что сумма любых 4 подряд идущих чисел не больше 40, но не доказана верхняя оценка	$-.$	2
Решение отсутствует или содержит существенные ошибки	-	0

6. (**14 баллов**) На отрезке $AD = 12$ отметили точки B и C так, что $AB = 3$ и $AC = 6$. Через точки B и C проведена окружность, а к ней касательные AM и AN и DL и DK. Отрезки MN и LK пересекают прямую AB в точках X и Y. Докажите, что длина отрезка XY не зависит от выбора окружности и найдите ее.

Ответ: $\frac{4}{5}$.



Решение.

Напишем теорему Стюарта для треугольника AMN и чевианы AX:

$AX^2 = AM^2 \cdot \frac{NX}{MN} + AN^2 \cdot \frac{MX}{MN} - MX \cdot NX$.

Из равенства касательных $AM = AN$ получаем:

$AX^2 = \frac{1}{MN}(AM^2(NX + MX) - MX \cdot NX \cdot MN)$, откуда $AX^2 = AM^2 - MX \cdot NX$.

По теореме о квадрате касательной $AM^2 = AB \cdot AC$, откуда получаем, что $AX^2 = AB \cdot AC - MX \cdot NX = AB \cdot AC - BX \cdot XC$.

$AX^2 = AB \cdot AC - (AC - AX)(AX - AB) = 2AB \cdot AC - AX(AB + AC) + AX^2$.

Из этого получаем, что $AX = \frac{2AB \cdot AC}{AB+AC} = 4$.

Аналогично получаем, что $DY = \frac{2DC \cdot DB}{DC+DB} = \frac{36}{5}$.

Получаем, что $XY = 12 - 4 - \frac{36}{5} = \frac{4}{5}$.

Содержание критерия	Оценка	баллы
Задача решена полностью, получен верный ответ	$+$	14
Задача решена верно, но совершена арифметическая ошибка	$+.$	12
Задача посчитана в частном случае (для некоторой фиксированной окружности)	$\mp$	3
Решение отсутствует или содержит существенные ошибки	-	0

7. (**14 баллов**) Для действительных положительных $a_1, a_2, \ldots, a_{19}$ докажите, что

$$\frac{a_1}{a_{19}^2 + a_1^2 + a_2^2} + \frac{a_2}{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} + \ldots + \frac{a_{19}}{a_{18}^2 + a_{19}^2 + a_1^2} < \frac{1}{a_1 + a_2} + \frac{1}{a_2 + a_3} + \ldots + \frac{1}{a_{19} + a_1}.$$

Решение. Сначала оценим сумму первых двух дробей следующим образом:

$$\frac{a_1}{a_{19}^2 + a_1^2 + a_2^2} + \frac{a_2}{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} < \frac{a_1}{a_1^2 + a_2^2} + \frac{a_2}{a_1^2 + a_2^2} = \frac{a_1 + a_2}{a_1^2 + a_2^2} \leq \frac{2}{a_1 + a_2}.$$

Последний переход верен в силу того, что $(a_1 + a_2)^2 \leq 2a_1^2 + 2a_2^2$.
Аналогичное неравенство можно доказать для суммы второй и третьей дроби, третьей и четвёртой, ..., 19-ой и первой. Если сложить все эти неравенства и поделить на 2 обе части, то получим требуемое неравенство.

Критерии проверки.

Содержание критерия	Оценка	баллы
Задача решена полностью, получен верный ответ	$+$	14
Доказано неравенство для двух дробей	$\pm$	8
В решении не доказано неравенство для двух дробей, но из него выведено нужное неравенство	$\mp$	6
Решение отсутствует или содержит существенные ошибки	-	0

8. (**16 баллов**) В университете всего учатся 5000 студентов, некоторые из них подписывались друг на друга в социальной сети (если первый студент подписан на второго, то второй необязательно подписан на первого). Назовём группу из 5 студентов близкой, если для любой пары студентов А и Б среди них выполнено хотя бы одно из двух условий:

- А подписан на Б;
- Б подписан на А.

Известно, что среди любых 100 студентов найдётся близкая группа. Докажите, что в этом университете найдётся студент, у которого хотя бы 100 подписчиков или хотя бы 100 подписок.

Решение. Будем говорить, что 2 студента *связаны*, если хотя бы один из них подписан на другого. Выделим среди всех студентов в университете наибольшее по размеру множество, внутри которого нет близкой группы. Назовём это множество A, а множество из всех остальных студентов — B. Из условия задачи следует, что в A не больше 99 студентов, поэтому в B их не меньше 4901. При добавлении любого студента из группы B к группе A должна появляться близкая группа, поэтому каждый студент из B связан хотя бы с 4 студентами из группы A. Получаем, что связей между студентами A и B хотя бы $4901 \cdot 4$. По принципу Дирихле в группе A найдётся студент, у которого не меньше $\frac{4901 \cdot 4}{99} > 198$ связей, тогда у него хотя бы 199 связей. Назовём этого студента a. Покажем, что студент a является искомым. Действительно, снова применим принцип Дирихле и получим, что среди хотя бы 199 студентов, связанных с a, найдётся либо 100 подписанных на a, либо 100, на которых подписан a.

Критерии проверки.

Содержание критерия	Оценка	баллы
Задача решена полностью, получен верный ответ	+	16
Рассмотрено наибольшее множество студентов, среди которых нет близкой группы	∓	4
Указано, что достаточно найти студента, у которого хотя бы 199 связей (подписчиков и подписок в сумме)	−.	2
Решение отсутствует или содержит существенные ошибки	-	0

Второй вариант

1. (**10 баллов**) Назовём натуральное число счастливым, если все его натуральные делители можно разделить на две группы так, что сумма в одной группе была ровно в 7 раз больше, чем сумма в другой группе. Существует ли счастливое число, которое больше 3000?

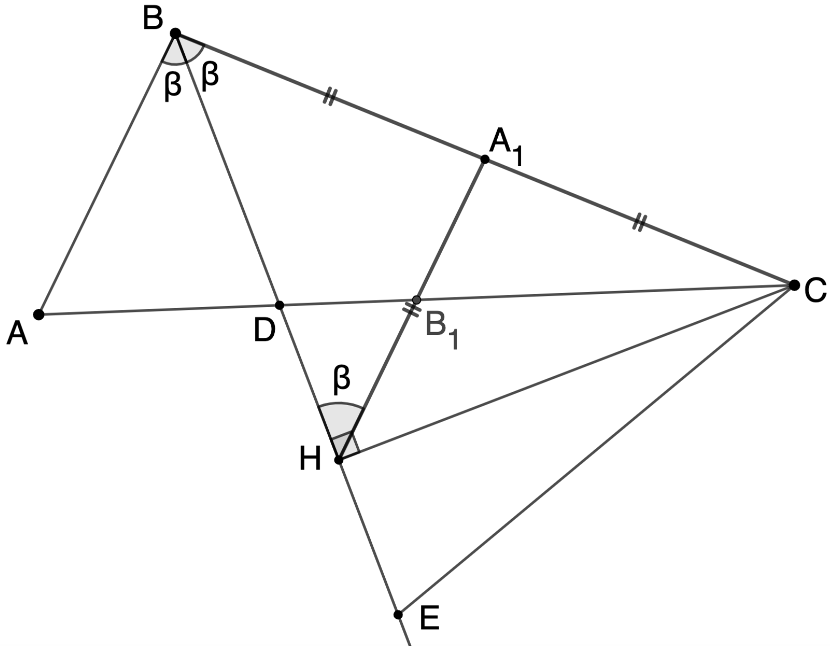
Ответ: да, существует.

Решение. Возьмём любое простое число p, большее 3000. Разобьём делители числа $7p$ на 2 группы: $1, p$ и $7, 7p$. Из такого разбиения следует, что $7p$ является счастливым числом.

Критерии проверки.

Содержание критерия	Оценка	баллы
Задача решена полностью, получен верный ответ	+	10
Найдено счастливое число, но оно не превосходит 3000	∓	3
Решение отсутствует или содержит существенные ошибки	-	0

2. (**10 баллов**) В неравнобедренном треугольнике ABC провели биссектрису BD. На луче BD отметили точку E так, что $CD = CE$. Докажите, что прямая, соединяющая середины отрезков DE и AC, содержит середину отрезка BC.



Решение.

Пусть середина отрезка DE – точка H, тогда, так как треугольник DEC равнобедренный, то $\angle BHC = 90^\circ$. Отметим середину стороны BC – точку A_1. Получаем, что медиана HA_1 прямоугольного треугольника BHC такова, что $HA_1 = A_1B$ и $\angle HBC = \angle A_1HB$. Так как BD – биссектриса, то $\angle ABD = \angle CBD = \angle A_1HB$, то есть $HA_1 \parallel AB$, то есть содержит среднюю линию треугольника ABC и проходит через середину AC, что и требовалось доказать.

3. (**12 баллов**) Сколько существует 9-значных натуральных чисел, у которых сумма любых двух цифр является простым числом?

Ответ: 28.

Решение. Сначала посмотрим на чётные цифры, которые могут быть в нашем числе. Единственная простая сумма чётных цифр — это $0 + 2 = 2$, поэтому у нас либо ровно 2 чётные цифры 0 и 2, либо не больше одной чётной цифры. В любом из случаев мы имеем хотя бы 7 нечётных цифр. Если хотя бы одна из нечётных цифр не является единицей, то в сумме с любой другой нечётной цифрой они будут давать не простое число (их сумма чётна и больше двух). Отсюда получаем, что все нечётные цифры являются единицами, в таком случае использовать нули мы уже не можем, так как $0 + 1 = 1$ не является простым. Таким образом, чётных цифр не больше одной. Если чётных цифр ноль, то наше число определяется однозначно и состоит из всех единиц.

Если чётная цифра одна, то она может быть $2, 4$ или 6, это еще $3 \cdot 9$ вариантов. Итого мы насчитали 28 подходящих чисел.

Критерии проверки.

Содержание критерия	Оценка	баллы
Задача решена полностью, получен верный ответ	+	12
Упускается хотя бы одно подходящее число	$\pm$	не больше 10
В доказательстве не учитывается, что цифры могут быть нулями	$\pm$	не больше 10
Доказано, что все нечётные цифры являются единицами	$\mp$	не меньше 4
Доказано, что все нечётные цифры являются единицами	$\mp$	не меньше 4
Начисляется 1 балл за каждый верно указанный вид подходящих чисел	$\mp$	не больше 4
Доказано, что чётных цифр не больше двух	$-.$	не меньше 2
Решение отсутствует или содержит существенные ошибки	-	0

4. (**12 баллов**) Дима нарисовал две параболы: графики функций $y = -x^2 + 1$ и $y = x^2 + 4x - 3$. После этого он нарисовал общие касательные к параболам и отметил точки их касания (напоминаем, что общей касательной к параболе называется прямая, имеющая ровно по одной общей точке с каждой параболой). Докажите, что четыре отмеченные точки образуют вершины параллелограмма.

Решение.

Перепишем вторую функцию: $y = (x + 2)^2 - 7$. Заметим, что вершина первой параболы находится в точке $(0; 1)$, вершина второй параболы находится в точке $(-2; -7)$. При центральной симметрии относительно точки $(-1; -3)$ вершина первой параболы переходит в вершину второй параболы, ось первой параболы переходит в ось второй параболы (так как они параллельны). Поскольку каждую из двух парабол можно получить из параболы $y = x^2$ сдвигами, то эти параболы равны. При такой центральной симметрии первая парабола переходит во вторую, значит, общая касательная переходит в общую касательную. Таким образом точки касания попарно симметричны относительно центра симметрии и образуют параллелограмм, что и требовалось доказать.

Содержание критерия	Оценка	баллы
Задача решена полностью, получен верный ответ	+	12
Используется центральная симметрия, но не объясняется, почему параболы равны	±	8
Если задачу решали, пытаясь посчитать точки касания, при арифметической ошибке	-	0
Решение отсутствует или содержит существенные ошибки	-	0

5. (**12 баллов**) В ряд выписаны 63 действительных числа. Известно, что каждое из чисел не меньше 7. Однако сумма любых двух чисел, между которыми находится ровно одно число, не превосходит 28. Какое наибольшее значение может принимать сумма всех 63 чисел?

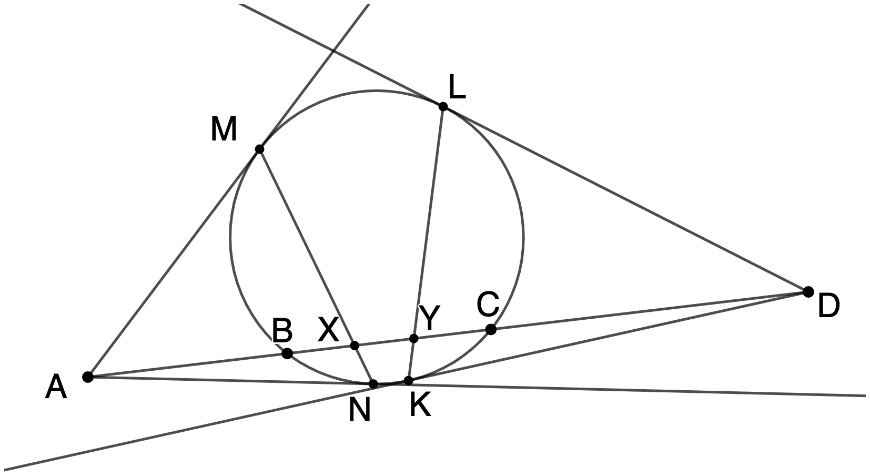
Ответ: 889.

Решение. Обозначим данные числа $a_1, a_2, \ldots, a_{63}$ слева направо. Заметим, что сумма любых подряд идущих чисел $a_i, a_{i+1}, a_{i+2}, a_{i+3}$ в этом ряду не больше 56, т.к. $a_i + a_{i+2} \leq 28$ и $a_{i+1} + a_{i+3} \leq 28$. Разобьем все числа от a_4 до a_{63} на 15 четвёрок подряд идущих, отсюда получаем, что их сумма не больше, чем $15 \cdot 56$. Также мы знаем, что $a_1 + a_3 \leq 28$. По условию $a_2 + a_4 \leq 28$, при этом $a_4 \geq 7$, поэтому $a_2 \leq 21$. Складывая полученные оценки, получаем, что сумма всех чисел не превосходит $15 \cdot 56 + 28 + 21 = 889$. Теперь приведём пример, в котором сумма будет равняться 889. Все a_i с нечётными i приравняем к 14. Для чётных i будем чередовать значения 21 и 7: $a_2 = 21, a_4 = 7, a_6 = 21, \ldots, a_{98} = 21$. Таким образом, сумма любых a_i и a_{i+2} будет равняться 28.

Содержание критерия	Оценка	баллы
Задача решена полностью, получен верный ответ	+	12
Полное доказательство верхней оценки	±	8
Верный пример с проверкой	∓	4
Показано, что сумма любых 4 подряд идущих чисел не больше 56, но не доказана верхняя оценка	−.	2
Решение отсутствует или содержит существенные ошибки	-	0

6. (**14 баллов**) На отрезке $AD = 16$ отметили точки B и C так, что $AB = 4$ и $AC = 8$. Через точки B и C проведена окружность, а к ней касательные AM и AN и DL и DK. Отрезки MN и LK пересекают прямую AB в точках X и Y. Докажите, что длина отрезка XY не зависит от выбора окружности и найдите ее.

Ответ: $\frac{16}{15}$.



Решение.

Напишем теорему Стюарта для треугольника AMN и чевианы AX:

$AX^2 = AM^2 \cdot \frac{NX}{MN} + AN^2 \cdot \frac{MX}{MN} - MX \cdot NX.$

Из равенства касательных $AM = AN$ получаем:

$AX^2 = \frac{1}{MN}(AM^2(NX + MX) - MX \cdot NX \cdot MN)$, откуда $AX^2 = AM^2 - MX \cdot NX$.

По теореме о квадрате касательной $AM^2 = AB \cdot AC$, откуда получаем, что $AX^2 = AB \cdot AC - MX \cdot NX = AB \cdot AC - BX \cdot XC$.

$AX^2 = AB \cdot AC - (AC - AX)(AX - AB) = 2AB \cdot AC - AX(AB + AC) + AX^2$.

Из этого получаем, что $AX = \frac{2AB \cdot AC}{AB+AC} = \frac{16}{3}$.

Аналогично получаем, что $DY = \frac{2DC \cdot DB}{DC+DB} = \frac{48}{5}$.

Получаем, что $XY = 16 - \frac{16}{3} - \frac{48}{5} = \frac{16}{15}$.

Содержание критерия	Оценка	баллы
Задача решена полностью, получен верный ответ	+	14
Задача решена верно, но совершена арифметическая ошибка	+.	12
Задача посчитана в частном случае (для некоторой фиксированной окружности)	$\mp$	3
Решение отсутствует или содержит существенные ошибки	-	0

7. (**14 баллов**) Для действительных положительных $x_1, x_2, \ldots, x_{23}$ докажите, что

$$\frac{x_1}{x_{23}^2 + x_1^2 + x_2^2} + \frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} + \ldots + \frac{x_{23}}{x_{22}^2 + x_{23}^2 + x_1^2} < \frac{1}{x_1 + x_2} + \frac{1}{x_2 + x_3} + \ldots + \frac{1}{x_{23} + x_1}.$$

Решение. Сначала оценим сумму первых двух дробей следующим образом:

$$\frac{x_1}{x_{23}^2 + x_1^2 + x_2^2} + \frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} < \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} + \frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1^2 + x_2^2} \leq \frac{2}{x_1 + x_2}.$$

Последний переход верен в силу того, что $(x_1 + x_2)^2 \leq 2x_1^2 + 2x_2^2$.

Аналогичное неравенство можно доказать для суммы второй и третьей дроби, третьей и четвёртой, ..., 23-ей и первой. Если сложить все эти неравенства и поделить на 2 обе части, то получим требуемое неравенство.

Критерии проверки.

Содержание критерия	Оценка	баллы
Задача решена полностью, получен верный ответ	+	14
Доказано неравенство для двух дробей	±	8
В решении не доказано неравенство для двух дробей, но из него выведено нужное неравенство	∓	6
Решение отсутствует или содержит существенные ошибки	-	0

8. (**16 баллов**) В университете всего учатся 4000 студентов, некоторые из них подписывались друг на друга в социальной сети (если первый студент подписан на второго, то второй необязательно подписан на первого). Назовём группу из 5 студентов близкой, если для любой пары студентов А и Б среди них выполнено хотя бы одно из двух условий:

- А подписан на Б;
- Б подписан на А.

Известно, что среди любых 80 студентов найдётся близкая группа. Докажите, что в этом университете найдётся студент, у которого хотя бы 100 подписчиков или хотя бы 100 подписок.

Решение. Будем говорить, что 2 студента *связаны*, если хотя бы один из них подписан на другого. Выделим среди всех студентов в университете наибольшее по размеру множество, внутри которого нет близкой группы. Назовём это множество A, а множество из всех остальных студентов — B. Из условия задачи следует, что в A не больше 79 студентов, поэтому в B их не меньше 3921. При добавлении любого студента из группы B к группе A должна появляться близкая группа, поэтому каждый студент из B связан хотя бы с 4 студентами из группы A. Получаем, что связей между студентами A и B хотя бы $3921 \cdot 4$. По принципу Дирихле в группе A найдётся студент, у которого не меньше $\frac{3921 \cdot 4}{79} > 198$ связей, тогда у него хотя бы 199 связей. Назовём этого студента a. Покажем, что студент a является искомым. Действительно, снова применим принцип Дирихле и получим, что среди хотя бы 199 студентов, связанных с a, найдётся либо 100 подписанных на a, либо 100, на которых подписан a.

Критерии проверки.

Содержание критерия	Оценка	баллы
Задача решена полностью, получен верный ответ	$+$	16
Рассмотрено наибольшее множество студентов, среди которых нет близкой группы	$\mp$	4
Указано, что достаточно найти студента, у которого хотя бы 199 связей (подписчиков и подписок в сумме)	$-.$	2
Решение отсутствует или содержит существенные ошибки	-	0