

Получается, когда первый автобус проехал $\frac{10}{3}$ часа со скоростью $\frac{5x}{4}$ или же расстояние $\frac{5x}{4} \cdot \frac{10}{3} = \frac{50x}{12}$, то второй автобус проехал $\frac{10}{3}$ часа со скоростью y или же расстояние $\frac{10}{3} \cdot y = \frac{10y}{3}$. Тогда в сумме они проехали 300 км $\Rightarrow \frac{50x}{12} + \frac{10y}{3} = 300$.

Аналогично, когда второй автобус проехал 4 часа со скоростью x , то-есть $4x$ км, то велосипедист проехал 4 часа со скоростью y , то-есть $4y$ км; и вместе они проехали 300 км

Код участника:

(заполняется организатором)

M10-239

... Или же $4x + 4y = 300$ км

Составим систему ур-ний:

$$\begin{cases} \frac{50x}{12} + \frac{10y}{3} = 300 & | \cdot 12 \\ 4x + 4y = 300 & | : 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 50x + 40y = 3600 \\ x + y = 75 \end{cases}$$

$50x + 40y = 40x + 40y + 10x = 40(x+y) + 10x = 40 \cdot 75 + 10x = 3000 + 10x = 3600$;
 $10x + 3000 = 3600$; $10x = 600$; $x = 60 \rightarrow$ Скорость второго автобуса 60 км/ч и проехал он $4x = 4 \cdot 60 = 240$ км.

Тогда велосипедист, для встречи со вторым автобусом проехал $300 - 240 = 60$ км. или же $4y \rightarrow 4y = 60$, $y = 15$ км.

Тогда скорость велосипедиста равна 15 км/ч

Ответ: 15 ~~15~~

Код участника:

(заполняется организатором)

M10-239

Задача 4

Число $2...234...4$ (2024 двойки и после 2024 четвёрки) не является простым, т.к. делится на 2 (признак делимости на 2: последняя цифра числа является чётной, а ~~каждая~~ цифра 4-чётная)

Задача 2

Сумма внешних углов выпуклого n -угольника равна 360° . Чем больше угол n -угольника, тем меньше внешний угол при нём. Максимальный угол ~~в~~ выпуклом n -угольнике, кратный 4 – это 176° . Тогда внешний при нём минимум 4° . Даже если каждый угол n -угольника будет 176° , то сумма внешних будет $91 \cdot 4^\circ = 364^\circ$, что больше, чем 360° . Значит, n -угольника такого, что градусная мера каждого из его углов кратна 4 не существует.

Ответ: нет

Задача №7

t – корень ур-ния $x^3 - 3x - 3 = 0$. Доказать, что $t > \sqrt[5]{39}$

1) Построим функцию $f(x) = x^3 - 3x - 3$

2) По графику заметим, что корень t , при котором $x^3 - 3x - 3 = 0$ расположен между $x=2$ и $x=3$

$$\Rightarrow 2 < t < 3$$

3) $2 < \sqrt[5]{39} < 3$, т.к. $2^5 < 39 < 3^5$

4) Найдём примерное значение $\sqrt[5]{39}$:

$$2,08^5 \approx 38,93$$

$$2,081^5 \approx 39,01$$

Значит, $2,08 < \sqrt[5]{39} < 2,081$

5) Т.к. на промежутке $[1; +\infty)$ функция возрастает, то если при значении $x=2,1$ функция меньше нуля, то и при значении от $2,08$ до $2,081$ функция будет меньше нуля ($2,1 > 2,081 > 2,08$)

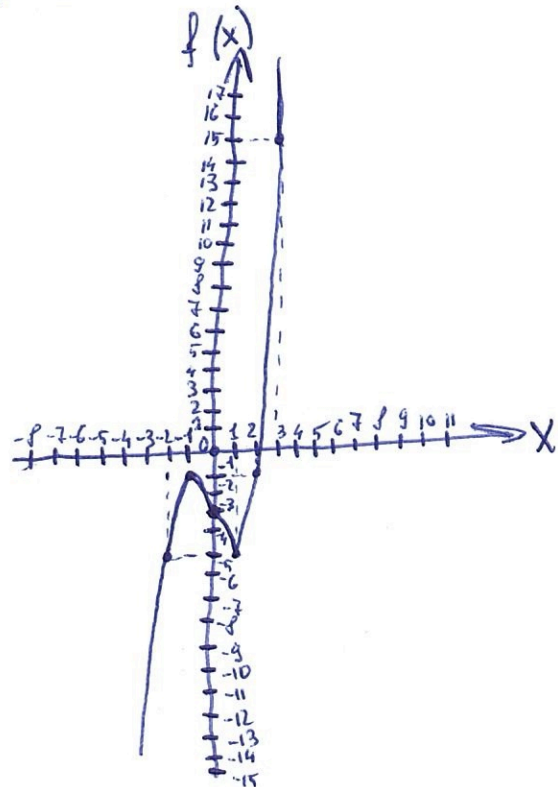
Подставим $x=2,1 \Rightarrow 2,1^3 - 3 \cdot 2,1 - 3 = 9,261 - 6,3 - 3 = 9,261 - (6,3 + 3) = 9,261 - 9,3 < 0$

откуда мы получаем, что при $x = \sqrt[5]{39}$ функция меньше нуля,

и раз на промежутке $[1; +\infty)$ функция возрастает, то

корень ур-ния $t > \sqrt[5]{39}$.

Ч.т.д.



Задача №6

$$abc + 2ab + 2bc + 2ac + 4a + 4b + 4c = 504 \quad | +8$$

$$abc + 2ab + 2bc + 2ac + 4a + 4b + 4c + 8 = 512$$

$$(ab + 2a + 2b + 4)(c + 2) = 2^9$$

$$(a + 2)(b + 2)(c + 2) = 2^9$$

1) Получается, что при перемножении трёх целых чисел $(a, b, c \in \mathbb{Z} \rightarrow \text{тоже целые числа})$ мы получаем 2^9 . Тогда либо все наши три числа положительные, либо ~~все~~ 2 отрицательных и 1 положительное.

2) Если числа a, b, c — положительные, то $a + 2; b + 2; c + 2$ — это двойки в натуральной степени. Заменим $a + 2 = 2^m; b + 2 = 2^n; c + 2 = 2^k \rightarrow 2^m \cdot 2^n \cdot 2^k = 2^9$. Вариантов решения, чтобы $m + n + k = 9$ всего 55.

3) Если 2 числа отрицательные и 1 положительное, то решений тоже 55. Но ведь случаев, где у нас 2 числа отрицательные и 1 положительное может быть 3.

4) Получается, что всего существует:

$$55 + 55 \cdot 3 = 55 \cdot 4 = 220 \text{ решений}$$

Ответ: 220 решений

Код участника:

(заполняется организатором)

M10-239

Задача № 8

Заяц покрасил все натуральные числа от 1 до 100. Волк покрасил n чисел. Заяц в краску так, что произведение любых двух различных красных чисел не было красным. $n_{\max}$ - ?

- 1) Обратим внимание, что $100 = 10^2$. Значит, что $10 \cdot 11 > 100$, откуда получается, что если волк закрасил все числа от 10 включительно, то при их перемножении произведение будет точно больше 100 $\rightarrow$ не будет красным.
- 2) Числа, которые волк не закрасил - от 1 до 9. Их всего 9. Тогда волк закрасил $100 - 9 = 91$ чисел.

Ответ: 91

№2

рассмотрим углы внешние этого n -угольника. так как сумма внешних-
 о и внутренних углов n -угольника при одной вершине равна 180° ,
 а 180 делится на n , то градусная мера ^{каждого} внешнего угла так же делится
 на n . Сумма внешних углов выпуклого n -угольника (как и любого другого
 выпуклого n -угольника) $= 360^\circ$. В то же время, минимальное натуральное
 число, делящееся на n , равно n , значит внешний угол при каждой вершине
 не меньше n° , а ~~тогда~~ сумма всех внешних углов при всех вершинах
 этого n -угольника не меньше чем $n \cdot n^\circ = 36n^\circ$, но $36n^\circ > 360^\circ$
 Противоречие $\Rightarrow$ Ответ: не существует.

№1

пусть V (км/ч) – скорость медленного автобуса, тогда $\frac{5}{4}V$ (км/ч) –
 скорость ~~быстрого~~ быстрого автобуса, пусть x (км/ч) – скорость
 велосипедиста. тогда, получим уравнение $\frac{300}{V+x} = 4$ (т.к. велосипедист встретился
 с медленным автобусом через 4 часа)

$\frac{300}{\frac{5}{4}V+x} = \frac{10}{3}$ (3.20 часа $= \frac{10}{3}$ часа), времени быстрого автобуса
~~и велосипедиста~~ и велосипедиста произошло через ~~то~~ 3 часа 20 мин.
 получим систему:

$$\begin{cases} \frac{300}{\frac{5}{4}V+x} = \frac{10}{3} \\ \frac{300}{V+x} = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4V+4x=300 \\ \frac{25V}{2}+40x=900 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+V=75 \\ 25V+20x=1800 \end{cases} \quad \begin{cases} x+V=75 \\ 5V+4x=360 \end{cases}$$

Код участника:

(заполняется организатором)

М 10-8

$$\begin{cases} 5V + 4x = 360 \\ 4V + 4x = 300 \end{cases}$$

$$V = 60; \quad x = 75 - V = 75 - 60 = 15$$

Ответ: 15 км/ч

№ 6

$$I. abc + 2ab + 2bc + 2ac + 4a + 4b + 4c = 504$$

$$(a+2)(b+2)(c+2) = (ab + 2a + 2b + 4)(c+2) = abc + 2ab + 2ac + 2bc + 4a + 4b + 4c + 8$$

таким образом, данное уравнение переписывается в виде

$$(a+2)(b+2)(c+2) - 8 = 504$$

$$(a+2)(b+2)(c+2) = 512 \quad 512 = 2^9$$

Так как $a, b, c \in \mathbb{Z}$, то $a+2; b+2; c+2$ — целые делители числа 512, возможно отрицательныеII Рассмотрим случай, когда $a+2; b+2; c+2$ — положительные, тогда:

$$a+2 = 2^x, \quad b+2 = 2^y, \quad c+2 = 2^z;$$

$$x+y+z = 9 \quad (1)$$

$$\underbrace{99 \dots 9}_{x \text{ ум.}} \mid \underbrace{00 \dots 0}_{y \text{ ум.}} \mid \underbrace{0 \dots 0}_{z \text{ ум.}}$$

— характерная интерпретация равенства (1)

Всего есть 9 шариков и 2 перекладки, при этом любая комбинация шариков и перекладок кодирует корректное равенство и, соответственно, решение исходного уравнения в целых числах. Такие комбинации будут:

$$C_{9+2}^2 = C_{11}^2 = \frac{11 \cdot 10}{2} = 55$$

2

Код участника:
(заполняется организатором)

M 10-8

III существуют ли такие варианты:

a) $\begin{cases} a+2 > 0 \\ b+2 < 0 \\ c+2 < 0 \end{cases}$

б) $\begin{cases} a+2 < 0 \\ b+2 > 0 \\ c+2 < 0 \end{cases}$

в) $\begin{cases} a+2 < 0 \\ b+2 < 0 \\ c+2 > 0 \end{cases}$

в каждом из этих вариантов аналогичным пункту I образом получим по 55 решений. Всего решений $55 \cdot 4 = 220$

Ответ: 220 решений

№4

Заметим, что 1111111 делится на 239:

проверим:

~~1111111 : 239 = 4649~~

$$\begin{array}{r} 1111111 \overline{) 239} \\ \underline{956} \\ 1551 \\ \underline{1434} \\ 1171 \\ \underline{956} \\ 2151 \\ \underline{2151} \\ 0 \end{array}$$

так как $1111111 : 239$, то на 239 будет делиться любое число $\underbrace{aa \dots a}_{k}$, где $k \in \mathbb{N}$, $a \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

так как $2024 = 7 \cdot 289 + 1$, то

$$\underbrace{22 \dots 2}_{2024} \underbrace{39 \dots 9}_{2024} = \underbrace{2 \dots 2}_{2023} 239 \underbrace{(9 \dots 9)}_{2023} = \underbrace{2 \dots 2}_{2023} \cdot 10^{2026} + 239 \cdot 10^{2023} +$$

$$+ \underbrace{9 \dots 9}_{2023}, \text{ так как } \underbrace{2 \dots 2}_{2023} : 239, \text{ } 239 : 239 \cdot 10^{2023} \text{ и } \underbrace{9 \dots 9}_{2023} : 239$$

то не может делиться на 239, значит $22 \dots 239 \dots 9$ не делится на 239

Ответ: не является.

№3

~~Задание~~ $\begin{cases} a^3 - b^3 - c^3 = 3abc \\ a^2 = 4b + 4c \end{cases}$ Заменим, что если подставить в 1 уравнение $b+c$ вместо a , то получится несогласно:

$$(b+c)^3 - b^3 - c^3 = 3(b+c)b \cdot c$$

$$b^3 + 3b^2c + 3bc^2 + c^3 - b^3 - c^3 = 3b^2c + 3bc^2 \text{ — верно}$$

разделим многочлен $a^3 - b^3 - c^3 - 3abc$ на $a - b - c$:

$$\begin{array}{r} a^3 - 3abc - (b^3 + c^3) \overline{) a - b - c} \\ \underline{- a^3 + a^2b + a^2c} \\ a^2b + a^2c - 3abc - (b^3 + c^3) \\ \underline{- a^2b + a^2c - ab^2 - ac^2 - 2abc} \\ ab^2 + ac^2 - 2abc - (b^3 + c^3) \\ \underline{- ab^2 + ac^2 - 2abc - (b+c)(b^2 - bc + c^2)} \\ 0 \end{array}$$

таким образом первое уравнение переписывается в виде:

$$(a - b - c)(a^2 + b^2 + c^2 + ab + ac - bc) = 0$$

$$1) a^2 + b^2 + c^2 + ab + ac - b = 0 \quad | \cdot 2$$

$$2a^2 + 2b^2 + 2c^2 + 2ab + 2ac - 2b = 0$$

$$(a+b)^2 + (a+c)^2 + (b-c)^2 = 0; \text{ откуда } a+b=0, a+c=0, b-c=0, b=c=-a$$

~~Задание~~ Из второго уравнения получаем:

$$a^2 = -4a - 4a; a^2 + 8a = 0; a(a+8) = 0$$

$$\begin{cases} a=0 \\ b=0 \\ c=0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} a=-8 \\ b=8 \\ c=8 \end{cases}$$

Код участника:

(заполняется организатором)

M10-8

$$2) a-b-c=0; a=b+c, \text{ из уравнения } (b+c)^2 = 4(b+c);$$

$b+c > 0$ (числа по условию N) значит можно разделить обе части на $(b+c)$:

$$b+c=4; \quad a=b+c=4 \quad \text{возможны варианты: } 4=3+1=2+2=1+3$$

$$\begin{cases} a=4 \\ b=3 \\ c=1 \end{cases} > \begin{cases} a=4 \\ b=2 \\ c=2 \end{cases}, \begin{cases} a=4 \\ b=1 \\ c=3 \end{cases} \quad \text{Круговых способов представить 4 в виде 2+натуральных чисел нет:}$$

Ответ: $(0; 0; 0) (-8; 8; 8) (4; 3; 1) (4; 2; 2) (4; 1; 3)$

^{№8}
I. Банк может покрасить в красный цвет все числа от 90 до 8100. Это же произведение 2-х натуральных чисел не меньше чем $90 \cdot 91 = 8190 > 8100$, и любое произведение красных чисел не будет красным. Было покрашено 89 чисел, а покрашено $8100 - 89 = 8011$ чисел.

II. покажем, что мы сможем покрасить больше чем 8011 чисел. Пусть m — мин. красное число $1 < m \leq 88^*$. рассмотрим 2 случая:

1) $m \geq 50$, тогда рассмотрим пары $(1, m) (2, 2m), \dots, (m-1, m(m-1)) (m, m^2) (m+1, m(m+1)), \dots, (90, 90m)$. В этих 89 паре все числа различны, в каждой паре не менее 1 не покрашенное число. Значит не покрашено чисел не менее 89, и покрашено не более $8100 - 89 = 8011$

2) $m \leq 49$, тогда рассмотрим пары $(100; 100m), (101; 101m), \dots, (199; 199m)$. Оба все числа в паре различны. ($100m > 199$) пар 100 и в каждой из этих пар не менее 1 не покрашенное число, значит не покрашено чисел не менее 100, и покрашенное чисел не более чем $8100 - 100 = 8000$, не более чем 8011 таким образом в любом случае мы покрасим не более 8011 чисел, а примерно 8011 красных в п. I.

Ответ: 8011

* если 1 красное число по произведению 1 на наибольшее красное число, будет равно или же (кратность числу) $m \leq 88$ (из предположения мы можем покрасить в красные > 8011 чисел)

Код участника:

(заполняется организатором)

M10-338

Оценка:

N 8

$$\sqrt{8100} = 90$$

числа от 90 до 8100 x могут быть красными, т.к. произведение любых 2 чисел от 90 до 8100 больше чем 8100 следовательно не является красным числом ($90 \cdot 91 > 8100$)

если число < 90 красное, то $x \cdot 90 < 8100$, x - красное число < 90 , число $x \cdot 90$ не может быть красным, значит кол-во красных чисел не увеличится

Пример:

90, 91, ... 8100 покрашены в красный

произведение любых двух различных красных чисел не является красным числом

в красный покрашено $8100 - 90 + 1 = 8011$ чисел

Ответ: 8011

N 2

сумма углов 91-угольника $= (91 - 2) \cdot 180 = 89 \cdot 180^\circ$

угол $< 180^\circ$

пусть в 91-угольнике x углов равно x и y углов между собой n и $91-n$ равных между собой углов

углы $n = x^\circ$, углы $(91-n) = y^\circ$, тогда

$$x n + y (91 - n) = 89 \cdot 180$$

x и y кратны 4

$$\frac{x}{4} n + \frac{y}{4} (91 - n) = 89 \cdot 45$$

$$x < 180, y < 180$$

если $x = y$, то $x = \frac{89 \cdot 180}{91}$, не кратно 4

значит $x \neq y$

тогда $n = 91 - n$

$$n = \frac{91}{2}, \text{ что быть не может}$$

если в 91-угольнике есть равные углы, то будет выполняться

$$x n + x_1 n_1 + x_2 n_2 + \dots = 89 \cdot 180, \text{ где } x_i - \text{целая часть угла, } n_i - \text{кол-во одинаковых углов}$$

$$x_1 \neq x_2 \neq \dots, x_1 \neq x_2 \neq \dots$$

$$\text{значит } n + n_1 + n_2 + \dots = \frac{89 \cdot 45 \cdot 91}{\text{кол-во } n_i}$$

тогда такое возможно только при всех $n_i = 1$, значит равных углов нет

$$4 + 8 + 12 + \dots + 180 = 180$$

$$d_n = 180, n = 91, d = 4$$

$$d_1 = d_n - d(n-1) = 180 - 90 \cdot 4 = -180$$

последний угол должен быть отрицательным, что противоречит. Тогда такого 91-угольника нет

Ответ: нет

Код участника:

(заполняется организатором)

M10-338

№4

число $\underbrace{2\dots2}_{2024} \underbrace{34\dots4}_{2024}$ не является простым т.к. оканчивается на 4, следовательно делится на 2

Ответ: нет

№5

$$abc + 2ab + 2bc + 2ac + 4a + 4b + 4c = 504$$

$$a(bc + 2b + 2c + 4) + 2(bc + 2b + 2c + 4) = 512$$

$$(a+2)(bc + 2b + 2c + 4) = 512$$

$$(a+2)(b+2)(c+2) = 2^9$$

$$\text{пусть } a+2=d, b+2=e, c+2=f$$

$$def = 2^9$$

т.к. a, b, c - целые, то числа $a+2, b+2, c+2$ имеют вид 2^n , где n - целое число от 0 до 9

пусть $a+2=2^d, b+2=2^e, c+2=2^f$, тогда

$$2^d \cdot 2^e \cdot 2^f = 2^9$$

$$2^{d+e+f} = 2^9$$

$$d+e+f=9$$

при $d=0$, то $e+f=9$, для каждого соответствует единственное значение f , 10 решений

при $d=1$, 9 решений

при $d=9$, 1 решение

$$\text{всего решений } 1+2+\dots+10 = \frac{10 \cdot 11}{2} = 55$$

Ответ: 55

№7

$$x^3 - 3x - 3 = 0$$

$$y = x^3 - 3x - 3 \text{ возрастает}$$

$$\text{при } x=3, 3^3 - 3 \cdot 3 - 3 = 15 > 0, \text{ значит } t < 3$$

$$\text{при } x=2, 2^3 - 3 \cdot 2 - 3 = -1 < 0, \text{ значит } t > 2 \quad \text{т.к. } y = x^3 - 3x - 3 \text{ возрастает}$$

$$2^5 = 32$$

$$32 < \sqrt[5]{39}, \text{ значит } \sqrt[5]{39} > 2$$

$$32 < 39$$

$$2,1^5 = 40,84101$$

$$40,84101 > 39, \text{ значит } \sqrt[5]{39} < 2,1$$

$$\text{при } x=2,1, 2,1^3 - 3 \cdot 2,1 - 3 = 9,261 - 9,3 = -0,039, \text{ значит } t > 2,1$$

$$\sqrt[5]{39} < 2,1 < t$$

$$\text{значит } t > \sqrt[5]{39}$$

Код участника:

(заполняется организатором)

M10-338

№1

1 автобус встретился с велосипедистом через $(12\frac{1}{3} - 9) = \frac{10}{3}$ часов после выезда
 2 автобус встретился с велосипедистом через $(13 - 9) = 4$ часа после начала пути.

пусть скорость велосипедиста x км/ч, скорость 1 автобуса y км/ч, тогда скорость 2 автобуса $\frac{4}{5}y$ км/ч

$$\begin{cases} \frac{300}{y+x} = \frac{10}{3} \\ \frac{300}{\frac{4}{5}y+x} = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{300}{y+x} = \frac{10}{3} \\ \frac{300}{\frac{4}{5}y+x} = 4 \end{cases}$$

откуда $x = 15$, $y = 75$.

значит скорость велосипедиста 15 км/ч

Ответ: 15

№3

$$\begin{cases} a^3 - b^3 - c^3 = 3abc \\ a^2 = 4b + 4c \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^3 - b^3 - c^3 = 3abc \\ a^2 = 4b + 4c \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a-b-c)(a^2+b^2+c^2+ab+ac-bc)=0 \\ a^2=4b+4c \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2=4b+4c \\ a^2=4b+4c \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=b+c \\ a^2=4b+4c \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=b+c \\ a^2+b^2+c^2+ab+ac-bc=0 \end{cases}$$

$$a^2=4b+4c$$

$$a^2+b^2+c^2+ab+ac-bc=0$$

$$(b-c)^2 + a(b+c+a) + bc = 0 \text{ — не имеет решений в натуральных числах}$$

тогда

$$\begin{cases} a=b+c \\ a^2=4b+4c \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=b+c \\ a^2=4b+4c \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=b+c \\ a^2=4b+4c \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=0 \text{ — не является натуральным} \\ a=4 \end{cases}$$

$$b+c=4$$

$$7=4$$

ответ: $(4; 1; 3), (4; 2; 2), (4; 3; 1)$

Бланк ответа

Всероссийская олимпиада школьников «Миссия выполнима. Твоё призвание – финансист!»

Код участника:
(заполняется организатором)

M10-338

Бланк ответа

Всероссийская олимпиада школьников «Миссия выполнима. Твоё призвание – финансист!»

Код участника:

(заполняется организатором)

M10-338

№2. 91 угол.

т.к. многоугольник - выпуклый, то каждый угол $< 180^\circ$. Предположим, что такой угол - угловой камень. Тогда его углы:

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, < 180^\circ \Rightarrow$$

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n < 45^\circ \Rightarrow$$

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \leq 44^\circ.$$

Сумма углов 91-угольника: $(91-2) \cdot 180^\circ =$
 $= 89 \cdot 180 \Rightarrow \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 89 \cdot 180 \Rightarrow$
 $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 89 \cdot 180 = 4005.$

Но! $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \leq 44^\circ \Rightarrow \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n \leq 44 \cdot 91.$

Итого

$4005 = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n \leq 4004$ - Противоречие

Ответ:

Нет, не существует.

Код участника:
(заполняется организатором)

М 10-15

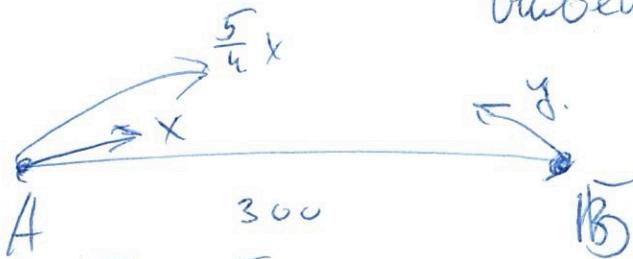
н 4. Число $A = \underbrace{2 \dots 2}_{2024} 3 \underbrace{4 \dots 4}_{2024}$

Третье число – число, которое делится на себя и на 2. Т.е. $A \pmod{10} = 4 : 2$, то $A : 2 =$

у A – простые делители: $A, 2, 1$. $\Rightarrow A$ – составное

выбери: не, не является.

н 1.



Пусть $v_1 = \frac{5}{4}x$ – скорость 1-го автомобиля

Пусть $v_2 = x$ – скорость 2-го автомобиля

Пусть $y = v_3$ – скорость велос.

Тогда за $\frac{10}{3}$ часа 1-ый автомобиль и велосипед в сумме проехали 300 км, т.е.

$$\frac{5}{4} \cdot x \cdot \frac{10}{3} + \frac{10}{3} \cdot y = 300.$$

А. за t часа 2-ой автомобиль и велосипед в сумме проехали 300 км, т.е.:

$$4x + 4y = 300$$

Итого:

$$\begin{cases} \frac{5x}{4} \cdot \frac{10}{3} + \frac{10}{3} y = 300 \\ 4x + 4y = 300 \end{cases}$$

Код участника:
(заполняется организатором)

M10-15

$$\begin{cases} \frac{5x}{12} + \frac{y}{3} = 30 \\ 4x + 4y = 300 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x + 4y = 360 \\ 4x + 4y = 300 \end{cases} \quad | -$$

$$x = 60 \Rightarrow y = 15.$$

Смещение: 15 км/ч.

$$\text{н.з. } \begin{cases} a^3 - b^3 - c^3 = 3abc \\ a^2 = 4b + 4c \end{cases}$$

$$a, b, c \in \mathbb{N}.$$

$$\text{т.ч. } a^2 = 4(b+c), \text{ т.е. } a^2 : 4 \Rightarrow a : 2$$

$$1. a = 2:$$

$$\begin{cases} 8 - b^3 - c^3 = 6bc \\ 4 = 4(b+c) \end{cases}$$

$$\Rightarrow b+c=1 \text{ — противоречие, т.к. } b \geq 1, c \geq 1.$$

$$2. a = 4:$$

$$\begin{cases} 64 - b^3 - c^3 = 12bc \\ 16 = 4(b+c) \end{cases}$$

$$b+c=4.$$

$$1) (b; c) = (1; 3) \text{ или } (3; 1)$$

$$2) (b; c) = (2; 2)$$

$$1) 64 - 1 - 27 - 36 = 0 \text{ — верно, т.к.}$$

$$(a; b; c) = (4; 3; 1), (4; 1; 3)$$

$$2) 64 - 8 - 8 - 12 \cdot 4 = 0 \text{ — верно.}$$

$$\Rightarrow (a; b; c) = (4; 2; 2).$$

3. $a = 6$:

$$\begin{cases} 216 - b^3 - c^3 = 18bc \\ 9 = b+c \end{cases}$$

$\Rightarrow$ подстановка только $(b; c) = (5; 4), (4; 5)$.
т.е. в этом случае имеем $b \neq c$.

т.е. $a^3 - b^3 \leq 0$ ~~и~~ $a^3 - b^3 - c^3 < 0$ - противоречие.

$$216 - b^3 - c^3 = 1$$

$$216 - 125 - 64 = 18 \cdot 5 \cdot 4$$

$$216 - 125 - 64 = 20 \cdot 18 < 0 \text{ - неверно.}$$

4. $a = 8$:

$$\begin{cases} 512 - b^3 - c^3 = 24bc \\ 16 = b+c \end{cases}$$

- аналогично - противоречие

т.е. при $a \geq 8$ или $a \leq b$, или $a \leq c$ -

$a^3 - b^3 \leq 0$ и $a^3 - c^3 < 0$ - противоречие.

$$\text{Итак: } (a; b; c) = (4; 3; 1), (4; 1; 3), (4; 2; 2)$$

$$5. \quad x^3 - 3x - 3 = 0.$$

$$f(x) = x^3 - 3x - 3 = 0, \quad f(t) = t^3 - 3t - 3 = 0.$$

$$D-76: \quad t > \sqrt[5]{39}.$$

Исследуем $f(x)$:

$$f'(x) = 3x^2 - 3.$$

Найдем точки минимума и максимума
(покажем).

Код участника:

(заполняется организатором)

M10-15

$$3x^2 - 3 > 0 \Rightarrow x^2 - 1 > 0$$

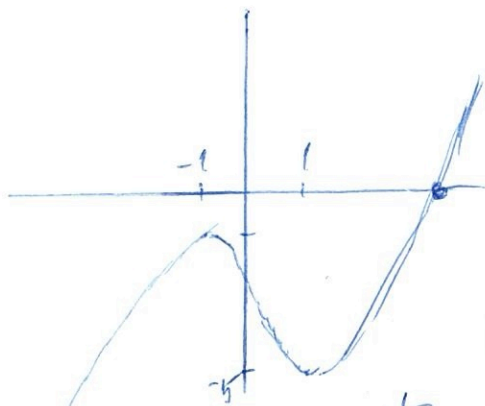
т.е. при $x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$ $f(x)$ - растёт,
при $x \in (-1; 1)$ - $f(x)$ - убывает.

т.е. $\text{Min} = -1$, т. $\text{Max} = 1$.

$$f(-1) = -1 + 3 - 3 = -1.$$

$$f(1) = 1 - 3 - 3 = -5.$$

т.е. график $f(x)$ примерно такой:



т.е., у $f(x)$ есть
единственный корень (корень)

Рассмотрим $f(3g^{\frac{1}{3}})$:

$$f(3g^{\frac{1}{3}}) = 3g^{\frac{3}{3}} - 3 \cdot 3g^{\frac{2}{3}} - 3 \cdot 3g^{\frac{1}{3}} - 3 < 0$$

Воспользуемся непрерывностью,

(который разгласил на олимпиаде!!!!)

и получим, что $f(3g^{\frac{1}{3}}) < 0$. Значит

Пусть $f(x_1) = 0$. $\Rightarrow x_1 > 3g^{\frac{1}{3}}$

Значит, $3g^{\frac{1}{3}}$ меньше корня уравнения.

Код участника:
(заполняется организатором)

M10-15

$$нб. \quad abc + 2ab + 2bc + 2ac + 4a + 4b + 4c = 504.$$

$$a, b, c \in \mathbb{Z}.$$

Заметим, что: $(a+2)/(b+2)/(c+2) =$

$$\begin{aligned} &= (ab + 2b + 2a + 4)/(c+2) = abc + 2bc + 2ac + 4c + \\ &+ 2ab + 4b + 4a + 8 = abc + 2bc + 2ac + 2ab + \\ &+ 4a + 4b + 4c. \quad \text{Тогда:} \end{aligned}$$

$$abc + 2ab + 2bc + 2ac + 4a + 4b + 4c = 504 \quad | + 8 |$$

$$(a+2)/(b+2)/(c+2) = 512 = 2^9$$

т.е. $(a+2), (b+2), (c+2)$ – степени двойки;
Рассчитаем возможные перестановки:

$$2^9 : 1 \cdot 1 = 3$$

$$2^8 : 2 \cdot 1 = 6$$

$$2^7 : 2 \cdot 2 = 3$$

$$2^6 : 2^3 \cdot 1 = 6$$

$$2^6 : 2^2 \cdot 2 = 6$$

$$2^5 : 2^3 \cdot 2 = 6$$

$$2^5 : 2^2 \cdot 2^2 = 3$$

$$2^5 : 2^4 \cdot 1 = 6$$

$$2^4 : 2^4 \cdot 2 = 3$$

$$2^4 : 2^3 \cdot 2^2 = 6$$

Всего случаев учтено.

Итого:

$$\begin{aligned} &3 + 6 + 3 + 6 + 6 + 6 + 3 + 6 + 3 + 6 = \\ &= 3 \cdot 4 + 6 \cdot 6 = 36 + 12 = 48. \end{aligned}$$

Сумма: 48

Код участника:

(заполняется организатором)

M10-15

№ 5.

Дано: $AB \parallel CD$, $AD = AB + CD$ $\angle CHB = 30^\circ$, $\angle DHC = 10^\circ$ Найти: $\angle ADB$

Решение:

Отложим т. F

такую, что

$$AF = AB, FD = DC$$

т.е. по усл. $AF = AB + CD$, тогда $\triangle ABF$ — р/б, и

$$\triangle FDC — р/б. \Rightarrow \angle ABF = \angle AFB = 40^\circ \Rightarrow$$

$$\angle ABM = \angle BMC = 70^\circ \text{ (накрест. у./} \Rightarrow \triangle MDC — р/б.$$

$\Rightarrow MD = FD = DC = b$. Также $\angle BFC = 90^\circ$ (медиана
равнобедренного треугольника) $\Rightarrow \angle FCM = 20^\circ$, $\angle CM = 10^\circ \Rightarrow$

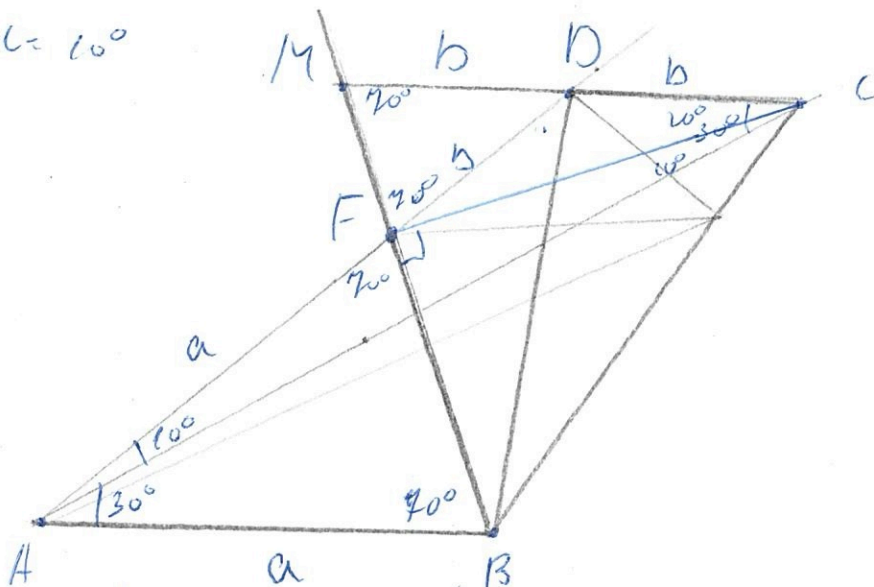
$$\triangle FCL — р/б. (\angle FCL = \angle FCL = 10^\circ) \Rightarrow AF = FC = a$$

Аналогично строим $\triangle FDB \Rightarrow FD = FB = b$.

$$\Rightarrow \triangle BFD — р/б \Rightarrow \angle BMD = \angle MDC + \angle FDB + \angle FCB = \angle MBF = 40^\circ$$

$$\Rightarrow 70 + 40 + 2 + 2 = 180 \Rightarrow \angle = 35^\circ = \angle ADB$$

Ответ: 35°



Выход 12:07 Вход 12:11

Бланк ответа

Всероссийская олимпиада школьников «Миссия выполнима. Твое призвание – финансист!»

Код участника:

М10-303

(заполняется организатором)

$$\textcircled{3} \cdot \begin{cases} a^3 - b^3 - c^3 - 3abc = 0 \\ a^2 = 4b + 4c \end{cases}$$

Заметим, что $a^3 - b^3 - c^3 - 3abc = (a-b-c)(a^2 + b^2 + c^2 + ab + ac - bc) = 0$.
Тогда есть два варианта:

$$1). a = b + c$$

$$\text{Тогда } (b+c)^2 = 4(b+c)$$

$$(b+c)(b+c-4) = 0$$

$$\text{Т.к. } a, b, c \in \mathbb{N}, \text{ то } a, b, c \geq 1 \Rightarrow b+c \geq 2 \Rightarrow b+c-4 = 0 \Rightarrow a = 4$$

Т.к. $b, c \in \mathbb{N}$, то просто переберём варианты,

$$\text{Т.к. при } b=1 \quad b+c \geq 5;$$

$$a). b=1$$

$$c=3$$

$$a=4$$

подходит

Проверим:

$$\begin{cases} 64 - 1 - 27 - 36 = 0 \\ 16 = 4 + 12 \end{cases}$$

$$5). b=2$$

$$c=2$$

$$a=4$$

проверим:

$$\begin{cases} 64 - 8 - 8 - 3 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 2 = 0 \\ 16 = 8 + 8 \end{cases}$$

$$6). b=3$$

$$c=1$$

$$a=4$$

$$\begin{cases} 64 - 27 - 1 - 36 = 0 \\ 16 = 12 + 4 \end{cases}$$

при следующих $a \geq 5$, $a \neq 4$!

Значит, при $a = b+c$ это все решения

$$2). a^2 + b^2 + c^2 + ab + ac - bc = 0 \quad 1.2$$

$$\underbrace{(a+b)^2}_{\geq 0} + \underbrace{(a+c)^2}_{\geq 0} + \underbrace{(b-c)^2}_{\geq 0} = 0 \Rightarrow \begin{cases} a+b=0 \Rightarrow a=-b \\ a+c=0 \Rightarrow a=-c \\ b-c=0 \Rightarrow b=c \end{cases}$$

Тогда здесь натуральных решений нет

$$\text{Ответ: } (a=4, b=1, c=3); (a=4, b=2, c=2); (a=4, b=3, c=1)$$

~~2). Т.к. все углы $\leq 180^\circ$ и сумма углов $\leq 180^\circ$, то все углы $\leq 180^\circ$. Пусть такой существует 31-угольник~~

31-угольника

~~Сумма углов 31-угольника $\leq 180^\circ$~~
Т.к. все углы меньше 180° , а также они кратны 4, то все углы меньше 176° . Тогда вся сумма максимум $176 \cdot 31 = 16076$, но сумма всех углов ≥ 16020 , но $16020 > 16076$, значит, такое невозможно.

Ответ: нет

6)

$$abc + 2ab + 2ac + 2bc + 4a + 4b + 4c = 504 \quad | +8$$

$$abc + 2ab + 2ac + 2bc + 4a + 4b + 4c + 8 = 512$$

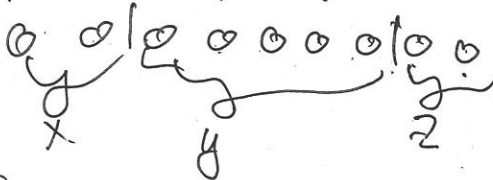
$$(a+2)(b+2)(c+2) = 512$$

Пк $a, b, c \in \mathbb{Z}$, то $(a+2), (b+2), (c+2)$ могут быть любыми целыми числами, значит, мы должны представить 512 в виде 3 чисел

$512 = 2^9 \Rightarrow$ всего у 512 10 катур. дайте, при этом ^{приведения} все делители являются двойки, значит, если мы опустим вот этот, то числа будут быть отрицательными, $512 = 2^3 \cdot 2^4 \cdot 2^2$, $x, y, z \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

$$\text{т.е. } 3 = x + y + z$$

Приведем кривизну шаров и перегородок - 9 шаров, 2 перегородки



При этом перегородки могут стоять так же! Тогда всего способов расставить перегородки - C_{11}^2

т.к. числа могут быть отрицательными, то есть еще C_3^2 решения (т.к. из 3 уже расставленных чисел мы должны выбрать 2 отрицательных (если отрицательных не 2 и не 0, то все произведение не 0))

Тогда всего способов: $C_{11}^2 + C_{11}^2 \cdot C_3^2 - C_{11}^2 \cdot 1 = 220$ (повторов нет)

Ответ: 220

$$P(x) = x^3 - 3x - 3 \quad P(1) = 0$$

Заметим, что $2,1^5 = 40,84701739 \Rightarrow 2,1 > \sqrt[5]{39}$

Подставим 2,1 в $P(x)$:

$$P(2,1) = 2,1^3 - 3 \cdot 2,1 - 3 = -0,039 < 0$$

$$P(3) = 3^3 - 3 \cdot 3 - 3 = 15$$

Заметим, что $2^5 = 32 < 39 \Rightarrow 2 < \sqrt[5]{39}$

Заметим, что $P'(x) = 3x^2 - 3$

$$3x^2 - 3 < 0$$

$(x-1)(x+1) < 0 \Rightarrow x \in (-1, 1)$, т.е. $P(x)$ убывает при $x \in (-1, 1)$

т.к. $P(2) < P(3)$, $P(2,1) < 0$, $P(3) > 0$



т.е.

при $x \in [2, 3]$ $P(x)$ монотонно ↑

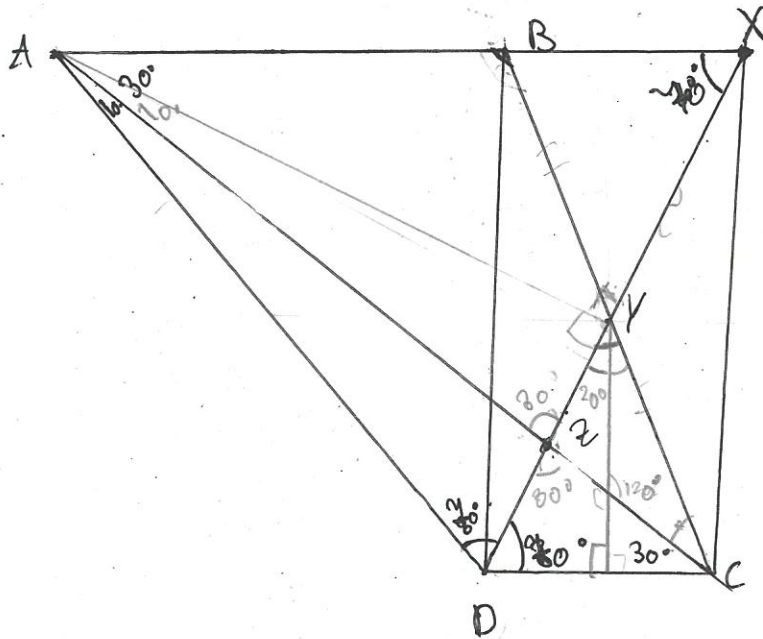
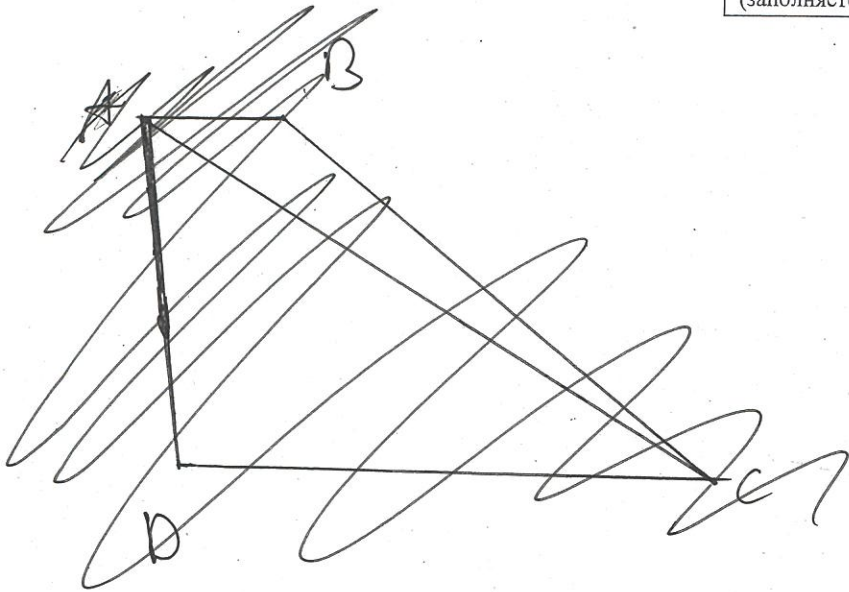
Бланк ответа

Всероссийская олимпиада школьников «Миссия выполнима. Твоё призвание – финансист!»

Код участника:

14-10-303

(заполняется организатором)



Код участника:

М10-303

(заполняется организатором)

④

2222...39...9
4048 ²⁰²¹ 24 2021 21 0

Таблица степеней 10-ок mod 13:

$$\left. \begin{array}{l} 10^0 - 1 \\ 10^1 - 10 \\ 10^2 - 9 \\ 10^3 - 12 \\ 10^4 - 3 \\ 10^5 - 4 \\ 10^6 - 1 \end{array} \right\} 6 \text{ (цикл из 6)}$$

Заметим, что $10^k \not\equiv 1 \pmod{13}$ по mod 13. То же самое, что и $10^m \not\equiv 1 \pmod{13}$, где $k \equiv m$.

Тогда запишем наше число mod 13:

$$\begin{aligned} & 399 \cdot 10^{2022} + 9 \cdot (10^0 + 10^1 + 10^2 + 10^3 + 10^4 + 10^5) \cdot 337 + 2 \cdot 10^{2025} \cdot (10^0 + 10^1 + 10^2 + 10^3 + 10^4 + 10^5) \cdot 337 + \\ & + 22 \cdot 10^{2022} \cdot 10^{2025} \equiv 399 \cdot 1 + 0 + 2 \cdot 10^{2025} \cdot 0 + 22 \cdot 1 \cdot 12 \equiv 663 \pmod{13} \\ & \equiv 51 \cdot 13 \equiv 0 \pmod{13} \end{aligned}$$

здесь я разбил 3999...9 на группы по 6, так как 9 на 6 делится, а 337 + 1 = 338 делится на 13, равносильно 0 mod 13.

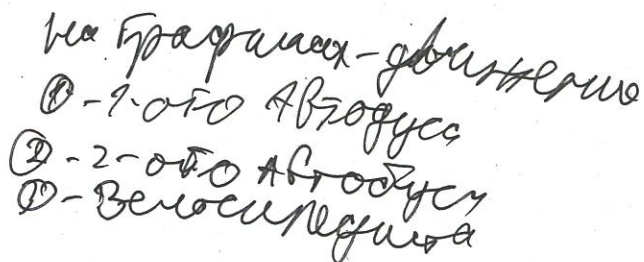
Тогда наше число делится на себя, 1 и 13 $\Rightarrow$ оно же простое

Ответ: нет

или на след. др

№ 10-303

(заполняется организатором)



Order: $\frac{15 \times 4}{4}$

В-точка внутри $\odot$ и $\odot$

т.к. члороз ② 8 $\frac{5}{9}$ р. Гальн 1,2

$$(\angle X - \text{осциллирует}) \subset \exists f(x) = g(x) \text{ в } \mathbb{R}^B)$$
$$\square \quad Z \cdot Y = 4 \times \Rightarrow B.R. = Z \cdot Y \cdot K = \frac{29}{5} \times$$

$\Delta PQR \sim \Delta PAC$; $k = \frac{PR}{AP} = \frac{29}{5} \times \frac{29}{25} = \frac{29}{25}$

~~Tafel~~ ~~Rc~~ ~~Rc~~ ~~Rc~~ $\frac{K_C}{R_C} = \frac{R_C + \frac{2}{3}}{R_C} = \frac{25}{24}$

~~24RC + 16 = 25RC~~
~~16 = RC~~

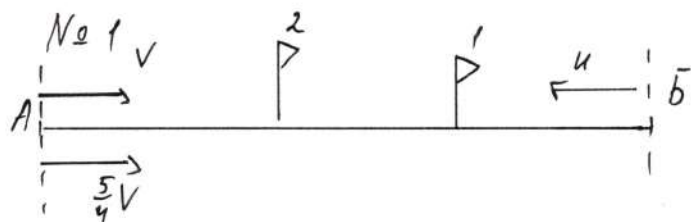
Länge für Räder b. 10m.

Тоді всі виграє виграє $RC = 16$
 $XY + YR + RC = 10 + 2 + 4 = 16$ (2)

Тогда скорость в км/ч $= \frac{300 \cdot 3}{62} = \frac{900 - 150}{62} = \frac{750}{62} \approx 12.1$ (км/ч)

Код участника: **М10-104**

(заполняется организатором)



1 - место встречи

 u - скорость велосипедиста V - скорость медленного автобуса

$$S = 300 \text{ км}$$

$$t_0 = 9:00$$

$$\Rightarrow T_1 = t_1 - t_0$$

$$T_1 = \frac{10}{3} \text{ ч}$$

$$t_1 = 12:20$$

$$\Rightarrow T_2 = t_2 - t_1$$

$$T_2 = 4 \text{ ч}$$

$$t_2 = 13:00$$

$$\begin{cases} T_1 = \frac{S}{\frac{5}{4}V + u} \\ T_2 = \frac{S}{V + u} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T_1 \cdot \frac{5}{4}V + T_1 u = S \\ T_2 V + T_2 u = S \end{cases}$$

$$T_1 \cdot \frac{5}{4}V + T_1 u = T_2 V + T_2 u$$

$$V \left(\frac{5}{4}T_1 - T_2 \right) = u (T_2 - T_1)$$

$$V = u \cdot \frac{T_2 - T_1}{\frac{5}{4}T_1 - T_2} \Leftrightarrow V = u \cdot \frac{4(T_2 - T_1)}{5T_1 - 4T_2}$$

$$S = u \cdot \frac{5}{4}T_1 \cdot \frac{T_2 - T_1}{\frac{5}{4}T_1 - T_2} + T_1 u = u \cdot \frac{5T_1(T_2 - T_1)}{5T_1 - 4T_2} + T_1 u$$

$$S = u T_1 \left(\frac{5T_2 - 5T_1}{5T_1 - 4T_2} + 1 \right) = u T_1 \left(\frac{5T_2 - 5T_1 + 5T_1 - 4T_2}{5T_1 - 4T_2} \right) = \frac{u T_1 T_2}{5T_1 - 4T_2}$$

$$u = \frac{S(5T_1 - 4T_2)}{T_1 T_2}$$

$$u = 15 \text{ км/ч}$$

$$\text{Ответ: } u = 15 \text{ км/ч}$$

№ 2

$$n = 91$$

Найдем сумму всех углов

$$\Sigma = (n-2) \cdot 180^\circ$$

$$\Sigma = 16020$$

см. продолжение на стр. 2

стр. 1 из 6

Тогда в среднем каждый угол будет по $\frac{16020^\circ}{91} \approx 176,^\circ \dots$

$$91 \cdot 176^\circ = 16016^\circ$$

$$176 : 4 \quad | \quad 176 = 4 \cdot 44$$

$16020^\circ - 16016^\circ = 4^\circ \Rightarrow$ Надо добавить ещё 4° к углам кратным 4 будет число 180, но угол в 180° не может быть в выпуклом многоугольнике $\Rightarrow$ нет, не существует.

Ответ: нет, не существует

№3

$$\begin{cases} a^3 - b^3 - c^3 = 3abc \\ a^2 = 4b + 4c \Rightarrow b + c = \frac{a^2}{4} \end{cases}; \quad a = 2\sqrt{b+c}$$

$$a^3 - (b^3 + c^3) = 3abc$$

$$b^3 + c^3 = (b+c)(b^2 - bc + c^2)$$

$$a^3 - 3abc = b^3 + c^3$$

$$a(a^2 - 3bc) = (b+c)(b^2 - bc + c^2)$$

$$2 \cdot \sqrt{b+c} \cdot (4b + 4c - 3bc) = (b+c)(b^2 - bc + c^2)$$

$$\frac{2(4b + 4c - 3bc)}{b^2 - bc + c^2} = \sqrt{b+c} \quad |^2$$

$$\text{III.к. } (a; b; c) \in \mathbb{N} \Rightarrow b+c > 0$$

$$\frac{64b^2 + 64c^2 + 128bc + 36b^2c^2 - 96b^2c - 96bc^2}{b^4 - 2b^3c + b^2c^2 + 2b^2c^2 - 2bc^3 + c^4} = b+c$$

Решением этого уравнения будет $b=c=2$, тогда

$$a=4$$

При проверке $b=c=2$; $a=4$ в системе образуются верные равенства

Ответ: $a=4$

$b=c=2$

№ 6

$$abc + 2ab + 2bc + 2ac + 4a + 4b + 4c = 504$$

$$abc + ab = ab(c+1)$$

$$2bc + 2b = 2b(c+1)$$

$$2ac + 2a = 2a(c+1)$$

$$4c + 4 = 4(c+1)$$

$$(c+1)(ab + 2a + 2b + 4) - 4 + (ab + 2a + 2b + 4) - 4 = 504$$

$$(c+1+1)(ab + 2a + 2b + 4) = 512$$

$$(c+2)(a+2)(b+2) = 2^9$$

Рассмотрим только положительные значения каждой скобки

$$x = a+2$$

$$y = b+2$$

$$z = c+2$$

$$xyz = 2^9 \Rightarrow \begin{cases} x = 2^n \\ y = 2^m \\ z = 2^{9-n-m} \end{cases}$$

При том, что каждая степень ≥ 0
иначе значения a, b, c будут
отрицательными

$$n \geq 0$$

$$m \geq 0$$

$$9-n-m \geq 0 \Rightarrow n+m \leq 9 \Rightarrow m \leq 9-n$$

При $n=0$ $m - 10$ значений m Всего 55 значений, но это только

$n=1$ $m - 9$ значений m при $(x; y; z) \geq 0$

...

$n=9$ $m - 1$ значений m

Учитывая отрицательные числа, получим еще 3 группы значений по 55 чисел в каждой

$$55 \cdot 4 = 220 \text{ вариантов}$$

Ответ: 220

Код участника: МРД-104
(заполняется организатором)

№ 4

$$\underbrace{2 \dots 2}_{2024} \underbrace{34 \dots 4}_{2024}$$

III. и. число оканчивается на 4 $\Rightarrow$ оно четное и как минимум кратно 2

Найдя сумму всех цифр, заметим, что она кратна 3 $\Rightarrow$ исходное число так же кратно 3

$\&$ значит оно имеет больше 2-ух делителей $\Rightarrow$ оно составное

Ответ: нет, оно составное

№ 7

$$x^3 - 3x - 3 = 0 \quad \rightarrow \quad f(x) = x^3 - 3x - 3$$

$t > \sqrt[5]{39}$ — надо доказать

$$2 < \sqrt[5]{39} < 2,1$$

$$32 < 39 < 40,84101$$

Тогда рассмотрим значения x близкие к $\sqrt[5]{39}$:

$$x = 2$$

$$f(x) = -1$$

$$x = 2,1$$

$$f(x) = -0,039$$

$$x = 2,2$$

$$f(x) = 1,048$$

Можно заметить, что $f(x) = 0$ лежит в

интервале $x \in (2; 2,1)$, а так же, что

на участке $x > 2$, $f(x)$ — возрастающая

Это можно подтвердить тем, что

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

$$f'(x) = 0$$

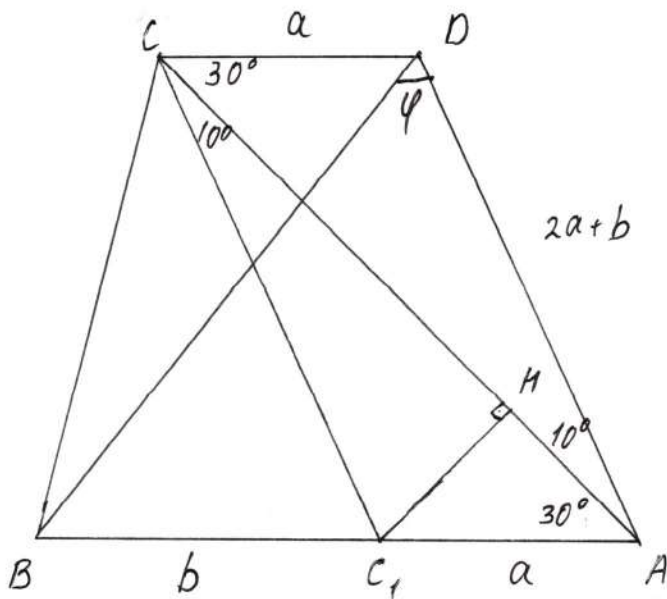
$$x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \quad \text{— точки перегиба}$$

III. к. $f(x)$ — $\uparrow$, и при $x = 2,1$ $f(x) = -0,039 \Rightarrow f(x) = 0$

будет достигаться при $x > 2,1$, где x — будет решением $\Rightarrow x = t$

$$\left. \begin{array}{l} t > 2,1 \\ \sqrt[5]{39} < 2,1 \end{array} \right\} \Rightarrow t > \sqrt[5]{39} \quad \text{ч. т. г.}$$

№ 5



Дано: $ABCD$ - трап. ($AB \parallel CD$)

$$\angle DAC = 10^\circ$$

$$\angle CAB = 30^\circ$$

$$AB + CD = AD$$

Найти: $\angle ADB$

Проведем $CC_1 \parallel AD$

$CC_1 \parallel AD$
 $CD \parallel AB$ } $\Rightarrow ADCC_1$ - парал.

$$CD = C_1A = a \quad CC_1 = AD = 2a + b$$

$$BC_1 = b$$

Проведем AC

$$\begin{aligned} \angle C_1AC &= \angle ACD = 30^\circ \\ \angle DAC &= \angle ACC_1 = 10^\circ \end{aligned} \quad (\text{накрест лежащ.})$$

Опустим перпендикуляр к AC (C_1H)

$$\begin{aligned} AH &= a \cdot \cos 30^\circ \\ C_1H &= a \cdot \sin 30^\circ \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} AH &= a \cdot \cos 30^\circ \\ C_1H &= a \cdot \sin 30^\circ \end{aligned}} \right\} \text{ из } \triangle C_1HA$$

$$\begin{aligned} C_1H &= (2a+b) \sin 10^\circ \\ CH &= (2a+b) \cos 10^\circ \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} C_1H &= (2a+b) \sin 10^\circ \\ CH &= (2a+b) \cos 10^\circ \end{aligned}} \right\} \text{ из } \triangle C_1HC$$

$$a \sin 30^\circ = 2a \sin 10^\circ + b \sin 10^\circ$$

$$b \sin 10^\circ = a (\sin 30^\circ - 2 \sin 10^\circ)$$

$$a = 1,137158 b$$

$\triangle BDA$, т. косинусов

$$BD^2 = (a+b)^2 + (2a+b)^2 - 2(a+b)(2a+b) \cdot \cos 40^\circ$$

по т. синусов

$$\frac{BD}{\sin 40^\circ} = \frac{AB}{\sin \varphi}$$

Код участника: M10-104
(заполняется организатором)

$$\sin \varphi = \frac{AB}{BD} \cdot \sin 40^\circ$$

$$\sin \varphi = \frac{(a+b) \cdot \sin 40^\circ}{\sqrt{(a+b)^2 + (2a+b)^2 - 2(a+b)(2a+b) \cdot \cos 40^\circ}}$$

$$\sin \varphi = \sin 40^\circ \Rightarrow \varphi = 40^\circ$$

Ответ: 40°

№1. Пусть автобус с большей скоростью - A_1 , а другой автобус A_2 , велосипедист - B ;

Тогда их скорости соответственно $v_{A_1}; v_{A_2}; v_B$;

По условию: $v_{A_1} = \frac{5}{4} v_{A_2}$; A_1 и B встретились через $12\frac{1}{3} - 9 = 3\frac{1}{3}$ часа,

A_2 и B встретились через $13 - 9 = 4$ часа, тогда

$$\begin{cases} (v_{A_1} + v_B) \cdot 3\frac{1}{3} = 300 \\ (v_{A_2} + v_B) \cdot 4 = 300 \\ v_{A_1} = \frac{5}{4} v_{A_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (\frac{5}{4} v_{A_2} + v_B) \cdot \frac{10}{3} = (v_{A_2} + v_B) \cdot 4 \quad | \cdot 6 \\ 25 v_{A_2} + 20 v_B = 24 v_{A_2} + 24 v_B \\ v_{A_2} = 4 v_B \end{cases}$$

Тогда $(4 v_B + v_B) \cdot 4 = 300$

$$v_B \cdot 20 = 300$$

$$v_B = 15 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$$

Ответ: $15 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$

№2. ~~Назовем~~ Предположим да. Назовем $4\alpha_i$ -тый угол данного 91 -угольника. Т.к. он должен быть выпуклым, то $4\alpha_i < 180^\circ$ ($\alpha_i \in \mathbb{N}$, т.к. $4\alpha_i$ - кратно 4)

$\alpha_i < 45^\circ$, т.е. $\alpha_i \leq 44^\circ$; воспользуемся формулой суммы углов n -угольника

$$\sum_{i=1}^{91} 4\alpha_i = 180^\circ (91 - 2) = 180^\circ \cdot 89$$

$$\sum_{i=1}^{91} \alpha_i = 45 \cdot 89; \text{ т.к. } \alpha_i \leq 44^\circ, \text{ то } \sum_{i=1}^{91} \alpha_i = 45 \cdot 89 \leq 44 \cdot 91$$

$$89 \leq 44 \cdot 2$$

$$89 \leq 88 \text{ !?}$$

Противоречие

$\Rightarrow$ такого 91 -угольника не существует.

Ответ: нет.

$$13: \begin{cases} a^3 - b^3 - c^3 = 3abc \\ a^2 = 4b + 4c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^3 - b^3 - c^3 - 3abc = 0 \\ a^2 = 4(b+c) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-b-c)(a^2+b^2+c^2+ab+ac-bc) = 0 \\ a^2 = 4(b+c) \end{cases}$$

$$1) \begin{cases} a-b-c=0 \\ a^2=4(b+c) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b+c \\ (b+c)^2=4(b+c) \end{cases} \quad b+c \neq 0, \text{ т.к. } b, c \in \mathbb{N} \quad (b+c \geq 2) \\ \Rightarrow \begin{cases} a=b+c \\ b+c=4 \end{cases}$$

Тогда получим следующие решения $(a; b; c)$:

$$(4; 1; 3), (4; 2; 2), (4; 3; 1)$$

$$2) \begin{cases} a^2+b^2+c^2+ab+ac-bc=0 \\ a^2=4(b+c) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a^2+2b^2+2c^2=-2ab-2ac+2bc \\ a^2=4(b+c) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a+b)^2+(a+c)^2+(b-c)^2=0 \\ a^2=4(b+c) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-b=-c \\ b^2=8b, \quad b \in \mathbb{N}, \Rightarrow b \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=-b=-c \\ b=8 \end{cases} \quad \text{но тогда } a=-8 \notin \mathbb{N}, \text{ не подходит.}$$

Ответ: $(4; 1; 3), (4; 2; 2), (4; 3; 1)$ в записи $(a; b; c)$

14. число $2 \dots 234 \dots 4$ (сначала 2 написано 2024 раза, затем 4 написано 2024 раза) Делится на 2, т.к. оканчивается на 4, т.е. это чётное. Единственное чётное простое число – это 2; $2 \dots 234 \dots 4 \neq 2$
 $\Rightarrow$ нет, оно не простое.

Ответ: нет

Бланк ответа

Всероссийская олимпиада школьников «Миссия выполнима. Твоё призвание – финансист!»

Код участника:

(заполняется организатором)

M10-93

1/6. Заметим, что $abc + 2ab + 2bc + 2ac + 4a + 4b + 4c = 504$ можно переписать как: $(a+2)(b+2)(c+2) = 504 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$

Пусть $a' = a+2$, $b' = b+2$, $c' = c+2$, каждое решение $(a'; b'; c')$ соответствует одному решению $b(a; b; c)$, т.к. $a; b; c; a'; b'; c'; 2 \in \mathbb{Z}$,

Выпишем все делители 504: 1; 2; 3; 4; 6; 7; 8; 9; 12; 14; 18; 24; 28; 36; 42; 56; 63; 72; 84; 126; 168; 252; 504; - 24 делителя

$a' = 1; b'c' = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$ далее будем использовать формулу кол-ва делителей $-(3+1)(2+1)(1+1)$ случаев; 24

$a' = 2; 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7 \rightarrow 18$

$a' = 3; 2^3 \cdot 3 \cdot 7 \rightarrow 16$

$a' = 4; 2 \cdot 3^2 \cdot 7 \rightarrow 12$

$a' = 6; 2^2 \cdot 3 \cdot 7 \rightarrow 12$

$a' = 7; 2^3 \cdot 3^2 \rightarrow 12$

$a' = 8; 3^2 \cdot 7 \rightarrow 6$

$a' = 9; 2^3 \cdot 7 \rightarrow 8$

$a' = 12; 2 \cdot 3 \cdot 7 \rightarrow 8$

$a' = 14; 2^2 \cdot 3^2 \rightarrow 9$

$a' = 18; 2^2 \cdot 7 \rightarrow 6$

$a' = 24; 2^3 \cdot 3 \rightarrow 8$

$a' = 28; 3 \cdot 7 \rightarrow 4$

$a' = 36; 2 \cdot 3^2 \rightarrow 6$

$a' = 42; 2 \cdot 7 \rightarrow 4$

$a' = 56; 2^3 \cdot 7 \rightarrow 6$

$a' = 63; 3^2 \rightarrow 3$

$a' = 72; 2^3 \rightarrow 4$

$a' = 84; 2 \cdot 3 \rightarrow 4$

$a' = 126; 2^2 \rightarrow 3$

$a' = 168; 3 \rightarrow 2$

$a' = 252; 2 \rightarrow 2$

$a' = 504; 1 \rightarrow 1$

Сложим все случаи и получим ответ:

$$1 + 3 + 2 + 2 + 3 + 4 + 4 + 6 + 3 + 8 + 9 + 3 + 12 + 16 + 18 = 156$$

Ответ: 156

7. Пусть $F(x) = x^3 - 3x - 3$;

$$F'(x) = 3x^2 - 3 \geq 0$$

$$x^2 - 1 \geq 0$$

$\begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq -1 \end{cases}$ - промежутки возрастания $F(x)$

Докажем, что:

$$\sqrt[5]{39} < 2,1 < t$$

$$1) \sqrt[5]{39} < 2,1 \quad \text{т.к.}$$

$$39 < 40,84$$

$$\text{т.к. } 39 < 40 < 2,1^5$$

$$\text{то } \sqrt[5]{39} < 2,1$$

$$\text{т.к. } \sqrt[5]{39} < 2,1 < t, \text{ то } \sqrt[5]{39} < t$$

Ч.т.д.

$$2) F(2,1) = 2,1^3 - 3 \cdot 2,1 - 3 = 9,261 - 6,3 - 3 = -0,039$$

т.к. для $x > 2,1$: $F(x) \uparrow$, $F(2,1) < 0$ и т.к. $F(t) = 0 \Rightarrow F(2,1) < 0$,
 $t > 2,1$.

8. ~~Докажем, что все числа из $[90; 8100]$ можно покрасить, не нарушив условия. Докажем, что больше чисел, чем из $[90; 8100]$ покрасить не получится. ~~Вывод $[90; 8100]$ - получится покрасить.~~~~
 т.к. произведение самых маленьких различных уже больше самого большого среди них. т.е. $90 \cdot 91 > 8100$, а для других произведений так тем более. ~~т.к. Если мы захотим добавить еще какое-нибудь число $[2; 89]$ (1 ноль, т.к. тогда любое число запрещено красить) то придется запретить крас. как минимум 2 числа, (как в случае $89 \notin [90; 8999]$), т.е. уменьшим кол-во чисел.~~
 $\Rightarrow [90; 8100]$ самый оптимальный вар. $8100 - 90 + 1 = 8011$ - кол-во чисел.

Ответ: 8011

Бланк ответа

Всероссийская олимпиада школьников «Миссия выполнима. Твоё призвание – финансист!»

Код участника:

(заполняется организатором)

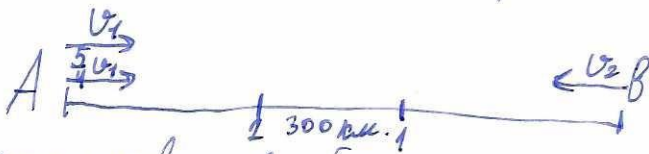
M10-93

№4. $2...234...4 : 2$ (оканчивается на 4) $\Rightarrow$ не простое.

$2 \cdot 2024 + 3 + 4 \cdot 2024 = 12147 : 3$ (сумма цифр делится на 3) $\Rightarrow$ не простое

Ответ: число $2...234...4$ не простое

№1



$\frac{5}{4} v_1$ - скорость первого автобуса

v_1 - скорость второго автобуса

v_2 - скорость велосипедиста

1) Встретились первый автобус и велосипедист, и если сложить пути, которые они прошли, то будет расстояние между А и В:

$$(1) \frac{5}{4} v_1 \cdot t_1 + v_2 t_1 = 300 \text{ км}, t_1 - \text{время от начала, до первой встречи:}$$

$$t_1 = 12:20 - 9:00 = 3:20 = \left(3 + \frac{1}{3}\right) \text{ ч.}$$

2) Встретились второй автобус и велосипедист, и если сложить пути, которые они прошли, то будет расстояние между А и В:

$$v_1 \cdot t_2 + v_2 t_2 = 300 \text{ км}, t_2 - \text{время от начала, до второй встречи:}$$

$$t_2 = 13:00 - 9:00 = 4 \text{ часа}$$

$$v_1 + v_2 = \frac{300 \text{ км}}{4 \text{ ч}} = 75 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$$

$$v_1 = 75 - v_2 \quad (2)$$

$$(2) \rightarrow (1): \frac{5}{4} (75 - v_2) + v_2 = \frac{300}{3 + \frac{1}{3}} = 90$$

$$93,75 - \frac{5}{4} v_2 + v_2 = 90$$

$$93,75 - 90 = \frac{1}{4} v_2$$

$$v_2 = 15 \text{ км/ч.}$$

Ответ: $v_2 = 15 \text{ км/ч.}$

Код участника:

(заполняется организатором)

МЮ-18

З2. Сумма угловых мер для n -угольника: $(n-2) \cdot 180^\circ$

$n = 91$:

Сумма углов 91-угольника: $(91-2) \cdot 180^\circ = 16020^\circ$

Сумма углов: $a_1 + a_2 + \dots + a_{91}$, и все кратны 4, значит $a_i = 4b_i$, a_i, b_i - целые

Тогда: $a_1 + a_2 + \dots + a_{91} = 4b_1 + 4b_2 + \dots + 4b_{91} = 4(b_1 + b_2 + \dots + b_{91}) = 16020^\circ$.

$b_1 + b_2 + \dots + b_{91} = 4005^\circ$, $4005 : 91 = 44^\circ 91 + 1^\circ$

$a_i < 180^\circ$, иначе $a_i = 180^\circ$ - не угол, или $a_i > 180^\circ \Rightarrow$ 91-угольник - не выпуклый.

Тогда $b_i < 45^\circ$, и b_i - целое. Но при $b_i = 44^\circ$ (максимальное целое число, меньшее 45°) максимальная сумма $b_1 + b_2 + \dots + b_{91} = 4004^\circ$, $4004^\circ < 4005^\circ \Rightarrow$ не существует выпуклого 91-угольника с углами, кратные 4.

Ответ: не существует

З6. $abc + 2ab + 2bc + 2ac + 4a + 4b + 4c = 504$

$abc + 2ab + 2bc + 2ac + 4a + 4b + 4c + 8 = 512$

$(a+2)(b+2)(c+2) = 2^9$, $a, b, c \in \mathbb{Z}$

1) $a+2 > 0 \Rightarrow (b+2)(c+2) > 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{I} \\ b+2 > 0 \\ c+2 > 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} \text{II} \\ b+2 < 0 \\ c+2 < 0 \end{cases}$

I	$a+2$	$b+2$	$c+2$	Σ вариантов
2^0	2^d , $0 \leq d \leq 9$	2^{9-d}	2^{9-d}	10
2^1	2^d , $0 \leq d \leq 8$	2^{8-d}	2^{8-d}	9
2^2	2^d , $0 \leq d \leq 7$	2^{7-d}	2^{7-d}	8
2^3	2^d , $0 \leq d \leq 6$	2^{6-d}	2^{6-d}	7
2^4	2^d , $0 \leq d \leq 5$	2^{5-d}	2^{5-d}	6
2^5	2^d , $0 \leq d \leq 4$	2^{4-d}	2^{4-d}	5
2^6	2^d , $0 \leq d \leq 3$	2^{3-d}	2^{3-d}	4
2^7	2^d , $0 \leq d \leq 2$	2^{2-d}	2^{2-d}	3
2^8	2^d , $0 \leq d \leq 1$	2^{1-d}	2^{1-d}	2
2^9	2^0	2^0	2^0	1
				55

2) $a+2 < 0 \Rightarrow (b+2)(c+2) < 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{III} \\ b+2 > 0 \\ c+2 < 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} \text{IV} \\ b+2 < 0 \\ c+2 > 0 \end{cases}$

во II, III и IV аналогично, как в I, только знаки разные (но и корни тоже).

Итоговый ответ: $55 \cdot 4 = 220$

Ответ: всего корней 220

Код участника:

(заполняется организатором)

1110 - 18

$$\sqrt{3}. \begin{cases} a^3 - b^3 - c^3 = 3abc \\ a^2 = 4b + 4c \end{cases}, a, b, c \in \mathbb{N}$$

$$a^3 - b^3 - c^3 - 3abc = (a - b - c)(a^2 + b^2 + c^2 + ab + ac - bc) = 0$$

$$a^2 = 4b + 4c$$

$$b + c = \frac{a^2}{4}$$

$$(a - (b + c))(a^2 + a(b + c) + (b^2 + 2bc + c^2) - 3bc) = 0$$

$$\left(a - \frac{a^2}{4}\right)\left(a^2 + a \cdot \frac{a^2}{4} + \left(\frac{a^2}{4}\right)^2 - 3bc\right) = 0$$

$$I) a - \frac{a^2}{4} = 0 \mid : \frac{a}{4}, a \in \mathbb{N}$$

$$4 - a = 0$$

$$a = 4$$

$$\begin{cases} 4^3 - b^3 - c^3 = 3 \cdot 4bc \\ 4^2 = 4b + 4c \end{cases}$$

$$4^2 = 4b + 4c$$

$$4 = b + c$$

$$64 - b^3 - c^3 = 12bc$$

$$b = 4 - c$$

$$64 - (4 - c)^3 - c^3 = 12(4 - c)c$$

$$1) 64 - (64 - c^3 + 48c + 12c^2) - c^3 = 48c - 12c^2$$

$$\underline{64 - 64 + c^3 + 48c - 12c^2 - c^3 = 48c - 12c^2} - \text{верно для любого } c (c \in \mathbb{N})$$

$$b \in \mathbb{N} \Rightarrow 4 - c > 0, c < 4; c \in \mathbb{N} \Rightarrow 1 \leq c \leq 3$$

$$c = 1 \Rightarrow b = 4 - 1 = 3$$

$$c = 2 \Rightarrow b = 4 - 2 = 2$$

$$c = 3 \Rightarrow b = 4 - 3 = 1$$

Корни для системы I: $a = 4, b = 3, c = 1; a = 4, b = 2, c = 2; a = 4, b = 1, c = 3$

№3. (Продолжение)

$$\text{II)} \quad a^2 + \frac{a^3}{4} + \frac{a^4}{16} - 3bc = 0$$

$$\frac{a^4}{16} = \left(\frac{a^2}{4}\right)^2 = (b+c)^2$$

$$a^2 + \frac{a^3}{4} + (b+c)^2 - 3bc = 0$$

$$a^2 + \frac{a^3}{4} + b^2 + c^2 + 2bc - 3bc = 0$$

$$a^2 + \frac{a^3}{4} + (b^2 + c^2 - 2bc) + bc = 0$$

$$a^2 + \frac{a^3}{4} + (b-c)^2 + bc = 0$$

$$a, b, c \in \mathbb{N} \Rightarrow a^2 > 0, \frac{a^3}{4} > 0, bc > 0$$

$$(b-c)^2 \geq 0$$

Значит это противоречие

Ответ: $a=4, b=3, c=1$; $a=4, b=2, c=2$; $a=4, b=1, c=3$

$$\text{№7. } x^3 - 3x - 3 = 0$$

$$x^3 - 3(x+1) = 0$$

При $x < -1$: x^3 быстро убывает, а $(-3(x+1))$ - нет $\Rightarrow x^3 - 3(x+1) < 0$

При $-1 < x < 0$: $x^3 < 0$, $-3(x+1) < 0 \Rightarrow x^3 - 3(x+1) < 0$

При $x = 0$: $0^3 - 3 \cdot 0 - 3 = -3 < 0$

При $0 < x < 1$: $0 < x^3 < 1$, $-3(x+1) < -3 \Rightarrow x^3 - 3(x+1) < 0$

При $x = 1$: $1^3 - 3 \cdot 1 - 3 = -5 < 0$

При $x = 2$: $2^3 - 3 \cdot 2 - 3 = -1 < 0$

При $x = 3$: $3^3 - 3 \cdot 3 - 3 = 15 > 0$

Значит в интервале $(2; 3)$ по оси Ox график $f(x) = x^3 - 3x - 3$ приобретает положительные значения

При $x > 3$: x^3 быстро возрастает, а $(-3(x+1))$ - нет $\Rightarrow x^3 - 3(x+1) > 0$

Пересечений с Ox было одно, значит t - единственный корень

Код участника:

(заполняется организатором)

cell 10-18

7. (Продолжение)

При $x = \sqrt[5]{39}$

$$(\sqrt[5]{39})^3 - 3 \cdot \sqrt[5]{39} - 3 \approx -0,23 < 0$$

т.к. $f(\sqrt[5]{39}) < 0$, значим $t > \sqrt[5]{39}$

5.

Дано: ABCD-трапеция ($AB \parallel CD$)

$$\angle DAC = 10^\circ$$

$$\angle CAB = 30^\circ$$

$$AB + CD = AD$$

Найти: $\angle ADB$

Решение: отметим на AD точку K:

$$AK = AB, KD = DC$$

$$\angle CAB = \angle DCA = 30^\circ \text{ (накрест лежащие)}$$

$$\angle CDA + \angle DAB = 180^\circ \text{ (односторонние углы)}$$

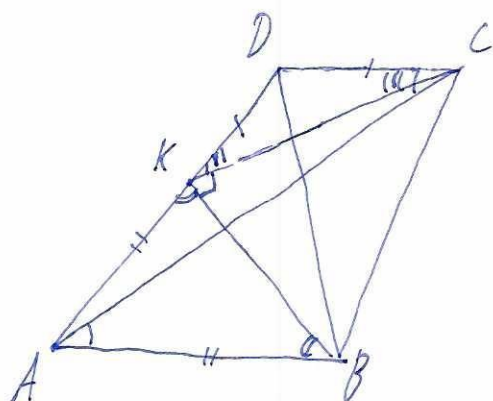
$$180^\circ = \angle CDA + \angle DAC + \angle CAB = \angle CDA + 10^\circ + 30^\circ$$

$$\angle CDA = 140^\circ$$

$$\triangle KDC - \text{равнобедр} \Rightarrow \angle DKC = \angle DCK = \frac{180^\circ - \angle KDC}{2} = 20^\circ$$

$$\triangle KAB - \text{равнобедр} \Rightarrow \angle AKB = \angle KBA = \frac{180^\circ - \angle KAB}{2} = \frac{180^\circ - \angle KAC - \angle CAB}{2} = 70^\circ$$

$$\angle SKB = 180^\circ - \angle DKC - \angle AKB = 90^\circ$$



8. Если 1 умножить на любое число, то мы получим то же число $\Rightarrow$ значит 1 - не красное

Любое число от 4050 (4050 <), умноженное на 2, нету в списке, значит их спокойно можно покрасить в красный: $n \leq 4050$

Если закрасить все числа от 90 до 8100, то минимальное произведение $91 \cdot 90 = 8190$.

Если закрасить что-то меньше 90, то будет произведение ≤ 8100 , что противоречит условию.

Ответ: $n = 8100 - 89 = 8011$ чисел можно покрасить

Код участника:

(заполняется организатором)

M10-13

Задача 1

Пусть скорость первого автомобиля x км/ч, тогда скорость II автомобиля

$\frac{5}{4}x$ км/ч, пусть скорость велос. равна y км/ч

Очевидно, что когда второй автомобиль встретится с велосипедистом, то I автомобиль будет находиться сразу впереди $\Rightarrow$ второй автомобиль встретится раньше с велосипедистом, чем

первый. Пусть a — расстояние от начала, то они одновременно проедут расстояние между A и B, т.е.

300 км. Составим уравнения;

$$\begin{cases} x \cdot 4 + y \cdot 4 = 300 \\ \frac{5}{4}x \cdot \frac{10}{3} + y \cdot \frac{10}{3} = 300 \end{cases}, \quad \begin{cases} x = 75 - y \\ 50x + 40y = 3600 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 50(75 - y) + 40y &= 3600 \\ 3750 - 10y &= 3600 \\ 10y &= 150 \\ y &= 15 \end{aligned}$$

Скорость велосипедиста равна 15 км/ч.

Ответ: 15 км/ч.

N2

В выпуклом 91-угольнике сумма углов верш равна (в градусах):

$$180 \cdot (91 - 2) = 180 \cdot 89 = 4 \cdot 45 \cdot 89 = 4 \cdot 4005$$

Все углы представлены в виде $4k$, где $k \in [1; 44]$.

Заметим, что сумма углов равна $4 \cdot 44 \cdot 91 = 4 \cdot 4004$, т.е.

все углы по 176° . Это сумма меньше, чем $4 \cdot 4005$,

что является суммой углов 91-угольника, значит almeno-
малейшая сумма углов $\Rightarrow$ такой 91-угольник не
существует.

Ответ: не существует

Код участника:

(заполняется организатором)

M10-13

строки 2

$$\begin{cases} a^3 - b^3 - c^3 = 3abc \\ a^2 = 4b + 4c \end{cases}$$

$$a, b, c \in \mathbb{N}$$

Заметим, что $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x+y+z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - xz)$
 (легко доказать, раскрыв скобки в правой части)

$$\begin{cases} a^3 + (-b)^3 + (-c)^3 - 3a(-b)(-c) = 0 \\ a^2 = 4(b+c) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a-b-c)(a^2 + b^2 + c^2 + ab + ac - bc) = 0 \\ a^2 = 4(b+c) \end{cases}$$

из второго уравнения получаем:

$$a = b + c$$

$$a^2 = 4a$$

$$a = 0 \text{ не подходит, т.к. } a \in \mathbb{N}$$

$$a = 4$$

$$a = 4$$

$$b + c = 4$$

$$b = 1 \quad b = 2 \quad b = 3$$

$$c = 3 \quad c = 2 \quad c = 1$$

получаем:

$$(4, 1, 3), (4, 2, 2), (4, 3, 1)$$

$$\text{или } a^2 + a(b+c) + b^2 + c^2 - bc = 0$$

решим кв. уравнение относительно a

$$\begin{aligned} D &= b^2 + 2bc + c^2 - 4b^2 - 4c^2 + 4bc = \\ &= -3b^2 - 3c^2 + 6bc = -3(b^2 - 2bc + c^2) = \\ &= -3(b-c)^2 \end{aligned}$$

$$\text{т.к. } D \geq 0, \text{ то } -3(b-c)^2 \geq 0$$

$$(b-c)^2 \leq 0$$

получим, что $b = c$, тогда $D = 0$

$$a = \frac{-(b+c)}{2} = \frac{-2b}{2} = -b$$

решений нет, т.к. координаты не могут быть отрицательными.

$$\text{ответ: } (4, 1, 3), (4, 2, 2), (4, 3, 1)$$

Код участника:

(заполняется организатором)

M10-13

Задача 3

нч

$\underbrace{2 \dots 2}_{2024} \underbrace{34 \dots 4}_{2024}$

- Это число не является простым, т.к.
 последняя цифра делится на 2 $\Rightarrow$
 и число делится на 2 $\Rightarrow$ оно составное.

Очевидно, не является,

нб

$$abc + 2ab + 2bc + 2ac + 4a + 4b + 4c = 504$$

 $a, b, c \in \mathbb{Z}$

$$a(bc + 2b + 2c + 4) = 504 - 2bc - 4b - 4c$$

$$a = \frac{504 - 2bc - 4b - 4c}{bc + 2b + 2c + 4}$$

$$a(bc + 2b + 2c + 4) = -2(bc + 2b + 2c + 4) + 512$$

т.к. $bc + 2b + 2c + 4 \neq 0$ (иначе получили, что $0 = 512$), то

$$a = -2 + \frac{512}{bc + 2b + 2c + 4}$$

т.к. $a \in \mathbb{Z}$, то $512 \div (bc + 2b + 2c + 4)$, т.е. $bc + 2b + 2c + 4 = n$, где

n - ~~какое-то~~ число, делящее 512 (возможны и отрицательные делители на 2, чтобы учесть отрицательные делители).

$$\begin{cases} a = -2 + \frac{512}{n} \\ b(c+2) = n - 4 - 2c \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -2 + \frac{512}{n} \\ b(c+2) = n - 2(c+2) \end{cases}$$

~~и $c(c+2) = n - 2(c+2)$ получили $a = -2$~~

$$\begin{cases} a = -2 + \frac{512}{n} \\ (b+2)/(c+2) = n \end{cases}$$

Рассмотрим n соответствующим. Одно значение
 и при каждом n , соответствующем с соответствующим
 1 значением b . Значит для ответа нужно

посчитать количество значений c при каждом n , учитывая
 что n является делителем 512.

Код участника:

M10-13

(заполняется организатором)

Задача 4

n	T
2^0	2
2^1	4
2^2	6
2^3	8
2^4	10
$\vdots$	
2^9	20

составим таблицу, где n – старшая двойка, а T – количество решений n ~~$4 \leq 512$~~
 $4 \leq 512 = 2^9$

количество решений T равно $\frac{(2+20) \cdot 10}{2} \cdot 2 = 220$ / мы умножили на 2, что посчитали еще одну двойку n .
 Значит всего решений 220.

Ответ 220

н7

$$x^3 - 3x - 3 = 0$$

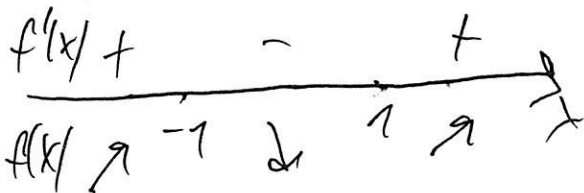
пусть $f(x) = x^3 - 3x - 3$, тогда $f(x) = 0$

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

$$f'(x) = 0$$

$$3x^2 - 3 = 0$$

$$x = \pm 1$$

~~Значит~~

$x = -1$ – м. локального максимума

$x = 1$ – м. локального минимума

$f(-1) = -1 + 3 - 3 = -1$. Значит корень x будет больше 1, м.к.
 при $x > 1$ $f(x) > 0$ и в м. локал. $f(x) < 0$.

M10-13

Страница 5

Замечу, что

$$\sqrt[5]{39} < 2, \text{ m. k. } \sqrt[5]{2,1^5} = 2,1^5 = 40,84101 > 39$$

$$f(2,1) = (2,1)^3 - 3 \cdot 2 \cdot 1 - 3 = 9,261 - 6,3 - 3 = -0,039 < 0$$

m.k. $f(x) \uparrow$ u $f(2,1) < 0 \Rightarrow \text{~~to be a } f(2,1) > \sqrt[5]{39}~~$ Q.E.D.

Заметим, что закрашивая ~~каждый~~ ^{каждый} минимальный удельный
возможности закрашивать минимальный удельный
то все же удельный другой домик 8100, то закрашивая
минимум, мы не минимальный удельный домик минимальный.
Заметим все закрашивая минимальный домик в атомарном удельном.
формы минимальный, домик 8100 $\Rightarrow$ минимальный из этих чисел
домик ~~каждый~~ ^{каждый} домик в атомарном удельном 8100.
Это возможно при числах 90, 91, 92, 93, ..., 8099, ~~8100~~ 8100,
т.е. $89 \cdot 90 = 8010 < 8100$. В этом порядке чисел мы не
можем получить минимальный минимальный, т.е. удельный удельный
формы, минимальный 8100. Заметим $n = 8100 - 89 = 8011$.

Onbelen. n=8077

№1

Пусть скорость первого автобуса, которого встречал велосипедист, v , тогда скорость второго равна $\frac{4}{5}v$ (т.к. он встречался с велосипедистом позже, то его скорость меньше). Пусть скорость велосипедиста равна u . Тогда,

$$\textcircled{1} \frac{S}{v+u} = t_1, \text{ где } t_1 = 12:20 - 9:00 = 3 \text{ ч } 20 \text{ мин.} = \frac{10}{3} \text{ (ч)}, S = 300 \text{ км, } \Rightarrow$$

$$\textcircled{1} \frac{300}{v+u} = \frac{10}{3}; v+u = 300 : \frac{10}{3} = \frac{300 \cdot 3}{10} = 90 \left(\frac{\text{км}}{\text{ч}} \right)$$

$$\textcircled{2} \frac{\frac{4}{5}v}{\frac{4}{5}v+u} = t_2, \text{ где } t_2 = 13:00 - 9:00 = 4 \text{ ч, } \Rightarrow$$

$$\textcircled{2} \frac{\frac{4}{5}v}{\frac{4}{5}v+u} = \frac{S}{t_2} = \frac{300}{4} = 75 \left(\frac{\text{км}}{\text{ч}} \right).$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} = (v+u) - \left(\frac{4}{5}v+u \right) = \frac{1}{5}v = 90 - 75 = 15 \left(\frac{\text{км}}{\text{ч}} \right), \Rightarrow v = 75 \left(\frac{\text{км}}{\text{ч}} \right)$$

Т.к. из $\textcircled{1} v+u = 90 \left(\frac{\text{км}}{\text{ч}} \right)$, то $u = 90 - 75 = 15 \left(\frac{\text{км}}{\text{ч}} \right)$

Ответ: $15 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$

№2

Заметим, что у выпуклого n -угольника сумма всех углов равна $180(n-2)$, $\Rightarrow$ сумма углов 31-угольника равна $180 \cdot 29$. Пусть градусная мера каждого угла кратна 4, $\Rightarrow$ т.к. многоугольник выпуклый, то каждый угол меньше 180° , $\Rightarrow$ максимальное значение каждого угла равно 176° . ($176^\circ : 4$; $180^\circ : 4$, но $180^\circ \nless 180^\circ$).

В таком случае ~~макс~~ сумма углов равна $176 \cdot 31 = 16016^\circ$, однако она равна $180 \cdot 29 = 16020^\circ$, $16020^\circ > 16016^\circ$. Противоречие. Значит, такого быть не может.

Ответ: Нет, не существует.

№4

Посчитаем сумму цифр этого числа. $S = 2 \cdot 2024 + 3 + 4 \cdot 2024 = 6 \cdot 2024 + 3 = 3(2 \cdot 2024 + 1)$. Сумма цифр кратна 3, $\Rightarrow$ указанное число кратно 3. Т.к. $2 \cdot 2024 + 1 > 1$, то это число не является 3, следовательно, т.к. $:3$ и не равно 0, и не равно 3, не является простым.

ответ: Нет, не является.

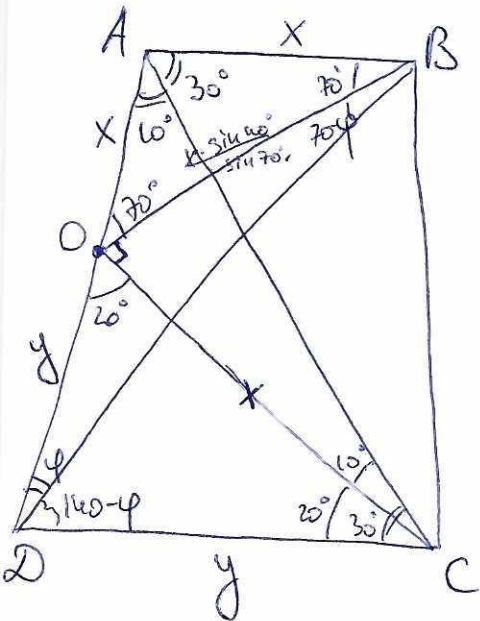
№3

$$\begin{cases} \textcircled{1} a^3 - b^3 - c^3 = 3abc \\ \textcircled{2} a^2 = 4b + 4c = 4(b+c) \\ a, b, c \in \mathbb{N}, \Rightarrow \\ a, b, c \neq 0. \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Из } \textcircled{2} \text{ следует, что } a^2 : 4, \Rightarrow a : 2. \\ \text{Т.к. } a \in \mathbb{N}, \text{ то рассмотрим несколько случаев:} \\ 1.) a = 2 \text{ (мин. значение)}, \Rightarrow 4(b+c) = 4; b+c = 1. \\ \text{Т.к. } b, c \in \mathbb{N}, \Rightarrow b+c \geq 2. \text{ Противоречие.} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 2.) a = 4. \text{ Тогда } 4(b+c) = 16; b+c = 4; \text{ а) } b = 3, \Rightarrow c = 1. \text{ Тогда } \textcircled{1}: 64 - 27 - 1 = 3 \cdot 4 \cdot 3 \\ \text{Т.к. } b \geq 1, c \geq 1; \text{ б) } b = 2, c = 2. \text{ Тогда } \textcircled{1}: 64 - 8 - 8 = 3 \cdot 4 \cdot 2 = 24 \\ \text{в) } c = 3, b = 1. \text{ Аналогично с а), Верно} \\ 3.) a = 6. \text{ Тогда } 4(b+c) = 36; b+c = 9. \text{ Т.к. уравнение симметрично относительно } b \text{ и } c, \text{ пусть } b \geq c \\ \text{а) } b = 5, c = 4. \text{ Тогда } \textcircled{1}: 216 - 125 - 64 = 3 \cdot 6 \cdot 5 = 90 \\ \text{б) } b \geq 6, \Rightarrow (a^3 - b^3) \leq 0; a^3 - b^3 - c^3 < 0, \text{ но } 3abc > 0. \text{ Решений нет.} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 4.) a \geq 8. \text{ Тогда } 4(b+c) \geq 64; b+c \geq 16; \text{ Тогда, т.к. } a^2 = 4(b+c), \text{ то } 8a \leq a^2 \Rightarrow \\ 8a \leq 4(b+c); 2a \leq b+c; a \leq \frac{b+c}{2}, \Rightarrow \text{одно из чисел } b, c \geq a, \Rightarrow \text{снова} \\ \text{темно, как и в п. 3, } (a^3 - b^3 - c^3) < 0, \text{ так как } 3abc > 0. \text{ Решений нет.} \\ \text{Ответ: } (4; 2; 2), (4; 3; 1), (4; 1; 3) \end{array}$$

N°5



Дано: $\angle DAC = 10^\circ$ Найти: $\angle ADB = \varphi$.

$$\angle CAB = 30^\circ$$

$$AB + CD = AD, AB = x, CD = y$$

Решение: т.к. $AB + CD = AD$, то отметим на AD т.о. такую, что $DO = DC$, $AO = AB$.

Тогда $\angle ACO = \angle BAC = 30^\circ$ (накрест лежащие)

$$\angle ODC = 180^\circ - 40^\circ = 140^\circ \text{ (т.к. } \angle ADC + \angle DAB = 180^\circ \text{)}$$

$$2) \triangle ODC \text{ равнобедренный, } \Rightarrow \angle DOC = \angle DCO = \frac{180^\circ - 140^\circ}{2} = 20^\circ$$

$$3) \text{ Сл-но, } \angle OCA = 30^\circ - 20^\circ = 10^\circ = \angle OAC, \Rightarrow \triangle OAC \text{ равнобедренный, } \Rightarrow OC = OA = x$$

$$4) \triangle OAB \text{ равнобедренный, } \Rightarrow \angle AOB = \angle ABO = \frac{180^\circ - 40^\circ}{2} = 70^\circ, \Rightarrow \angle BOC = 180^\circ - 70^\circ - 20^\circ = 90^\circ - \text{прямой.}$$

$$5) \text{ Запишем теорему синусов для } \triangle COD: \frac{x}{\sin 140^\circ} = \frac{y}{\sin 20^\circ}; \sin 140^\circ = \sin 40^\circ, \Rightarrow y = \frac{x \cdot \sin 20^\circ}{\sin 40^\circ} = \frac{x \cdot \sin 20^\circ}{2 \cdot \sin 20^\circ \cdot \cos 20^\circ} = \frac{x}{2 \cdot \sin 20^\circ}$$

$$6) \text{ Пусть } OB = z. \text{ Запишем теорему синусов для } \triangle OAB: \frac{x}{\sin 70^\circ} = \frac{z}{\sin 40^\circ}; z = \frac{x \cdot \sin 60^\circ}{\sin 70^\circ}$$

$$7) \text{ Запишем теорему синусов для } \triangle OBD: \frac{x \cdot \sin 40^\circ}{\sin 70^\circ \cdot \sin \varphi} = \frac{z}{2 \cdot \sin 70^\circ \cdot \sin (70^\circ - \varphi)}$$

$\sin \varphi = 2 \cdot \sin 40^\circ \cdot \sin (70^\circ - \varphi)$. Заметим, что при увеличении φ левая часть увеличивается, а правая уменьшается, $\Rightarrow$ уравнение имеет один корень, который несложно заметить: $\varphi = 40^\circ$.

Ответ: 40°

Код участника:

(заполняется организатором)

М 10-100

№6 $a, b, c \in \mathbb{Z}$.

$abc + 2ab + 2bc + 2ac + 4a + 4b + 4c = 504$. Свернем в произведение:

$$(a+2)(b+2)(c+2) - 8 = 504;$$

$(a+2)(b+2)(c+2) = 512 = 2^9$. Значит, каждая из скобок – это степень двойки (возможно, нулевая). Пусть $a+2=2^\alpha$, $b+2=2^\beta$, $c+2=2^\gamma$. Тогда:

$$(a+2)(b+2)(c+2) = 2^\alpha \cdot 2^\beta \cdot 2^\gamma = 2^{\alpha+\beta+\gamma} = 2^9, \Rightarrow (\alpha, \beta, \gamma \geq 0 \text{ и } \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z})$$

$\alpha + \beta + \gamma = 9$. Давайте почитаем количество таких троек чисел (т.к. $a+2, b+2, c+2$ могут принимать только целые значения)

а) $\alpha=9, \Rightarrow \beta=0, \gamma=0$ – 1 вариант

б) $\alpha=8, \Rightarrow \beta=1, \gamma=0$
 $\beta=0, \gamma=1$ – 2 варианта

в) $\alpha=7, \Rightarrow \beta=2, \gamma=0$
 $\beta=1, \gamma=1$
 $\beta=0, \gamma=2$ – 3 варианта

г) $\alpha=6, \Rightarrow \beta=3, \gamma=0$
 $\beta=2, \gamma=1$
 $\beta=1, \gamma=2$
 $\beta=0, \gamma=3$ – 4 варианта

д) $\alpha=5, \Rightarrow \beta=4, \gamma=0$
 $\beta=3, \gamma=1$
 $\beta=2, \gamma=2$
 $\beta=1, \gamma=3$
 $\beta=0, \gamma=4$ – 5 вариантов

е) $\alpha=4, \Rightarrow \beta=5, \gamma=0$
 $\beta=4, \gamma=1$
 $\beta=3, \gamma=2$
 $\beta=2, \gamma=3$
 $\beta=1, \gamma=4$
 $\beta=0, \gamma=5$ – 6 вариантов

ж) $\alpha=3, \Rightarrow \beta=6, \gamma=0$
 $\beta=5, \gamma=1$
 $\beta=4, \gamma=2$
 $\beta=3, \gamma=3$
 $\beta=2, \gamma=4$
 $\beta=1, \gamma=5$
 $\beta=0, \gamma=6$ – 7 вариантов

з) $\alpha=2, \Rightarrow \beta=7, \gamma=0$
 $\beta=6, \gamma=1$
 $\beta=5, \gamma=2$
 $\beta=4, \gamma=3$
 $\beta=3, \gamma=4$
 $\beta=2, \gamma=5$
 $\beta=1, \gamma=6$
 $\beta=0, \gamma=7$ – 8 вариантов

и) $\alpha=1, \Rightarrow \beta=8, \gamma=0$
 $\beta=7, \gamma=1$
 $\beta=6, \gamma=2$
 $\beta=5, \gamma=3$
 $\beta=4, \gamma=4$
 $\beta=3, \gamma=5$
 $\beta=2, \gamma=6$
 $\beta=1, \gamma=7$
 $\beta=0, \gamma=8$ – 9 вариантов

к) $\alpha=0, \Rightarrow \beta=9, \gamma=0$
 $\beta=8, \gamma=1$
 $\beta=7, \gamma=2$
 $\beta=6, \gamma=3$
 $\beta=5, \gamma=4$
 $\beta=4, \gamma=5$
 $\beta=3, \gamma=6$
 $\beta=2, \gamma=7$
 $\beta=1, \gamma=8$
 $\beta=0, \gamma=9$ – 10 вариантов

Итого: $1+2+\dots+10 = \frac{(1+10) \cdot 10}{2} = 55$

Ответ: 55

Код участника:

(заполняется организатором)

M 10-100

№7

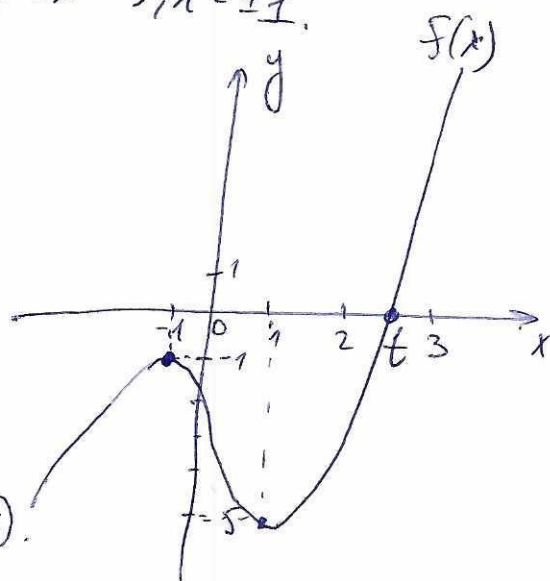
$x^3 - 3x - 3 = 0$. Рассмотрим производную функции $f(x) = x^3 - 3x - 3$,
 $f'(x) = [x^3 - 3x - 3]' = 3x^2 - 3$.

Когда производная равна 0, график кубической функции «меняет направление», т.е. если рос, начинает убывать и наоборот. $3x^2 - 3 = 0$; $3x^2 = 3$; $x = \pm 1$.

При $x = -1$, $f(x) = -1 - 3 - 3 = -7$;

При $x = 1$, $f(x) = 1 - 3 - 3 = -5$.

Нарисуем примерный график функции:



Т.к. ~~каждое~~ места «поворота» функции находятся ниже оси x , то у функции есть только 1 корень.
 (В противном случае были бы повороты выше оси x).

Тогда нам остается доказать, что $f(\sqrt[5]{39}) < 0$, т.к. у этого будет первая, то $t > \sqrt[5]{39}$.

$$f(\sqrt[5]{39}) = (\sqrt[5]{39})^3 - 3 \cdot \sqrt[5]{39} - 3;$$

а) $\sqrt[5]{39^3} = \sqrt[5]{59319}$; $9^5 = 59049$; $(9,1)^5 = 753,571 \cdot (9,1)^2 > 753 \cdot 81 = 60993 > 59319, \Rightarrow (\sqrt[5]{39})^3 < 9,1$.

б) Докажем, что $2 \frac{1}{30} < \sqrt[5]{39}$; $(\frac{61}{30})^5 < 39$. $61^5 = 13845841 \cdot 61 < 141 \cdot 10^5 \cdot 61$;
 $\frac{141 \cdot 10^5 \cdot 61}{10^5 \cdot 243} < 39$ | $\frac{47 \cdot 61}{81} < \frac{47 \cdot 65}{81} = \frac{329}{9} < 37 < 39$, т.е. г.

Тогда $f(\sqrt[5]{39}) < 9,1 - 3 \cdot 2 \frac{1}{30} - 3 = 0$, т.е. $f(\sqrt[5]{39}) < 0$, т.
 $t > \sqrt[5]{39}$, т.е. г.

Код участника:

(заполняется организатором)

M10-100

№8

Ответ: при $n = 8011$.

Пример: Волк покрасил все числа от 90 до 8100 + тогда произведение любых двух различных красных чисел > 8100 , $\Rightarrow$ не является красным.
 т.к. мин. $= 90 \cdot 91 > 90 \cdot 90 = 8100$
 таких чисел тогда $8100 - 90 = 8011$.

Оценка:
Докажем, что $n > 8011$ невозможно. Пусть $n \geq 8012$. Тогда среди покрашенных в красные цвет чисел точно есть число ≤ 89 . Тогда, минимум 90 чисел не может быть покрашено в красные цвет, т.к. $a \cdot 1, a \cdot 2, \dots, a \cdot 91 < 8100$, $\Rightarrow$ либо произведение не будет красным, либо само число n не будет красным, (исключая $a \cdot a$)
 т.к. $89 \cdot 91 = (90-1) \cdot 90 < 8100$

а таких различных чисел/произведений ≥ 90 , $\Rightarrow$ покрашенных чисел может быть максимум $8100 - 90 = 8010$, но $n \geq 8012$ Противоречие.
 Значит, $n < 8012$, а
 Пример для $n = 8011$ приведен выше.

Задача №4

Ответ: нет.

Решение: Заметим, что $222222:4 = 55555,5$ и $999999:4 = 249999,75$. Представим данное число в виде $999999 + 999999 \cdot 10^6 + 999999 \cdot 10^{12} + \dots + 999999 \cdot 10^{2016} + 22499 \cdot 10^{2022} + 222222 \cdot 10^{2024} + 222222 \cdot 10^{2030} + \dots + 222222 \cdot 10^{4043}$. Заметим, что и $22499:4 = 5624,75$, а т.к. каждое слагаемое делится на 4, то всё число делится на 4, а т.к. оно больше семи и делится на 11, то оно составное.

Задача №1

V_1 – скорость автобуса, которого велосипедист встретил вторым.

$\frac{14}{12} V_1$ – скорость другого автобуса

x – скорость велосипедиста

В 1 час другой автобус и велосипедист встретились, а значит суммарно они проехали 100 км:

$$① 1 \cdot \frac{14}{12} V_1 + x \cdot 1 = 100$$

За $\frac{4}{3}$ часа велосипедист встретит второй автобус, а значит тоже суммарно с ним проехал 100 км:

$$② \frac{4}{3} \cdot V_1 + \frac{4}{3} x = 100.$$

$$\Rightarrow \frac{4}{3} V_1 + \frac{4}{3} x = \frac{14}{12} V_1 + x \Rightarrow \frac{1}{3} x = \frac{1}{12} V_1 \Rightarrow x = \frac{1}{4} V_1 \Rightarrow 4x = V_1$$

Подставим это в равенство ①:

$$1. \frac{14}{12} v_1 + x \cdot 1 = \frac{14}{3} x + x = \frac{20}{3} x = 100 \Rightarrow x = 15 \text{ км/ч}$$

Ответ: 15 км/ч

Задача 5.2

От противного:
Пусть существуют. Тогда каждый угол при вершине не более 175° . Тогда максимальная сумма углов равна $175^\circ \cdot 43 = 12775^\circ$, а сумма углов в 43-угольнике равна $180^\circ \cdot 41 = 12780^\circ$, что больше максимальной суммы углов при условии, что градусная мера каждого угла кратка пяти. Противоречие. Ответ: нет.

Задача 5.6

$$a+b+c+a+b+c+a+b+c=1023$$

$$a(b+c+1)+b+c+1=1023$$

$$a(b+1)(c+1)+b+c+1=1024$$

$$(a+1)(b+1)(c+1)=1024=2^{10}$$

П.к. a, b, c – целые, то и $a+1, b+1, c+1$ – целые, а также $|a+1|, |b+1|, |c+1|$ являются степенью двойки от 0 до 10 включительно, иначе мы получили число делящееся не только на степени двоек.

Рассмотрим кол-во случаев, когда $a+1, b+1$ и $c+1$ парные. Возьмем 10 двоек и два раздлителя. Пусть раздлители указывают сколько двоек входит в разложение каждого из чисел $a+1, b+1, c+1$. Кол-во двоек слева от левого раздлителя это кол-во двоек входящих в разложение числа $a+1$, справа от

правого раздвигателя - кол-во двоек в разложении числа $s+1$, а между раздвигателями - $b+1$. Соответственно ^{различных} способов поставить так раздвигатели между двойками - $C_{12}^2 = \frac{12 \cdot 11}{2} = 66$. Теперь рассмотрим кол-во способов, если $a+1, b+1, c+1$ есть отрицательные числа. Т.к. произведение $(a+1)(b+1)(c+1)$ положительно, то отрицательных множителей четное кол-во, в нашем случае ровно два. Соответственно варианты с отрицательными числами получаются из вариантов с только положительными $a+1, b+1, c+1$ добавлением каких-то двух из этих чисел на -1 , т.к. $a+1, b+1$ и $c+1$ всё равно являются степенями двойки. Из одного варианта с положительными мы можем получить $C_3^2 = 3$ различных варианта с отрицательными, а значит всего у нас вариантов $66 + 3 \cdot 66 = 66 \cdot 4 = 264$ варианта. Ответ: 264.

Задача 58

Ответ: 8011

Возьмем все числа от 90 до 8100 включительно $8100 = 90^2$, а их произв. равно $90 \cdot 91 > 90 \cdot 90$. Пусть можно больше, тогда по Принципу Дирихле ~~тогда~~ среди красных чисел есть хотя бы одно < 90 . Пусть это число x . Рассмотрим такие пары чисел ~~тогда~~ (a, b) , что $b = ax$. В каждой такой паре ~~тогда~~ не более 1 красного числа. У каждого $x \geq 89$ ~~тогда~~ таких пар (a, b) , где $a \neq x, b \neq x$, а значит хотя бы 89 чисел не красные, противоречие.

Код участника:

(заполняется организатором)

ШКО-808

Задача 57

$$x^3 - 3x - 4 = 0$$

$$x^3 - 4x + x - 4 = 0$$

$$x(x-2)(x+2) + x - 2 - 2 = 0$$

$$(x-2)(x+1)^2 = 2 \Rightarrow (x+1)^2 \neq 0, 2 > 0 \Rightarrow x-2 > 0 \Rightarrow x > 2$$

~~$$x^3 - 3x - 4 = (x-a)(x-b)(x-c), a, b, c - \text{корни} \Rightarrow$$~~

~~$$\Rightarrow \text{по формуле Виета } a+b+c=0 \Rightarrow c=-(a+b)$$~~

~~$$abc = ab$$~~

~~$$ab+bc+ac = -3 \quad ab - ab - a^2 - ab - b^2 = -3$$~~

~~$$a^2 + b^2 + ab = 3 \quad \text{Пусть корни} \leq \sqrt{46}$$~~

~~$$\text{Тогда } a^2 + b^2 + ab \leq 3\sqrt{46}^2$$~~

Бланк ответа

Всероссийская олимпиада школьников «Миссия выполнима. Твоё призвание – финансист!»

Код участника:

(заполняется организатором)

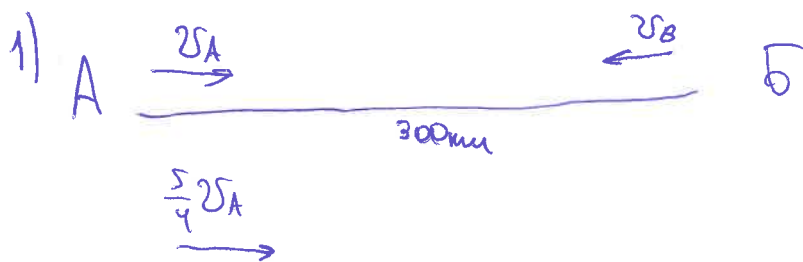
1110 - 306

Бланк 51

2) Сумма углов выпуклого n -угольника находится по формуле $180^\circ(n-2) \Rightarrow$
 $\Rightarrow$ сумма углов выпуклого 91-угольника равна $180 \cdot 89^\circ$.

Предположим, что многоугольник, обладающий заданным условием существует, тогда сумма всех его углов: $4 \cdot 180 \cdot 89 \cdot 4 \Rightarrow$ такого многоугольника не существует.

Ответ: нет.



Пусть v_A – скорость 1-го автомобиля (км/ч), тогда $\frac{5}{4}v_A$ – скорость 2-го автомобиля (км/ч)
 $\star v_B$ – скорость велосипедиста.

Во первой встрече с 9:00 прошло $37.20 \text{ мин} = \frac{10}{3} \text{ ч}$, за это время второй автомобиль и велосипедист в сумме проехали 300 км : $\frac{5}{4}v_A \cdot \frac{10}{3} + v_B \cdot \frac{10}{3} = 300$

Во второй встрече с 9:00 прошло 4 ч , за это время первый автомобиль и велосипедист в сумме проехали 300 км : $v_A \cdot 4 + v_B \cdot 4 = 300$.

Получим: $\begin{cases} \frac{5}{4}v_A \cdot \frac{10}{3} + v_B \cdot \frac{10}{3} = 300 \\ v_A \cdot 4 + v_B \cdot 4 = 300 \end{cases}$

$v_A \cdot 4 + v_B \cdot 4 = 300 \Rightarrow v_A = 75 - v_B$, подставим в (1):

$$\frac{5}{4}(75 - v_B) \cdot \frac{10}{3} + v_B \cdot \frac{10}{3} = 300, \quad \frac{25}{6}(75 - v_B) + v_B \cdot \frac{10}{3} = 300, \quad 25 \cdot 75 - 25v_B + 20v_B = 300 \cdot 6$$

$$5v_B = 25 \cdot 75 - 300 \cdot 6 = 75 \Rightarrow v_B = 15 (\text{км/ч})$$

Ответ: 15 км/ч

Код участника:

(заполняется организатором)

M10-53

Бланк 52

4) Рассмотрим сумму цифр числа $N = \underbrace{2 \dots 2}_{2024} \underbrace{34 \dots 4}_{2024}$, эта равна

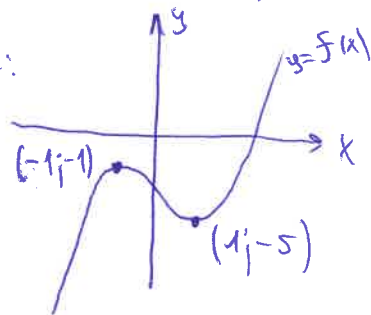
$$2 \cdot 2024 + 3 + 4 \cdot 2024 = 3 + 2024 \cdot 6 = 3(1 + 2024 \cdot 2) \div 3 \Rightarrow N \div 3 \Rightarrow \text{м.к. } N > 3, \text{ но } N - \text{ не простое}$$

Ответ: нет.

7) $f(x) = x^3 - 3x - 3$

$$f'(x) = 3x^2 - 3 \stackrel{3x^2-3=0}{=} 0, x = \pm 1, f(-1) = -1, f(1) = -5 \Rightarrow \text{график } y = f(x) \text{ вы-}$$

глядит примерно так:



$$f(2,1) = 2,1^3 - 3 \cdot 2,1 - 3 = 9,261 - 6,3 - 3 = -0,039 < 0 \Rightarrow \pm 2,1, \text{ а}$$

$$2,1 > \sqrt[5]{3,9}, \text{ м.к. } 2,1^5 = 40,34101 > 39 \Rightarrow \Rightarrow \pm > \sqrt[5]{39}, \text{ м.к.}$$

$$6) abc + 2ab + 2bc + 2ac + 4a + 4b + 4c = 504$$

$$(a+2)(b+2)(c+2) = 496 = 31 \cdot 2^4$$

Сначала решим, какая скобка будет делиться на 31, - 3 вар-та. Далее

распределим двойки между скобками, т.к. кол-во способов это сде-
лать равно кол-ву способов расставить 2 перегородки между двойками

$$\begin{array}{c} \textcircled{2} \quad \textcircled{2} \quad \textcircled{2} \quad \textcircled{2} \\ \hline 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \end{array}$$

(самый левый символ пойдет в $(a+2)$, центральный в $(b+2)$, правый в $(c+2)$) (примечание: в одной скобке может

стоять 2 перегородки), тогда способов это сделать $5 \cdot 5 = 25$. Далее
определим со знаками, заметим, что либо все скобки > 0 (1 вариант), либо
равно 2 скобки < 0 (3 вар-та), всего 4 вар-та.

Итого получили $3 \cdot 25 \cdot 4 = 300$ решений.

Ответ: 300

Дворк 53

8) Пример для $n=8011$: красим в красный цвет все числа

С 90 до 8100 : 1, 2, 3, ..., 89, 90, 91, ..., 8100 - красное

м.к. какое-нибудь красное ≥ 90 , а второе какое-нибудь красное ≥ 91 , но их произведение $\geq 90 \cdot 91 > 8100$ — не красное
близкие числа $8100 - 90 + 1 = 8011 \Rightarrow$ пример работы

Предположим, что можно покрасить ≥ 8012 чисел в красные.
Позовем ^{три} числа по очереди:

Поздравим ^{три} ~~числа~~ по трийн:

11	89	90	89.90
21	88	91	88.91
31	87	92	87.92
88	2	177	2.177

Значит, что для любых $i \geq j \geq 0$, $\text{Att}(i+1)(j-1) =$

$$= ij + j - i - 1 < ij \Rightarrow 0 \text{ правый столбец}$$

Все числа расположены по убыванию * (слого),
примеч, м.к. 2.9.90 ≤ 8100, то и все числа ≤ 8100 и

м.к. $2 \cdot 177 > 177$, все числа машины по-
лучены.

Заметим, что из каждой группы в красный можно покрасить ≤ 2 числа $\Rightarrow \Rightarrow \geq 88$ чисел в красный не покрашено.

Число 1 в таблице не стоит, пришел м.к. по предположению в крас.
покрашено ≥ 8012 мис, но 1 в красной не покрашено (иначе был к-крас. числ ≥ 1 , $1:k=k-1$). По-
этому, что в красной не покрашено ≥ 89 мис $\Rightarrow$ в красной покрашено
 $\leq 8100 - 89 = 8011$ мис - противоречие $\Rightarrow$ крайнее числ ≤ 8011 .

Onbem: 8011.

Бланк 54

$$3) \begin{cases} a^3 - b^3 - c^3 = 3abc \\ a^2 = 4b + 4c \end{cases} \quad \perp$$

Пусть $a^2 = 4b + 4c \Rightarrow a = 2k, k \in \mathbb{N}$, тогда

$$\begin{cases} 8k^3 - b^3 - c^3 = 6kbc \\ k^2 = b + c \end{cases}$$

$$(1): 8k^3 - (b^3 + c^3) = 6kbc$$

$$8k^3 - (b+c)(b^2 - bc + c^2) = 6kbc$$

$$8k^3 - k^2(b^2 - bc + c^2) = 6kbc \quad ; k \neq 0 \rightarrow \begin{aligned} 8k^2 - k(b^2 - bc + c^2) &= 6bc \\ 8k^2 - k(b+c)^2 + 3bc &= 6bc \\ 8k^2 - k(k^2 - 3bc) &= 6bc \end{aligned}$$

$$8k^2 - k^3 + 3bck - 6bc = 0$$

$$-k^2(k^3 - 8) + 3bc(k - 2) = 0, \quad -k^2(k-2)(k^2 + 2k + 4) + 3bc(k-2) = 0, \quad (k-2)(k^2(k^2 + 2k + 4) + 3bc) = 0$$

I Если $k-2=0$, то $a=4, b+c=\frac{a^2}{4}=4$, ~~$64 - (b+c)^2 = 64 - (b+c)(b^2 - bc + c^2)$~~ найдем 3 пары $(4; 1; 3), (4; 2; 2), (4; 3; 1)$ - проверим утверждения, что они подходят.

II $k^2(k^2 + 2k + 4) + 3bc = 0$, т.к. $k, b, c \geq 0$, ^{по вычитанию ≥ 0} но решение нет.

Проверка для пункта I

$$(4; 1; 3) \quad \begin{aligned} 4^3 - 1^3 - 3^3 &= 3 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 3 - \text{верно} \\ 4^2 &= 4 \cdot 1 + 4 \cdot 3 - \text{верно} \end{aligned}$$

$$(4; 2; 2) \quad \begin{aligned} 4^3 - 2^3 - 2^3 &= 3 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 2 - \text{верно} \\ 4^2 &= 4 \cdot 2 + 4 \cdot 2 - \text{верно} \end{aligned}$$

$$(4; 3; 1) \quad \begin{aligned} 4^3 - 3^3 - 1^3 &= 3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 1 - \text{верно} \\ 4^2 &= 4 \cdot 3 + 4 \cdot 1 - \text{верно} \end{aligned}$$

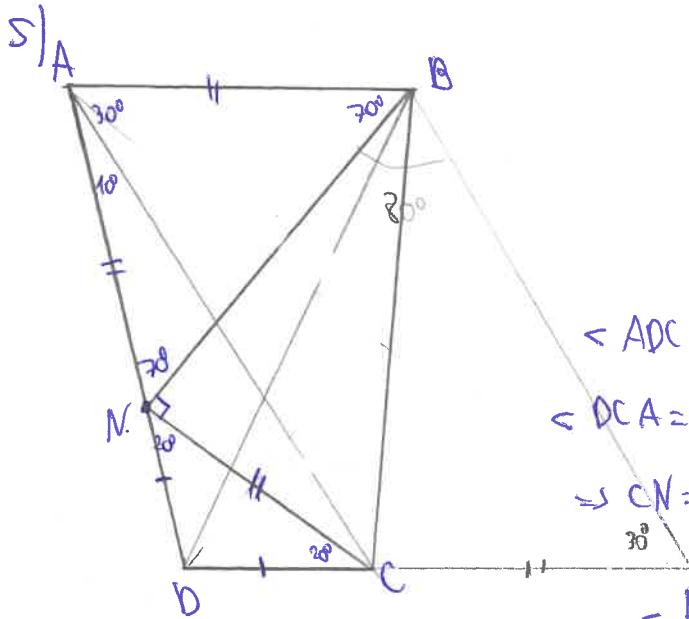
Ответ: $(4; 1; 3), (4; 3; 1), (4; 2; 2)$ - * решение вида $(a; b; c)$

Код участника:

(заполняется организатором)

M₁₀-53

Задача 55



Отметим точку N на AD так, что
 $AN \perp DC$, тогда $DN = CD$.

$$\angle ADC = 180^\circ - 40^\circ - 30^\circ = 110^\circ, \angle DNC = \angle DCN = \frac{180^\circ - 110^\circ}{2} = 35^\circ.$$

$$\angle DCA = \angle BAC = 30^\circ \Rightarrow \angle ACN = 30^\circ - \angle NCD = 10^\circ = \angle NAC \Rightarrow$$

$$\Rightarrow CN = AN.$$

$$\angle ANB = \angle ABN = \frac{180^\circ - 40^\circ}{2} = 70^\circ \Rightarrow \angle BNC = 180^\circ - 70^\circ - 20^\circ = 90^\circ$$

Код участника:

(заполняется организатором)

ШО - 38

№ 7

Пусть $f(x) = x^3 - 3x - 4$.~~Пусть у уравнения $x^3 - 3x - 4 = 0$~~ ~~есть корни больше $\sqrt[5]{46}$, тогда~~~~тогда как f~~ ~~$f(x)$ — кубическая функция $\Rightarrow f(x)$ непрерывна.~~

~~$f(3) = 3^3 - 3 \cdot 3 - 4 =$~~

Пусть у уравнения есть корни $\geq \sqrt[5]{46}$,
тогда $\exists x: f(x) \geq 0, x \leq \sqrt[5]{46}$.

~~Пусть $x \leq 0$: $x \leq -\sqrt{3}$: $x^3 \leq -3\sqrt{3}$ $x^3 - 3x < 0$~~

~~$-3x \geq 3\sqrt{3}$ $x^3 - 3x - 4 < 0$~~

~~$-\frac{4}{3} \geq x > -\sqrt{3}$: $x(x^2 - 3) < \sqrt{3} \cdot (3 - \frac{16}{9}) =$
 $= \sqrt{3} \cdot \frac{11}{9} = \frac{11\sqrt{3}}{9} < 4$
 $x^3 - 3x - 4 < 0$~~

~~$0 \geq x > -\frac{4}{3}$: $-3x - 4 < 0$ $x^3 \leq 0$ $\Rightarrow x^3 - 3x - 4 < 0$~~

~~$\sqrt{3} \geq x > 0$: $x(x^2 - 3) \leq 0$
 $x^3 - 3x - 4 < 0$~~

~~$2 \geq x > \sqrt{3}$: $x^3 \leq 8$ $\Rightarrow x^3 - 3x - 4 < 8 - 3\sqrt{3} - 4 = 4 - 3\sqrt{3} < 0$~~

~~$\sqrt[5]{46} \geq x > 2$: $x^3 \leq \sqrt[5]{46^3}$ $\Rightarrow x^3 - 3x - 4 < \sqrt[5]{46^3} - 10 < 0$~~

~~$46^3 = 97336 < 10^5 \Rightarrow \sqrt[5]{46^3} < 10$~~

~~Для всех $x \leq \sqrt[5]{46}$ $f(x) < 0 \Rightarrow$ не существует корней $\geq \sqrt[5]{46}$.~~

0

Код участника:

(заполняется организатором)

ШСО-38

1 б

$$ab + a + b + c + a + b + c = 1023$$

$$(a+1)(b+1)(c+1) = 1024 = 2^{10}$$

Пусть $2^A \equiv (a+1)$ $a = \pm 2^A - 1$
 $2^B \equiv (b+1) \Rightarrow b = \pm 2^B - 1$
 $2^C \equiv (c+1)$ $c = \pm 2^C - 1$

знаков.
 причем $\sqrt{\quad}$ - перед степенями
 четно.

$10 \geq A, B, C \geq 0$, $A+B+C=10$. Кон-во
 способов так выбрать без
 учета знака перед степенями
 $1+1+1+\dots+1=66$. С учетом все способы
 надо делить на кон-во спосо-
 бов выбрать знаки перед степенями
 таких способа 4. $\Rightarrow$ ответ на
 задачу $66 \cdot 4 = 264$.

Ответ: 264

Код участника:

(заполняется организатором)

ШО - 38

№3 (прод.)

$$a=6: \quad 3(b+c)=36$$

$$\begin{cases} b+c=12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9b+9c-9bc=6b^2+6c^2-6bc \end{cases}$$

$$\begin{cases} b+c=12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3b+3c-3bc=2b^2+2c^2-2bc \end{cases}$$

$$\begin{cases} b+c=12 \\ 2b^2+2c^2+bc-3b-3c=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b=11 \\ c=1 \end{cases}; \quad 2+2 \cdot 11^2+11-3-33=242+11+2$$

$$2b^2+2c^2+bc=36$$

$$\begin{cases} 2b^2 < 36 \\ 2c^2 < 36 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b < 3\sqrt{2} \\ c < 3\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow b+c < 6\sqrt{2} < 12$$

при $a=6$ нет реш.

Отв: $(3; 1; 2), (3; 2; 1)$

Код участника:

(заполняется организатором)

ШО-38

№3 (прод.)

Пусть ~~можно~~ мы взяли хотя бы 8012 чисел $\Rightarrow$ будет хотя бы одно число < 90 , а у таких чисел ком-во пар $\geq 90 \Rightarrow$ хотя бы 90 чисел мы не ~~должны~~ возмем, значит чисел не меньше $8012 + 90 = 8102$ такого быть не может. Противоречие.

Ответ: 8011.

$$\begin{cases} a^3 - b^3 - c^3 = 3abc \\ a^2 = 3b + 3c \end{cases} \quad \begin{cases} a^3 - 3abc = (b+c)(b^2 - bc + c^2) \\ a^2 = 3b + 3c \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^3 - 3abc = \frac{a^2}{3}(b^2 - bc + c^2) \\ a^2 = 3b + 3c \end{cases} \quad \begin{cases} 3a^2 - 9bc = a^2(b^2 - bc + c^2) \\ a^2 = 3b + 3c \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9(b+c) - 9bc = a(b^2 - bc + c^2) \\ a^2 = 3b + 3c \end{cases} \quad \begin{cases} 9(b - bc + c) = a(b^2 - bc + c^2) \\ a^2 = 3b + 3c \end{cases}$$

$$a \geq 3 \quad (a^2 = 3(b+c) \Rightarrow a^2 \geq 3 \Rightarrow a \geq 3)$$

$$a < 9 \quad (\text{если } a \geq 9, \text{ тогда } \frac{b - bc + c}{b^2 - bc + c^2} = \frac{a}{9}, \frac{a}{9} > 1, \frac{b - bc + c}{b^2 - bc + c^2} < 1)$$

$$\begin{cases} a=3 \\ a=6 \end{cases} \quad \begin{cases} a=3: \begin{cases} 9b - 9bc + 9c = 3b^2 - 3bc + 3c^2 \\ 9 = 3(b+c) \end{cases} \\ a=6: \begin{cases} 36 - 36bc + 36c = 36b^2 - 36bc + 36c^2 \\ 36 = 3(b+c) \end{cases} \end{cases}$$

$(3, 1, 2), (3, 2, 1)$ - подходит.

Код участника:

(заполняется организатором)

Ш10-38

ЛВ

Тришар на 8011:

Красивые все числа от 90 до 8100.

произведение любых 2 будет
 больше 8100 (любое из чисел не меньше
 90 $\Rightarrow$ произведение не меньше
 8100, 8100 можно
 получить только как 90-90,
 а по усл. так нельзя).

Большее

Меньше 8011 нельзя.

Но красивые сначала все от 90 до 8100
 в красивый. Потом покрасили 8100

будем красить ранее-то < 90 .

Но покрасили ранее-то $x < 90$, тогда

каждо будет стрелкой ранее-то числа

Пусть старее-то ничего не надо, тогда

люб для x было только одно число

Каждого $x \in [1; 8100]$ построим

все пары $(y; xy)$ тогда если

мы берем x , то хотя бы 1 число

из пары мы не должны брать $(xy \leq 8100, y \geq 1)$

Пусть мы взяли 8012, тогда найдется

хотя бы одна пара (x, y, xy) покрашена (так как

числа $1, \dots, 8012$ число пар $\geq 90 \Rightarrow$ хотя бы одна
 такая пара найдется)

Код участника:

(заполняется организатором)

СМО-38

№ 2

выпуклый

Пусть такой 73 -угольник существует.
~~Он не~~ Всегда существует
 углы не меньше чем $\frac{180 \cdot 71}{73}$ (иначе сумма углов меньше $180 \cdot 71$)

$$\frac{180 \cdot 71}{73} = 180 - \frac{360}{73} > 175 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ ~~угол~~ ~~в нем~~ есть угол размер которого ≥ 5 и он $> 175 \Rightarrow$ он $\geq 180 \Rightarrow$
 $\Rightarrow 73$ -угольник не выпуклый,
 противоречие.
 Ответ: не существует

№ 4

$$\underbrace{2 \dots 2}_{2024} \underbrace{7 \ 9 \dots 9}_{2024} \equiv \underbrace{(999-999) + (999-999) + \dots + (999-999)}_{337} + 799 +$$

$$+ \underbrace{(-222+222) + \dots + (-222+222)}_{337} - 22 \equiv 0 + 799 + 0 - 22 \equiv 777 \equiv 0.$$

Код участника:

(заполняется организатором)

МО - 38

№ 1

Пусть x - скорость первого автомобиля,
 тогда $\frac{14x}{12}$ - скорость второго автомобиля,
 Пусть y - скорость велосипедиста,
 тогда $\begin{cases} \frac{100}{x+y} = \frac{4}{3} \\ \frac{100}{\frac{14x}{12} + y} = 1 \end{cases}$

$$\begin{cases} 300 = 4x + 4y \\ 1200 = 14x + 12y \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{300 - 4x}{4} \\ x = \frac{1200 - 300 \cdot 3}{5} = 60 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 60 \\ y = \frac{300 - 4 \cdot 60}{4} = 15 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 60 \\ y = 15 \end{cases}$$

Ответ: 15 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$.

Код участника:

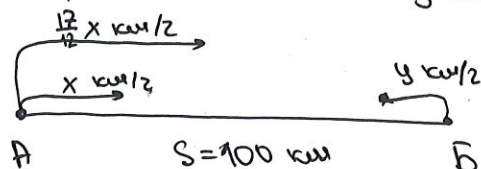
(заполняется организатором)

M10-384

мест 1/5

Задание №1

Пусть скорость одного автобуса x км/ч
 скорость второго автобуса $(\frac{17}{12}x)$ км/ч
 Скорость велосипедиста y км/ч



Первый (наиболее быстрый) из автобусов ~~встречает~~ велосипедиста
 Встречает в 10.00 $\Rightarrow$ спустя час езды, т.е.

$$\frac{17}{12}x \cdot 1 + y \cdot 1 = 100 \quad | \cdot 12$$

$$17x + 12y = 1200 \quad (1)$$

Второй автобус велосипедист встречает в 10.20, т.е. спустя
 $12 \cdot 20 \text{ мин} = \frac{4}{3} \text{ ч}$ езды, т.е.

$$\frac{4}{3} \cdot x + \frac{4}{3} \cdot y = 100 \quad | \cdot 3$$

$$4x + 4y = 300$$

$$x + y = 75 \quad (2)$$

Составим и решим систему из уравнений (1) и (2):

$$\begin{cases} 17x + 12y = 1200 \\ x + y = 75 \quad | \cdot (-12) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 17x + 12y = 1200 \\ -12x - 12y = -900 \end{cases}$$

$$5x = 300$$

$$x = 60 \text{ (км/ч)}$$

$$60 + y = 75$$

$$y = 15 \text{ (км/ч)} - \text{искомая скорость}$$

Ответ: ~~15~~ 15 (км/ч)

Задание №2

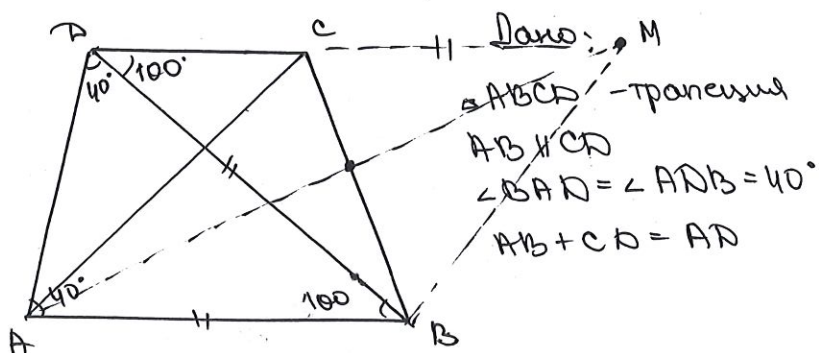
Мис 2/5

Сумма углов выпуклого n -угольника = $(n-2)180^\circ$ Для 73-угольника $\Sigma = (73-2) \cdot 180 = 12.780$

Заметим, что в 73-угольнике есть хотя бы один угол, превышающий 175° . Иначе сумма его углов не больше, чем $175 \cdot 73 = 12.775^\circ < 12.780^\circ$

Если все ~~углы~~ углы многоугольника кратны 5, то такой угол либо равен 180° (а такое невозможно, т.к. тогда он практически является не углом, а стороной), либо превышает 180° (а тогда многог. не является выпуклым, что противоречит условию) $\Rightarrow$ также невозможно.

Ответ: не существует

Задание №5 $\angle DAC = ?$

Решение:

- 1) $\triangle ABD$ - р/б (по признаку); $BD = AB$
- 2) $\angle ABD = 100^\circ$ по сумме $\triangle$ тр-ка; $\angle CDB = \angle ABD = 100^\circ$ (накрест лежащие).
- 3) Проведем $BM \parallel AC$ так, что M лежит на продолжении CD
 $\square ABMC$ - парал-м (по опрег) $\Rightarrow CM = AB$
- 4) $CM + CD = AB + CD = AD \Rightarrow \triangle ADM$ - р/б; $AD = DM$
- 5) $\angle DAM = \angle DMA = \frac{180^\circ - \angle ADM}{2} = 20^\circ \Rightarrow AM$ - биссектр. $\angle BAD$

мет 3/5

Задание №6.

$$abc + ab + bc + ac + a + b + c = (a+1)(b+1)(c+1) - 1$$

$$\Rightarrow (a+1)(b+1)(c+1) = 1024 = 2^{10}, \quad a, b, c \in \mathbb{Z}$$

т.е. каждый из множителей ~~является~~ является степенью двойки (возможно, нулевой)

* под нулевой степенью в тексте работы понимается степень с нулевым показателем, т.е. 2^0 .

1) Пусть все степени двойки ненулевые. Тогда ~~число~~ число способов «распределить» эти степени между множителями (т.е. кол-во ~~решений~~ решений в ~~целых~~ целых числах) совпадает с числом способов распределить 10 шариков по 3-м коробкам.

Для этого выложим все шары (одинаковых) в ряд и возьмем 2 перегородки, которые можно поставить в промежутки м/у шариками. Всего промежутков 9 $\Rightarrow$ число способов поставить перегородки, разбив шары на 3 группы $= C_2^9 = \frac{9!}{7!2!} = 36$

2) Пусть одна из степеней нулевая.

Для определенности предположим, что $(a+1) = 2^0$ ($a=0$) тогда степень двойки множителя $(b+1)$ принимает значения от 1 до 9, а степень двойки множителя $(c+1)$ однозначно задается множителем $(b+1) \Rightarrow$ число способов = 9

Аналогично при $(b+1) = 2^0$ и $(c+1) = 2^0$

$\Rightarrow$ Если одна из степеней нулевая, то кол-во решений = $9 \cdot 3 = 27$

3) Если две степени нулевые,

то один из множителей = 2^{10} . Всего множителей 3 $\Rightarrow$ число решений в таком случае = 3

Всего решений $36 + 27 + 3 = 66$

Ответ: 66 решений

Код участника:

(заполняется организатором)

1110 - 384

Задание №7

лист 4/5

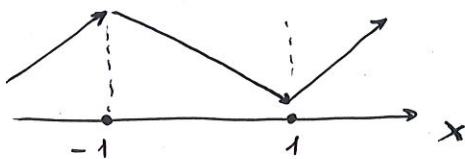
$$x^3 - 3x - 4 = 0$$

Пусть $f(x) = x^3 - 3x - 4$

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

$$f'(x) = 0 \text{ при } \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

Определим промежутки возрастания и убывания ф-ции:



$\Rightarrow$ точка $x = -1$ – локальный максимум
 точка $x = 1$ – локальный минимум

Рассмотрим значения ф-ции в этих точках:

1) при $x = -1$ $f(x) = -1 + 3 - 4 = -2$

так как до этого момента график ф-ции возрастает, то при $x \leq -1$ пересечений с Ox нет $\Rightarrow$ уравнение не имеет решений при $x \leq -1$

2) при $x = 1$ $f(x) = 1 - 3 - 4 = -6$

так как на промежутке $x \in [-1; 1]$ функция убывает, все принимаемые её значения отрицательные $\Rightarrow$ нет пересечений с Ox и уравнение не имеет корней при $x \in [-1; 1]$

Посмотрим, что происходит с функцией в точке

$$x_0 = \sqrt[5]{2,16^5}$$

$$2,16^5 \approx 47,018 > 46 \Rightarrow x_0 > \sqrt[5]{46}$$

$$f(x_0) = 2,16^3 - 2,16 \cdot 3 - 4 \approx 10,0777 - 6,48 - 4 = 10,0777 - 10,48 < 0$$

Учитывая, что на промежутке $x \in [1; +\infty)$ ф-ция возрастает, ~~все значения~~ все значения, принимаемые её на интервале $[1; \sqrt[5]{2,16^5}]$ отрицательны $\Rightarrow$ корней уравнения на этом интервале нет.

т.к. $x_0 > \sqrt[5]{46}$, то если t – корень уравнения,

то $t > x_0 > \sqrt[5]{46}$ $\square$ Q.E.D.

Задание 8

(мст 5 / 5)

Заметим, что все числа от 90 до 8100 могут быть покрашены в красный. Наименьшее из произведений этих чисел $= 90 \cdot 91 = 8190 > 8100 \Rightarrow$ условие выполняется, произведение не может быть красным, т.к. даже не выписан эти числа. Чисел от 90 до 8100 всего 8011

Дальше выясним, можно ли покрасить в красный еще какие-то числа в интервале $[1; 89]$

Заметим, что умножив любое число из интервала на одно из уже покрашенных ~~чисел~~ ~~умножим~~ ~~на 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 113, 127, 131, 137, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199, 211, 223, 227, 229, 233, 239, 241, 251, 257, 263, 269, 271, 277, 281, 283, 293, 307, 311, 313, 317, 331, 337, 347, 349, 353, 359, 367, 373, 379, 383, 389, 397, 401, 409, 419, 421, 431, 433, 439, 443, 449, 457, 461, 463, 467, 473, 479, 487, 491, 499, 503, 509, 521, 523, 527, 533, 541, 547, 557, 563, 569, 571, 577, 581, 587, 593, 599, 601, 607, 613, 617, 619, 623, 629, 631, 637, 641, 643, 647, 653, 659, 661, 667, 671, 673, 677, 683, 689, 691, 697, 701, 709, 713, 719, 727, 731, 733, 739, 743, 749, 757, 761, 769, 773, 779, 787, 791, 797, 809, 811, 817, 821, 823, 827, 829, 833, 839, 843, 853, 857, 859, 863, 869, 877, 881, 883, 887, 893, 897, 901, 907, 911, 913, 917, 919, 923, 929, 931, 937, 941, 943, 947, 953, 959, 967, 971, 973, 977, 983, 989, 991, 997, 1009, 1013, 1017, 1019, 1021, 1023, 1027, 1031, 1033, 1037, 1039, 1043, 1047, 1049, 1051, 1057, 1061, 1063, 1067, 1069, 1073, 1079, 1081, 1087, 1091, 1093, 1097, 1103, 1107, 1109, 1113, 1117, 1121, 1123, 1127, 1131, 1133, 1137, 1141, 1147, 1151, 1153, 1157, 1163, 1169, 1171, 1177, 1181, 1183, 1187, 1193, 1197, 1201, 1207, 1211, 1213, 1217, 1223, 1229, 1231, 1237, 1241, 1243, 1247, 1253, 1259, 1261, 1267, 1271, 1273, 1277, 1283, 1289, 1291, 1297, 1301, 1303, 1307, 1311, 1313, 1317, 1321, 1323, 1327, 1331, 1333, 1337, 1341, 1343, 1347, 1351, 1353, 1357, 1361, 1363, 1367, 1371, 1373, 1377, 1381, 1383, 1387, 1393, 1397, 1401, 1403, 1407, 1411, 1413, 1417, 1421, 1423, 1427, 1431, 1433, 1437, 1441, 1443, 1447, 1453, 1459, 1461, 1463, 1467, 1471, 1473, 1477, 1481, 1483, 1487, 1493, 1497, 1501, 1503, 1507, 1511, 1513, 1517, 1521, 1523, 1527, 1531, 1533, 1537, 1541, 1543, 1547, 1553, 1559, 1561, 1563, 1567, 1571, 1573, 1577, 1581, 1583, 1587, 1593, 1597, 1601, 1603, 1607, 1611, 1613, 1617, 1621, 1623, 1627, 1631, 1633, 1637, 1641, 1643, 1647, 1651, 1653, 1657, 1661, 1663, 1667, 1671, 1673, 1677, 1681, 1683, 1687, 1693, 1697, 1701, 1703, 1707, 1711, 1713, 1717, 1721, 1723, 1727, 1731, 1733, 1737, 1741, 1743, 1747, 1753, 1759, 1761, 1763, 1767, 1771, 1773, 1777, 1781, 1783, 1787, 1793, 1797, 1801, 1803, 1807, 1811, 1813, 1817, 1821, 1823, 1827, 1831, 1833, 1837, 1841, 1843, 1847, 1853, 1859, 1861, 1863, 1867, 1871, 1873, 1877, 1881, 1883, 1887, 1893, 1897, 1901, 1903, 1907, 1911, 1913, 1917, 1921, 1923, 1927, 1931, 1933, 1937, 1941, 1943, 1947, 1953, 1959, 1961, 1963, 1967, 1971, 1973, 1977, 1981, 1983, 1987, 1993, 1997, 2001, 2003, 2007, 2011, 2013, 2017, 2021, 2023, 2027, 2031, 2033, 2037, 2041, 2043, 2047, 2053, 2059, 2061, 2063, 2067, 2071, 2073, 2077, 2081, 2083, 2087, 2093, 2097, 2101, 2103, 2107, 2111, 2113, 2117, 2121, 2123, 2127, 2131, 2133, 2137, 2141, 2143, 2147, 2153, 2159, 2161, 2163, 2167, 2171, 2173, 2177, 2181, 2183, 2187, 2193, 2197, 2201, 2203, 2207, 2211, 2213, 2217, 2221, 2223, 2227, 2231, 2233, 2237, 2241, 2243, 2247, 2253, 2259, 2261, 2263, 2267, 2271, 2273, 2277, 2281, 2283, 2287, 2293, 2297, 2301, 2303, 2307, 2311, 2313, 2317, 2321, 2323, 2327, 2331, 2333, 2337, 2341, 2343, 2347, 2353, 2359, 2361, 2363, 2367, 2371, 2373, 2377, 2381, 2383, 2387, 2393, 2397, 2401, 2403, 2407, 2411, 2413, 2417, 2421, 2423, 2427, 2431, 2433, 2437, 2441, 2443, 2447, 2453, 2459, 2461, 2463, 2467, 2471, 2473, 2477, 2481, 2483, 2487, 2493, 2497, 2501, 2503, 2507, 2511, 2513, 2517, 2521, 2523, 2527, 2531, 2533, 2537, 2541, 2543, 2547, 2553, 2559, 2561, 2563, 2567, 2571, 2573, 2577, 2581, 2583, 2587, 2593, 2597, 2601, 2603, 2607, 2611, 2613, 2617, 2621, 2623, 2627, 2631, 2633, 2637, 2641, 2643, 2647, 2653, 2659, 2661, 2663, 2667, 2671, 2673, 2677, 2681, 2683, 2687, 2693, 2697, 2701, 2703, 2707, 2711, 2713, 2717, 2721, 2723, 2727, 2731, 2733, 2737, 2741, 2743, 2747, 2753, 2759, 2761, 2763, 2767, 2771, 2773, 2777, 2781, 2783, 2787, 2793, 2797, 2801, 2803, 2807, 2811, 2813, 2817, 2821, 2823, 2827, 2831, 2833, 2837, 2841, 2843, 2847, 2853, 2859, 2861, 2863, 2867,~~

Заметим, что если пазать покраску с более маленьких чисел, то некоторые из их произведений будут находиться среди выписанных зайцем, поэтому уже не смогут быть покрашены. Такая тактика нам не выгодна, ~~поэтому~~ поэтому мы максимизировали значение n , выбрав наибольшее кол-во чисел, произведение которых не находится среди выписанных вообще.

Über: $n = 8011$

Олимпиада 10 класс

Второй вариант

1. (10 баллов) Из города А в город Б, расстояние между которыми 300 км, в 9:00 вышли два автобуса, причем скорость одного из них в $\frac{5}{4}$ раз больше скорости другого. В то же время из города Б в город А выехал велосипедист. Первый автобус он встретил в 12:20, а второй – в 13:00. Найдите скорость велосипедиста, выразив её в км/ч.
2. (10 баллов) Существует ли выпуклый 91-угольник такой, что градусная мера каждого из его углов кратна 4?
3. (12 баллов) Решите систему уравнений в натуральных числах:
- $$\begin{cases} a^3 - b^3 - c^3 = 3abc \\ a^2 = 4b + 4c \end{cases} \quad \begin{matrix} a=2 & b=1 & c=3 \\ a=4 & b=3 & c=1 \end{matrix}$$
4. (12 баллов) Является ли простым число $2 \dots 234 \dots 4$? (сначала 2 написано 2024 раза, затем 4 написано 2024 раза).
5. (12 баллов) В трапеции $ABCD$ ($AB \parallel CD$) оказалось, что $\angle DAC = 10^\circ$, $\angle CAB = 30^\circ$ и $AB + CD = AD$. Найдите угол ADB .
6. (14 баллов) Сколько существует решений уравнения $abc + 2ab + 2bc + 2ac + 4a + 4b + 4c = 504$ в целых числах?
7. (14 баллов) Пусть t – корень уравнения $x^3 - 3x - 3 = 0$. Докажите, что t больше, чем $\sqrt[5]{39}$.
8. (16 баллов) Заяц выписал все натуральные числа от 1 до 8100. Волк покрасил n чисел Зайца в красный цвет так, чтобы произведение любых двух различных красных чисел не было красным. При каком наибольшем n это возможно?

N 1.

Пусть $x \frac{\text{км}}{\text{ч}}$ – скорость автобуса, тогда $x \cdot \frac{5}{4} \frac{\text{км}}{\text{ч}}$ – скорость I автобуса ($v_I > v_{II}$, т.к. автобус I раньше встретился с велосистом)
 Пусть $y \frac{\text{км}}{\text{ч}}$ – скорость велосиста, тогда:

1 встреча $\left\{ \begin{aligned} \frac{5}{4}x \cdot 3\frac{1}{3} + y \cdot 3\frac{1}{3} &= 300, & (3\frac{1}{3} \text{ часа, т.к. } 12:20 - 9:00 = 3:20 = 3\frac{1}{3} \text{ часа}) \\ x \cdot 4 + y \cdot 4 &= 300 & (\text{умножили на 4, т.к. } 13:00 - 9:00 = 4 \text{ часа}) \end{aligned} \right.$

$\left\{ \begin{aligned} \frac{50}{12}x + y \cdot \frac{10}{3} &= 300 \\ x + y &= 75 \end{aligned} \right. \quad \left\{ \begin{aligned} x \cdot 50 + 40y &= 3600 \\ x &= 75 - y \end{aligned} \right. \quad \begin{aligned} 50(75 - y) + 40y &= 3600 \\ 3750 - 10y &= 3600 \\ 10y &= 150 \\ y &= 15 \end{aligned}$

$15 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$ – скорость велосиста

$\left\{ \begin{aligned} y &= 15 \\ x &= 75 - 15 \end{aligned} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} y &= 15 \\ x &= 60 \end{aligned} \right.$

Ответ: $15 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$.

N 4

$\underbrace{2 \dots 2}_{2024 \text{ раза}} \underbrace{34 \dots 4}_{2024 \text{ раза}} = a$

$2 \dots 2 34 \dots 4 \equiv 4 \pmod{10}$ (последняя цифра числа 4) $\Rightarrow$ число $a \equiv 0 \pmod{2}$

т.к. a делится на 1, на 2, на a (на себя) без остатка, то оно простым не является.

Ответ: нет

№ 2

 ~~$(n-2) \cdot 180$ - сумма углов многоугольника~~ $(31-2) \cdot 180 = 16020$ - сумма углов 31-угольника. $\frac{16020}{31} = 176 \frac{4}{31}$ - градусная мера угла правильного 31-угольника.

Р.А.К. пош. каждый угол должен делиться на 4 без остатка, тогда

рассмотрим случай, когда все углы по 176, а один угол $176+4=180$ - тогда многоугольник будет иметь не 31 сторону, а 30. (т.к. стороны, которые образуют угол 180° будут являться одной "длинной" стороной) - этот вариант не подходит.Рассмотрим следующее в порядке убывания число: 4 (в порядке возрастания рассматривать нет смысла, т.к. след. угол: 4 = 180 и т.д.). Значит, ^{угол} ~~число~~ = 172, но тогда (даже если угол в 172° в многоу. единств., а остальные по 176), то минимум 2 угла будут по 180° (или один 184) - но в обоих случаях, если углы: 4, то либо будет не 31-угольник, либо 31-угольник будет невыпуклым (*).Если уменьшать ~~какой-либо~~ какой-либо угол, еще то другие углы будут увеличиваться и будут случаями, аналогичными (*). Тогда в выпуклом 31-угольнике градусная мера ~~всех~~ углов не может быть: 4.

Ответ: нет.

Код участника:

(заполняется организатором)

М10-31

№ 8.

Рассмотрим 3 случая:

1. Банк красит одно число от 1 до 90 и одно от 90 до 8100.

Тогда их произведение < 8100 . Значит произведение не может быть покрашено в красный цвет. Значит при такой раскраске мы получаем 2 новых красных числа, но как минимум одно (их произв) покрасить не можем. Оценка сверху: $n = \frac{8100 \cdot 2}{5} = 5400$

2. Банк красит ~~одн~~ два числа ≤ 90 . Тогда их произведение < 8100 . Аналогично предыдущему пункту, ~~мы не~~ банк красит 2 числа, но уже не сможет покрасить минимум 1 число.

3. Банк красит оба числа ≥ 90 . Тогда, он получает 2 красных числа, но при этом у него нет ограничений, в виде запрета на покраску их произведение, т.е. оно > 8100 . Итого: можно покрасить $n = 8100 - 89 = 8011$ чисел.

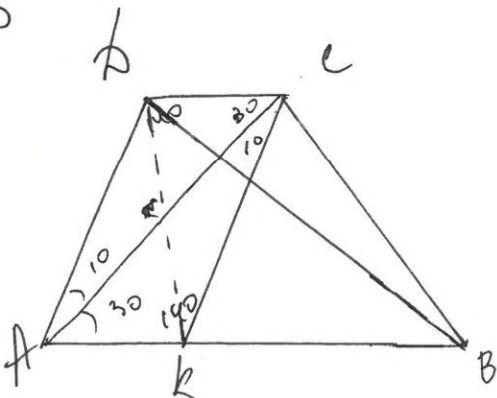
Очевидно, что стратегия 3 дает максимальное n , т.к. все варианты рассмотрены.

Пример: Банк просто красит все числа $\in [90; 8100]$

~~Уточним, что Банк может покрасить например,~~

Ответ: 8011

№ 5



$$AB + CA = AD$$

Решение:

$$\angle ADC = 140 = 180 - 10 - 30 \text{ (сгн. при } AB \parallel CD \text{ и сек. } AC \text{)}$$

$$\angle DCA = 30 \text{ (н/д при } AB \parallel CD \text{ и сек. } AC \text{)}$$

$$\text{Доп. угол. } CK \parallel AD.$$

$AK \parallel$ - парал. по признаку.

№3

$$\begin{cases} a^3 - b^3 - c^3 = 3abc & (1) \\ a^2 = 4b + c & (2) \end{cases} \quad a, b, c \in \mathbb{Z} \quad \mathbb{N}$$

$$(1): a^3 - (b+c)(b^2 - bc + c^2) = 3abc$$

$$a^3 - \left(\frac{a^2}{4}\right) \left((b+c)^2 - 3bc\right) = 3abc$$

$$a^3 - \left(\frac{a}{4}\right)^2 \left(\left(\frac{a^2}{4}\right)^2 - 3bc\right) = 3abc$$

$$a^2 - \frac{a}{4^2} \left(\frac{a^4}{256} - 3bc\right) = 3bc; \quad t = 3bc, \quad t > 0$$

$$a^2 - \frac{a}{4^2} \left(\frac{a^4}{256} - t\right) = t; \quad a^2 - \frac{a^5}{4096} + \frac{at}{16} = t$$

$$a^2 \left(1 - \frac{a^3}{4096}\right) = t \left(1 - \frac{a}{16}\right)$$

$$a^2 \left(1 - \left(\frac{a}{16}\right)^3\right) = t \left(1 - \frac{a}{16}\right); \quad a^2 \left(1 - \frac{a}{16}\right) \left(1 + \frac{a}{16} + \frac{a^2}{16^2}\right) = t \left(1 - \frac{a}{16}\right)$$

$$\left(a^2 \left(1 + \frac{a}{16} + \frac{a^2}{16^2}\right) - t\right) \left(1 - \frac{a}{16}\right) = 0$$

$$1) \frac{a^2}{1 + \frac{a}{16} + \frac{a^2}{16^2}} = t \quad 2) t - \frac{a}{16} = 0$$

$$\text{из (2)} \quad 4(b+c) \left(1 + \frac{a}{16} + \frac{a^2}{16^2}\right) = 3bc \quad \leftarrow t = 3bc$$

$$\text{из (1)}: a^2 = 4(b+c) \Leftrightarrow a^2 : 4; \quad a^2 : 2$$

~~Если $a=4, b=2$ и $c=2$ — решение~~

$$\begin{cases} a=4 \\ b=2 \\ c=2 \end{cases} \text{ — подходит}; \quad \begin{cases} a=4 \\ b=1 \\ c=3 \end{cases} \text{ — подходит}; \quad \begin{cases} a=4 \\ b=3 \\ c=1 \end{cases} \text{ — подходит}$$

Ответ: (4, 2, 2), (4, 1, 3), (4, 3, 1)

N 6

$$abc + 2ab + 2bc + 2ac + 4a + 4b + 4c = 504 \quad ; abc : 2$$

$$abc + (a+b+c)^2 - a^2 - b^2 - c^2 + 4(a+b+c) = 504$$

$$abc + (a+b+c+4)(a+b+c) - (a^2+b^2+c^2) = 504$$

$$\begin{cases} a=6 \\ b=6 \\ c=6 \end{cases} \text{ - подходят}$$

Ответ: 1 вариант
(6, 6, 6)

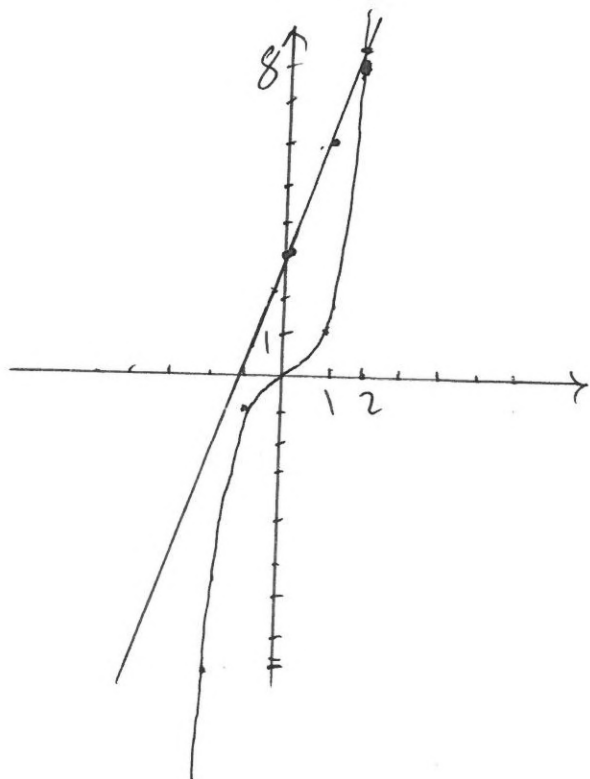
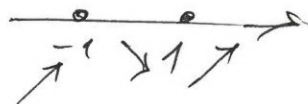
N 7

$$x^3 - 3x - 3 = 0$$

$$f(x) = x^3 - 3x - 3 \quad ; \quad f'(x) = 3x^2 - 3 \quad ; \quad f'(x) = 3(x-1)(x+1)$$

-1 - max; 1 - min.

$$x^3 = 3(x+1)$$



$$x^3 = 3(x+1)$$

1) x^3 при $x = \sqrt[5]{39}$

$$x^3 = \sqrt[5]{39^3} \approx 9,00821544$$

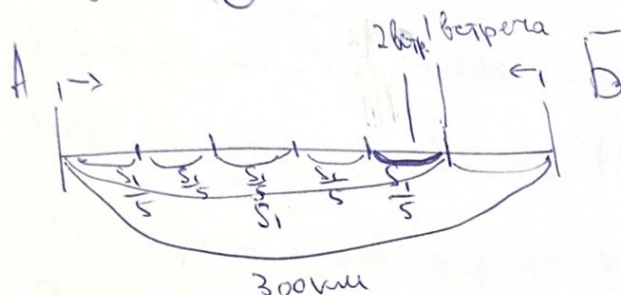
2) $3(x+1)$ при $x = \sqrt[5]{39}$

$$x^3 \neq 3(x+1) \approx 9,242149648$$

$x^3 > 3x+1$
по графика $\Rightarrow f > \sqrt[5]{39}$



Задача ①



Пусть скорость автобуса который быстрее $\frac{5}{4}x$ км/ч, а другого x км/ч. Скорость велосипедиста y км/ч

За 3 часа 20 минут (с 8:00 до 12:20) быстрый автобус проехал участок S_1 , тогда $\frac{S_1}{5}$ проехал за $\frac{3 \cdot 2 \cdot 20}{5} = 40$ минут.

Велосипедист и «медленный» автобус за ~~40~~ 40 минут суммарно проехали $\frac{S_1}{5}$ участок (из условия). То есть скорость сближения «медленного» автобуса и велосипедиста $(x+y)$ км/ч равна скорости «быстрого» автобуса $\left(\frac{5}{4}x\right)$ км/ч. (т.к. за одно и то же время проехали равное расстояние.) $x+y = \frac{5}{4}x$

Заметим, что за 3 часа 20 минут $\left[y = \frac{1}{4}x\right]$ велосипедист + «быстрый» автобус суммарно проехали весь путь!

$$\frac{10}{3} \left(\frac{1}{4}x + \frac{5}{4}x \right) = 300 \quad (3 \cdot 20 \text{ минут} = \frac{10}{3} \text{ часа})$$

$$\frac{10}{3} \cdot \frac{6}{4}x = 300 \Leftrightarrow \frac{60}{12}x = 300 \Leftrightarrow 5x = 300 \Leftrightarrow x = 60 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4}x = 15 \text{ (км/ч)}$$

Ответ: 15 км/ч.

Задача 2

Предположим, что такой многоугольник существует,
Тогда его сумма углов равна $(81-2) \cdot 180^\circ = 89 \cdot 180^\circ = 16020^\circ$,

Т.к. сумма углов n -угольника равна $(n-2) \cdot 180^\circ$,

~~Так как любой угол кратен 4~~ Так как градусная мера
любого угла кратна 4, то наибольшее возможное зна-
чение угла это 176° , потому что четырехугольник
выпуклый. Значит, максимально-возможная сумма углов
это $176 \cdot 81 = 16016$, что меньше 16020 , значит наше
предположение неверно, противоречие.

Ответ: не существует

Код участника:

(заполняется организатором)

M10-22

Задача 4

2...238...8

Рассмотрим наше число по частям

$\overbrace{222 \dots 222}^A$
 $\overbrace{22388}^B$
 $\overbrace{88 \dots 888}^C$

обозначим за части
 Часть А - 2022 двойки
 Часть С - 2022 восьмёрки
 Часть В - число 22388 между А и С

Число $222222 = 222 \cdot 1001$, так как $1001 : 13 = 77$

$222222 : 13$. Аналогично $888888 = 888 \cdot 1001 : 13$

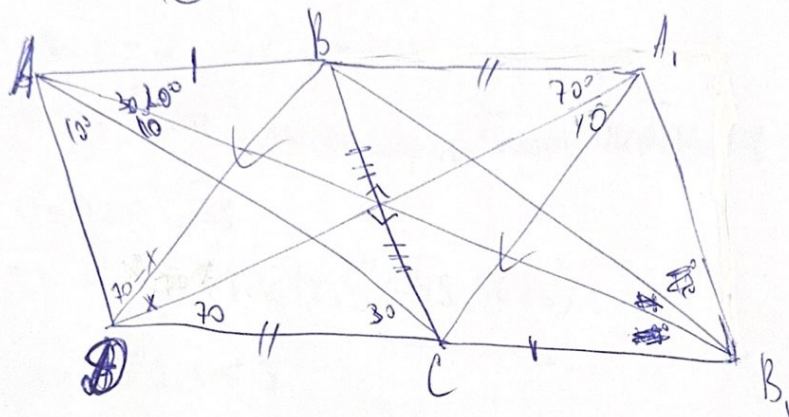
$2022 : 6 = 337$, т.е. Часть А состоит из 337 блоков числа
 222222 . Аналогично 888888 Часть С из 337 блоков
 числа 888888 . Получается А и С кратны 13.

$22388 = 13 \cdot 1723$, значит Часть В кратна 13

В итоге имеем, что $A, B, C : 13 \Rightarrow$ наше число
 кратно 13, а так оно очевидно больше 13, то
 является составным

Ответ: не является

Задача 5



Построим так же Трапецию AB_1D бо внешнюю BC -трапецию $ABCD$, имея параллелограмм AA_1B_1D (т.к. $AB_1 = CD$ и $AB_1 \parallel CD$)

Т.к. $AD = AB + CD$, то $AD = AA_1$, и $AD = B_1D$
 $\begin{cases} AA_1 = AB + BA_1 = AB + CD, \\ B_1D = CD + B_1C = CD + AB \end{cases}$

$\triangle AB_1D$ равнобедренный с основанием AB_1 ,
 $\triangle ADA_1$ равнобедренный с основанием AA_1 ,
 BA_1 -ке ACD $\angle DAC = 10^\circ$, $\angle ACD = 30^\circ$ (т.к. $\angle ACD = \angle BAC$ в $\triangle ABC$)

$\Rightarrow \angle ADC = 180^\circ - 10^\circ - 30^\circ = 140^\circ$. Т.к. $\triangle ADB_1$ равност., то $\angle DAB_1 = \angle DB_1A = \frac{180^\circ - 140^\circ}{2} = 20^\circ$

$\Rightarrow$ т.к. $\angle DAC = 10^\circ$, то $2 \angle CAB_1 = 10^\circ \Rightarrow \angle B_1AB = 10^\circ$
 $\triangle ADA_1$ (он равнобед.) $\angle DAA_1 = 10^\circ + 30^\circ = 40^\circ \Rightarrow \angle ADA_1 = \angle AAD = \frac{180^\circ - 40^\circ}{2} = 70^\circ$

Из симметрии $\angle CAB_1 = \angle CA_1D = 10^\circ$

$\begin{cases} CD = BA_1, \\ CD \parallel BA_1, \end{cases} \Rightarrow BA_1CD$ параллелограмм, тогда $\angle BDC + \angle BA_1C = 180^\circ \Rightarrow (70^\circ + x) + (70^\circ + 10^\circ) = 180^\circ$
 $x = 60^\circ \Rightarrow \angle ADB = 140^\circ - 60^\circ - 70^\circ = 10^\circ$

Ответ: 10°

Пусть уравнение имеет корни x_1 и x_2 ~~меньше~~ ^{больше} $\sqrt{39}$

$$\sqrt[5]{38} < 2,5 \text{ (т.к. } (2,5)^4 = 38,0625)$$

$\sqrt[5]{3 \cdot 3^3} < 3^3 \Rightarrow x_0^5 < 3x_0 + 3 \Rightarrow$ ~~не~~ не имеет корней
уравнение $x^5 - 3x - 3 = 0$

2) ~~$x_0 \leq 0$ and $x_1 = x_0 = 0 \rightarrow x_1 \geq 0$ and $x_2 \geq 0$~~
 $x_0 < 0$

Zagana ③

$$\begin{cases} a^3 + b^3 + c^3 = 3abc \\ a^2 + 4b + 4c \end{cases}$$

$$b=2, c=2$$

Answer: $a=4, b=2, c=2$

Код участника:

(заполняется организатором)

M10-22

Задача 8

Ответ: 8011 чисел (Все числа от 80 до 8100)

Пример работает так как минимальное произведение ~~этих~~ среди этих чисел это $80 \cdot 81 = 8180 > 8100$.

Докажем, что меньше быть не может. Пусть вы покрасили хотя бы ~~8012~~ 8012 чисел, тогда вы покрасили хотя бы 2 числа ~~не~~ не больших 80, тогда

произведение этих чисел меньше 8100 и мы не сможем покрасить его. ~~Тогда образ красим числа не большие 80~~

~~Тогда образ красим числа не большие 80~~

Тогда ~~произведение покрасить не сможем и~~

~~все равно получается 8011. Красит себе раз числа не~~

~~больше 80~~

Код участника:

(заполняется организатором)

М10-286

Дано.

$$S = 300 \text{ км.}$$

v_{A1} – скорость I автомобиля

$$v_{A1} = 0$$

$$v_{A2} = \frac{5}{4} v_{A1} = \frac{5}{4} v$$

v_B – скорость велосипедиста

$$v_B = ?$$

Н1.

Решение.

Т.к. первая встреча в 12:20,
а начало в 9:00, то прошло
3 часа 20 мин, т.е. $3\frac{1}{3}$ ч. $t_1 = 3\frac{1}{3}$ ч.
Т.к. вторая встреча в 13:00, а
начало в 9:00, то прошло 4 ч.
 $t_2 = 4$ ч.

Подставим числа.

$$\begin{cases} t_1 = \frac{S}{v_{A2} + v_B} \\ t_2 = \frac{S}{v_{A1} + v_B} \end{cases} ; \begin{cases} \frac{10}{3} = \frac{300}{\frac{5}{4}v + v_B} \\ 4 = \frac{300}{v + v_B} \end{cases} ; \begin{cases} 300 = \frac{25}{6}v + \frac{10}{3}v_B \quad | \cdot \frac{24}{25} \\ 300 = 4v + 4v_B \end{cases}$$

$$(1) 288 = 4v + \frac{16}{5}v_B$$

$$(2) 300 = 4v + 4v_B$$

$$v_B = \frac{3 \cdot 288 - 2 \cdot 300}{4} = 15 \left(\frac{\text{км}}{\text{ч}} \right)$$

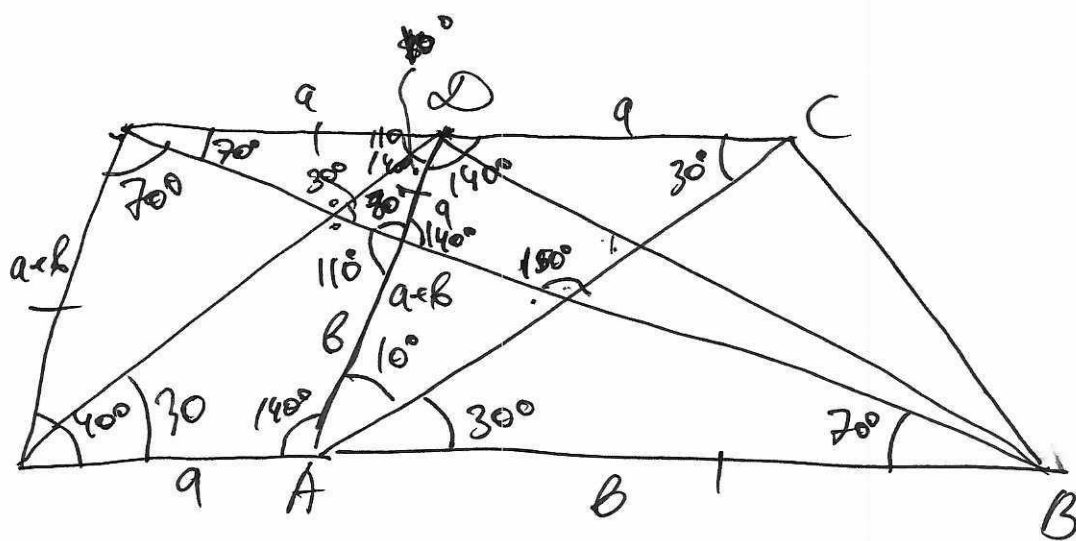
$$\text{Ответ. } 15 \frac{\text{км}}{\text{ч.}}$$

$$(2) - (1): 300 - 288 = 4v + v_B - 4v - \frac{16}{5}v_B = 12$$

$$2 \frac{4}{5}v_B = 12$$

$\sqrt{2}$

Т.к. многоугольник выпуклый, то для каждого из углов α_i верно, что $\alpha_i < 180^\circ$, но при условии, что $\alpha_i \geq 4$, то $\alpha_i \leq 176^\circ$, в таком случае $\sum_{i=1}^n \alpha_i \leq 176 \cdot n = 2 \cdot 176 \cdot 91 = 16016$, т.е. $S \leq 16016$ и $S = 16020$ — противоречие, т.е. такого многоугольника не существует.



Oster.

Код участника:

(заполняется организатором)

М10-246

№4.

$n \geq \underbrace{2 \dots 2}_{2024 \text{ раз}} \underbrace{3 \underbrace{4 \dots 4}_{2024 \text{ раз}}}$, т.к. n оканчивается на 4, то

$n \neq 2$ по признаку делимости на 2, т.к. $n \neq 2$, то n не может быть простым, т.к. у n хотя бы 3 делителя: $n, 1, 2$, а у простых чисел их ровно 2. ~~Значит~~

№8.

Рассмотрим такую раскраску: числа от 30 до 8100 покрашены в красный, тогда все произведения не попадают в красные 8100. Добавив число меньше 30, мне придется убрать хотя бы одно число из этой раскраски, т.к. это число в произведении с 30 даст закрашенное число. Добавив все новые числа, они будут давать всегда новые произведения с 30, что заставляет каждый раз убирать хотя бы одно число. Значит больше чисел, чем в этой раскраске добить не получится. Значит закрашено $8100 - 30 + 1 = 8071$ чисел.

Ответ: 8071 чисел.

$$f(x) = x^3 - 3x - 3 = 0 \quad \sqrt{7}.$$

Узнаем, на каких промежутках функция растёт/убывает. $(x^3 - 3x - 3)' = 3x^2 - 3 = 0$

$$3(x+1)(x-1) = 0$$

$$x = -1$$

$$x = 1$$

Знак производной меняется в точках -1 и 1 , значит, что на промежутке $(-\infty; -1)$ функция возрастает, убывает, монотонна, возьмём 2 точки из этого промежутка и посчитаем значение $f(x)$

$$f(-3) = (-3)^3 - 3 \cdot (-3) - 3 = -27 + 9 - 3 = -21, \text{ т.к. на этом}$$

промежутке функция монотонна и $-3 < -2$ $f(-3) < f(-2)$ то функция на этом промежутке растёт. В точке -1

$f(-1) = -1 + 3 - 3 = -1$, т.е. функция на этом промежутке не достигает. Затем функция "заходит" в промежуток $[-1; 1]$, где она тоже монотонна. $f(-1) = -1$; $f(1) =$

$1 - 3 - 3 = -5$ $1 > -1$; $f(1) < f(-1)$, а промежуток $[-1; 1]$ монотонный, значит функция на нём убывает, и не может достигнуть нуля, т.е. локальный максимум в точке -1 и равен $f(-1) = -1$. Затем промежуток $(1; +\infty)$.

$$f(2) = 2^3 - 3 \cdot 2 - 3 = 8 - 6 - 3 = -1 \quad 2 < 3$$

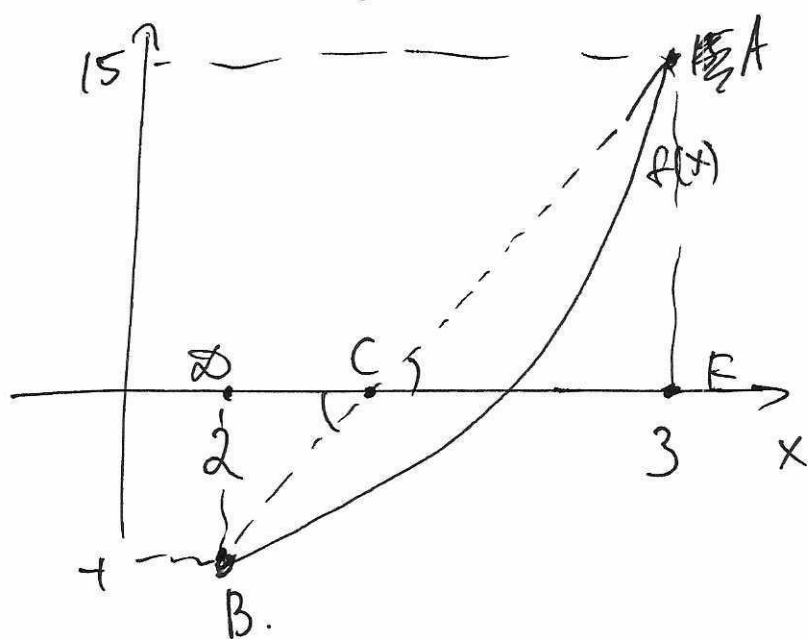
$$f(3) = 27 - 3 \cdot 3 - 3 = 27 - 12 = 15. \quad f(2) < f(3) \quad \text{Функция на проме-}$$

Код участника:

(заполняется организатором)

МЮ-246

мгновенно $(1+\infty)$ растёт. и значит единственный
 раз может пересечь O . $f(2) < 0$ $f(3) > 0$, значит
 если $f(x) = 0$, то $2 < x < 3$. Рассмотрим момент
 пересечения функций оси абсцисс. Т.А соответствует.



$f(3)$
 Т.В соответствует $f(2)$,
 соединим точки А и В,
 Т.к $f'(x)$ на проме-
 жутке от 2 до 3
 растёт $(x^2 - 3)$, то
 $f(x)$ „выпуклая“, т.е

пересечение прямой АВ с Ox — А делит левое пересечение
 $f(x)$ с mx . Найдём координату Т.С. $C = (2\frac{1}{16} | 0)$
 из $2\frac{1}{16}$ у подобия треугольников $\triangle CBD \sim \triangle CAE$

$$CD + CE = \frac{1}{2} (E_x - D_x) = 3 - 2 = 1$$

$$\frac{CD}{CE} = \frac{BD}{AE} = \frac{1}{15}$$

$$CD = \frac{1}{15} CE$$

$$CD = \frac{1}{16} \Rightarrow C_x = D_x + CD = 2 + \frac{1}{16} = 2\frac{1}{16} = \frac{33}{16}$$

Сравним. $\sqrt[5]{39} \vee \frac{33}{16}$

Код участника:

(заполняется организатором)

МНО - 246

$$39 \quad \vee \quad \frac{33^5}{16^5}$$

$$33^5 = 33^2 \cdot 33^2 \cdot 33 = 1089^2 \cdot 33 \quad \textcircled{E}$$

$$\begin{array}{r} 39 \cdot 16^5 \\ \hline 1089 \cdot 1089 \cdot 33 \\ \hline 3247 \\ 32670 \\ \hline 35937 \end{array} \quad \begin{array}{r} 33^5 \\ \hline 1089 \cdot 1089 \cdot 33 \\ \hline 3247 \\ 32670 \\ \hline 35937 \end{array} \quad *$$

$$\begin{array}{r} 33 \\ \times 33 \\ \hline 99 \\ 990 \\ \hline 1089 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 33 \quad 33^2 \\ \times 33 \\ \hline 99 \\ 990 \\ \hline 1089 \end{array}$$

$$\textcircled{E} 19135393$$

$$\begin{array}{r} 35937 \\ \times 1089 \\ \hline 2323433 \\ 2874960 \\ 35937000 \\ \hline 19135393 \end{array}$$

$$16^5 = 2^{20} = (2^{10})^2 = (1024)^2$$

$$\begin{array}{r} 1024 \\ \times 1024 \\ \hline 4096 \\ 20480 \\ 1024000 \\ \hline 148576 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1024 \\ \times 1024 \\ \hline 4096 \\ 20480 \\ 1024000 \\ \hline 148576 \end{array}$$

Окажется, что такой оценки ~~не~~ ^{не} хватит, поэтому.

$$\begin{array}{r} 48576 \\ \times 39 \\ \hline 4794464 \end{array}$$

Рассмотрим на множестве функций f в точке $\sqrt[5]{39}$

$$f(\sqrt[5]{39}) = \sqrt[5]{39^3} - 3\sqrt[5]{39} - 3$$

$$\sqrt[5]{39^3} - 3\sqrt[5]{39} - 3$$

$$\sqrt[5]{39^3} - 3(1 + \sqrt[5]{39})$$

сравним с нулем

$$2 < \sqrt[5]{39} < 3$$

$$\sqrt[5]{39} < 3$$

$4794464 < 19135393$, т.е. $\sqrt[5]{39}$ не является корнем $f(x)$, где $f(x) = 0$, значит для всех корней верно, что они больше 5. т.е. f имеет только один корень

Код участника:

(заполняется организатором)

110-246

Рассмотрим такие точки z_5, r_0 .

$$f(2,5) = 5,625.$$

$$C_x = \frac{0,5}{6,625} \cdot 2 = 2 \cdot \frac{1}{13,25} = 2 \cdot \frac{4}{53} = \frac{110}{53}.$$

$$\sqrt[5]{39} < \frac{110}{53}$$

$$39 \cdot 53^5 < 110^5, \text{ это оценки хватает,}$$

$\sqrt[5]{39}$ левее т. С, т. С левее т. X, где $f(x) = 0$,
хотим, что

т. е. $\sqrt[5]{39}$ левее корня, этот корень единственный,
значит для всех корней верно, что они больше, чем $\sqrt[5]{39}$.