

М11-073

Код участника
(заполняется организатором)



**Олимпиадная работа
заключительного этапа
«Всероссийская олимпиада школьников "Миссия
выполнима. Твоё призвание - финансист!" 2023-2024
г.»
«(Математика 11 класс)»**

Вариант № 2

«27 января 2024 г.»

Никакие другие записи на титульном листе делать не разрешается

2211-073

Код участника

Всероссийская олимпиада школьников «Миссия выполнима. Твое призвание – финансист!» 2023/2024 уч.г.

Бланк проверки работы

Математика 11 класс

№ задания	ФИО эксперта	Балл	ФИО эксперта	Балл	Итоговый балл
1	Андреева	10	Гурьева	10	10
2	Савина	10	Маломы	10	10
3	Кремь	12	Ушаков	12	12
4	Маломы	5	Савина	5	5
5	Кремь	12	Ушаков	12	12
6	Гурьев	3	Конков	3	3
7	Конков	3	Степанов	3	3
8	Ушаков	12	Кремь	12	12
ИТОГО					67

Бланк ответа

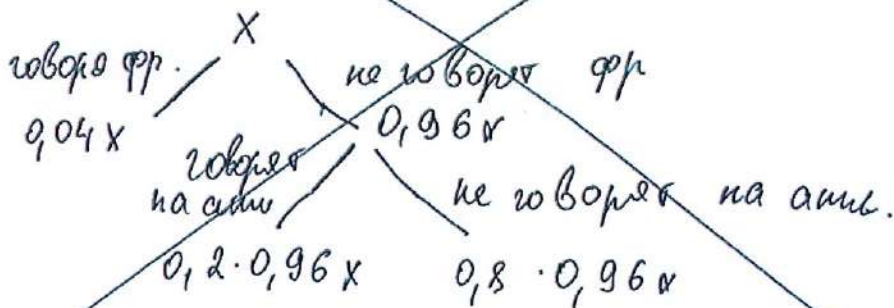
Всероссийская олимпиада школьников «Миссия выполнима. Твое призвание – финансист!»

Код участника: МН-073

(заполняется организатором)

№4

Пусть людей не говорящих по английски x , тогда
говорящих по-французски $0,04x$, а не говорящих по-
французски $0,96x$



Получается, что не говорящих по-французски
людей $0,96x$, а не говорящих по англ $0,04x + 0,8 \cdot 0,96x =$
 $0,822x \Rightarrow \frac{0,96x}{0,822x} = \frac{960}{822} = \frac{240}{193}$

№1

Пусть по французски говорят и по-английски не говорят
 n -человек - это 96% от числа людей не говорящих
по английски. Тогда по английски не говорят $\frac{n}{0,96}$ людей,
с другой стороны эти n -человек - это 80% от числа
людей не говорящих по французски, т.е. по французски
не говорят $\frac{n}{0,8}$ людей, тогда ответ это $\frac{n}{0,8} : \frac{n}{0,96} =$
 $= \frac{\frac{n}{0,8}}{\frac{n}{0,96}} = \frac{0,96}{0,8} = \frac{96}{80} = 1,2$ + (10%)

ср d

Бланк ответа

Всероссийская олимпиада школьников «Миссия выполнима. Твое призвание – финансист!»

Код участника: 111-073

(заполняется организатором)

№Оценим $A+B$;

$$3A+5B + 2(4A+3B) \leq 11 + 2 \cdot 10 = 31$$

$$11 \cdot (A+B) \leq 31$$

$$A+B \leq \frac{31}{11}$$

Теперь проверим случай равенства:

$$\begin{cases} 3A+5B=11 & / \cdot 4 \\ 4A+3B=10 & / \cdot 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 12A+20B=44 \\ 12A+9B=30 \end{cases}$$

$$11B = 14$$

$$B = \frac{14}{11} \Rightarrow A = \frac{11-5B}{3} = \frac{11-5 \cdot \frac{14}{11}}{3} = \frac{\frac{121-70}{11}}{3} =$$

$$= \frac{51}{33} = \frac{17}{11}; \text{ Тогда } 2A+4B = 7 \cdot \frac{17}{11} + 4 \cdot \frac{14}{11} =$$

$$= \frac{119+56}{11} = \frac{175}{11} = 15 \frac{10}{11} < 18; \text{ Так, что } A = \frac{17}{11}, B = \frac{14}{11}$$

удовлетворяет неравенство из условия и тогда

$$A+B = \frac{31}{11}$$

105

N3

Рассмотрим $p(n) + p(34-n) : p(n) + p(34-n) =$

$$= \frac{(-3)^n}{3^n + 3^{17}} + \frac{(-3)^{34-n}}{3^{34-n} + 3^{17}} = \frac{(-1)^n \cdot 3^n}{3^n + 3^{17}} + \frac{(-1)^{34-n} \cdot 3^{34-n}}{3^{34-n} + 3^{17}} =$$

$$= \frac{(-1)^n}{1 + \frac{3^{17}}{3^n}} + \frac{(-1)^{34-n}}{1 + \frac{3^{17}}{3^{34-n}}} = \frac{(-1)^n}{1 + 3^{17-n}} + \frac{(-1)^{34-n} \cdot (-1)^{-n}}{1 + 3^{17-(34-n)}} =$$

$$= \frac{(-1)^n}{1 + 3^{17-n}} + \frac{(-1)^{34-n}}{1 + 3^{n-17}} = (-1)^n \left(\frac{1}{1 + 3^{17-n}} + \frac{3^{17-n}}{3^{17-n} + 3^{(n-17)+(17-n)}} \right)$$

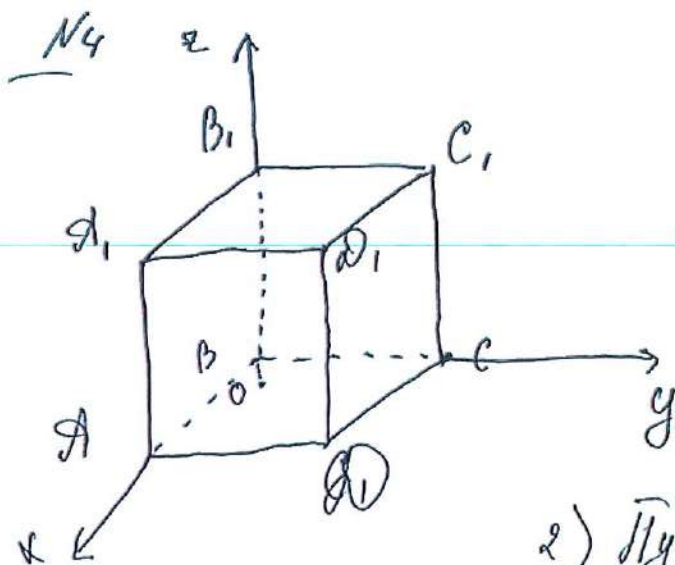
$$= (-1)^n \left(\frac{1}{1 + 3^{17-n}} + \frac{3^{17-n}}{3^{17-n} + 1} \right) = (-1)^n \cdot 1 = (-1)^n;$$

Тогда $\sum_{i=1}^{33} p(i) = p(1) + p(2) + p(3) + \dots + p(33);$

$$\begin{aligned} 2n &= (p(1) + \dots + p(33)) + (p(33) + p(32) + \dots + p(1)) = \\ &= (p(1) + p(33)) + (p(2) + p(32)) + \dots + (p(33) + p(1)) = \\ &= (-1)^1 + (-1)^2 + \dots + (-1)^{33} = (-1+1) + (-1+1) + (-1+1) + \dots + (-1) = \\ &= -1; \end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^{33} p(i) = -1$$

(12)



1) Введем прямоугольную систему координат с центром $B(0;0;0)$ и осями x вдоль AB ; y вдоль BC и z вдоль BB_1 .

2) Пусть $O(x; y; z)$ — центр сферы. Расстояние до B : $OB = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.
Проекция O на AD — точка $(1; y; 0)$. Расстояние от O до $AD = \sqrt{(x-1)^2 + z^2}$;

Проекция O на AA_1 — точка $(1; 0; z)$. Расстояние от O до $AA_1 = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$;

Проекция O на A_1B_1 — точка $(x; 0; 1)$. Расстояние от O до $A_1B_1 = \sqrt{y^2 + (z-1)^2}$.

3) Все 4 расстояния должны совпасть, когда:

$$\sqrt{(x-1)^2 + z^2} = \sqrt{(x-1)^2 + y^2} \Rightarrow \cancel{y^2 + (z-1)^2} z^2 = y^2; |z| = |y|.$$

$$4) x^2 + y^2 + z^2 = (x-1)^2 + y^2 = y^2 + (z-1)^2 \Rightarrow x^2 + 2y^2 = (x-1)^2 + y^2;$$

$$(x-1)^2 = (z-1)^2$$

6) $|x-1| = |z-1|$. Если $x-1 = z-1$, то $x = z$.

$$z = x = \frac{1-y^2}{2} = \frac{1-z^2}{2}; \quad 2z = 1 - z^2; \quad z^2 + 2z - 1 = 0$$

$$z = \frac{-2 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{2}}{1}$$

При $z = \sqrt{2}-1$; $x = \sqrt{2}-1$ ~~и~~ $y = z$ либо $y = -z \Rightarrow$

При $y = z \Rightarrow$

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= 3(\sqrt{2}-1)^2 = 3(3-2\sqrt{2}) = 9-6\sqrt{2}; \quad (x-1)^2 + z^2 \\ &= (x-1)^2 + y^2 = y^2 + (z-1)^2 = (\sqrt{2}-1)^2 + (\sqrt{2}-1-1)^2 = \\ &= 3-2\sqrt{2} + 6-4\sqrt{2} = 9-6\sqrt{2} \Rightarrow O((\sqrt{2}-1), (\sqrt{2}-1), (\sqrt{2}-1)) \end{aligned}$$

Подходит; $R_c = \sqrt{3 \cdot (\sqrt{2}-1)^2} = \sqrt{3} \cdot (\sqrt{2}-1) = \sqrt{6} - \sqrt{3}$.

2) При $y = -z$;

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= 3(\sqrt{2}-1)^2 = (9-6\sqrt{2}); \quad (x-1)^2 + z^2 = (x-1)^2 + y^2 = \\ &= y^2 + (z-1)^2 = (\sqrt{2}-1)^2 + (\sqrt{2}-1-1)^2 = 9-6\sqrt{2}; \Rightarrow \end{aligned}$$

$R_c = \sqrt{9-6\sqrt{2}}$, если $z = -\sqrt{2}-1$

3) Если $z = -\sqrt{2}-1$, то $x = -\sqrt{2}-1$; $y^2 = z^2$; ~~$x^2 + y^2$~~

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3(-\sqrt{2}-1)^2 = 3(3+2\sqrt{2}) = 9+6\sqrt{2}$$

$$(x-1)^2 + z^2 = (x-1)^2 + y^2 = y^2 + (z-1)^2 = (-1-\sqrt{2}-1)^2 + (-1-\sqrt{2})^2 =$$

$$R_c = \sqrt{3(3-1-\sqrt{2})^2} = \sqrt{3(1+\sqrt{2})} = \sqrt{6} + \sqrt{3}.$$

г) Если $x-1=-(z-1)$, то $1-z=x-1$; $z=1-(x-1)=2-x$;

$$z = 2-x = 2 - \frac{1-y^2}{2} = \frac{3}{2} + \frac{z^2}{2};$$

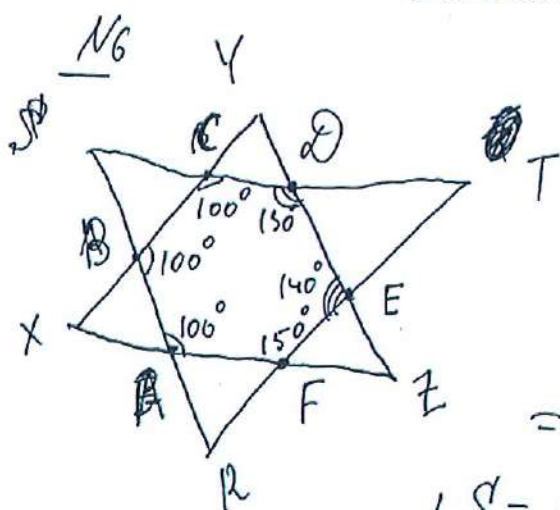
$$z^2 + 3 = 2z^2$$

$$z^2 - 2z^2 + 3 = 0$$

$$(z-1)^2 + 2 = 0; \Rightarrow \text{нет решений т.к. } (z-1)^2 \geq 0$$

5б, не
найдено
радиусов

Ответ: $\sqrt{6}-\sqrt{3}$ или $\sqrt{6}+\sqrt{3}$.



1) Задача сводится к $\triangle KAB$.

$$\angle X = 180 - (180 - \angle A) - (180 - \angle B) =$$

$$= \angle A + \angle B - 180 = 20^\circ. \text{ Аналогично}$$

$$\angle S = \angle B + \angle C - 180^\circ = 20^\circ;$$

$$\angle Y = \angle C + \angle D = 180^\circ = 50^\circ;$$

$$\angle T = \angle D + \angle E - 180^\circ = 90^\circ$$

$$\angle Z = \angle E + \angle F - 180^\circ = 110^\circ$$

$$\angle R = \angle A + \angle F - 180^\circ = 70^\circ; \Rightarrow \text{Треугольники с углами:}$$

$$(20^\circ; 50^\circ; 110^\circ) \text{ и } (20^\circ; 90^\circ; 70^\circ)$$

Ответ: $20^\circ; 50^\circ; 110^\circ$ и $20^\circ; 90^\circ; 70^\circ$

N5

$$\operatorname{arctg} \frac{2x-1}{x+2} + \operatorname{arctg} \frac{x+3}{3x-1} = x$$

$$|\operatorname{arctg} t| < \frac{\pi}{2} \Rightarrow |x| < \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

Если $x \neq \pm \frac{\pi}{2}$, то $\operatorname{tg} x$ определен и $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} (\operatorname{arctg} \frac{2x-1}{x+2} + \operatorname{arctg} \frac{x+3}{3x-1})$

$$= \operatorname{tg} \left(\operatorname{arctg} \frac{2x-1}{x+2} + \operatorname{arctg} \frac{x+3}{3x-1} \right) =$$

$$= \frac{\frac{2x-1}{x+2} + \frac{x+3}{3x-1}}{1 - \frac{2x-1}{x+2} \cdot \frac{x+3}{3x-1}} = \frac{\frac{(2x-1)(3x-1) + (x+3)(x+2)}{(x+2)(3x-1)}}{\frac{(x+2)(3x-1) - (2x-1)(x+3)}{(x+2)(3x-1)}} =$$

$$= \frac{2x^2 + 7}{x^2 + 1}$$

П.к. $x^2 + 1 > 0$, т.е. $x = \operatorname{arctg} 7 + \pi k$; и т.д.

$$-\pi < x < \pi;$$

$x = \operatorname{arctg} 7$, либо $x = \operatorname{arctg} 7 - \pi$, т.е.

нормаль могут быть $\operatorname{arctg} 7$; $\operatorname{arctg} 7 - \pi$; $\frac{\pi}{2}$ и $-\frac{\pi}{2}$

Если $x = \pm \frac{\pi}{2}$, то ~~сумма $\operatorname{arctg} \frac{2x-1}{x+2} + \operatorname{arctg} \frac{x+3}{3x-1}$ не определена~~

сумма $\operatorname{tg} \frac{2x-1}{x+2}$ и $\frac{x+3}{3x-1}$ равно $\pm \frac{\pi}{2}$.

и тогда:

Если $x = \frac{\pi}{2}$ то $2x-1 = 0$ и $x+3 = 3$

N5

$$\operatorname{arctg} \frac{2x-1}{x+2} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{x+3}{2x-1} \Rightarrow \frac{2x-1}{x+2} = \frac{1}{\left(\frac{x+3}{2x-1}\right)}$$

$$(2x-1)(x+3) = (x+2)(2x-1)$$

Если $x = -\frac{\pi}{2}$, то $\frac{2x-1}{x+2} < 0$ и $\frac{x+3}{2x-1} < 0$;

$$\operatorname{arctg} \frac{2x-1}{x+2} = -\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{x+3}{2x-1};$$

$$-\operatorname{arctg} \frac{2x-1}{x+2} = \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} \frac{x+3}{2x-1};$$

$$\operatorname{arctg} \left(-\frac{2x-1}{x+2} \right) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \left(\frac{x+3}{2x-1} \right);$$

$$-\frac{2x-1}{x+2} = -\frac{1}{\frac{x+3}{2x-1}};$$

$$(2x-1)(x+3) = (x+2)(2x-1)$$

$$\text{Умно } 2x^2 + 5x - 3 = 2x^2 + 5x - 2;$$

$$x^2 + 1 = 0 \text{ — нет решений; т.е. } x = \operatorname{arctg} 7 \text{ либо}$$

$$x = \operatorname{arctg} 7 - \pi;$$

Если $x = \operatorname{arctg} 7$, то $\frac{2x-1}{x+2} > 0$, т.к. $2\operatorname{arctg} 7 - 1 > 2\operatorname{arctg} 1 - 7 = 1$;

$$x+2 = \operatorname{arctg} 7 + 2 > 2 > 0 \Rightarrow 0 < \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{x+2} < \frac{\pi}{2} \Rightarrow -\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{x+2} + \operatorname{arctg} \frac{x+3}{2x-1} < \pi;$$

При этом $\operatorname{tg} \left(\operatorname{arctg} \frac{2x-1}{x+2} + \operatorname{arctg} \frac{x+3}{2x-1} \right) = 7 = \operatorname{tg} x \Rightarrow$

N5

$$-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} 7 + \pi k; \quad k=0 - \text{единственно возможное}$$

$x = \operatorname{arctg} 7$ - решение уравнения. +

$$\text{Если } x = \operatorname{arctg} 7 - \pi < \frac{\pi}{2} - \pi = -\frac{\pi}{2}, \text{ то } \frac{x+3}{3x-1} < 0, \text{ т.к.}$$

$$x+3 > \operatorname{arctg} 1 - \pi + 3 > \frac{\pi}{4} - \pi + 3 = 3 - \frac{3\pi}{4} = 3 \left(\frac{4-\pi}{4} \right) > 0,$$

$$\text{т.к. } \pi < 4 \text{ и } 3x-1 < 3 \left(\pi - \frac{\pi}{2} \right) - 1 < 3 \left(-\frac{\pi}{2} \right) - 1 < 0 \Rightarrow$$

$$\operatorname{arctg} \frac{x+3}{3x-1} < 0$$

$$2x-1 < 0 \Rightarrow -1 < 0;$$

$$x+2 > \operatorname{arctg} 4 - \pi + 2 > \operatorname{arctg} (2 + \sqrt{3}) - \pi + 2 = \frac{5\pi}{12} - \pi + 2 =$$

$$= -\frac{7\pi}{12} + 2 = \frac{24-7\pi}{12} > \frac{(24-7) \cdot \frac{3}{15}}{12} = \frac{1,95}{12} > 0 \Rightarrow$$

$$\frac{2x-1}{x+2} < 0; \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{x+2} < 0 \Rightarrow -\pi < \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{x+2} +$$

$$+ \operatorname{arctg} \frac{x+3}{3x-1} < 0;$$

$$\operatorname{tg} \left(\operatorname{arctg} \frac{2x-1}{x+2} + \operatorname{arctg} \frac{x+3}{3x-1} \right) = 7 \Rightarrow \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{x+2} + \operatorname{arctg} \frac{x+3}{3x-1} =$$

$$= \operatorname{arctg} 7 + \pi n; \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$-\pi < \operatorname{arctg} 7 + \pi n < \pi \Rightarrow n = -1 \Rightarrow \text{обе части уравнения}$$

$$\text{при } x = \operatorname{arctg} 7 - \pi \text{ равны } \operatorname{arctg} 7 - \pi \text{ и это решение. +}$$

и

(12) -

№7

Уравнение касательной из точки K_0 к графику $f(x)$ это

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Пусть общая касательная касается в точках x_1 и $x_2 \equiv$

$$f(x_1) + f'(x_1)(x - x_2) = f(x_2) + f'(x_2)(x - x_1).$$

$$\begin{cases} f'(x_1) = f'(x_2) \\ f(x_1) - f'(x_1)x_1 = f(x_2) - f'(x_2)x_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f'(x_1) = f'(x_2) \\ f(x_1) - f'(x_1)x_1 = f(x_2) - f'(x_2)x_2 \end{cases}$$

$$f'(x) = 4x^3 + 26x + 1$$

$$f(x) - f'(x) \cdot x = x^4 + 6x^2 + x - (4x^3 + 26x + 1)x =$$

$$= -3x^4 - 6x^2; \Rightarrow \begin{cases} 4x_1^3 + 26x_1 + 1 = 4x_2^3 + 26x_2 + 1 \\ -3x_1^4 - 6x_1^2 = -3x_2^4 - 6x_2^2 \end{cases}$$

$$1) (x_1 - x_2) \cdot (4(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) + 26) = 0; \Rightarrow$$

$$4(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) + 26 = 0; \text{ т.к. } x_1 \neq x_2$$

$$2) (x_1^2 + x_2^2)(3(x_1^2 + x_2^2) + 6) = 0; \Rightarrow \text{т.к. } x_1 \neq x_2 \left[\begin{array}{l} x_1^2 + x_2^2 = 0 \\ 3(x_1^2 + x_2^2) + 6 = 0 \end{array} \right]$$

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = 0 \\ 3(x_1^2 + x_2^2) + 6 = 0 \end{cases}$$

$$\text{Допустим } -6 = 3(x_1^2 + x_2^2); \text{ в уравн(2)} \Rightarrow -2(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2)$$

№2

$x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 = 0 \Rightarrow (x_1 - x_2)^2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$ - противоречие.

Значит в (2) $x_1 = -x_2 \Rightarrow$ из (1) $b = -2x_1^2$, т.е. для всех $b \leq 0$, $\exists x_1, x_2$ существуют $x_1, x_2 \left(\pm \sqrt{\frac{-b}{2}} \right)$, такие, что выполнены условия (1); (2) $\Rightarrow$ Общая касательная существует при $b > 0$, таких x_1, x_2 - не сущ. При $b = 0$, $x_1 = x_2 = 0 \Rightarrow$ нам не подходит $\Rightarrow$

Ответ: $b < 0$

3

№8~~80~~ 12

Рассмотрим граф на 100 вершинах $1, 2, \dots, 100$.

Будем соединять вершины путями $A_1, A_2, \dots, A_{100}$.

Если выписана последовательность $A_1, A_2, \dots, A_{100}$.

Тогда есть еще 3 вершины минимум 2 из которых не соединены ребром, то они могут быть x, y, z ; последовательность не поддается минимальному набору последовательности не подходит.

Если взять не более 24 последовательностей, то проведено $24 \cdot 99 = 2376$, Тогда в доп. графе не менее $\frac{100 \cdot 99}{2} - 2376 = 2574$ ребер и задача решена, тогда Сам индекс $2574 > \left(\frac{100}{2}\right)^2 = 2500$, то в доп. графе есть треугольник и 24 послед. минимума не хватает.

Рассмотрим графы у которых в долях 50 вершин, то это 2 полных графа на 50 вершин: $1, 2, 3, \dots, 50; 51, 52, \dots, 100$.

Пусть x имеет вид $A_1, A_2, \dots, 50(50 + A_1) \dots (50 + A_{50})$. Тогда нужно 15 последовательностей из них от 1 до 50. Тогда

111-311

Код участника
(заполняется организатором)



**Олимпиадная работа
заключительного этапа
«Всероссийская олимпиада школьников "Миссия
выполнима. Твоё призвание - финансист!" 2023-2024
г.»
«(Математика 11 класс)»**

Вариант № 2

«27 января 2024 г.»

Никакие другие записи на титульном листе делать не разрешается

Код участника:

(заполняется организатором)

11-311

Вариант 2
№1

Если человек знает только английский, в год его зарплата увеличивается на 4%, а если только французский, то на 20%.

Тогда из условия: 1) $\frac{b+d}{b+d} = 4\% = 0.04$
2) $\frac{a+d}{a+d} = 20\% = 0.2$

Хотим найти: $\frac{a+d}{b+d}$

Из первого условия: $b = 0.04(b+d) \Rightarrow 0.96b = 0.04d \Rightarrow b = \frac{d}{24}$

Из второго условия: $a = 0.2(a+d) \Rightarrow 0.8a = 0.2d \Rightarrow a = \frac{d}{4}$

Тогда $\frac{a+d}{b+d} = \frac{\frac{d}{4} + d}{\frac{d}{24} + d} = \frac{\frac{5d}{4}}{\frac{25d}{24}} = \frac{120}{25} = 4.8$

Ответ: 4.8 раз

+ (100)

№7

График функции $y = f(x)$ в точке x_0 имеет касательную к графику в точке x_0 : $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

Если существует прямая, касающаяся графика $f(x)$ в двух точках с первой координатой x_1 и x_2 , то это значит, что графики $y = f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1)$ и $y = f(x_2) + f'(x_2)(x - x_2)$ совпадают для всех x . Тогда для любого x : $f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1) = f(x_2) + f'(x_2)(x - x_2)$. Значит $f'(x_1) = f'(x_2)$ и $f(x_1) - f'(x_1) \cdot x_1 = f(x_2) - f'(x_2) \cdot x_2$

$$f(x) = x^4 + 6x^2 + x \Rightarrow f'(x) = 4x^3 + 12x + 1$$

$$f(x) - f'(x) \cdot x = x^4 + 6x^2 + x - (4x^3 + 12x + 1)x = -3x^4 - 6x^2 - x$$

Умножим:

$$1) 4x_1^3 + 12x_1 + 1 = 4x_2^3 + 12x_2 + 1$$

$$4(x_1^3 - x_2^3) + 12(x_1 - x_2) = 0$$

$$(x_1 - x_2)(4(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) + 12) = 0$$

Код участника:

(заполняется организатором)

111-311

Так как $x_1 \neq x_2$, можно поделить на $(x_1 - x_2)$

$$4(x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2) + 2b = 0$$

$$2) -3x_1^4 - 6x_1^2 = -3x_2^4 - 6x_2^2$$

$$3(x_1^4 - x_2^4) + 6(x_1^2 - x_2^2) = 0$$

$$(x_1^2 - x_2^2)(3(x_1^2 + x_2^2) + 6) = 0$$

$$(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)(3(x_1^2 + x_2^2) + 6) = 0$$

Так как $x_1 \neq x_2$, делим на $(x_1 - x_2)$

$$(x_1 + x_2)(3(x_1^2 + x_2^2) + 6) = 0$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ b = -3(x_1^2 + x_2^2) \end{cases}$$

Таким образом $\begin{cases} 4(x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2) + 2b = 0 \\ \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ b = -3(x_1^2 + x_2^2) \end{cases} \end{cases} \Rightarrow b = -2(x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2)$

Если $x_1 \neq x_2 = 0$, то $b = -2(x_1^2 - x_1^2 + x_1^2) = -2x_1^2$, то есть $x_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{b}{2}}$
 $b < 0$, то есть где угодно $b \leq 0$ существует такая кривая

так как графику $f(x)$ в точке: $\pm \sqrt{\frac{b}{2}}$

Если $b = 0$, то $x_1 = x_2$, а это не так по предположению

$$f'(x_1) = 4x_1^3 + 2bx_1 + 1 = x_1(4x_1^2 + 2b) + 1 = x_1(4(-\frac{b}{2}) + 2b) + 1 = 1 = f'(x_2)$$

$$f(x_1) - f'(x_1) \cdot x_1 = x_1^4 + 2bx_1^2 + x_1 - 1 \cdot x_1 = x_1^4 + 2bx_1^2 = \left(\sqrt{\frac{b}{2}}\right)^4 + 2b\left(-\frac{b}{2}\right) = \frac{b}{4} - b^2 = -\frac{3}{4}b^2 = f(x_2) - f'(x_2) \cdot x_2, \text{ значит гр-н не имеет точек:}$$

$$y = x - \frac{3}{4}b^2$$

$$\text{Если } b = -3(x_1^2 + x_2^2), \text{ то } -2(x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2) = b = -3(x_1^2 + x_2^2)$$

$$x_1^2 - 2x_1 x_2 + x_2^2 = 0$$

$$(x_1 - x_2)^2 = 0$$

$x_1 = x_2$, но x_1 и x_2 разные $\Rightarrow$ в этом случае решения нет

Ответ: $b < 0$, $y = x - \frac{3}{4}b^2$

145

М11-311

Код участника

Всероссийская олимпиада школьников «Миссия выполнима. Твое призвание – финансист!» 2023/2024 уч.г.

Бланк проверки работы

Математика 11 класс

№ задания	ФИО эксперта	Балл	ФИО эксперта	Балл	Итоговый балл
1	Александров	10	Гурьянова	10	10
2	Савина	10	Матюгов	10	10
3	Александров	12	Маркова	12	12
4	Овчинникова	0	Иванова	2	2
5	Угрюмов	12	Волов	12	12
6	Олегов	2	Степан	3	3
7	Кочнов	14	Липатин	14	14
8	Григорьев	0	Щакин	0	0
ИТОГО					43

16

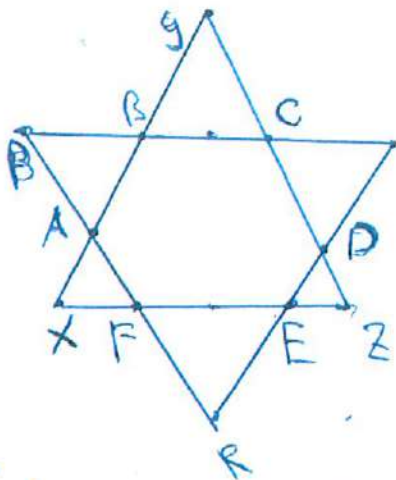
Дано:

$$\angle A = \angle B = \angle C = 100^\circ$$

$$\angle D = 130^\circ$$

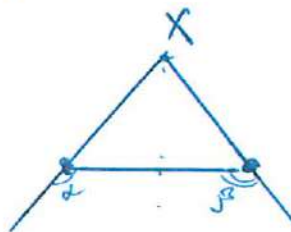
$$\angle E = 140^\circ$$

$$\angle F = 150^\circ$$



Решить:

Найти углы треугольников: $\triangle PQR$ и $\triangle XYZ$.
Рассмотрим треугольник $\triangle XYZ$.



На $\triangle XYZ$ известны углы $\angle X$ и $\angle Y$ и мы хотим найти $\angle Z$. Заметим, что углы смежные с $\angle X$ и $\angle Y$ должны добавлять к углу с $\angle X$ 180° как углы смежные, то есть $(180^\circ - \angle X) + (180^\circ - \angle Y) + \angle Z = 180^\circ \Rightarrow \angle Z = 180^\circ - 180^\circ + \angle X + \angle Y = \angle X + \angle Y$. Заметим, что эта конструкция работает не только с двумя углами, но и с тремя углами. $\Rightarrow \angle P = \angle A + \angle B - 180^\circ = 20^\circ$
 $\angle Q = \angle C + \angle D - 180^\circ = 50^\circ$; $\angle E + \angle F - 180^\circ = 110^\circ$; $\angle X = \angle A + \angle F - 180^\circ = 70^\circ$; $\angle Y = \angle P + \angle C - 180^\circ = 20^\circ$; $\angle Z = \angle D + \angle E - 180^\circ = 90^\circ$

Ответ: $(20; 50; 110)$ и $(70; 20; 90)$

15

$$\arctg \frac{2x-1}{x+2} + \arctg \frac{x+3}{3x-1} = x$$

$$\arctg(a) + \arctg(b) = \arctg \frac{a+b}{1-ab} = \arctg \frac{\frac{2x-1}{x+2} + \frac{x+3}{3x-1}}{1 - \frac{2x-1}{x+2} \cdot \frac{x+3}{3x-1}} = \arctg \frac{(2x-1)(3x-1) + (x+2)(x+3)}{(x+2)(3x-1) - (2x-1)(x+3)}$$

$$= \arctg \frac{6x^2 - 5x + 1 + x^2 + 5x + 6}{3x^2 + 5x - 2 - 2x^2 - 5x + 3} = \arctg \frac{7x^2 + 7}{x^2 + 1} = 7 \text{, то есть } \arctg x = 7 \text{, то } x = \arctg 7$$

$x = \arctg 7 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$, но так как $|\arctg x| < \frac{\pi}{2}$, то $|a+b| \leq |a| + |b|$

Код участника:

(заполняется организатором)

М11-311

$$\angle \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

так как $\arctg z \in (0; \frac{\pi}{2})$, т.е. $z > 0$, то чтобы оставшаяся дуга не π ($-\pi$ до π) x должна быть либо равна $\arctg z$, либо $\arctg z - \pi$

Если $x = \arctg z$, то $x \in (0; \frac{\pi}{2})$

$$\frac{2x-1}{x+2} \cdot \frac{x+3}{3x-1} \leq 1$$

$$2x^2 + 5x - 3 \leq 3x^2 + 5x - 2$$

$$-1 \leq x^2 \quad \checkmark$$

$$\text{Значит, } a+b = \arctg\left(\frac{\frac{2x-1}{x+2} + \frac{x+3}{3x-1}}{1 - \frac{2x-1}{x+2} \cdot \frac{x+3}{3x-1}}\right) = \arctg z \quad \checkmark$$

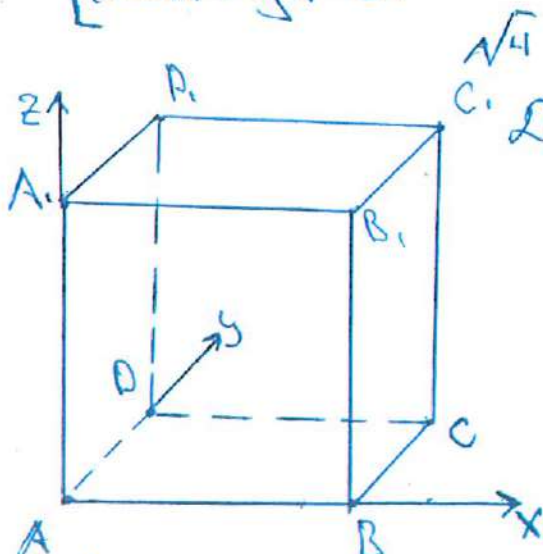
Если $x = \arctg z - \pi$, то $x \in (-\pi; -\frac{\pi}{2})$

$$\frac{2x-1}{x+2} < 0$$

$$\frac{2x-1}{x+2} \cdot \frac{x+3}{3x-1} > 1$$

$$\text{Значит } a+b = \arctg\left(\frac{\frac{2x-1}{x+2} + \frac{x+3}{3x-1}}{1 - \frac{2x-1}{x+2} \cdot \frac{x+3}{3x-1}}\right) - \pi = \arctg z - \pi \quad \checkmark$$

Ответ: $\begin{cases} x = \arctg z \\ x = \arctg z - \pi \end{cases}$



Дано: Куб; $AA_1 = 1$
Р.сферы?

Пусть A - это начало координат
Ось x идёт по ребру AB ; y - по ребру AD ; z - по ребру AA_1
Пусть O - центр искомой сферы с координатами $(x_0; y_0; z_0)$, то

Код участника:

(заполняется организатором)

М11-311

что сфера проходит через точку B значит, что $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = R^2$, где R - радиус сферы. касание с AD означает, что расстояние от O до проекции из O на ось $y = R$. Строим из O на ось y - это $(0, y, 0)$ тогда $x^2 + z^2 = R^2$

Аналогично с AA_1 : проекция это $(0, 0, z)$, а квадрат расстояния от O до неё это $x^2 + y^2 = R^2$

Касание с ~~AA~~ $\subset A$, A_1, B_1 проекция из O $(x, 0, 1)$, квадрат расстояния - $y^2 + (z-1)^2 = R^2$

Итого имеем:

$$\begin{cases} (x-1)^2 + y^2 + z^2 = R^2 & (1) \\ x^2 + z^2 = R^2 & (2) \\ x^2 + y^2 = R^2 & (3) \\ y^2 + (z-1)^2 = R^2 & (4) \end{cases}$$

Из (2) и (3) следует, что $y^2 = z^2$, тогда $x^2 - 2x + 1 + 2z^2 = R^2 \Rightarrow$
 $\Rightarrow x^2 - 2x = -2z \Rightarrow z = \frac{x^2}{2}$ $\quad x - \frac{x^2}{2}$

$2z^2 - 2z + 1 = z^2 + x^2 \Rightarrow x = z - 1$ или $x = 1 - z$

Если $x = z - 1$, то $x + 1 = z = \frac{x^2}{2} \Rightarrow \frac{x^2}{2} + 1 = 0$, но такое не может быть

Если $x = 1 - z$, то $1 - x = z = x - \frac{x^2}{2} \Rightarrow x = 2 \pm \sqrt{2}$

Если $x = 2 + \sqrt{2}$, то $z = 1 - x = -1 - \sqrt{2}$

$(x-1)^2 + y^2 + z^2 = (1+\sqrt{2})^2 + (-1-\sqrt{2})^2 = 9 + 6\sqrt{2} = R^2 =$
 $= (\sqrt{3} + \sqrt{6})^2 \Rightarrow R = \sqrt{3} + \sqrt{6}$

Аналогично для $x = 2 - \sqrt{2}$: $R = \sqrt{6} - \sqrt{3}$

Ответ: $\sqrt{6} \pm \sqrt{3}$

$\sqrt{2}$

Заметим, что $3A + 5B + 2 \cdot (4A + 3B) \leq 11 + 2 \cdot 10 = 31$

$11(A+B) \leq 31$

$A+B \leq \frac{31}{11}$

Равенство точно достигается при $\begin{cases} 3A + 5B = 11 \\ 4A + 3B = 10 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow 4(3A + 5B) - 3(4A + 3B) = 4 \cdot 11 - 3 \cdot 10 \Rightarrow 20B - 9B = 14 \Rightarrow$

$\Rightarrow B = \frac{14}{11} \Rightarrow A = \frac{1}{3}(11 - 5B) = \frac{17}{11}$

Проверим третье неравенство для этих A и B : $4 \cdot \frac{17}{11} + 4 \cdot \frac{14}{11} =$

$= \frac{125}{11} < 18$

Ответ: $\frac{31}{11}$

10

Посмотрим на $p(k) + p(34-k) = \frac{(-3)^k}{3^k + 3^{17}} + \frac{(-3)^{34-k}}{3^{34-k} + 3^{17}} = \frac{(-1)^k}{1 + 3^{17-k}} + \frac{(-1)^{34-k}}{1 + 3^{k-1}}$

$= \frac{(-1)^k \cdot (2 + 3^{k-17} + 3^{17-k})}{1 + 3^{k-17} + 3^{17-k} + 1} = (-1)^k$

Тогда $p(1) + \dots + p(33) = \sum_{k=1}^{16} (p(k) + p(34-k)) + p(17) = \sum_{k=1}^{16} (-1)^k + \frac{(-3)^{17}}{3^{17} + 1}$

$= 0 + \frac{(-1)^{16}}{2} = -\frac{1}{2}$

Ответ: $-\frac{1}{2}$

№8 уб

МН-879

Код участника
(заполняется организатором)



Олимпиадная работа
заключительного этапа
«Всероссийская олимпиада школьников "Миссия
выполнима. Твоё призвание - финансист!" 2023-2024
г.»
«(Математика 11 класс)»

Вариант № 2

«27 января 2024 г.»

Никакие другие записи на титульном листе делать не разрешается

Код участника:

(заполняется организатором) 1111-879

задание 3) $p(n) = \frac{(-3)^n}{3^n + 3^{17}}$

$(1) + p(2) + \dots + p(33) = ?$

рассмотрим искомого сумму;

$$\frac{-3}{3+3^{17}} + \frac{3^2}{3^2+3^{17}} + \frac{(-3)^3}{3^3+3^{17}} + \dots + \frac{3^{16}}{3^{16}+3^{17}} + \frac{(-3)^{17}}{3^{17}+3^{17}} + \frac{3^{18}}{3^{18}+3^{17}} + \dots + \frac{3^{32}}{3^{32}+3^{17}} + \frac{(-3)^{33}}{3^{33}+3^{17}} =$$

$$\frac{-3}{3+3^{17}} + \frac{(-3)^{33}}{3^{33}+3^{17}} + \frac{3^2}{3^2+3^{17}} + \frac{3^{52}}{3^{52}+3^{17}} + \dots + \frac{(-3)^{17}}{3^{17}+3^{17}} =$$

$$= \frac{1}{1+3^{16}} - \frac{3^{16}}{1+3^{16}} + \frac{1}{1+3^{16}} + \frac{3^{15}}{1+3^{15}} + \dots + \left(-\frac{1}{2}\right)$$

т.е. получается, что $p(n) + p(34-n) = -1$, если n нечетное;

$p(n) + p(34-n) = 1$, если n - четное!

где $p(17)$ парн нет, но $p(17) = -\frac{1}{2} \Rightarrow$

из ①, ②, ③ $\Rightarrow p(1) + p(2) + \dots + p(33) = p(1) + p(33) + p(2) + p(32) + p(3) +$

$p(31) + \dots + p(16) + p(18) + p(17) = -1 + 1 + \dots + (-1) + 1 + \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$

Ответ: $-\frac{1}{2}$

задание 1) Обозначим количество людей, не говорящих ни одним из языков C , говорящих по-аппи, но не по-французски A , говорящих по-французски, но не по-аппи F , говорящих и по-французски и по-аппи $AF \Rightarrow$

$|F|$
 $\frac{|F|}{|A|+|F|} = 0,4 = \frac{1}{25} \Rightarrow |F| = \frac{1}{24} \cdot |C| \Rightarrow$

$|A|$
 $\frac{|A|}{|A|+|C|} = 0,2 = \frac{1}{5} \Rightarrow |A| = \frac{1}{4} \cdot |C| \Rightarrow$

итогом имеем: $\frac{|A|+|C|}{|F|+|C|} = \frac{\frac{5}{4} \cdot |C|}{\frac{25}{24} \cdot |C|} = \frac{5}{4} \cdot \frac{24}{25} = \frac{6}{5} = 1,2$

Ответ: 1,2 + 10

задание 2) $\begin{cases} 3A + 5B \leq 11 \\ 4A + 3B \leq 10 \\ 7A + 9B \leq 18 \end{cases}$

$A+B$ макс. ?

1) умножим второе неравенство на 2, и сложим с первым $\Rightarrow$
 $3A + 8A + 5B + 6B \leq 11 + 20 \Rightarrow$
 $11A + 11B \leq 31 \Rightarrow A+B \leq \frac{31}{11} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ подбором найдем

пример:

$A=1; B=\frac{20}{11}$ - не удовн.

①

Код участника:

(заполняется организатором)

М11 - 879

хотим 2 $\Rightarrow A = \frac{12}{11}; B = \frac{19}{11}$ - не удовн.

$A = \frac{14}{11}; B = \frac{17}{11}$ - не удовн.

$A = \frac{17}{11}; B = \frac{14}{11}$ - удовн.

проверим:

$$3 \cdot \frac{17}{11} + 5 \cdot \frac{14}{11} = 11$$

$$4 \cdot \frac{17}{11} + 3 \cdot \frac{14}{11} = 10$$

$$7 \cdot \frac{17}{11} + 4 \cdot \frac{14}{11} = \frac{125}{11} \leq 18 \Rightarrow$$

Ответ: $\frac{31}{11}$ 10 8.

задача 5 $\arctan \frac{2x-1}{x+2} + \arctan \frac{x+3}{3x-1} = x$

пр: $x \neq -2; x \neq \frac{1}{3};$

$\Rightarrow$ представим лев. член. через функцию $\tan$, представим, то аргумент $\neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$

$$\tan \left(\arctan \frac{2x-1}{x+2} + \arctan \frac{x+3}{3x-1} \right) = \tan x$$

$$\tan \left(\arctan \frac{2x-1}{x+2} \right) + \tan \left(\arctan \frac{x+3}{3x-1} \right)$$

$$1 - \tan \left(\arctan \frac{2x-1}{x+2} \right) \cdot \tan \left(\arctan \frac{x+3}{3x-1} \right) = \tan x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2x-1}{x+2} + \frac{x+3}{3x-1}$$

$$1 - \left(\frac{2x-1}{x+2} \right) \left(\frac{x+3}{3x-1} \right) = \tan x \Rightarrow$$

$$6x^2 - 3x - 2x + 1 + x^2 + 5x + 6$$

$$(x+2)(3x-1)$$

$$3x^2 + 1x - 2 - 2x^2 - 6x + 6 + 3 = \tan x$$

$$(x+2)(3x-1)$$

$$\frac{7 \cdot (1+x^2)}{(1+x^2)} = \tan x \Rightarrow$$

$$\tan x = 7 \Rightarrow x = \arctan 7 + \pi k, k \in \mathbb{Z} \text{ т.е. } x = \arctan \frac{2x-1}{x+2} + \arctan \frac{x+3}{3x-1} =$$

$\Rightarrow$ периодов не более $\pi \Rightarrow -\pi < x < \pi \Rightarrow$

Ответ: $\arctan 7; -\pi + \arctan 7$

12

2

M 11-879

Код участника

Всероссийская олимпиада школьников «Миссия выполнима. Твое призвание – финансист!» 2023/2024 уч.г.

Бланк проверки работы

Математика 11 класс

№ задания	ФИО эксперта	Балл	ФИО эксперта	Балл	Итоговый балл
1	Онаева	10	Гурьянова	10	10
2	Матомежов	10	Савина	10	10
3	Иванов	12	Матомежов	12	12
4	Матомежов	5	Иванова	5	5
5	Виноградова	12	Кремев	12	12
6	Олехова	0	Конкова	0	0
7	Конкова	14	Липачин	14	14
8	Шашков	0	Телишев	0	0
ИТОГО					44

задача 6

замечается, что сумма углов выпуклого 6-угол =

$$4 \cdot 180 = 720^\circ$$

и условия $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 100^\circ, \angle E = 140^\circ, \angle F = 150^\circ \Rightarrow$

$$100 \cdot 4 + 140 + 150 = 690 \Rightarrow \text{условия некорректны!}$$

05

предположим $f(x) = x^4 + bx^2 + x,$

остався еще градиент отвл. могут провести с уравнением $y = kx + q,$ где $k \neq 0$

если $y = kx + q$ касается $y = f(x)$ в точке (x_1) , то

уравнение $x^4 + bx^2 + x = kx + q$ имеет корни

одной кратности, а $f(x)$ касается $y = kx$, то очевидно

что 2 корня четной кратности $\Rightarrow x^4 + bx^2 + (1-k)(x-q) = (x-x_1)^2(x-x_2)^2 =$ умножив коэф. слагаемого $= 1$,

$$x^4 + bx^2 + (1-k)(x-q) = x^4 - 2(x_1+x_2) \cdot x^3 + (x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2) + x_1^2x_2^2 -$$

$$2x_1x_2(x_1+x_2) \cdot x + x_1^2x_2^2$$

$$\text{Замечаем, что при } x^3 \text{ коэф} = 0: -x_2 = x_1 \Rightarrow$$

$$x_1 = t \Rightarrow x_2 = -t$$

$$\text{при } x^2: b = t^2 - 4t^2 + t^2 = b = -2t^2$$

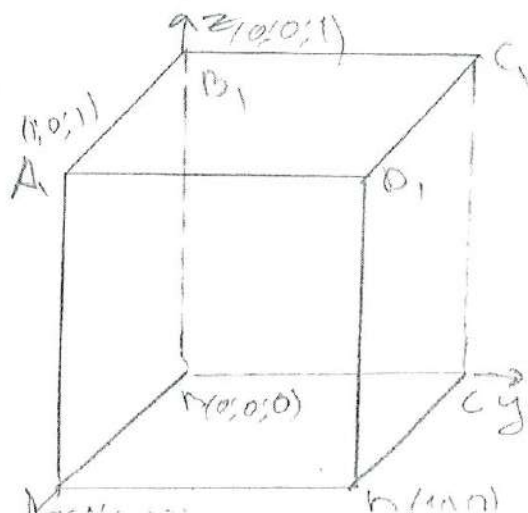
$$3x: 1-k = 0 \Rightarrow k = 1$$

$$\text{при } x^0: t^4 = -q, \text{ т.к. } q = -t^4 \text{ и } b = -2t^2 \Rightarrow t^2 = \frac{b}{2}$$

$$\Rightarrow b < 0 \text{ и } b^2 = -\frac{t^4}{2} \Rightarrow q = -\left(-\frac{b^2}{2}\right) = \frac{b^2}{2}$$

$$\text{Значит: } y = x - \frac{b^2}{2}, \quad b < 0$$

задача 4



Код участника:

(заполняется организатором) МН-879

задание 4

Введем систему координат, как на рис.
 сторона куба = 1, пусть искомая сфера γ имеет уравнение:

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = R^2 \Rightarrow$$

т.е. центр γ имеет коор. $(x_0; y_0; z_0) \Rightarrow$

$$\text{т.к. } B \in \gamma \Rightarrow x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = R^2,$$

пусть O — центр сферы $O(x_0; y_0; z_0)$, т.к.

γ касается AB , то $BO \perp AB$ всегда, проведем

$$AB = R \text{ (радиус сферы)}$$

$$S_{OAB} = \frac{1}{2} AB \cdot R = \frac{1}{2} AB \cdot R, \text{ (группа)}$$

$$\text{вторым } S_{OAB} = \frac{1}{2} |AO \cdot BO| \Rightarrow AO \begin{pmatrix} x_0-1, y_0, z_0 \end{pmatrix}$$

$$BO \begin{pmatrix} x_0-1, y_0-1, z_0 \end{pmatrix} \Rightarrow S_{OAB} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & k \\ x_0-1 & y_0-1 & z_0 \\ x_0-1 & y_0 & z_0 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot |(x_0-1)k - z_0| = \frac{1}{2} \sqrt{(x_0-1)^2 + z_0^2} = \sqrt{\frac{1}{2} \sqrt{(x_0-1)^2 + z_0^2}}$$

$$\Rightarrow (x_0-1)^2 + z_0^2 = R^2, \text{ рассмотрим аналогично с}$$

$$AA' \text{ и } A'B' \Rightarrow$$

$$(z_0-1)^2 + y_0^2 = R^2$$

$$x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = R^2 \quad (1)$$

$$(x_0-1)^2 + z_0^2 = R^2 \quad (2)$$

$$(x_0-1)^2 + y_0^2 = R^2 \quad (3)$$

$$(z_0-1)^2 + y_0^2 = R^2 \quad (4)$$

$$(2)-(3) \Rightarrow x_0^2 = y_0^2 \Rightarrow (3)-(4) \Rightarrow (x_0-1)^2 = (z_0-1)^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_0 = z_0 \\ z_0 = 2-x_0 \end{cases} \Rightarrow \text{возможно 2 варианта:}$$

$$1) \begin{cases} x_0^2 = R^2 \\ (x_0-1)^2 + x_0^2 = R^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_0^2 = R^2 \\ (x_0-1)^2 + x_0^2 = R^2 \end{cases}$$

$$\text{вер: } x_0^2 + 2x_0 - 1 = 0$$

$$x_0 = -1 \pm \sqrt{2} \Rightarrow R =$$

$$3. |x| = R = 3 \cdot \sqrt{2-1} \text{ или } 5. |x|$$

$$2) \begin{cases} x_0^2 + (2-x_0)^2 = R^2 \\ (x_0-1)^2 + (2-x_0)^2 = R^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_0^2 + (2-x_0)^2 = R^2 \\ (x_0-1)^2 + (2-x_0)^2 = R^2 \end{cases}$$

$$2x_0^2 + (2-x_0)^2 = (x_0-1)^2 + (2-x_0)^2$$

$$x_0 = 1 \pm \sqrt{2}$$

$$R = 2 \cdot \sqrt{2} \text{ Ответ.}$$

$$2\sqrt{2}; (\sqrt{2}-1); (\sqrt{2}+1)$$

111-621
Код участника
(заполняется организатором)



**Олимпиадная работа
заключительного этапа
«Всероссийская олимпиада школьников "Миссия
выполнима. Твоё призвание - финансист!" 2023-2024
г.»
«(Математика 11 класс)»**

Вариант № 2 (второй)

«27 января 2024 г.»

Никакие другие записи на титульном листе делать не разрешается

М11-621

Код участника

Всероссийская олимпиада школьников «Миссия выполнима. Твое призвание – финансист!» 2023/2024 уч.г.

Бланк проверки работы

Математика 11 класс

№ задания	ФИО эксперта	Балл	ФИО эксперта	Балл	Итоговый балл
1	Касанов	10	Гурьянов	10	10
2	Иван	10	Тюлькин	10	10
3	Иван	12	Акинькин	12	12
4	Иван	0	Степанов	0	0
5	Иван	12	Труфанов	12	12
6	Иван	3	Олегов	3	3
7	Иван	14	Акинькин	14	14
8	Иван	0	Степанов	0	0
ИТОГО					61

Код участника:

(заполняется организатором)

111-621

Задача
№ 5

$$\arctg \frac{2x-1}{x+2} + \arctg \frac{x+3}{3x-1} = x$$

Расс-им ф-цию $y = \arctg \frac{2x-1}{x+2} + \arctg \frac{x+3}{3x-1}$

(исследовать) и построим график этой ф-ции (прикинем), чтобы потом посмотреть, где график пересекается с графиком $y = x$

$$y = \arctg \frac{2x-1}{x+2} + \arctg \frac{x+3}{3x-1}$$

1) ОДЗ: $x \neq -2$ $x \neq \frac{1}{3}$ - это точки в которых график прерывается

2) $f'(x) = (\arctg \frac{2x-1}{x+2})' + (\arctg \frac{x+3}{3x-1})'$ - расс-им производную ф-ции и посмотрим ее поведение

$$\begin{aligned} (\arctg \frac{2x-1}{x+2})' &= \frac{1}{1+u^2} \cdot u' = \frac{1}{1+(\frac{2x-1}{x+2})^2} \cdot (\frac{2x-1}{x+2})' = \\ &= \frac{1}{\frac{(x+2)^2 + (2x-1)^2}{(x+2)^2}} \cdot \frac{(2x-1)'(x+2) - (x+2)'(2x-1)}{(x+2)^2} = \\ &= \frac{(x+2)^4}{(x+2)^2 + (2x-1)^2} \cdot \frac{2(x+2) - (2x-1)}{(x+2)^2} = \frac{2x+4-2x+1}{x^2+4x+4+4x^2-4x+1} = \\ &= \frac{5}{5x^2+5} = \frac{1}{x^2+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\arctg \frac{x+3}{3x-1})' &= \frac{1}{1+u^2} \cdot u' = \frac{1}{1+(\frac{x+3}{3x-1})^2} \cdot (\frac{x+3}{3x-1})' = \\ &= \frac{1}{\frac{(3x-1)^2 + (x+3)^2}{(3x-1)^2}} \cdot \frac{(x+3)'(3x-1) - (3x-1)'(x+3)}{(3x-1)^2} = \\ &= \frac{(3x-1)^2}{(3x-1)^2 + (x+3)^2} \cdot \frac{3x-1 - 3(x+3)}{(3x-1)^2} = \frac{-10}{9x^2-6x+1+x^2+6x+9} = \\ &= \frac{-10}{10x^2+10} = -\frac{1}{x^2+1} \end{aligned}$$

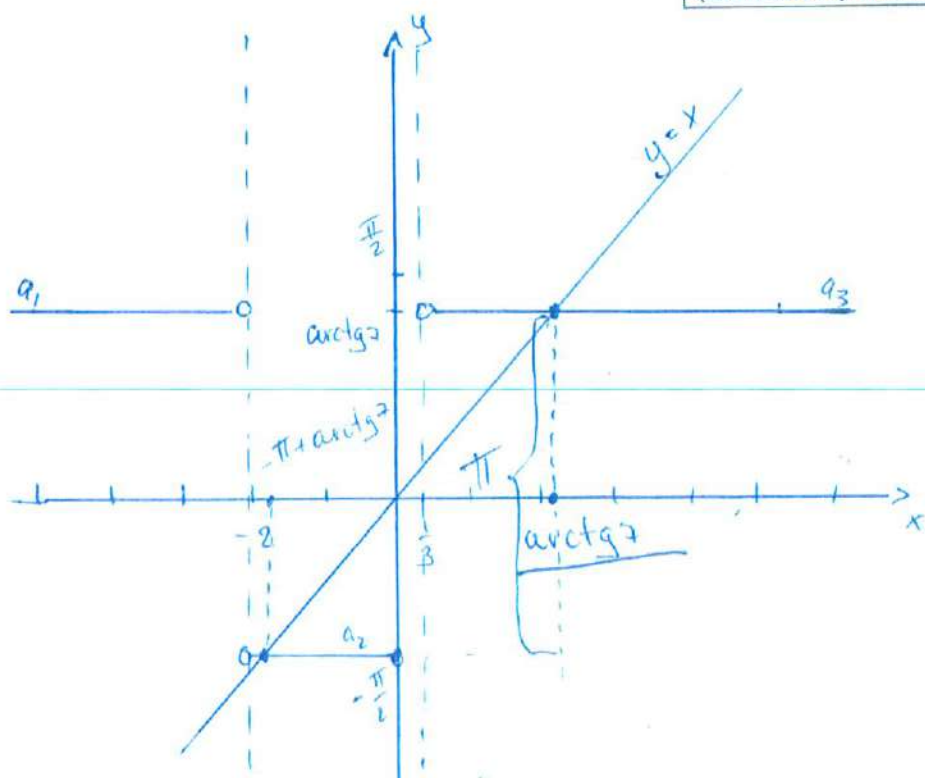
$$f'(x) = \frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1} = 0$$

получено среднее вы-
вод, что график будет
паралл-елен осм Ох

Код участника:

(заполняется организатором)

111-621



также ф-ция будет
прерывистой, т.к.

$$x \neq -2; \frac{1}{3}$$

$$y = \begin{cases} a_1, & x < -2 \\ a_2, & -2 < x < \frac{1}{3} \\ a_3, & x > \frac{1}{3} \end{cases}$$

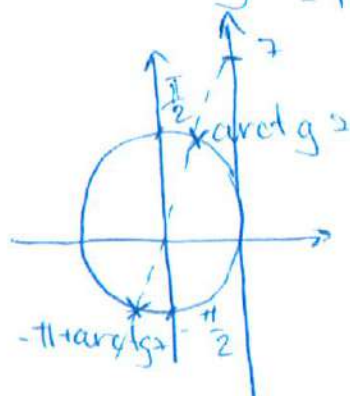
Подставим x любой в ур-ние.

1) $x = \frac{1}{2}$

$$\arctg 0 + \arctg \frac{3,5}{0,5} = \arctg 7, \text{ т.е. } a_3 = \arctg 7, \text{ т.к. } x = \frac{1}{2} > \frac{1}{3}$$

2) $x = -3$

$$\arctg \frac{-2}{-1} + \arctg 0 = \arctg 7, \text{ т.е. } a_1 = \arctg 7, \text{ т.к. } x = -3 < -2$$



Проведем пр-ую $y = x$

$y = x$ пересечется с $y = a_3$, т.к. $y = \arctg 7$, то и $x = \arctg 7$
на пересек с окр-тью $a_2 = -\pi + \arctg 7$, значит
 $y = a_2 \Rightarrow x = a_2 = -\pi + \arctg 7$ $a_1 = \arctg 7$

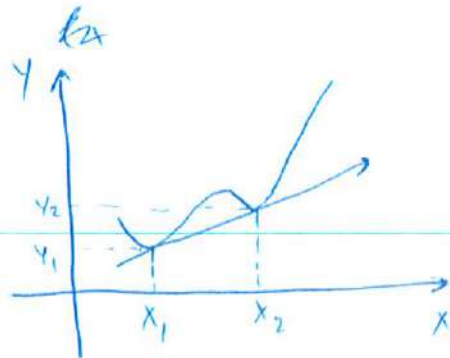
Код участника:

(заполняется организатором)

11-621

Задача
5.7

$$f(x) = x^4 + bx^2 + x$$



$$(x_1; f(x_1))$$

$$(x_2; f(x_2))$$

$$x_1 \neq x_2 \quad (1)$$

$$f'(x_1) = f'(x_2) = k$$

$$f'(x) = 4x^3 + 2bx + 1$$

$$f'(x_1) = 4x_1^3 + 2bx_1 + 1$$

$$f'(x_2) = 4x_2^3 + 2bx_2 + 1$$

$$4x_1^3 + 2bx_1 + 1 = 4x_2^3 + 2bx_2 + 1$$

$$4x_1^3 - 4x_2^3 + 2bx_1 - 2bx_2 = 0 \quad | :2$$

$$2(x_1^3 - x_2^3) + b(x_1 - x_2) = 0$$

$$2(x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) + b(x_1 - x_2) = 0$$

$$(x_1 - x_2)(2(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) + b) = 0$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 & \text{противоречит усл. (1)} \\ 2(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) + b = 0 \end{cases}$$

$$f(x_1) = kx_1 + c \Rightarrow c = f(x_1) - kx_1$$

$$f(x_2) = kx_2 + c \Rightarrow c = f(x_2) - kx_2$$

$$f(x_1) - kx_1 = f(x_2) - kx_2$$

$$f(x_1) - f'(x_1)x_1 = f(x_2) - f'(x_2)x_2$$

$$\begin{aligned} x_1^4 + bx_1^2 + x_1 - (4x_1^3 + 2bx_1 + 1)x_1 &= x_2^4 + bx_2^2 + x_2 - (4x_2^3 + 2bx_2 + 1)x_2 \\ x_1^4 + bx_1^2 + x_1 - 4x_1^4 - 2bx_1^2 - x_1 &= x_2^4 + bx_2^2 + x_2 - 4x_2^4 - 2bx_2^2 - x_2 \\ -3x_1^4 - bx_1^2 &= -3x_2^4 - bx_2^2 \end{aligned}$$

$$-3x_1^4 - bx_1^2 = -3x_2^4 - bx_2^2$$

$$3x_1^4 - 3x_2^4 + bx_1^2 - bx_2^2 = 0$$

Код участника:

(заполняется организатором)

111-621

$$3(x_1^4 - x_2^4) + b(x_1^2 - x_2^2) = 0$$

$$3(x_1^2 + x_2^2)(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) + b(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = 0$$

$$(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)(3(x_1^2 + x_2^2) + b) = 0$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 & x_1 = x_2 - \text{против. усл. (1)} \\ x_1 + x_2 = 0 \\ 3(x_1^2 + x_2^2) + b = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ 3(x_1^2 + x_2^2) + b = 0 \\ 2(x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2) + b = 0 \end{cases}$$

Расс-им 2 случая:

$$1) \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 & x_1 = -x_2 & x_1 = x_2 \\ 2(x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2) + b = 0 \end{cases}$$

$$2(x_1^2 - x_1^2 + x_1^2) + b = 0$$

$$2x_1^2 + b = 0$$

$$x_1^2 = -\frac{b}{2}$$

$$x_1 = \pm \sqrt{-\frac{b}{2}}$$

~~если $b < 0$, то $x_1 = \pm \sqrt{-\frac{b}{2}}$~~

если $b \leq 0$, то ур-ие верно

если $b > 0$, то ур-ие не имеет смысла

или

$$x_1 = \pm \sqrt{-\frac{b}{2}} \text{ при } b \leq 0$$

или

$$2) \begin{cases} 3(x_1^2 + x_2^2) + b = 0 \\ 2(x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2) + b = 0 \end{cases}$$

$$3(x_1^2 + 3x_2^2) - 2x_1^2 - 2x_1 x_2 - 2x_2^2 =$$

$$= x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 x_2 = (x_1 - x_2)^2$$

$$(x_1 - x_2)^2 = 0$$

$$x_1 - x_2 = 0$$

$$x_1 = x_2 - \text{противор. усл. (1)}$$

Код участника:

(заполняется организатором)

111-621

Теперь составим ур-ие кас-ой к искомому графику

$$y = f'(x)(x - x_1) + f(x_1)$$

т.к. у нас $x_1 = \pm \sqrt{-\frac{b}{2}}$, рассмотрим 2 случая

$$1) x_1 = \sqrt{-\frac{b}{2}}$$

$$\begin{aligned} f'(x_1) &= 4 \cdot \left(\sqrt{-\frac{b}{2}}\right)^3 + 2b \cdot \left(\sqrt{-\frac{b}{2}}\right) + 1 = 4 \cdot \sqrt{-\frac{b}{2}} \cdot \frac{b}{2} + 2b \sqrt{-\frac{b}{2}} + 1 = \\ &= 2b \sqrt{-\frac{b}{2}} + 2b \sqrt{-\frac{b}{2}} + 1 = 4b \sqrt{-\frac{b}{2}} + 1 \\ f(x_1) &= \left(\sqrt{-\frac{b}{2}}\right)^4 + b \left(\sqrt{-\frac{b}{2}}\right)^2 + \sqrt{-\frac{b}{2}} = \frac{b^2}{4} + b \cdot \frac{b}{2} + \sqrt{-\frac{b}{2}} = \\ &= \frac{b^2}{4} + \frac{2b^2}{4} + \sqrt{-\frac{b}{2}} = \frac{3b^2}{4} + \sqrt{-\frac{b}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= (4b \sqrt{-\frac{b}{2}} + 1)(x - \sqrt{-\frac{b}{2}}) + \frac{3b^2}{4} + \sqrt{-\frac{b}{2}} = \\ &= 4bx \sqrt{-\frac{b}{2}} + x - 4b \cdot \frac{b}{2} - \sqrt{-\frac{b}{2}} + \frac{3b^2}{4} + \sqrt{-\frac{b}{2}} = \\ &= 4bx \sqrt{-\frac{b}{2}} + x - 4 \frac{b^2}{2} + \frac{3b^2}{4} = \\ &= 4bx \sqrt{-\frac{b}{2}} - 2b^2 + 0,75b^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(x_1) &= 4 \left(\sqrt{-\frac{b}{2}}\right)^3 + 2b \left(\sqrt{-\frac{b}{2}}\right) + 1 = -\frac{b}{2} \cdot 4 \sqrt{-\frac{b}{2}} + 2b \cdot \sqrt{-\frac{b}{2}} + 1 = \\ &= -2b \sqrt{-\frac{b}{2}} + 2b \sqrt{-\frac{b}{2}} + 1 = 1 \end{aligned}$$

$$(x - x_1) = x - \sqrt{-\frac{b}{2}}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{b^2}{4} + b \cdot \frac{-b}{2} + \sqrt{-\frac{b}{2}} = \frac{b^2}{4} - \frac{b^2}{2} + \sqrt{-\frac{b}{2}} = \\ &= -\frac{b^2}{4} + \sqrt{-\frac{b}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= 1 \left(x - \sqrt{-\frac{b}{2}}\right) + \left(-\frac{b^2}{4} + \sqrt{-\frac{b}{2}}\right) = x - \sqrt{-\frac{b}{2}} - \frac{b^2}{4} + \sqrt{-\frac{b}{2}} = \\ &= x - \frac{b^2}{4} \end{aligned}$$

2) при $x_2 = \sqrt{-\frac{b}{2}}$ получим такое же ур-е
Ответ: $x - \frac{b^2}{4}$ $b \leq 0$

№ 1

Дополнительный бланк № 1

Всероссийская олимпиада школьников «Миссия выполнима. Твоё призвание – финансист!»

Код участника:

(заполняется организатором)

111-621

Задача

№ 1

4% - говорят по-французски, x
 96% - не говорят по-французски

20% - говорят по-английски, y
 80% - не говорят по-английски



$$0,96x = 0,8y$$

$$\frac{x}{y} = \frac{0,96}{0,8} = \frac{96}{80} = 1,2$$

+ 105.

Ответ: в 1,2 раза

$$\begin{array}{r} 96 \overline{) 180} \\ \underline{80} \\ 160 \\ \underline{160} \\ 0 \end{array}$$

Задача

№ 2

$$\begin{cases} 3A + 5B \leq 11 \\ 4A + 3B \leq 10 \\ 7A + 4B \leq 18 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3A + 5(S-A) \leq 11 \\ 4A + 3(S-A) \leq 10 \\ 7A + 4(S-A) \leq 18 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5S - 2A \leq 11 \\ 3S + A \leq 10 \\ 4S + 3A \leq 18 \end{cases}$$

Пусть $S = A+B$, тогда $B = S-A$

$$\begin{cases} 5S - 2A = 11 \\ 3S + A = 10 \\ 4S + 3A = 18 \end{cases}$$

Построим координатную плоскость с осями OA и OS и в этой плоскости отобразим пр-ые (1), (2), (3)

$$\begin{cases} 5S = 11 + 2A \\ 3S = 10 - A \\ 4S = 18 - 3A \end{cases}$$

$$\begin{cases} S = \frac{11+2A}{5} \quad (1) \\ S = \frac{10-A}{3} \quad (2) \\ S = \frac{18-3A}{4} \quad (3) \end{cases}$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{c|c|c} A & 0 & 5,5 \\ \hline S & 2,2 & 0 \end{array} \\ \begin{array}{c|c|c} A & 0 & 10 \\ \hline S & 3\frac{1}{3} & 0 \end{array} \\ \begin{array}{c|c|c} A & 0 & 6 \\ \hline S & 4,5 & 0 \end{array} \end{array}$$

$$\frac{11}{5} = 2\frac{1}{5} = 2,2$$

$$+2A = 0 \Rightarrow A = -5,5$$

$$0 - 3A = 0$$

$$A = 0$$

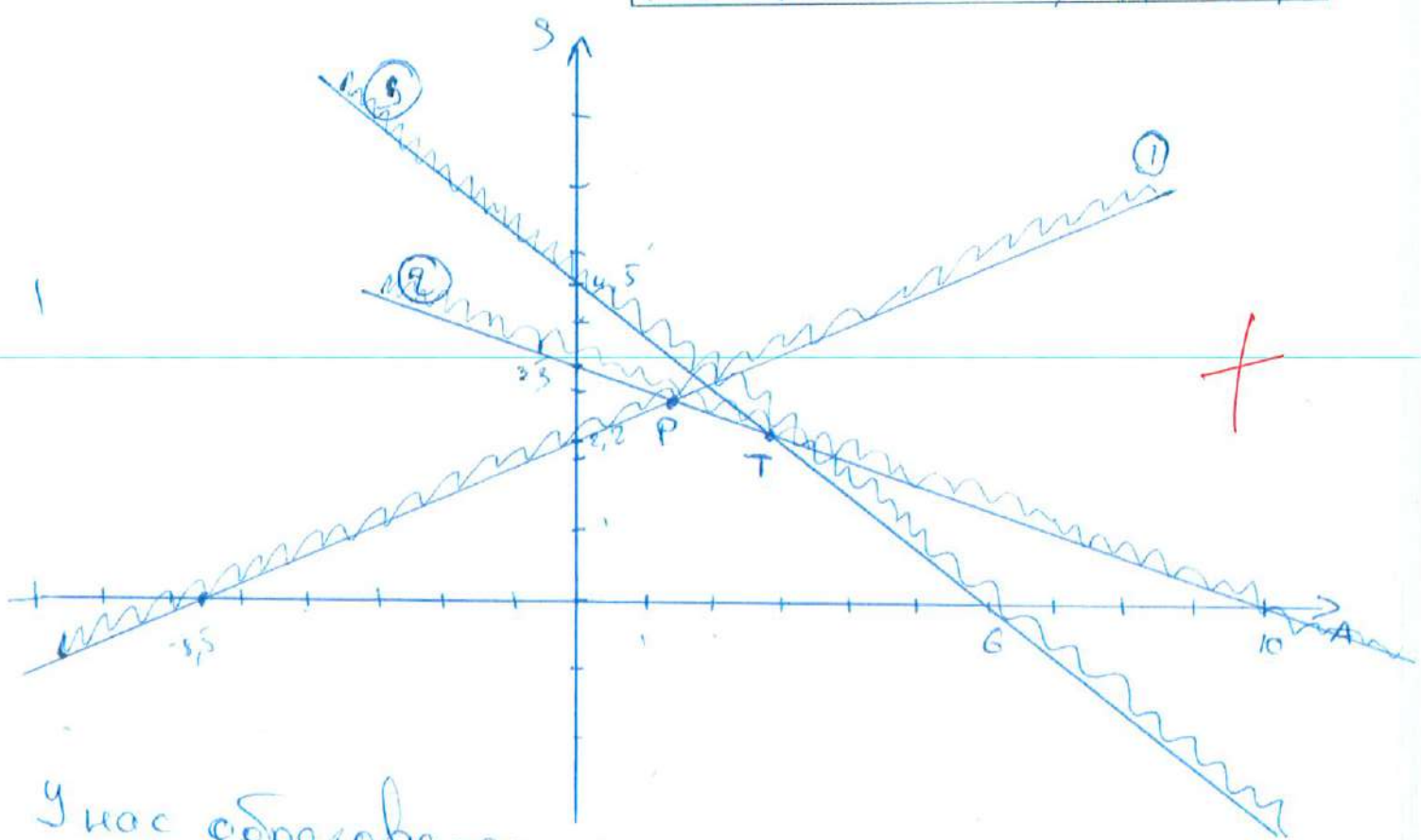
$$\frac{18}{4} = 4\frac{3}{2} = 4,5$$

№ 2

Код участника:

(заполняется организатором)

111-621



У нас образовалось 2 точки оптимальности Р и Т, чтобы найти наибольшее значение надо проверить обе точки

① т. Р образовалась при 1 и 2

$$\frac{11 + 2A}{5} = \frac{10 - A}{3}$$

$$33 + 6A = 50 - 5A$$

$$11A = 17$$

$$A = \frac{17}{11} = 1 \frac{6}{11}$$

↓

~~$$S_1 = \frac{11 + 2 \cdot \frac{17}{11}}{5} = \frac{11 + \frac{34}{11}}{5} = \frac{\frac{121 + 34}{11}}{5} = \frac{155}{55} = \frac{31}{11} = 2 \frac{9}{11}$$~~

$$5S = 11 + 2A = 11 + 2 \cdot \frac{17}{11} = 11 + \frac{34}{11} =$$

$$= \frac{121 + 34}{11} = \frac{155}{11}$$

$$S_1 = \frac{155}{11} : 5 = \frac{31}{11} = 2 \frac{9}{11}$$

② т. Т образовалась при 1 и 3

$$\frac{10 - A}{3} = \frac{18 - 3A}{4}$$

$$40 - 4A = 54 - 3A$$

$$14 = 5A$$

$$A = \frac{14}{5} = 2 \frac{4}{5} = 2,8$$

$$3S = 10 - 2,8 = 7,2$$

$$S_2 = \frac{7,2}{3} = 2,4$$

$$S_1 = 2 \frac{9}{11} \quad S_2 = 2,4$$

$$S_1 > S_2$$

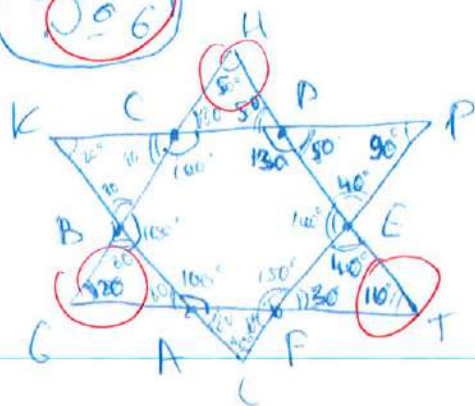
Ответ 2 $\frac{9}{11}$

Код участника:

(заполняется организатором)

111-621

Задача 506



Дано: $\triangle GHT$ и $\triangle KPC$

$\triangle GHT \cap \triangle KPC = ABCDEF$

$\angle A = \angle B = \angle C = 100^\circ$

$\angle E = 140^\circ$ $\angle F = 150^\circ$ $\angle D = 130^\circ$

Найти: $\angle$ -ы всех $\triangle$ -ов

1) при пересечении выпуклых многоугольников ($\triangle GHT$ и $\triangle KPC$) получается выпуклое многоугольник $ABCDEF$ - шестиугольник

2) $\triangle PHC = \triangle KBC = \triangle AGB$ - по тр. углам
 $\angle HCP = 180^\circ - \angle C = 80^\circ = \angle HPC$
 $\angle CHP = 180^\circ - \angle HCP - \angle HPC = 20^\circ$
 $\angle KCB = \angle KBC = \angle GBA = \angle GAB = \angle HCP = \angle HPC = 80^\circ$
 $\angle BKC = \angle AGV = 20^\circ$

не подходит
2-ая конфигурация

Т

3) $\angle HCP = 180^\circ - \angle C = 80^\circ$ (как вертикал.)

$\angle HPC = 180^\circ - \angle D = 50^\circ$ (как вертикал.)

$\angle CHP = 180^\circ - 80^\circ - 50^\circ = 50^\circ$

4) $\angle KCB = 180^\circ - \angle C = 80^\circ$

$\angle KBC = 180^\circ - \angle B = 80^\circ$

$\angle BKC = 180^\circ - 2 \cdot 80^\circ = 20^\circ$

5) $\triangle GBA = \triangle KCB$

$\angle KBA = \angle GBA = 80^\circ$

$\angle KBC = \angle GAB = 80^\circ$

$\angle CKB = \angle BGA = 20^\circ$

6) $\angle PDE = 180^\circ - 130^\circ = 50^\circ$

$\angle PED = 180^\circ - 140^\circ = 40^\circ$

$\angle DPE = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$

7) $\angle FAC = 180 - 100 = 80^\circ$

$\angle AFC = 180 - 150 = 30^\circ$

$\angle ACF = 180^\circ - 80^\circ - 30^\circ = 70^\circ$

8) $\angle FET = 180^\circ - 140^\circ = 40^\circ$

$\angle EFT = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$

$\angle ETF = 180^\circ - 40^\circ - 30^\circ = 110^\circ$

Ответ: $\angle$ -ы $\triangle$ -а GHT :

$\angle HGT = 110^\circ$, $\angle GHT = 50^\circ$, $\angle HGT = 20^\circ$

$\angle$ -ы $\triangle$ -а KPC :

$\angle CKP = 20^\circ$, $\angle KPC = 50^\circ$, $\angle KCP = 70^\circ$

Задача

№ 3

$$p(n) = \frac{(-3)^n}{3^n + 3^{17}} = \frac{(-1)^n \cdot 3^n}{3^n + 3^{17}} \quad k=17$$

$$p(1) + p(2) + p(3) + \dots + p(33)$$

~~$$p(1) + p(2) + p(3) + \dots + p(33)$$~~

~~$$p(1) = \frac{(-3)^1}{3^1 + 3^{17}} = \frac{-3}{3 + 3^{17}} \quad p(33) = \frac{(-3)^{33}}{3^{33} + 3^{17}}$$~~

У нас всего 33 числа, 17 - это середина ряда, которая делит ряд на 2 части, т.е. раз сума чисел получится так

$$p(1) + p(2) + p(3) + \dots + p(2k+1)$$

$$+ \dots + p(k) + \dots$$

$$p(1) + p(33) = \frac{(-3)^1}{3^1 + 3^{17}} + \frac{(-3)^{33}}{3^{33} + 3^{17}} = \frac{-3(3^{33} + 3^{17}) + (-3)^{33}(3 + 3^{17})}{(3^1 + 3^{17})(3^{33} + 3^{17})} =$$

$$= \frac{-1(3^{34} + 3^{18}) + (-1)^{33}(3^{34} + 3^{18})}{3^{34} + 3^{18} + 3^{36} + 3^{34}} = \frac{(-1)(3^{34} + 3^{18} - 3^{34} - 3^{18})}{3^{34} + 3^{18} + 3^{36} + 3^{34}} =$$

$$= -1$$

$$p(2) + p(32) = \frac{(-3)^2}{3^2 + 3^{17}} + \frac{(-3)^{32}}{3^{32} + 3^{17}} = \frac{-3^2(3^{32} + 3^{17}) + (3^2 + 3^{17})(-3^{32})}{(3^2 + 3^{17})(3^{32} + 3^{17})} =$$

$$= \frac{-3^2(3^{34} + 3^{19}) + (-1)^{32}(3^{34} + 3^{19})}{3^{34} + 3^{19} + 3^{49} + 3^{34}} = \frac{3^{34} + 3^{19} - 3^{34} - 3^{19}}{3^{34} + 3^{19} + 3^{49} + 3^{34}} = 1$$

Предположим, что $p(m) + p(2k+1-m) = 1$ или $p(m) + p(2k+1-m) = -1$

Скорее всего, это зависит от четности m , если четное m , то результат 1, а если нечетное m , то результат -1

$$\frac{(-a)^m}{a^m + a^k} + \frac{(-a)^{(2k+1-m)}}{a^{2k+1-m} + a^k} = \frac{(-1)^m \cdot a^m}{a^m + a^k} + \frac{(-1)^{(2k+1-m)}}{a^{2k+1-m} + a^k}$$

№ 5

Дополнительный бланк № 5

Всероссийская олимпиада школьников «Миссия выполнима. Твое призвание – финансист!»

Код участника:

(заполняется организатором)

111-621

$$\begin{aligned}
 & \frac{(-1)^m \cdot a^m}{a^m + a^k} + \frac{(-1)^{2k+1} \cdot a^{2k+1}}{(-1)^m \cdot a^m} \cdot \frac{(a^{2k+1} + a^k)^{1+m}}{a^{2k+1} + a^k \cdot a^m} = \\
 & = \frac{(-1)^m \cdot a^m}{a^m + a^k} + \frac{(-1)^{2k+1} \cdot a^{2k+1}}{(-1)^m \cdot a^m} \cdot \frac{a^m}{a^{2k+1} + a^k \cdot a^m} = \\
 & = \frac{(-1)^m \cdot a^m}{a^m + a^k} + \frac{-1 \cdot a^{2k+1}}{-1^m (a^{2k+1} + a^k a^m)} = \\
 & = \frac{(-1)^m \cdot a^m}{a^m + a^k} + \frac{-1 \cdot a^{2k+1}}{-1^m (a^{k+1} + a^m)} = \\
 & = \frac{(-1)^m \cdot a^m}{a^m + a^k} + \frac{-1 \cdot a^{2k}}{-1^m (a^{k+1} + a^m)} = \\
 & = \frac{(-a)^m}{a^m + a^k} + \frac{(-a)^{(2k-m)}}{a^{2k-m} + a^k} = \frac{(-1)^m \cdot a^m}{a^m + a^k} + \frac{(-1)^{2k-m} \cdot a^{2k-m}}{a^{2k-m} + a^k} = \\
 & = \frac{(-1)^m \cdot a^m}{a^m + a^k} + \frac{(-1)^{2k-m} \cdot a^{2k-m}}{(-1)^m \cdot a^m} : (a^{2k-m} + a^k) = \\
 & = \frac{(-1)^m \cdot a^m}{a^m + a^k} + \frac{a^{2k}}{(-1)^m \cdot a^m} : \left(\frac{a^{2k}}{a^m} + a^k \right) = \\
 & = \frac{(-1)^m \cdot a^m}{a^m + a^k} + \frac{a^{2k}}{(-1)^m \cdot a^m} \cdot \frac{a^m}{a^{2k} + a^k \cdot a^m} = \\
 & = \frac{(-1)^m \cdot a^m}{a^m + a^k} + \frac{a^{2k}}{(-1)^m \cdot a^k (a^k + a^m)} = \frac{(-1)^m \cdot a^m}{a^m + a^k} + \\
 & + \frac{a^k}{(-1)^m \cdot (a^k + a^m)} = \frac{(-1)^m \cdot a^{m+1} + a^k \cdot (-1)^{-m}}{a^m + a^k} = \frac{-1^m}{-1^m} = -1^m \\
 & = \frac{(-1)^m (a^m + a^k)}{a^m + a^k} = (-1)^m \Rightarrow p(m) + p(2k-m) =
 \end{aligned}$$

зависит от четности m

всего у нас $37 : 2 = 18,5$ пар

25:6

Дополнительный бланк № 6

Всероссийская олимпиада школьников «Миссия выполнима. Твоё призвание – финансист!»

Код участника:

(заполняется организатором)

111-621

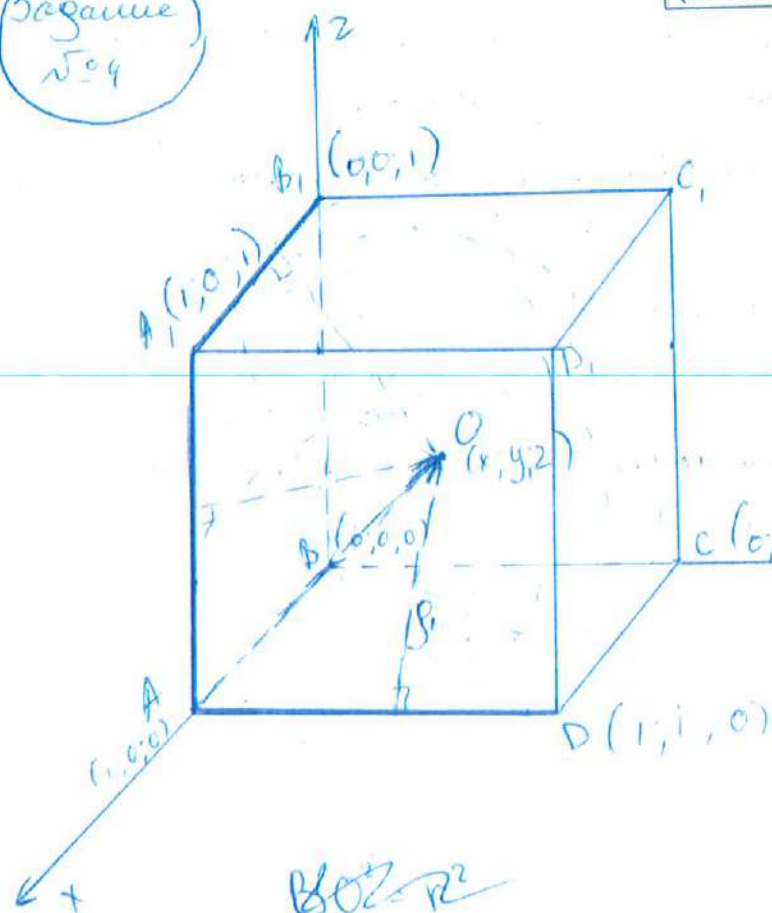
18 пар - 9 пар по (-1) и 9 пар по 1 , т.е.
в сумме будет

~~В~~ ~~сумме~~ остается еще 1 число, это $n = 17$,
т.к. середина ряда

$$p(17) = \frac{(-3)^{17}}{3^{17} + 3^{17}} = \frac{(-1)^{17} \cdot \cancel{3^{17}}}{2 \cdot 3^{17}} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$$

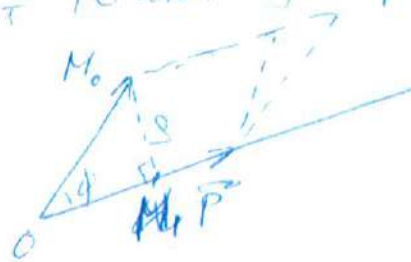
Ответ: $-\frac{1}{2}$



Код участника: 011-021
(заполняется организатором)Задача
№ 4

$$\begin{cases} (p(O, A))^2 = r^2 \\ (p(O, B))^2 = r^2 \\ (p(O, C))^2 = r^2 \end{cases}$$

$$BO^2 = r^2$$

Решение
не найденоКаго найти расстояние
от точки до пр-ой

$$S = |\vec{M_0O}| |\vec{p}| \frac{\sqrt{|\vec{M_0O}|^2 \cdot |\vec{p}|^2 - (\vec{M_0O}, \vec{p})^2}}{|\vec{M_0O}| |\vec{p}|}$$

$$= \sqrt{|\vec{M_0O}|^2 \cdot |\vec{p}|^2 - (\vec{M_0O}, \vec{p})^2}$$

$$S = \rho \cdot \vec{p}$$

$$\rho = \frac{S}{|\vec{p}|}$$

$$= \frac{\sqrt{|\vec{M_0O}|^2 \cdot |\vec{p}|^2 - (\vec{M_0O}, \vec{p})^2}}{|\vec{p}|}$$

$$\rho(M_0, \vec{p}) = M_0 M_1$$

$$S = |\vec{M_0M_1}| \cdot |\vec{p}| = |\vec{M_0O}| |\vec{p}| \sin \varphi$$

$$= \cancel{|\vec{M_0O}| |\vec{p}| \sin \varphi}$$

$$\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1$$

$$\cos^2 \varphi = \frac{(\vec{M_0O}, \vec{p})^2}{|\vec{M_0O}|^2 \cdot |\vec{p}|^2}$$

$$\sin^2 \varphi = 1 - \frac{(\vec{M_0O}, \vec{p})^2}{|\vec{M_0O}|^2 \cdot |\vec{p}|^2}$$

$$\sin \varphi = \sqrt{1 - \frac{(\vec{M_0O}, \vec{p})^2}{|\vec{M_0O}|^2 \cdot |\vec{p}|^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{|\vec{M_0O}|^2 \cdot |\vec{p}|^2 - (\vec{M_0O}, \vec{p})^2}}{|\vec{M_0O}| |\vec{p}|}$$

$$= \frac{\sqrt{|\vec{M_0O}|^2 \cdot |\vec{p}|^2 - (\vec{M_0O}, \vec{p})^2}}{|\vec{p}|}$$

Код участника: М11-621

(заполняется организатором)

$$BO^2 = r^2$$

$$(\rho_1(O; AD))^2 = \left(\frac{\sqrt{|\vec{AO}|^2 \cdot |\vec{AD}|^2 - (\vec{AO}, \vec{AD})^2}}{|\vec{AD}|} \right)^2 = \frac{|\vec{AO}|^2 \cdot |\vec{AD}|^2 - (\vec{AO}, \vec{AD})^2}{|\vec{AD}|^2}$$

$$(\rho_2(O; AA_1))^2 = \left(\frac{\sqrt{|\vec{AO}|^2 \cdot |\vec{AA}_1|^2 - (\vec{AO}, \vec{AA}_1)^2}}{|\vec{AA}_1|} \right)^2 =$$

$$= \frac{|\vec{AO}|^2 \cdot |\vec{AA}_1|^2 - (\vec{AO}, \vec{AA}_1)^2}{|\vec{AA}_1|^2}$$

$$(\rho_3(O; A_1B_1))^2 = \left(\frac{\sqrt{|\vec{AO}|^2 \cdot |\vec{A_1B_1}|^2 - (\vec{AO}, \vec{A_1B_1})^2}}{|\vec{A_1B_1}|} \right)^2 =$$

$$= \frac{|\vec{AO}|^2 \cdot |\vec{A_1B_1}|^2 - (\vec{AO}, \vec{A_1B_1})^2}{|\vec{A_1B_1}|^2}$$

$$\vec{BO} = (0-x; 0-y; 0-z)$$

$$|\vec{BO}| = \sqrt{(x^2) + (-y)^2 + (-z)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$BO^2 = (\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \\ \frac{|\vec{AO}|^2 \cdot |\vec{AA_1}|^2 - (\vec{AO}, \vec{AA_1})^2}{|\vec{AA_1}|^2} = r^2 \\ \frac{|\vec{AO}|^2 \cdot |\vec{A_1B_1}|^2 - (\vec{AO}, \vec{A_1B_1})^2}{|\vec{A_1B_1}|^2} = r^2 \\ \frac{|\vec{AO}|^2 \cdot |\vec{A_1D_1}|^2 - (\vec{AO}, \vec{A_1D_1})^2}{|\vec{A_1D_1}|^2} = r^2 \end{array} \right.$$

$$\frac{|\vec{AO}|^2 \cdot |\vec{AA_1}|^2 - (\vec{AO}, \vec{AA_1})^2}{|\vec{AA_1}|^2} =$$

$$= \frac{|\vec{AO}|^2 \cdot |\vec{AD}|^2 - (\vec{AO}, \vec{AD})^2}{|\vec{AD}|^2}$$

$$|\vec{AA_1}|^2 = |\vec{AD}|^2$$

$$|\vec{AO}|^2 \cdot |\vec{AA_1}|^2 - (\vec{AO}, \vec{AA_1})^2 =$$

$$= |\vec{AO}|^2 \cdot |\vec{AD}|^2 - (\vec{AO}, \vec{AD})^2$$

М 11-274
Код участника
(заполняется организатором)



Олимпиадная работа
заключительного этапа
«Всероссийская олимпиада школьников "Миссия
выполнима. Твоё призвание - финансист!" 2023-2024
г.»
«(Математика 11 класс)»

Вариант № 2 (второй)

«27 января 2024 г.»

Никакие другие записи на титульном листе делать не разрешается

11-274

Код участника

Всероссийская олимпиада школьников «Миссия выполнима. Твое призвание – финансист!» 2023/2024 уч.г.

Бланк проверки работы

Математика 11 класс

№ задания	ФИО эксперта	Балл	ФИО эксперта	Балл	Итоговый балл
1	Васильев	10	Гурьянов	10	10
2	Савина	10	Матюгов	10	10
3	Маркова	12	Александрович	12	12
4	Овчинников	0	Башакин	0	0
5	Васильева	12	Уфимов	12	12
6	Орехов	0	Уласов	0	0
7	Семанян	14	Алиашев	14	14
8	Швабков	0	Тюлькин	0	0
ИТОГО					60

Код участника:
(заполняется организатором)

М Н-274

№ 4 нет

№ 1

Пусть a - люди, которые говорят только по-английски,
 b - люди, которые говорят только по-французски, c -
люди, которые не говорят ни на одном из заданных языков.
Тогда, переписав условия в виде уравнений, используя
наши переменные, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} 0,04(b+c) = b \\ 0,2(a+c) = a \end{cases}$$

Найдём отношения наших переменных; решив систему
уравнений:

$$\begin{cases} 0,04b + 0,04c = b \\ 0,2a + 0,2c = a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0,56b = 0,04c \\ 0,8a = 0,2c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 24b = c \\ 4a = c \end{cases} \Rightarrow 4a = 24b; \\ a = 6b$$

По условию задачи нас просят найти отношение:

$\frac{a+c}{b+c}$. Найдём его, подставив известные нам переменные:

$$\frac{a+c}{b+c} = \frac{6b + 24b}{b + 24b} = \frac{30b}{25b} = 1,2. \text{ Ответ: } 1,2 \text{ раз больше}$$

10

№ 6 нет

Код участника:

(заполняется организатором)

М 11-274

№ 3

$$p(n) = \frac{(-3)^n}{3^n + 3^{12}}$$

$$p(n) + p(34-n) = \frac{(-3)^n}{3^n + 3^{12}} + \frac{(-3)^{34-n}}{3^{34-n} + 3^{12}} = \frac{(-3)^n}{3^n(1 + 3^{12-n})} + \frac{(-3)^{34-n}}{3^{12}(3^{12-n} + 1)} \quad \textcircled{=}$$

$$\textcircled{=} \frac{(-1)^n}{1 + 3^{12-n}} + \frac{(-3)^{12-n}}{1 + 3^{12-n}} = \frac{(-1)^n + (-3)^{12-n}}{1 + 3^{12-n}}$$

1) n – чётное, тогда:

$$p(n) + p(34-n) = 1 + 3^{12-n}$$

$$2,0 \cdot 3 = 2,4$$

$$264$$

$$A+B=6$$

$$\begin{cases} 3C + 2B \leq 11 \\ 4C - B \leq 10 \\ 7C - 3B \leq 18 \end{cases}$$

$$B \leq \frac{11-3C}{2}$$

$$\frac{11-3C}{2} \leq 4C-10$$

$$B \geq 4C-10$$

$$11-3C \leq 8C-20$$

$$B \geq \frac{7C-11}{3}$$

$$11C = 31 \quad C = \frac{31}{11}$$

$$\frac{7C-11}{3} = \frac{11-3C}{2}$$

$$14C - 36 = 33 - 5C$$

$$1) \frac{4C-10}{3} \geq -$$

$$23C = 65 \quad C = 3$$

$$\frac{4C-10}{3} \geq \frac{7C-11}{3}$$

$$\frac{11-3C}{2} \geq \frac{7C-11}{3}$$

$$\frac{1}{3} \cdot 480 = 60$$

$$\frac{4}{8} \cdot 120 = 120$$

$$\frac{2}{4} \cdot 120 = 60$$

$$120 \cdot 6 = 720$$

$$3 \cdot 100 + 130 + 140 + 150 = 300 + 420 = 720$$

$$100 + 100$$

N 3

$$p(n) = \frac{(-3)^n}{3^n + 3^{17}}$$

Так как $n \in [1; 33]$ и $n \in \mathbb{N}$, рассмотрим два случая и в них найдем сумму $p(n) + p(34-n)$:

1) n – четное, следовательно $(34-n)$ – тоже четное

$$\begin{aligned} p(n) + p(34-n) &= \frac{3^n}{3^n + 3^{17}} + \frac{3^{34-n}}{3^{34-n} + 3^{17}} = \frac{3^n}{3^n(1 + 3^{17-n})} + \frac{3^{34-n}}{3^{17}(3^{17-n} + 1)} = \\ &= \frac{1}{1 + 3^{17-n}} + \frac{3^{17-n}}{3^{17-n} + 1} = \frac{1 + 3^{17-n}}{1 + 3^{17-n}} = 1 \end{aligned}$$

2) n – нечетное, следовательно $(34-n)$ – нечетное

$$\begin{aligned} p(n) + p(34-n) &= \frac{-1 \cdot 3^n}{3^n + 3^{17}} + \frac{-1 \cdot 3^{34-n}}{3^{34-n} + 3^{17}} = -1 \left(\frac{3^n}{3^n + 3^{17}} + \frac{3^{34-n}}{3^{34-n} + 3^{17}} \right) = \\ &= -1 \cdot 1 = -1 \end{aligned}$$

В заданной сумме $(p(1) + p(2) + \dots + p(33))$ 8 пар слагаемых, сумма которых равна $-1 \cdot 8 = -8$; и 8 пар слагаемых, сумма которых равна $1 \cdot 8 = 8$. Значит сумма 32 слагаемых из заданной суммы даст 0, найдем 33 слагаемое, которое является $p(17)$ и получим ответ:

$$p(17) = \frac{3^{17} \cdot (-1)}{3^{17} + 3^{17}} = \frac{-1 \cdot 3^{17}}{2 \cdot 3^{17}} = -\frac{1}{2}$$

Ответ: $-\frac{1}{2}$

$$\arctan \frac{2n-1}{n+2} + \arctan \frac{n+3}{3n-1} = \pi \quad n \in \mathbb{Z}$$

н 5

огр: $n \neq -2; \frac{1}{3}$

Сделаем замену для удобства:

$$\begin{cases} \arctan \frac{2n-1}{n+2} = a \\ \arctan \frac{n+3}{3n-1} = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tan(\arctan \frac{2n-1}{n+2}) = \tan a \\ \tan(\arctan \frac{n+3}{3n-1}) = \tan b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tan a = \frac{2n-1}{n+2} \\ \tan b = \frac{n+3}{3n-1} \end{cases}$$

Получим:

$$a + b = \pi;$$

$$\left(\frac{2n-1}{n+2} + \frac{n+3}{3n-1} \right) : \left(1 - \frac{2n-1}{n+2} \cdot \frac{n+3}{3n-1} \right) = \tan(\pi);$$

$$\tan(a+b) = \tan(\pi); \quad \frac{6n^2 - 5n + 1 + n^2 + 6}{(n+2)(3n-1)} \cdot \frac{(n+2)(3n-1)}{3n^2 - 5n - 2 - n^2 - 5n + 3} = \tan(\pi);$$

$$\frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b} = \tan(\pi); \quad \frac{7n^2 + 7}{n^2 + 1} = \tan(\pi);$$

$$\tan(\pi) = 7;$$

$$\pi = \arctan(7) + \pi n; \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} \arctan \left(\frac{2n-1}{n+2} \right) \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right] \\ \arctan \left(\frac{n+3}{3n-1} \right) \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right] \end{cases} \Rightarrow \arctan \left(\frac{2n-1}{n+2} \right) + \arctan \left(\frac{n+3}{3n-1} \right) \in [-\pi; \pi] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi \in [-\pi; \pi]$$

$$-\pi \leq \arctan(7) + \pi n \leq \pi$$

$$-1 - \frac{\arctan(7)}{\pi} \leq n \leq 1 + \frac{\arctan(7)}{\pi}$$

$$n = -1; 0$$

Ответ: $\pi = \arctan(7);$

$\pi = \arctan(7) - \pi$

и 7

$$f(x) = x^4 + bx^2 + x; \quad f'(x) = 4x^3 + 2bx + 1$$

$y = kx + b$ – касательная, где:

$$k = 4x_0^3 + 2bx_0 + 1$$

$$b = -4x_0^4 - 2bx_0^2 - 1 + x_0^4 + bx_0^2 + x_0 = -3x_0^4 - bx_0^2$$

Представим точки соприкосновения как x_1 и x_2 , тем что $x_1 \neq x_2$. Так как ровно одна касательная у нас одна, а точек 2, составим систему уравнений и решим её:

$$\begin{cases} 4x_1^3 + 2bx_1 + 1 = 4x_2^3 + 2bx_2 + 1 \\ -3x_1^4 - bx_1^2 = -3x_2^4 - bx_2^2 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x_1^3 + bx_1 = 2x_2^3 + bx_2 \\ 3x_1^4 + bx_1^2 = 3x_2^4 + bx_2^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2(x_1^3 - x_2^3) + b(x_1 - x_2) = 0 \\ 3(x_1^4 - x_2^4) + b(x_1^2 - x_2^2) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} (x_1 - x_2)(2(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) + b) = 0 \\ (x_1 - x_2)(x_1 + x_2)(3(x_1^2 + x_2^2) + b) = 0 \end{cases}$$

$x_1 = x_2$; $x_1 = -x_2$, проверим подставив в первое уравнение

$$2(x_1^2 - x_2^2 + x_2^2) + b = 0, \quad 2x_2^2 + b = 0, \quad x_2 = \pm \sqrt{-\frac{b}{2}}; \quad x_1 = \mp \sqrt{-\frac{b}{2}} \text{ при } b < 0$$

Подставим в уравнения и получим коэффициенты k и b , получим касательную.

$$k = -4 \cdot \frac{b}{2} \cdot \sqrt{-\frac{b}{2}} + 2b \sqrt{-\frac{b}{2}} + 1 = -2b \sqrt{-\frac{b}{2}} + 2b \sqrt{-\frac{b}{2}} + 1 = 1$$

$$b = -3 \cdot \frac{b^2}{4} + b \cdot \frac{b}{2} = -\frac{3b^2}{4} + \frac{b^2}{2} = -\frac{b^2}{4}$$

$y = x - \frac{b^2}{4}$, при $b < 0$. Вернёмся к системе уравнений и решим её

$$\begin{cases} 2(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) + b = 0 \\ 3(x_1^2 + x_2^2) = -b \end{cases} \quad \begin{cases} 2(x_1x_2 - \frac{b}{3}) + b = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 = -\frac{b}{3} \end{cases} \quad \begin{cases} 2x_1x_2 = -\frac{b}{3} \\ x_1^2 + x_2^2 = -\frac{b}{3} \end{cases} \quad \begin{cases} (x_1 + x_2)^2 = 0 \\ x_1 = -x_2 \end{cases}$$

получим те же корни.

Ответ: при $b \in (-\infty; 0)$; $y = x - \frac{b^2}{4}$

⊕ 145.

Код участника:

(заполняется организатором)

М 11-274

кв

Предположим худший вариант, что числа x, y, z минимально отличаются друг от друга, т.е.:

$$x = n$$

$$y = n + 1$$

$$z = n + 2$$

Иногда представляли худший случай, когда нам попалась дисперсионная последовательность только из двух чисел, всего таких вариантов.

$$n; n + 1$$

$$n + 1; n$$

$$n; n + 2$$

$$n + 2; n$$

$$n + 1; n + 2$$

$$n + 2; n + 1$$

Вариантов ~~где присутствует~~ ~~когда нам попадется~~ 6 вар. одна из таких последовательностей: $55! \cdot 6$. А всего возможных последовательностей – $100!$. Тогда в худшем случае когда нам не попалась ни одна

из благоприятных последовательностей: $100! - 55! \cdot 6 = 55! \cdot (100 - 6) = 54 \cdot 55!$. В таком случае следующая последовательность можно считать благоприятной: $54 \cdot 55! + 1$.

Ответ: $55! \cdot 54 + 1$

Решена другая задача

(08)

Код участника:

(заполняется организатором)

М 11-274

№ 2

$$\begin{cases} 3A + 5B \leq 11 \\ 4A + 3B \leq 10 \\ 2A + 4B \leq 18 \end{cases} \quad \text{Предположим:} \quad \begin{cases} 3A + 5B \leq 11 \\ 4A + 3B = 10 \end{cases} \quad \begin{cases} 3A + 5B = 11 \\ A - 2B = -11/3 \end{cases} \quad \begin{cases} 3A + 5B = 11 \\ 3A - 6B = -3 \end{cases}$$

$$11B = 14; \quad B = \frac{14}{11}; \quad A = \frac{20}{11} - 1 = \frac{9}{11}; \quad \text{Проверим:}$$

$$\begin{cases} \frac{51}{11} + \frac{70}{11} \leq 11 \\ \frac{68}{11} + \frac{42}{11} \leq 10 \\ \frac{118}{11} + \frac{56}{11} \leq 18 \end{cases} \quad \begin{cases} 11 \leq 11 \\ 10 \leq 10 \\ \frac{174}{11} \leq 18 - \text{верно.} \end{cases}$$

$$A + B = \frac{9}{11} + \frac{14}{11} = \frac{23}{11}$$

Предположим:

$$\begin{cases} 3A + 5B = 11 \\ 2A + 4B = 18 \end{cases} \quad \begin{cases} 4A - B = 2 \\ 2A + 4B = 18 \end{cases} \quad \begin{cases} 4A - 9B = 20 \\ 2A + 4B = 18 \end{cases} \quad \begin{cases} 23A = 46 \\ A = 2; \quad B = 2 - 2 = 0 \end{cases}$$

Проверим:

$$\begin{cases} 6 + 5 \leq 11 \\ 8 + 3 \leq 10 \\ 14 + 4 \leq 18 \end{cases} \quad \begin{cases} 11 \leq 11 \\ 11 \leq 10 - \text{не верно} \\ 18 \leq 18 \end{cases}$$

Предположим:

$$\begin{cases} 4A + 3B = 10 \\ 2A + 4B = 18 \end{cases} \quad \begin{cases} 4A + 3B = 10 \\ 3A + B = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} 4A + 3B = 10 \\ 5A + 3B = 24 \end{cases} \quad \begin{matrix} 5A = 14 \\ A = 2,8 \quad B = -0,4 \end{matrix}$$

Проверим:

$$\begin{cases} 2,4 + 2 \leq 11 \\ 11,2 - 1,2 \leq 10 \\ 19,6 - 7,6 \leq 18 \end{cases} \quad \begin{cases} 6,4 \leq 11 - \text{верно} \\ 10 \leq 10 \\ 12 \leq 18 \end{cases} \quad \begin{matrix} A + B = 2,8 - 0,4 = 2,4 \\ 2,4 < \frac{31}{11} \\ 264 < 310 \end{matrix}$$

$$\text{Ответ: } \frac{31}{11}$$

10

М11-861

Код участника
(заполняется организатором)



**Олимпиадная работа
заключительного этапа**

**«Всероссийская олимпиада школьников "Миссия
выполнима. Твоё призвание - финансист!" 2023-2024
г.»**

«(Математика 11 класс)»

Вариант № 2 (второй)

«27 января 2024 г.»

Никакие другие записи на титульном листе делать не разрешается

Код участника:
(заполняется организатором)

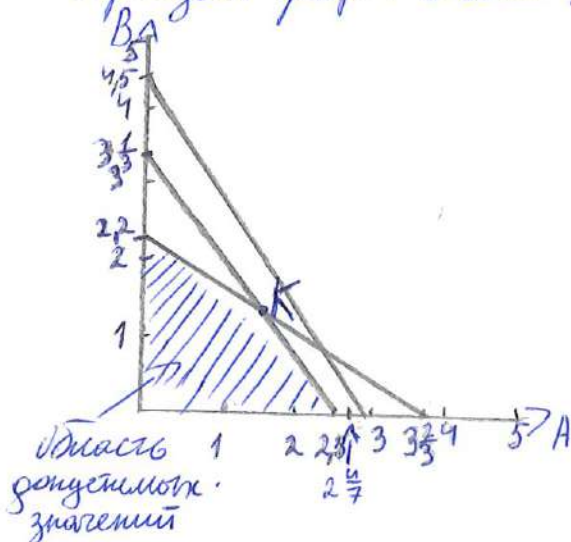
M11-861

① Пусть x не говорит по-английски, из них $0,86x$ не говорит не по-английски, не по-французски. Пусть y не говорит по-французски, из них $0,8y$ не говорит не по-английски, не по-французски. Заметим, что выше мы привели одних и тех же людей, не говорящих не по-английски, не по-французски. Тогда: $0,86x = 0,8y \Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{0,86}{0,8} = 1,2$.
 $\frac{y}{x}$ - это искомое число.

Ответ: в 1,2 раза

$$\textcircled{2} \begin{cases} 3A + 5B \leq 11 \\ 4A + 3B \leq 10 \\ 7A + 4B \leq 18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B \leq \frac{11-3A}{5} \\ B \leq \frac{10-4A}{3} \\ B \leq \frac{18-7A}{4} \end{cases}$$

Нарисуем график в осях A, B



$$A+B \rightarrow \max$$

$$A+B=C$$

$$B=C-A$$

Линия, выходящая из координаты $(C; 0)$ и приходящая в $(0; C)$ у которой хотя бы одна точка лежит в допустимой области. Видно, что C - это максимально-возможное, когда она пересекает точку K , найдем её координаты.

$$\frac{11-3A}{5} = \frac{10-4A}{3}$$

$$33-9A = 50-20A$$

$$A = \frac{11}{17}$$

$$B = \frac{11-3 \cdot \frac{11}{17}}{5} = \frac{121-51}{5} = \frac{70}{11 \cdot 5} = \frac{14}{11}$$

$$A+B = \frac{31}{11}$$

Код участника:

(заполняется организатором)

M11-861

$$\textcircled{3} S_n = \sum_{n=1}^{33} \frac{(-3)^n}{3^n + 3^{17}} = \sum_{k=-16}^{16} \frac{(-1)^{17-k}}{1+3^k} = \sum_{k=-16}^{16} \frac{(-1)^{k+1}}{1+3^k} = \sum_{k=-16}^{16} b_k$$

$$\} \} a_n = \frac{(-1)^n}{1+3^{17-n}} = \frac{(-1)^{17+k}}{1+3^k} \} \}$$

$$S_n \text{ при } k=0: (-1)^{\frac{1}{11}} = -\frac{1}{2}$$

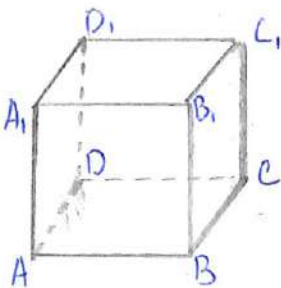
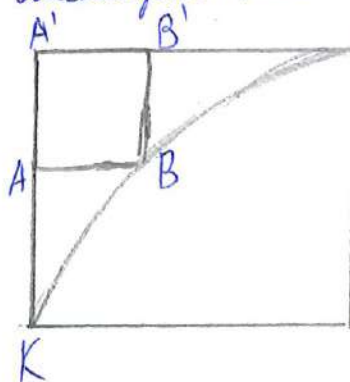
Заметим, что $p_k + p_{-k} = (-1)^{k+1}$:

$$\frac{(-1)^{k+1}}{1+3^k} + \frac{(-1)^{-k+1}}{1+3^{-k}} = \frac{(-1)^{k+1} \cdot (1+3^{-k}) + (-1)^{1-k} \cdot (1+3^k)}{(1+3^k)(1+3^{-k})} =$$

$$= \frac{(-1)^{k+1} \cdot (1+3^{-k} + 1+3^k)}{(1+3^k)(1+3^{-k})} = \frac{(-1)^{k+1} \cdot (1+3^{-k} + 3 + 3^k)}{(1+3^{-k} + 3^k + 3)} = (-1)^{k+1} \Rightarrow$$

 $\Rightarrow$ имеем 16 пар дающих $(-1)^{k+1}$ в сумме

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{16} (-1)^{k+1} = -1 \cdot \sum_{k=1}^{16} (-1)^k = -1 \cdot (-8+8) = 0$$

 $\Rightarrow$ остаётся лишь одно слагаемое $p_0 = -\frac{1}{2}$ Ответ: $S_n = -\frac{1}{2}$. $\textcircled{4}$ Рассмотрим плоскость $AA'B'B$ 

- 1) $O, K = 0, B = 0, K_1 = r$,
- 2) $\angle KCB = 45^\circ$, т.к. $KA'B'$, D_1 - квадрат $\Rightarrow \angle KA'B' = 45^\circ$,
т.к. $AA'B'B$ - квадрат
- 3) $A'B = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

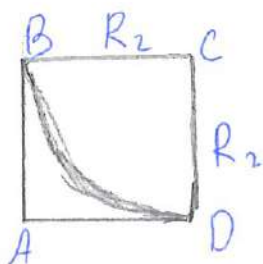
$$\begin{aligned} & \text{4) по теореме Пифагора } OA_1 = \\ & = \sqrt{OK^2 + OB^2} = \sqrt{R_1^2 + 1^2} = \sqrt{R_1^2 + 1} = \\ & = \sqrt{R_1^2 + R_2^2} = \sqrt{2 + R_1^2} = \sqrt{2} R_1 \\ & \Rightarrow R_1 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} = 2 + \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Код участника:

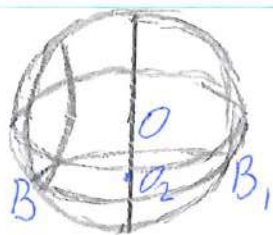
(заполняется организатором)

M11-861

Теперь рассмотрим плоскость $ABCD$



$R_2 = 1$. Посмотрим, что мы знаем.



Заметим, что между плоскостями сечения сферы BB_1 и $BB_2 \angle 90^\circ$, т.к. это 2 смежные плоскости исходного куба, тогда OB и OB_1 и OB_2 перпендикулярны плоскостям BB_2 BB_1 , тогда по теореме Пифагора $R = \sqrt{2 + \sqrt{2} + 1} = \sqrt{3 + \sqrt{2}}$.

$$⑤ \arctg \frac{2x-1}{x+2} + \arctg \frac{x+3}{3x-1} = x$$

$$\operatorname{tg}(\arctg \frac{2x-1}{x+2} + \arctg \frac{x+3}{3x-1}) = \operatorname{tg} x$$

$$\frac{\frac{2x-1}{x+2} + \frac{x+3}{3x-1}}{1 - \frac{(2x-1) \cdot (x+3)}{(x+2) \cdot (3x-1)}} = \operatorname{tg} x ; \quad \begin{matrix} x \neq -2 \\ x \neq \frac{1}{3} \end{matrix}$$

$$\frac{6x^2 - 5x + 1 + x^2 + 5x + 6}{3x^2 + 5x - 2 - 2x^2 + 3 - 5x} = \operatorname{tg} x$$

$$\frac{7(x^2+1)}{x^2+1} = \operatorname{tg} x$$

$$x^2+1 \neq 0 \Rightarrow \operatorname{tg} x = 7.$$

$$x = \arctg 7 + \pi n,$$

$$x = \arctg 7 + \arctg 0 \Rightarrow x \in [-\pi; \pi] \Rightarrow x = \arctg 7$$

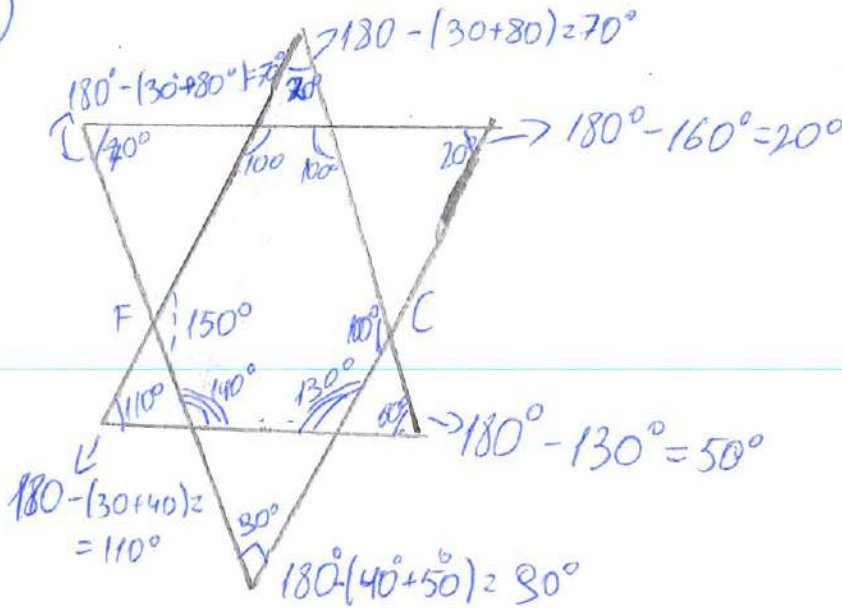
$$\Rightarrow \begin{cases} x = \arctg 7 \\ x = \arctg 7 - \pi \end{cases}$$

Код участника:

(заполняется организатором)

M11-261

⑥



Углы $170^\circ, 20^\circ, 80^\circ$;
 $120^\circ, 110^\circ, 50^\circ$

⑦ $f'(x) = 4x^3 + 2bx + 1 = K$

$$x^4 + bx^2 + x = Kx + C$$

$$x^4 + bx^2 + x(1-K) - C = 0$$

$$\begin{cases} x^4 + bx^2 + x(1-K) - C = 0 \\ 4x^3 + 2bx + 1 - K = 0 \end{cases}$$

$$4x^3 + 2bx + 1 - K = 0$$

$$x^4 + bx^2 + x(-4x^3 - 2bx) - C = 0$$

$$x^4 + bx^2 - 4x^4 - 2bx^2 - C = 0$$

$$-3x^4 - bx^2 - C = 0$$

$$3x^4 + bx^2 + C = 0$$

$$3t^2 + 6t + C = 0$$

имеет 2 решения, t_0 и t_1 , каждое из которых может разлагаться в x_0 и $x_1 = -\sqrt{t_0}$ и $\sqrt{t_0}$ соответственно

Код участника:

(заполняется организатором)

М11-861

Но только если $t_1 > 0$

Предположим, что $t_0 > 0$, а $t_1 < 0 \Rightarrow$ есть только пара решений x_0 и x_1 , равные $-\sqrt{t_0}$ и $\sqrt{t_0} \Rightarrow$ точки касания по оси x симметричны относительно 0

Значит касательная проходит через x_0 и $-x_0$: найдем $\Delta f = f(x) - f(x_0) =$
 $= x^4 + bx^2 + x - x_0^4 - bx_0^2 + x_0 - 2x_0$

$$\text{Тогда наклон прямой} = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{2x_0}{x_0 - (-x_0)} = \frac{2x_0}{2x_0} = 1 \Rightarrow K = 1$$

Через y -с кас-й получили: $c = -\frac{b^2}{4} \Rightarrow y$ -с кас-й имеет вид: $y = x - \frac{b^2}{4}$

$b \neq 0$ т.к. в системе кубическая функция пересекается с константой более одного раза при ≥ 1 и умнож.
 Что невозможно при $b > 0$



ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМА.
ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ – ФИНАНСИСТ!»
ПО ПРЕДМЕТУ МАТЕМАТИКА 2023-2024 уч. года

ОЧНЫЙ ЭТАП

11 класс

Вариант 2

Задание 1 (10 баллов)

Среди людей, не говорящих по-английски, 4% говорят по-французски, а среди людей, не говорящих по-французски, 20% говорят по-английски. Во сколько раз число людей, не говорящих по-французски, больше числа людей, не говорящих по-английски?

Задание 2 (10 баллов)

Каким наибольшим может быть значение выражения $A + B$, если A и B – числа, удовлетворяющие следующей системе неравенств

$$\begin{cases} 3A + 5B \leq 11; \\ 4A + 3B \leq 10; \\ 7A + 4B \leq 18. \end{cases}$$

Задание 3 (12 баллов)

Для каждого натурального числа n положим $p(n) = \frac{(-3)^n}{3^n + 3^{17}}$.
Вычислите сумму $p(1) + p(2) + p(n) + \dots + p(33)$.

Задание 4 (12 баллов)

Длина ребра куба $ABCD A'B'C'D'$ равна 1. Найдите радиус сферы, проходящей через точку B и касающейся прямых AD , AA' и $A'B'$.

Задание 5 (12 баллов)

Решите уравнение $\operatorname{arctg} \frac{2x-1}{x+2} + \operatorname{arctg} \frac{x+3}{3x-1} = x$.

Задание 6 (14 баллов)

Два треугольника пересекаются по шестиугольнику $ABCDEF$, в котором $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 100^\circ$, $\angle E = 140^\circ$, $\angle F = 150^\circ$.

Найдите углы этих треугольников. $\angle D = 130^\circ$

Задание 7 (14 баллов)

При каких значениях параметра b существует прямая, касающаяся графика функции $f(x) = x^4 + bx^2 + x$ в двух точках? Для каждого такого значения параметра a найдите уравнение соответствующей прямой.

Задача 8 (16 баллов)

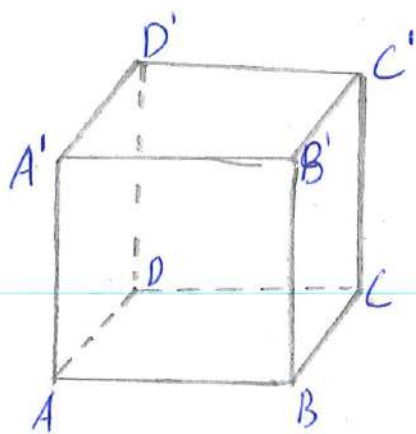
Про натуральные числа X , Y и Z известно, что они различны и не превосходят 100. Мы можем выписать любую последовательность $\{a_1, \dots, a_{100}\}$, содержащую все натуральные числа от 1 до 100. Какое наименьшее число последовательностей нужно выписать, чтобы среди них наверняка имелась такая, в которой два или три подряд идущих члена принадлежат множеству $\{X; Y; Z\}$?

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{16} (-1)^{k+1} = -1 \cdot \sum_{k=1}^{16} (-1)^k = -1 \cdot (-8+8) = 0$$

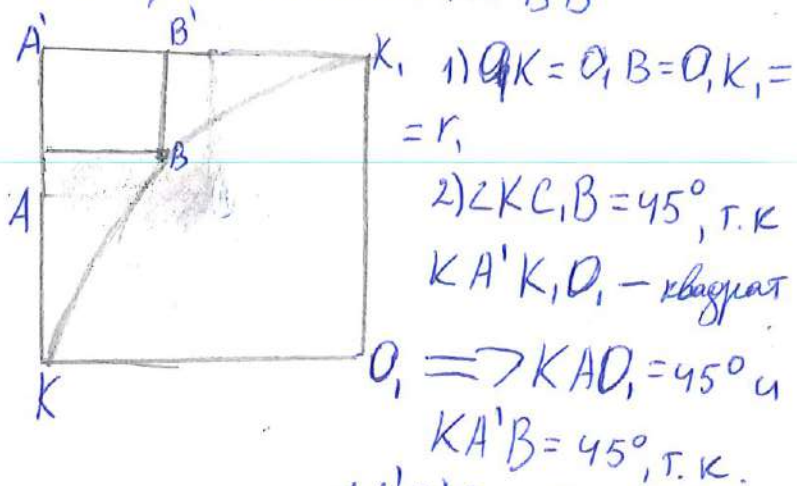
$\Rightarrow$ остается лишь одно слагаемое $p_0 = -\frac{1}{2}$

Ответ: $S_n = -\frac{1}{2}$

④



Рассмотрим плоскость $AA'B'B$



1) $\angle K = 90^\circ$, $B = 90^\circ$, $K_1 = r$,

2) $\angle KCB = 45^\circ$, т.к.

$KA'KB_1$ — квадрат

$O_1 \Rightarrow \angle KAO_1 = 45^\circ$ и

$KA'B = 45^\circ$, т.к.

$AA'B'B$ — квадрат.

3) $A'B = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

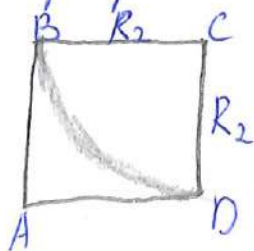
4) по теореме Пифагора $O_1A' =$

$= \sqrt{O_1K^2 + O_1K_1^2} \Rightarrow R_1 + \sqrt{2} =$

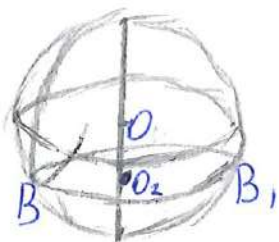
$= \sqrt{R_1^2 + R_1^2} \Rightarrow \sqrt{2} + R_1 =$

$= \sqrt{2} \cdot R_1 \Rightarrow R_1 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} = 2 + \sqrt{2}$

Теперь рассмотрим плоскость $ABCD$



$R_2 = 1$. Посмотрим, что мы знаем



Заметим, что между плоскостями сечения сферы

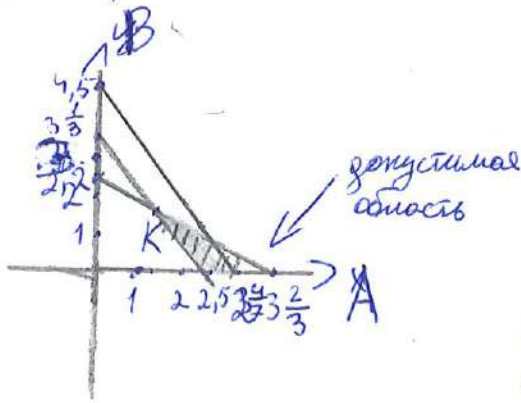
BB_1 и $BB_2 \angle 90^\circ$, т.к. это 2 смежные плоскости

исходного куба, тогда OB и OB_1 и OB_2 перпендикулярны

плоскостям BB_1B_2 , тогда по теореме Пифагора

$R = \sqrt{2 + \sqrt{2} + 1} = \sqrt{3 + \sqrt{2}}$

Нарисуем график в осях А, В

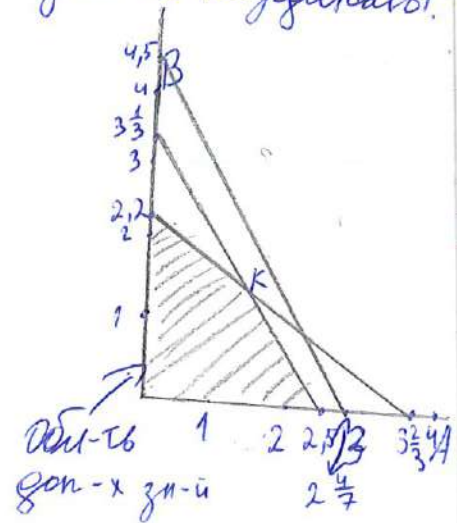


$$A+B \rightarrow \max$$

$$A+B=C$$

$$B=C-A$$

Линия, выходящая из координаты $(C; 0)$ и приходящая в $(0; C)$ у которой пока еще нет точки лежит в допустимой области. Очевидно, что C — это макс. возм.-е, когда она пересекает точку K , найдем её координаты.



$$\frac{11-3A}{5} = \frac{10-4A}{3}$$

$$33-8A = 50-20A$$

$$A = \frac{17}{11}$$

$$B = 11 - 3 \cdot \frac{17}{11} = \frac{121 - 51}{11} = \frac{70}{11} = \frac{14}{2.2}$$

$$A+B = \frac{31}{11}$$

$$\textcircled{3} S_n = \sum_{n=1}^{33} \frac{(-3)^n}{3^n + 3^{17}} = \sum_{k=-16}^{16} \frac{(-1)^{17-k}}{1+3^k} = \sum_{k=-16}^{16} \frac{(-1)^{k+1}}{1+3^k} = \sum_{k=-16}^{16} b_k$$

$$a_n = \frac{(-1)^n}{1+3^{17-n}} = \frac{(-1)^{17+k}}{1+3^k}$$

$$S_n \text{ при } k=0: (-1)^{\frac{1}{17}} = -\frac{1}{2}$$

Заметим, что $p_k + p_{-k} = (-1)^{k+1}$:

$$\begin{aligned} \frac{(-1)^{k+1}}{1+3^k} + \frac{(-1)^{-k+1}}{1+3^{-k}} &= \frac{(-1)^{k+1} \cdot (1+3^{-k}) + (-1)^{-k+1} \cdot (1+3^k)}{(1+3^k) \cdot (1+3^{-k})} = \\ &= \frac{(-1)^{k+1} \cdot (1+3^{-k} + 1+3^k)}{(1+3^k) \cdot (1+3^{-k})} = \frac{(-1)^{k+1} \cdot (1+3^{-k} + 3+3^k)}{1+3^{-k} + 3+3^k} = (-1)^{k+1} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ имеем 16 пар дающих $(-1)^{k+1}$ в сумме

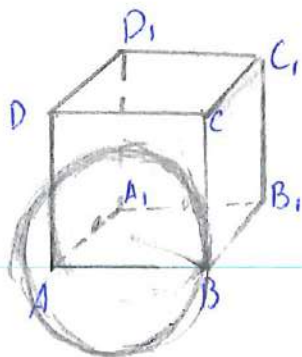
по фпр-ки - 4% из неверн-х по анал
по анал - 20% из неверн-х по фпр-ки

$$x (1-y) \cdot 0,04$$

$$y (1-x) \cdot 0,2$$

$$\frac{x}{(1-x) \cdot 0,2} = \frac{x}{0,2 - 0,2x}$$

$$\frac{y}{(1-y) \cdot 0,04} = \frac{y}{0,04 - 0,04y}$$



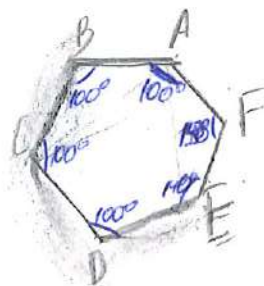
$$B \leq 1,5$$

$$-2B \leq -3$$

$$3A + 5B \leq 11$$

$$4A + 3B \leq 10$$

$$7A + 4B \leq 18$$



① Пусть x не говорит по анал, из них $0,86x$ не говорит не по анал, не по фпр. Пусть y не говорит по фпр., из них $0,8y$ не говорит не по анал, не по фпр. Заметим, что выше мы провели фпр и тем же людей не говорящих не по анал, не по фпр. Тогда: $0,86x = 0,8y$
 $\Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{0,86}{0,8} = 1,2$. $\frac{y}{x}$ — это искомое число

Ответ: в 1,2 раза

$$\begin{cases} 3A + 5B \leq 11; \\ 4A + 3B \leq 10; \\ 7A + 4B \leq 18. \end{cases}$$

$$\begin{cases} B \leq \frac{11-3A}{5} \\ B \leq \frac{10-4A}{3} \\ B \leq \frac{18-7A}{4} \end{cases}$$

M11-300

Код участника
(заполняется организатором)



**Олимпиадная работа
заключительного этапа
«Всероссийская олимпиада школьников "Миссия
выполнима. Твоё призвание - финансист!" 2023-2024
г.»
«(Математика 11 класс)»**

Вариант № 1

«27 января 2024 г.»

Никакие другие записи на титульном листе делать не разрешается

МН-300

Код участника

Всероссийская олимпиада школьников «Миссия выполнима. Твое призвание – финансист!» 2023/2024 уч.г.

Бланк проверки работы

Математика 11 класс

№ задания	ФИО эксперта	Балл	ФИО эксперта	Балл	Итоговый балл
1	Васильев	10	Гурьянов	10	10
2	Магомедов Р.М.	2	Савина С.В.	2	2
3	Шарова	12	Чикаев	12	12
4	Хурсанова	12	Овчинник	12	12
5	Борисов	6	Кремев	6	6
6	Осехов	3	Гунзали	3	3
7	Кежков	14	Степанян	14	14
8	Ж	0	Щауков	0	0
ИТОГО					59

√1

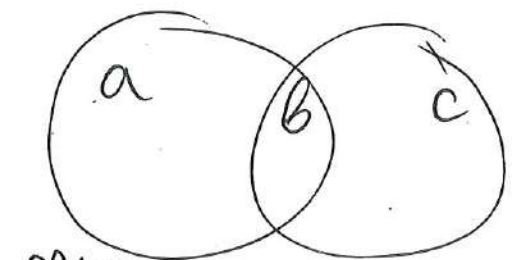
1) Пусть x человек занимаются огно (как мимими), а y человек – дистанционно (как мимими), тогда $0,5x$ чел ~~занимаются~~ или $0,6y$ чел занимаются и огно, и дистанционно $\Rightarrow$

$$\Rightarrow 0,5x = 0,6y \Rightarrow y = \frac{5}{6}x$$

2)
$$\begin{cases} a+b=x \\ b+c=y=\frac{5}{6}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=0,5x=0,6y \end{cases}$$

$$\Rightarrow a-c = \frac{1}{6}x \Rightarrow c = a - \frac{1}{6}x;$$

~~Вместо $b = x - a$~~



огно
а чел – только огно,
с чел – только дистан-
ционно,
б чел – и так, и так

$a+b+c$ – всего чел в ВУЗе

3) для людей, занимающихся только огно:

$$\frac{a}{a+b+c} = \frac{a}{a+(x-a)+(a-\frac{1}{6}x)} = \frac{a}{a+\frac{5}{6}x}$$

4) $b = 0,5x = 0,6y$ (по усл.)

$$a = x - b = x - 0,5x = 0,5x$$

$$\Rightarrow \frac{a}{a+b+c} = \frac{0,5x}{0,5x + \frac{5}{6}x} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} + \frac{5}{6}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{8} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$

Ответ: $\frac{3}{8}$

④ 10

Код участника:

(заполняется организатором)

M 11-300

52 (лист 1, продолжение
на листе 11)
(A+B)_{min} - ?

$$\begin{cases} A+5B \geq 9, & (1) \\ 3A+4B \geq 11, & (2) \\ 5A+3B \geq 11 & (3) \end{cases}$$

1) (1)+(3) и (2)·2 :

$$\begin{array}{l} 6A+8B \geq 20; \\ 6A+8B \geq 22 \end{array} \quad \left| \Rightarrow \boxed{6A+8B \geq 22} \rightarrow \boxed{3A+4B \geq 11} \right.$$

2) ~~(1)·3~~ (1)·3 - (2) :

$$\begin{array}{l} \cancel{3A+15B \geq 27} \\ 3A+4B \geq 11 \end{array} \quad \left| \Rightarrow 11B \geq 16 \right.$$

3) (1)·5 - (3) :

$$\begin{array}{l} 5A+25B \geq 45 \\ 5A+3B \geq 11 \end{array} \quad \left| \Rightarrow 22B \geq 34 \right.$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} 22B \geq 32 \\ 22B \geq 34 \end{array} \quad \left| \Rightarrow 22B \geq 34 \Rightarrow 11B \geq 17 \Rightarrow \boxed{B \geq \frac{17}{11}} \right.$$

~~11B \geq 17 \Rightarrow B \geq \frac{17}{11}~~

~~11B \geq 17 \Rightarrow B \geq \frac{17}{11}~~

Код участника:

(заполняется организатором)

M11-300

5

$$\arccos\left(\frac{5x+3}{3x-5}\right) + \arccos\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = x$$

опрацювання:
 1) $3x-5 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{5}{3}$
 2) $x+1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$

$$1) \text{Пусть } \alpha = \arccos\left(\frac{5x+3}{3x-5}\right), \cos(\alpha) = \frac{5x+3}{3x-5};$$

$$\beta = \arccos\left(\frac{x-1}{x+1}\right), \cos(\beta) = \frac{x-1}{x+1}$$

$$2) \cos(\arccos\left(\frac{5x+3}{3x-5}\right) + \arccos\left(\frac{x-1}{x+1}\right)) = \cos(x);$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(x);$$

$$\frac{\cos \alpha \cdot \cos \beta - 1}{\cos \alpha + \cos \beta} = \cos(x);$$

$$\frac{5x+3}{3x-5} \cdot \frac{x-1}{x+1} - 1$$

$$\frac{5x+3}{3x-5} + \frac{x-1}{x+1} = \cos(x);$$

$$\frac{5x^2+3x-5x-3-3x^2-3x+5x+5}{(3x-5)(x+1)}$$

$$\frac{5x^2+3x+5x+3+3x^2-3x-5x+5}{(3x-5)(x+1)} = \cos(x);$$

$$\frac{2x^2+8}{8x^2+8} = \cos(x)$$

$$\frac{2(x^2+1)}{8(x^2+1)} = \cos(x)$$

$$\cos(x) = \frac{1}{4} \Rightarrow x = \arccos(0,25)$$

згладив.
 опрацюв.
 (чужий)
 (немає)

Відповідь: $\arccos(0,25)$

6 балів

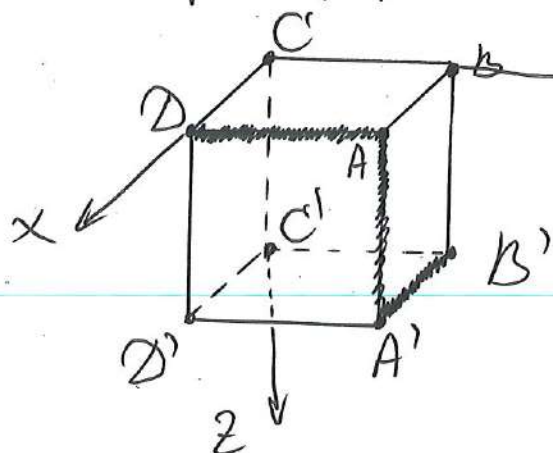
перевірено
 правильне
 рішення

Код участника:

(заполняется организатором)

M11-300

$\sqrt{4}$ (мост)
длина ребра 1



1) Введем систему координат с началом в т. $C(0;0;0)$ и осями, параллельными ребрам куба (см. рисунок), тогда
 $D(1;0;0); B(0;1;0); A(1;1;0);$
 $A'(1;1;1); B'(0;1;1); C'(0;0;1);$
 $D'(1;0;1)$

2) Пусть $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = R^2$ — уравнение сферы, где R — её радиус, а $(x_0; y_0; z_0)$ — координаты её центра

3) По условию ~~сфера~~ принадлежит сфере, значит,
 $C(0;0;0)$

$$x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = R^2$$

4) $A(1;1;0); D(1;0;0) \Rightarrow$ прямая AD : ~~уравнение~~

$$\begin{cases} x=1 \\ y-\text{любое} \\ z=0 \end{cases}$$

сфера касается $AD \Rightarrow (x_0-1)^2 + (y_0-y_0)^2 + z_0^2 = R^2$,

• единств. корень y

$$\begin{aligned} 2) \Rightarrow x_0^2 - 2x_0 + 1 + y^2 - 2yy_0 + y_0^2 + z_0^2 &= x_0^2 + y_0^2 + z_0^2; \\ y^2 - 2yy_0 - (2x_0 - 1) &= 0 \end{aligned}$$

Код участника:

(заполняется организатором)

N 11-300

5) (мет 2)

$$D = 4y_0^2 + 4(2x_0 - 1)$$

$$\bullet \text{ единств. корень} \Rightarrow D = 0 \quad \left| \Rightarrow \boxed{y_0^2 = 1 - 2x_0} \right.$$

5) $A(1; 1; 0); A'(1; 1; 1) \Rightarrow$ прямая AA' :

$$\begin{cases} x = 1; \\ y = 1; \\ z - \text{любая} \end{cases}$$

$$\text{Сфера касается } AA' \Rightarrow (x_0 - 1)^2 + (y_0 - 1)^2 + (z_0 - 0)^2 = R^2,$$

 $\bullet \text{ единств. корень } z$

$$\frac{3}{5} \Rightarrow x_0^2 - 2x_0 + 1 + y_0^2 - 2y_0 + 1 + z_0^2 - 2z_0 + 0 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2$$

$$z_0^2 - 2z_0 - (2x_0 + 2y_0 - 2) = 0$$

$$D = 4z_0^2 + 8(x_0 + y_0 - 1) \quad \left| \Rightarrow \boxed{z_0^2 = 2(1 - x_0 - y_0)} \right.$$

 $\bullet \text{ единств. корень} \Rightarrow D = 0$
б) $A'(1; 1; 1), B'(0; 1; 1) \Rightarrow$ прямая $A'B'$:

$$\begin{cases} x - \text{любая}, \\ y = 1; \\ z = 1 \end{cases}$$

$$\frac{3}{6} \Rightarrow \text{Сфера касается } A'B' \Rightarrow (\cancel{x_0} - 1)^2 + (y_0 - 1)^2 + (z_0 - 1)^2 = R^2;$$

$$\Rightarrow x^2 - 2xx_0 + x_0^2 + y_0^2 - 2y_0 + 1 + z_0^2 - 2z_0 + 1 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2;$$

$$x^2 - 2xx_0 - (2y_0 + 2z_0 - 2) = 0$$

Код участника:

(заполняется организатором)

M11-300

54 (лист 3)

$$D = 4x_0^2 + 8(y_0 + z_0 - 1) \Rightarrow x_0^2 = 2(1 - y_0 - z_0)$$

• единств. корни $\Rightarrow D=0$

$$7) y_0^2 = 1 - 2x_0 \quad (a)$$

$$z_0^2 = 2(1 - x_0 - y_0) \quad (b)$$

$$x_0^2 = 2(1 - y_0 - z_0) \quad (c)$$

$$\bullet (a; b): z_0^2 = 1 - 2y_0 + y_0^2$$

$$z_0^2 = (y_0 - 1)^2 \rightarrow$$

$$\begin{matrix} z_0 = y_0 - 1 \\ \text{или} \\ z_0 = 1 - y_0 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} y_0 = z_0 + 1 \\ \text{или} \\ y_0 = 1 - z_0 \end{matrix}$$

$$\bullet (b; c): x_0^2 - z_0^2 = 2 - 2y_0 - 2z_0 - 2 + 2x_0 + 2y_0 = 2(x_0 - z_0)$$

$$(x_0 - z_0)(x_0 + z_0) = 2(x_0 - z_0)$$

$$(x_0 - z_0)(x_0 + z_0 - 2) = 0$$

$$x_0 = z_0 \quad \text{или} \quad x_0 = 2 - z_0$$

$$\textcircled{I} \begin{matrix} y_0 = z_0 + 1 \\ z_0 = x_0 \end{matrix} \Rightarrow y_0 = x_0 + 1 \Rightarrow x_0^2 + 2x_0 + 1 = 1 - 2x_0$$

(a)

$$x_0(x_0 + 4) = 0$$

$$x_0 = 0 \quad \text{или} \quad x_0 = -4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 1 \\ z_0 = 0 \end{cases} \rightarrow R = \sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2} = 1$$

$$\begin{cases} x_0 = -4 \\ y_0 = -3 \\ z_0 = -4 \end{cases} \rightarrow R = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{41}$$

Код участника:

(заполняется организатором)

M11-300

Г4(мст 4)

$$\textcircled{\text{II}} \begin{cases} y_0 = z_0 + 1 \\ z_0 = 2 - x_0 \end{cases} \Rightarrow y_0 = 3 - x_0$$

(a)

$$\Rightarrow 9 - 6x_0 + x_0^2 = 1 - 2x_0$$

$$x_0^2 - 4x_0 + 8 = 0$$

$$D = 16 - 8 \cdot 4 < 0 \Rightarrow \text{нет корней}$$

$$\textcircled{\text{III}} \begin{cases} y_0 = 1 - z_0 \\ z_0 = x_0 \end{cases} \Rightarrow y_0 = 1 - x_0$$

(a)

$$\Rightarrow 1 - 2x_0 + x_0^2 = 1 - 2x_0$$

$$x_0^2 = 0$$

$$x_0 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 1 \\ z_0 = 0 \end{cases} \rightarrow R = \sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2} = 1$$

$$\textcircled{\text{IV}} \begin{cases} y_0 = 1 - z_0 \\ z_0 = 2 - x_0 \end{cases} \Rightarrow y_0 = x_0 - 1$$

(a)

$$\Rightarrow x_0^2 - 2x_0 + 1 = 1 - 2x_0$$

$$x_0 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = -1 \\ z_0 = 2 \end{cases} \rightarrow R = \sqrt{0^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

Ответ: радиус сферы 1; $\sqrt{5}$ или $\sqrt{41}$

+12

Код участника:

(заполняется организатором)

M 11-300

3

$$p(n) = \frac{9^n}{9^n + 9^{50}}$$

$$1) p(1) = \frac{9}{9 + 9^{50}}$$

$$p(2) = \frac{81}{81 + 9^{50}}$$

$$\dots$$

$$p(99) = \frac{9^{99}}{9^{99} + 9^{50}}$$

$$2) \text{ Заметим, что } p(100-n) = \frac{9^{100-n}}{9^{100-n} + 9^{50}} = \frac{9^{100}}{9^n (9^{100-n} + 9^{50+n})} =$$

$$= \frac{9^{100}}{9^{100} + 9^{50+n}}$$

$$3) p(n) + p(100-n) = \frac{9^n}{9^n + 9^{50}} + \frac{9^{100}}{9^{100} + 9^{50+n}} =$$

$$= \frac{9^{100+n} + 9^{50+2n} + 9^{100+n} + 9^{150}}{9^{n+100} + 9^{150} + 9^{50+2n} + 9^{100+n}} = 1$$

$$4) \text{ Разобьём сумму } p(1) + p(2) + \dots + p(99) \text{ на соответствующие пары попарно: } (p(1) + p(99)) + (p(2) + p(98)) + \dots + (p(49) + p(51)) + p(50) =$$

$$= (p(n) + p(100-n)) \cdot 49 + p(50) = 1 \cdot 49 + \frac{9^{50}}{9^{50} + 9^{50}} = 49 + \frac{1}{2} =$$

$$= 49\frac{1}{2}$$

Ответ: ~~49,5~~ 49,5

Код участника:

(заполняется организатором)

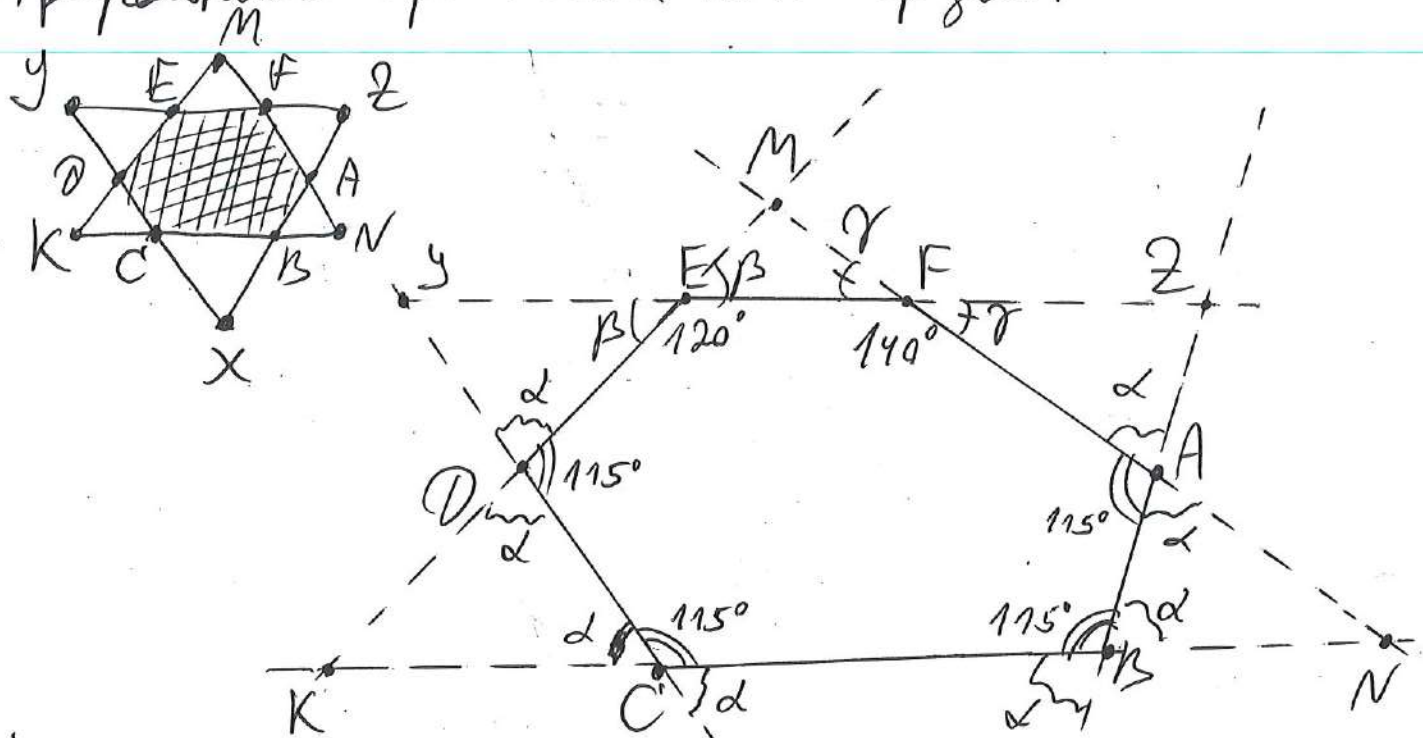
M11-300

№6 (мет 1)

$$\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 115^\circ;$$

$$\angle E = 120^\circ; \angle F = 140^\circ$$

1) Треугольники пересекаются таким образом:



2) Угол, смежный с $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 115^\circ$;

$$\alpha = 180^\circ - 115^\circ = 65^\circ$$

3) Угол, смежный с $\angle E = 120^\circ$;

$$\beta = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$$

4) Угол, смежный с $\angle F = 140^\circ$;

$$\gamma = 180^\circ - 140^\circ = 40^\circ$$

5) $\triangle ABN$: $\angle A + \angle B + \angle N = 180^\circ$ ~~from previous steps~~ $\Rightarrow \angle N = 180^\circ - 2\alpha = 180^\circ - 65^\circ \cdot 2 = \underline{50^\circ}$

Код участника:

(заполняется организатором)

M11-300

Σ6(мст2)

$$6) \triangle KDC: \angle K = 180^\circ - \angle D - \angle C = 180^\circ - 2 \cdot 2 = \underline{50^\circ}$$

$$7) \triangle MEF: \angle M = 180^\circ - \angle E - \angle F = 180^\circ - \beta - \gamma = 180^\circ - 60^\circ - 40^\circ = \underline{80^\circ}$$

$$8) \triangle ZAF: \angle Z = 180^\circ - \angle A - \angle F = 180^\circ - \alpha - \gamma = 180^\circ - 40^\circ - 65^\circ = \underline{75^\circ}$$

$$9) \triangle XBC: \angle X = 180^\circ - \angle B - \angle C = 180^\circ - 2 \cdot \alpha = \underline{50^\circ}$$

$$10) \triangle YDE: \angle Y = 180^\circ - \angle D - \angle E = 180^\circ - \alpha - \beta = 180^\circ - 65^\circ - 60^\circ = \underline{55^\circ}$$

$$11) \triangle MNK: \angle M = 80^\circ; \angle N = 50^\circ; \angle K = 50^\circ$$

$$\triangle XYZ: \angle X = 50^\circ; \angle Y = 55^\circ; \angle Z = 75^\circ$$

12) Другие возможные расположения треуголов не используют в пересечении шестиугольник;



треугольник



пятиугольник



шестиугольник

Ответ: $(80^\circ; 50^\circ; 50^\circ); (50^\circ; 55^\circ; 75^\circ)$

3

Код участника:

(заполняется организатором)

М 11-300

52 (мста, начало на мсте 2)

4) $(2)-(1)$:

$$2A - B \geq 2$$

5) $(3)-(1):2$:

$$\rightarrow 2A - B \geq 2$$

$$4A - 2B \geq 2 \rightarrow 2A - B \geq 1$$

6) Если $B = B_{\min}$, то $A \geq 1 + \frac{B}{2} \rightarrow A_{\min} = 1 + \frac{B_{\min}}{2}$

из п. 3 $B_{\min} = \frac{17}{11} \Rightarrow A_{\min} = 1 + \frac{17}{22} = 1\frac{17}{22} \Rightarrow$

$$\Rightarrow (A+B)_{\min} = \frac{17}{11} + 1\frac{17}{22} = \frac{34}{22} + \frac{39}{22} = \frac{73}{22} = 3\frac{7}{22}$$

7) Проверка удовлетворения ответа начальным условиям:

• $A + B \geq 9$

$$1\frac{17}{22} + 5 \cdot \frac{17}{11} = \frac{39}{22} + \frac{170}{22} = \frac{209}{22} = \frac{19}{2} = 9,5 \geq 9 \quad (\text{OK})$$

• $3A + 4B \geq 11$

$$\frac{39}{22} \cdot 3 + 4 \cdot \frac{17}{11} = \frac{117}{22} + \frac{136}{22} = \frac{253}{22} = \frac{23}{2} = 11,5 \geq 11 \quad (\text{OK})$$

• $5A + 3B \geq 11$,

$$\frac{39}{22} \cdot 5 + 3 \cdot \frac{17}{11} = \frac{195}{22} + \frac{102}{22} = \frac{297}{22} = \frac{27}{2} = 13,5 \geq 11 \quad (\text{OK})$$

Ответ: $3\frac{7}{22}$

2, ответ не верный.

Код участника:

(заполняется организатором)

M11-300

 $\sqrt{7}$ (мст)

$$f(x) = ax^4 + x^2 + x$$

1) Найдем производную:

$$f'(x) = 4ax^3 + 2x + 1 = \overset{K}{\quad}; \quad \overset{K}{\quad} - \text{параметр, коэф-т наклона касат.-й в конкретной точке } x.$$

• Если уравнение $4ax^3 + 2x + (1 - \overset{K}{\quad}) = 0$

имеет два решения x_1 и x_2 , то и график $f(x)$ имеет касательные с данными коэф-т наклона в точках x_1 и x_2

2) прямая задается: $y(x) = Kx + b$; пересечение с $f(x)$:
(касание)

$$ax^4 + x^2 + x = Kx + b;$$

$$ax^4 + x^2 + (1-K)x - b = 0;$$

• если $K=1$, то

$$ax^4 + x^2 - b = 0$$

• замена: $t = x^2, t \geq 0$

$$at^2 + t - b = 0$$

$$D = 1 + 4ab$$

• касание $\Rightarrow D=0 \Rightarrow b = -\frac{1}{4a}$

$$t = \frac{-1}{2a}$$

• но отрицательно $t \geq 0 \Rightarrow a < 0$

$$x_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{-1}{2a}} - \text{точки касания}$$

• если $K \neq 1$, то не выполняется условия

Ответ: при $a < 0$;
 $y(x) = x - \frac{1}{4a}$

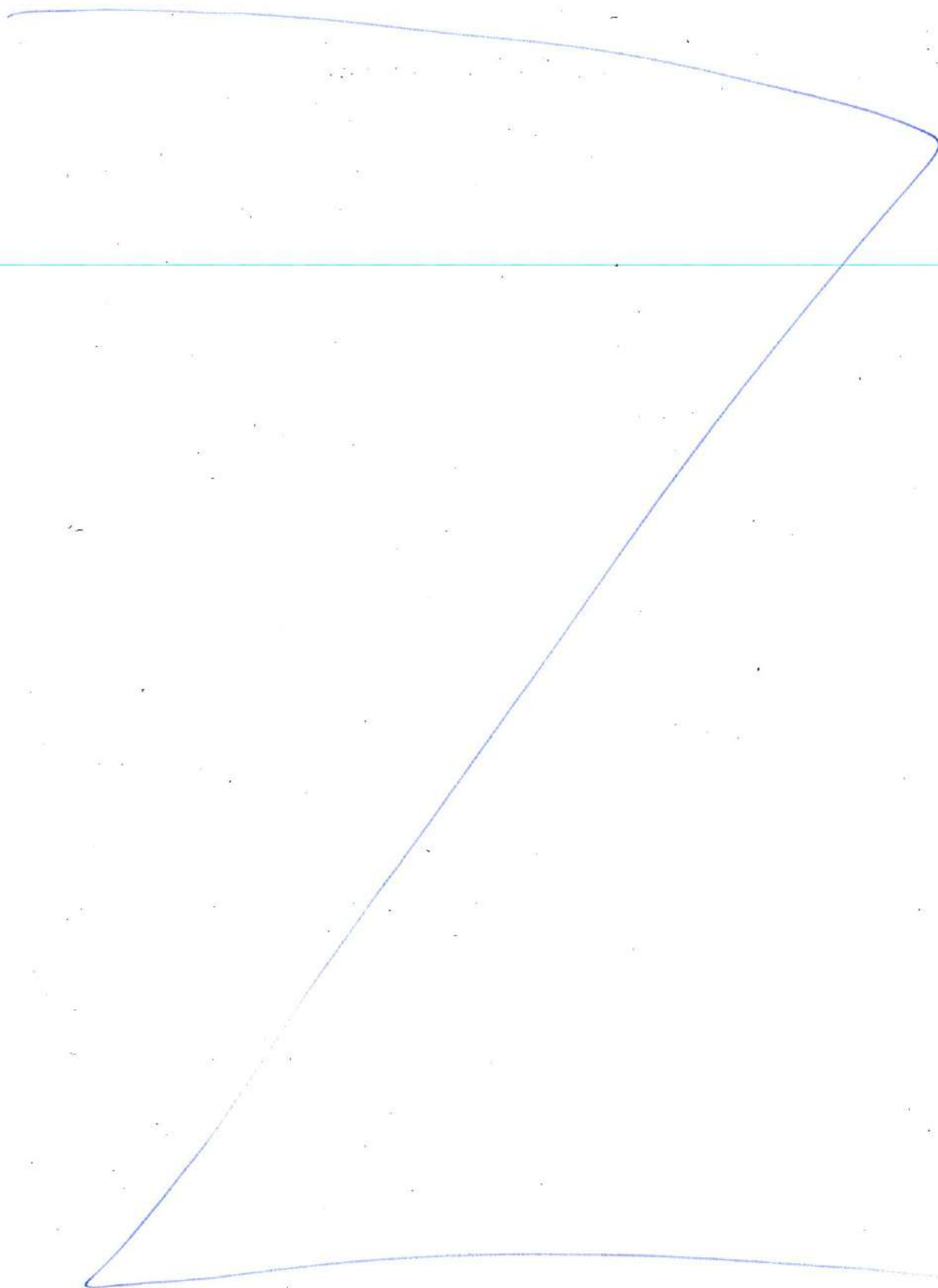
14

Бланк ответа 13

Всероссийская олимпиада школьников «Миссия выполнима. Твоё призвание – финансист!»

Код участника:

(заполняется организатором)



М11-157

Код участника
(заполняется организатором)



**Олимпиадная работа
заключительного этапа
«Всероссийская олимпиада школьников "Миссия
выполнима. Твоё призвание - финансист!" 2023-2024
г.»
«(Математика 11 класс)»**

Вариант № 1

«27 января 2024 г.»

Никакие другие записи на титульном листе делать не разрешается

М11 - 157

Код участника

Всероссийская олимпиада школьников «Миссия выполнима. Твое призвание – финансист!» 2023/2024 уч.г.

Бланк проверки работы

Математика 11 класс

№ задания	ФИО эксперта	Балл	ФИО эксперта	Балл	Итоговый балл
1	Васильева	10	Гурьянова	10	10
2	Тоздиль	10	Запорова	10	10
3	Маркова	12	Иванова	12	12
4	Овчинникова	12	Башкина	12	12
5	Терехова	6	Кременев	6	6
6	Осипова	3	Кекина	3	3
7	Кекина	5	Сенкина	5	5
8	Шанин	0	Телинцев	0	0
ИТОГО					58



**О внесении изменений
в Приказ о проведении Всероссийской олимпиады школьников «Миссия
выполнима. Твое призвание – финансист!»**

В связи с изменением порядка проведения Олимпиады п р и к а з ы в а ю:
утвердить изменения в Приказ о проведении Всероссийской олимпиады школьников «Миссия выполнима. Твое призвание – финансист!» (далее – Олимпиада), утвержденное приказом Финуниверситета от 02.10.2023 № 2214/о, изложив Положение в редакции согласно приложению к настоящему приказу.

Ректор

С.Е. Прокофьев

Дополнительный бланк №
Всероссийская олимпиада школьников «Миссия выполнима. Твоё призвание – финансист!»

Код участника:
(заполняется организатором)

М77-862

Код участника
(заполняется организатором)



**Олимпиадная работа
заключительного этапа
«Всероссийская олимпиада школьников "Миссия
выполнима. Твоё призвание - финансист!" 2023-2024
г.»
«(Математика 11 класс)»**

Вариант № 1

«27 января 2024 г.»

Никакие другие записи на титульном листе делать не разрешается

М 11-862

Код участника

Всероссийская олимпиада школьников «Миссия выполнима. Твое призвание – финансист!» 2023/2024 уч.г.

Бланк проверки работы

Математика 11 класс

№ задания	ФИО эксперта	Балл	ФИО эксперта	Балл	Итоговый балл
1	Анашова Т.Г	10	Гурьянов И.Э	10	10
2	Савина С.В	6	Магомедов Р.М	6	6
3	Маркова	12	Крекер	12	12
4	Авдеева	1	Бауашиев	1	1
5	Суров	12	Умаров	12	12
6	Гузун	3	Кетиков	3	3
7	Ковнов	14	Венантин	14	14
8	Телегин	0	Щапов	0	0
ИТОГО					58

М 11-862

Код участника

Всероссийская олимпиада школьников «Миссия выполнима. Твое призвание – финансист!» 2023/2024 уч.г.

Бланк проверки работы

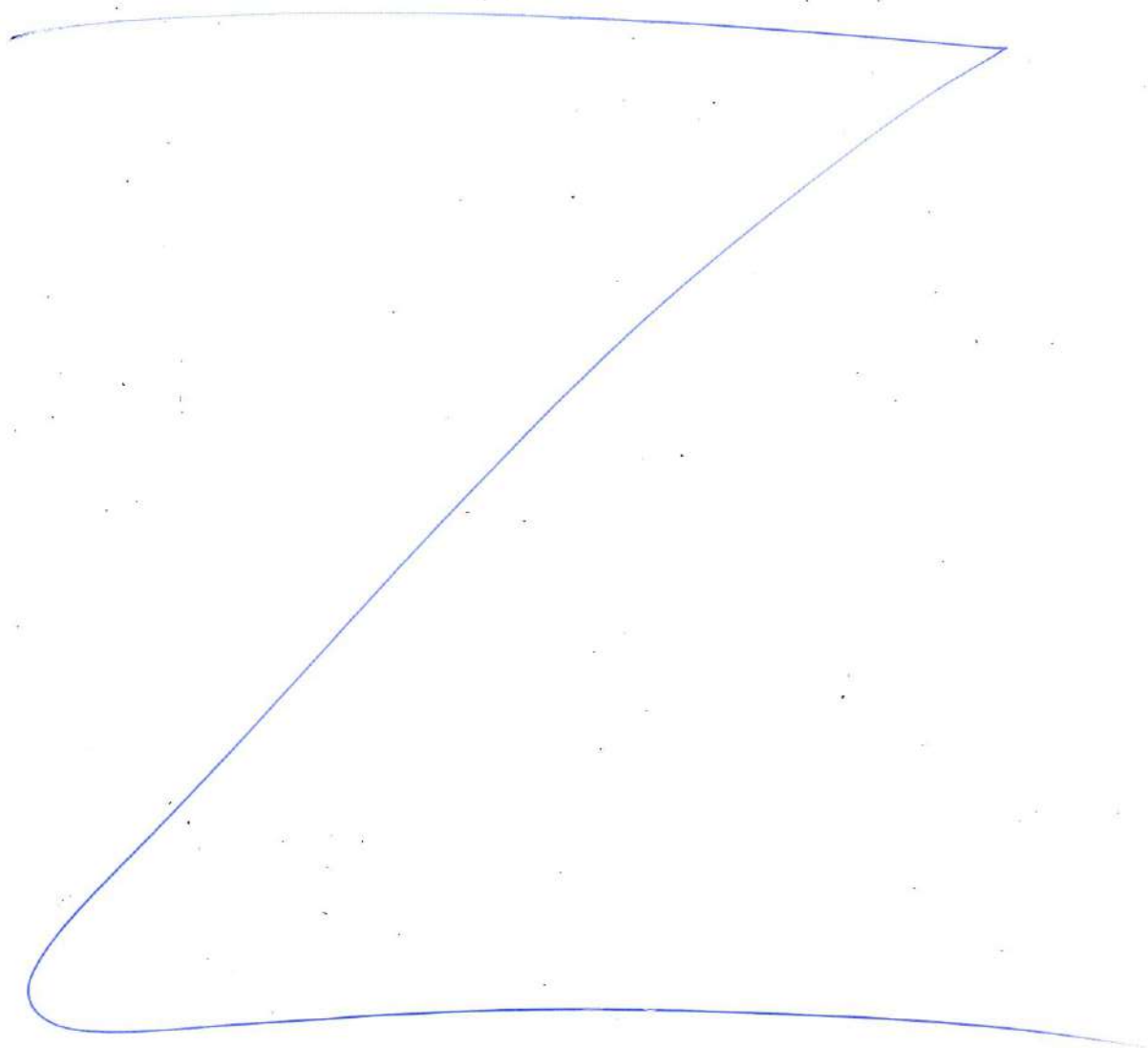
Математика 11 класс

№ задания	ФИО эксперта	Балл	ФИО эксперта	Балл	Итоговый балл
1	Анашова Т.Г.	10	Гурьянов И.Э.	10	10
2	Савина С.В.	6	Матвеев Р.М.	6	6
3	Маркова	12	Кремер	12	12
4	Васильев	1	Башкин	1	1
5	Сурин	12	Угрюмов	12	12
6	Гузун	3	Кетков	3	3
7	Кетков	14	Семанов	14	14
8	Ткачев	0	Щапов	0	0
ИТОГО					58

Дополнительный бланк №

Всероссийская олимпиада школьников «Миссия выполнима. Твоё призвание – финансист!»

Код участника: *111-862*
(заполняется организатором)



№1.
Пусть n - количество студентов в ВУЗе.
 k - количество студентов, занимающихся и очно и дистанционно.
Из условия следует, что $k = \frac{50\%}{100} = \frac{1}{2}$, где l - кол. студентов, занимающихся ~~университетом~~ $\Rightarrow l - k = 2k - k = k$ - количество студентов, занимающихся только очно.
Также $k = 0,6d$, где d - кол. студентов, занимающихся дистанционно. $\Rightarrow d - k = \frac{5}{3}k - k = \frac{2}{3}k$ - кол. студентов, занимающихся только дистанционно.
 $\Rightarrow$ всего $\#$ студентов : $n = k + k + \frac{2}{3}k = \frac{8}{3}k$
 $\Rightarrow \frac{k}{n} = \frac{3}{8} = 0,375$ - часть студентов, занимающихся только очно!

Ответ: 0,375.

№2.
$$\begin{cases} A + 5B \geq 9 \\ 3A + 4B \geq 11 \\ 5A + 3B \geq 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A \geq 9 - 5B \\ A \geq \frac{11 - 4B}{3} \\ A \geq \frac{11 - 3B}{5} \end{cases}$$

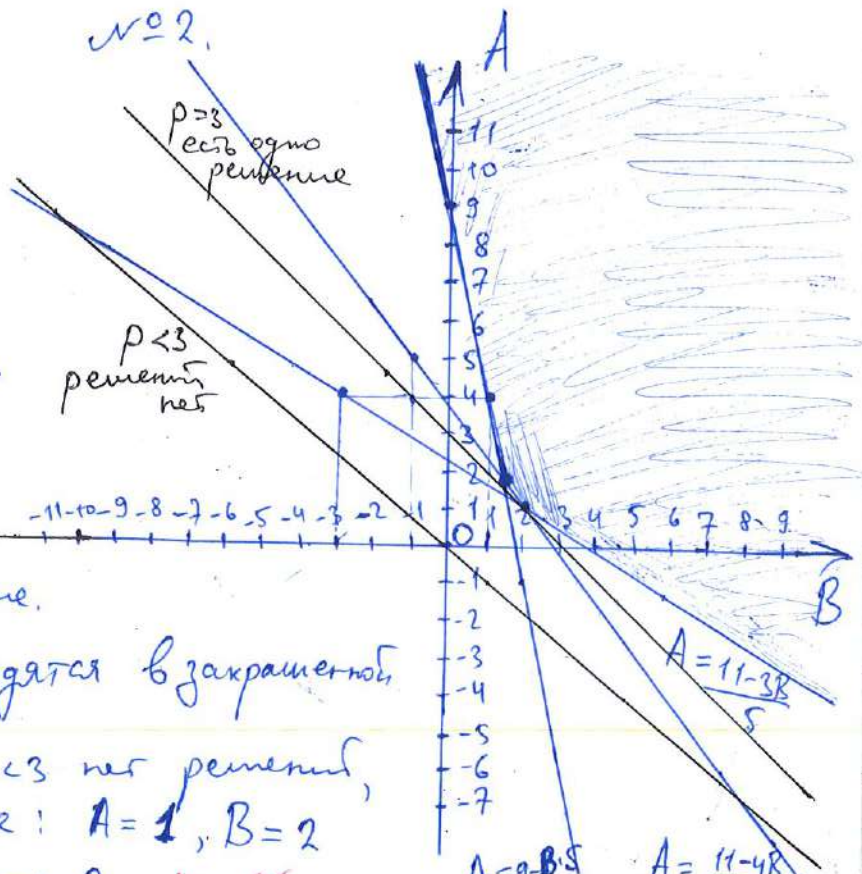
Решим задачу графически.
Пусть $A + B = p \Leftrightarrow A = p - B$

Найдём минимум p , при котором система имеет решение.

Все решения системы находятся в закрашенной области.

Из графика следует, что при $p < 3$ нет решений, при $p = 3$ есть одно решение: $A = 1, B = 2$

Ответ: 3 ± 66 не доказано, что это решение мин.



Код участника: М71-862
(заполняется организатором)

№3.
Рассмотрим сумму $p(k) + p(100-k)$:

$$\frac{g^k}{g^k + g^{50}} + \frac{g^{100-k}}{g^{100-k} + g^{50}} = \frac{g^k}{g^k + g^{50}} + \frac{g^{50-k} \cdot g^{50}}{g^{50-k}(g^k + g^{50})} = \frac{g^k + g^{50}}{g^k + g^{50}} = 1$$

Сумма $p(1) + p(2) + \dots + p(99) = \sum_{k=1}^{99} (p(k) + p(100-k)) = 49$
 $= 49 \cdot 1 + \frac{g^{50}}{g^{50} + g^{50}} = 49 + \frac{1}{2} = 49,5$ + (12)

Ответ: 49,5

№5.

$$\operatorname{arctg} \frac{5x+3}{3x-5} + \operatorname{arctg} \frac{x-1}{x+1} = x$$

1) $y = \operatorname{arctg} x$, $y \in (0; \pi)$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 \leq \operatorname{arctg} \frac{5x+3}{3x-5} < \pi \\ 0 < \operatorname{arctg} \frac{x-1}{x+1} < \pi \end{cases} \Rightarrow x \in (0; 2\pi)$$

$$\operatorname{arctg} \frac{5x+3}{3x-5} + \operatorname{arctg} \frac{x-1}{x+1} = x$$

2) Рассмотрим при $x = \pi$.
~~Функция $y = \operatorname{ctg} x$ непрерывна и монотонна на этом интервале, поэтому...~~

2) Рассмотрим при $x = \pi$.

I. $x = \pi$: $\operatorname{arctg} \frac{5\pi+3}{3\pi-5} + \operatorname{arctg} \frac{\pi-1}{\pi+1} \neq \operatorname{arctg} 0 + \operatorname{arctg} 0 = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$
 $\Rightarrow$ не корень.

II. $x \in (0; \pi)$: обе части неравенства $\in (0; \pi)$
 функция $y = \operatorname{ctg} x$ непрерывна и монотонна на этом интервале, значит можно брать от обеих частей ctg .

$$\operatorname{ctg} \left(\operatorname{arctg} \frac{5x+3}{3x-5} + \operatorname{arctg} \frac{x-1}{x+1} \right) = \frac{\frac{5x+3}{3x-5} \cdot \frac{x-1}{x+1} - 1}{\frac{5x+3}{3x-5} + \frac{x-1}{x+1}} = \frac{2x^2+2}{8x^2+8} = \frac{x^2+1}{4(x^2+1)} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{4} = \operatorname{ctg} x \Rightarrow x = \operatorname{arctg} \frac{1}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} x = \operatorname{arctg} \frac{1}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x \in (0; \pi) \end{cases} \Rightarrow x = \operatorname{arctg} \frac{1}{4} + \pi$$

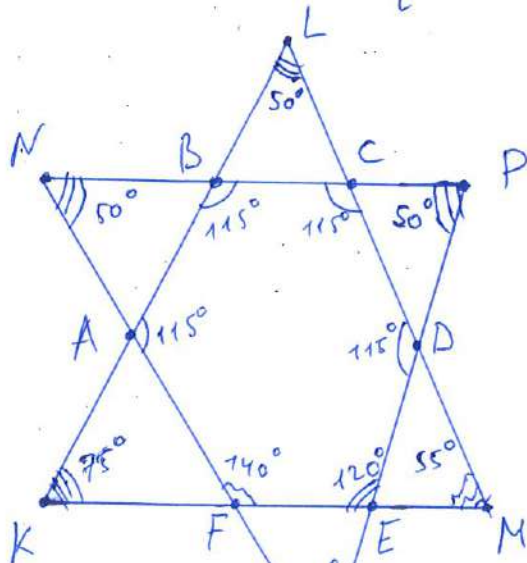
III. Аналогично рассмотрим случай $x \in (\pi; 2\pi)$:

Функция $y = \operatorname{ctg} x$ непрерывна и монотонна на этом интервале, значит можно взять от обеих частей ctg

$$\frac{1}{4} = \operatorname{ctg} x \Rightarrow x = \operatorname{arctg} \frac{1}{4} + \pi m, m \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} x = \operatorname{arctg} \frac{1}{4} + \pi m, m \in \mathbb{Z} \\ x \in (\pi; 2\pi) \end{cases} \Rightarrow x = \operatorname{arctg} \frac{1}{4} + \pi +$$

Ответ: $x \in \left\{ \operatorname{arctg} \frac{1}{4}; \operatorname{arctg} \frac{1}{4} + \pi \right\} +$



$\triangle KLM, \triangle QMP$ — исходные треугольники

$n=6$. 1 вершина — 3 угла

1) Рассмотрим $\triangle BLC$:
 $\angle LBC = 180^\circ - \angle ABC = 180^\circ - 115^\circ = 65^\circ$
 (т.к. $\angle LBC$ и $\angle ABC$ — смежные)

Аналогично $\angle LCB = 180^\circ - \angle BCD =$
 $= 180^\circ - 115^\circ = 65^\circ$

$$\Rightarrow \angle BLC = 180^\circ - \angle LBC - \angle BCL =$$

$$= 180^\circ - 65^\circ - 65^\circ = 50^\circ$$

Аналогично у $\triangle ANB$ и $\triangle CPD$:
 $\angle ANB = \angle CPD = 50^\circ$

2) Также тем образом рассматривая $\triangle PME, \triangle FEQ$ и $\triangle AKF$ получаем:

$$\angle AKF = 115^\circ + 140^\circ - 180^\circ = 75^\circ; \quad \angle EMD = 115^\circ + 120^\circ - 180^\circ = 55^\circ$$

$$\angle FQE = 140^\circ + 120^\circ - 180^\circ = 80^\circ$$

3) Проверка: $\angle LKM + \angle KML + \angle KLM = 50^\circ + 75^\circ + 55^\circ = 180^\circ$

$$\angle QMP + \angle PQN + \angle NPQ = 50^\circ + 80^\circ = 180^\circ$$

Ответ: $\angle QMP =$
 $= \angle NPQ = 50^\circ; \angle NQP = 80^\circ$
 $\angle KLM = 50^\circ; \angle KML = 55^\circ;$
 $\angle LKM = 75^\circ$

№ 7.

$$f(x) = ax^4 + x^2 + x$$

I. $a=0$: $f(x) = x^2 + x$ - график параболы, а касательная к параболе может касаться её только в единственной точке.
 $\Rightarrow a=0$ - не подходит.

II. $a \neq 0$.

Пусть $y_{кас} = kx + b$ - касательная к графику $f(x)$ и касается его в точках x_1 и x_2 , $x_1 \neq x_2$

~~$$b = f'(x_1) = f'(x_2)$$

$$b = f(x_1) = f(x_2)$$~~

Тогда $y_{кас} = f'(x_1)(x - x_1) + f(x_1) = f'(x_2)(x - x_2) + f(x_2)$

$$f'(x) = 4ax^3 + 2x + 1$$

$$(4ax_1^3 + 2x_1 + 1)x - (4ax_1^3 + 2x_1 + 1)x_1 + ax_1^4 + x_1^2 + x_1 =$$

$$= (4ax_2^3 + 2x_2 + 1)x - (4ax_2^3 + 2x_2 + 1)x_2 + ax_2^4 + x_2^2 + x_2$$

$$\begin{cases} 4ax_1^3 + 2x_1 + 1 = 4ax_2^3 + 2x_2 + 1 \\ 4ax_1^4 - ax_1^4 + 2x_1^2 - x_1^2 = 4ax_2^4 - ax_2^4 + 2x_2^2 - x_2^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4a(x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) + 2(x_1 - x_2) = 0 \\ 3a(x_1^2 - x_2^2)(x_1^2 + x_2^2) + (x_1^2 - x_2^2) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a(2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 1)(x_1 - x_2) = 0 \\ (x_1 - x_2)(x_1 + x_2)(3ax_1^2 + 3ax_2^2 + 1) = 0 \end{cases} \quad x_1 \neq x_2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2ax_1^2 + 2ax_1x_2 + 2ax_2^2 + 1 = 0 \\ \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ 3ax_1^2 + 3ax_2^2 + 1 = 0 \end{cases} \end{cases}$$

Код участника: 111-882
(заполняется организатором)

1) $x_1 + x_2 = 0$
 $x_2 = -x_1$

$$2ax_1^2 + 2a x_1(-x_1) + 2a x_1^2 + 1 = 0$$

$$2ax_1^2 + 1 = 0 \Rightarrow a < 0, \text{ т.к. } x_1^2 \geq 0 \forall x_1 \in \mathbb{R}$$

$$x_1 = \sqrt{-\frac{1}{2a}}, \quad x_2 = -\sqrt{-\frac{1}{2a}}$$

$\Rightarrow y_{\text{кас}} = f'(x_1)(x - x_1) + f(x_1) = (4a \cdot (-\frac{1}{2a}) \cdot \sqrt{-\frac{1}{2a}} + 2 \cdot \sqrt{-\frac{1}{2a}}) \cdot (x - \sqrt{-\frac{1}{2a}}) + a \cdot \frac{1}{4a^2} - \frac{1}{2a} + \sqrt{-\frac{1}{2a}} =$

$$= 1 \cdot (x - \sqrt{-\frac{1}{2a}}) + \frac{1}{4a} - \frac{1}{2a} + \sqrt{-\frac{1}{2a}} = x - \frac{1}{4a} \quad \forall a < 0, a \in \mathbb{R}$$

2) $\begin{cases} 3ax_1^2 + 3ax_2^2 + 1 = 0 \\ x_1^2, x_2^2 \geq 0 \end{cases} \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow a < 0$

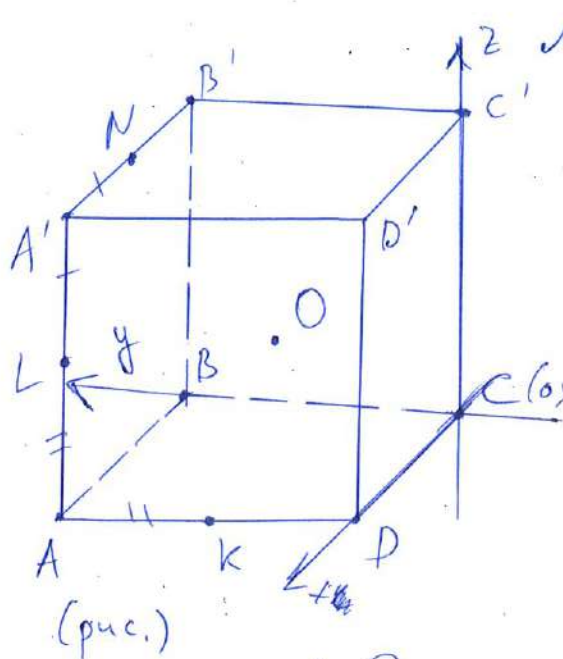
А для $a < 0$ ~~мы~~ получим, что всегда есть такая касательная $y_{\text{кас}} = x - \frac{1}{4a}$

Ответ: $a \in (-\infty; 0)$, $y_{\text{кас}} = x - \frac{1}{4a}$

14

Код участника: 111-862

(заполняется организатором)



1) Введём Прямоугольную Декартову систему координат с центром в точке C , как показано на рисунке (рис.)

Пусть $O(x_c, y_c, z_c)$ — центр искомой сферы

Тогда $R^2 = x_c^2 + y_c^2 + z_c^2$ — квадрат её радиуса, т.к. C лежит на этой сфере.

2) Пусть эта сфера касается AD в точке K , AA' в точке L , $A'B'$ в точке N .

Поэтому, это $K(1; 1-x_c; 0)$ т.к. лежит на AD и AD касается сферы в точке K .

Аналогично, ~~мы получим~~ $L(1; 1; z_c)$, $N(x_c, 1, 1)$

$A'L = A'N$ как отрезки касательные от одной точки

$$\Rightarrow 1 - x_c = 1 - z_c \Leftrightarrow x_c = z_c$$

Аналогично $AL = AK \Rightarrow z_c = 1 - y_c \Rightarrow y_c = 1 - z_c = 1 - x_c$

Значит центр сферы имеет координаты $O(x_c, 1-x_c, x_c)$

3) $OK^2 = OC^2 = R^2$ $K(1; 1-x_c; 0)$, $O(x_c; 1-x_c; x_c)$

$$(x_c - 1)^2 + (1 - x_c - 1 + x_c)^2 + (x_c - 0)^2 = x_c^2 + (1 - x_c)^2 + x_c^2$$

$$x_c^2 = 0 \Rightarrow x_c = 0 \Rightarrow y_c = 1 - 0 = 1, z_c = 0$$

$$\Rightarrow O(0; 1; 0), R = \sqrt{0^2 + 1^2 + 0^2} = 1$$

Ответ: $R=1$ — радиус этой сферы

Код участника: 411-862
(заполняется организатором)

№ 8.

Назовём множеством предположений X_i то множество состоящее из всех тех ^{чисел} ~~чисел~~, которые могут стоять на i -ом месте в последовательности $X = \{x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_{100}\}$. $n=100$.
 После первого хода ~~анализа предположений~~
 $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ множество предположений $y_1 = 1$ становится ~~каждое~~ ~~каждое~~ состоящим не более чем из $n-1$ элементов $(2, 3, 4, \dots, n)$, множество предположений $y_p = 2$ становится состоящим не более чем из $n-2$ элементов, т.к.: если $x_p < y_p$, то $x_p = 1$, если $x_p = y_p$, то $x_p = 2$, а если $x_p > y_p$, то x_p может быть одним из элементов множества $(3, 4, 5, \dots, 100)$.

Аналогично если $y_e = k$, то ~~предположения~~

$$|P(k)| = \max(k-1, \frac{n}{2} - k + 1) = \begin{cases} k-1, & k \geq \frac{n}{2} \\ \frac{n}{2} - k + 1, & k < \frac{n}{2} \end{cases}$$

где $P(k)$ — мн. предположений x_e .

Тогда $|P(1)| + |P(2)| + \dots + |P(k)| \leq 2 \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} (n-k) = 2 \cdot \left(\frac{n^2}{2} - \frac{\frac{n}{2}(\frac{n}{2}+1)}{2} \right) =$
 $= \frac{3n^2 - 2n}{4}$ ⊖ OK неверный ответ

После каждого хода будет ставиться на каждое j -е место число из множества $P(j)$. Тогда после каждого хода мощность каждого из множеств $P(j)$ будет уменьшаться как минимум на 1, т.к. мы получаем новую информацию каждый ход. Значит нам достаточно сделать не меньше, чем $m = \frac{3n^2 - 2n}{4m} = \frac{3n}{4} - \frac{1}{2} = \frac{3 \cdot 100}{4} - \frac{1}{2} = 74,5$ ходов.

Ответ: 75.

M11-236

Код участника
(заполняется организатором)



Олимпиадная работа
заключительного этапа
«Всероссийская олимпиада школьников "Миссия
выполнима. Твоё призвание - финансист!" 2023-2024
г.»
«(Математика 11 класс)»

Вариант № 2

«27 января 2024 г.»

Никакие другие записи на титульном листе делать не разрешается

11-236

Код участника

Всероссийская олимпиада школьников «Миссия выполнима. Твое призвание – финансист!» 2023/2024 уч.г.

Бланк проверки работы

Математика 11 класс

№ задания	ФИО эксперта	Балл	ФИО эксперта	Балл	Итоговый балл
1	Милославский	10	Гурьянов и.э	10	10
2	Затонин	10	Тюзнец	10	10
3	Марков	12	Иванова	12	12
4	Иванов	0	Маслов Р.М	0	0
5	Чернов	11	Сухан	11	11
6	Трунцес	0	Олегов	0	0
7	Лосованова	14	Липа- нен	14	14
8	И	0	Цацков	0	0
ИТОГО					57

№1

Число людей, кто не говорит по-английски, но говорит по-французски равно x . Число людей, кто не говорит по-французски, но говорит по-английски равно y . Кто не говорит ни на одном равно z .
По условию: $0,04 \cdot (x+z) = x$. ~~$x = \frac{1}{24} z$~~
 $0,2 \cdot (y+z) = y$; $y = \frac{1}{4} z$.

Число неговорящих по-французски и не говорящих по-английски

$$\frac{y+z}{x+z} = \frac{\frac{1}{4}z + z}{\frac{1}{24}z + z} = \frac{6+24}{1+24} = \frac{30}{25} = \frac{6}{5} = 1,2$$

+10

ответ: 1,2 раз

№3

Рассмотрим: $p(k) + p(34-k) = \frac{(-3)^k}{3^k + 3^{17}} + \frac{(-3)^{34-k}}{3^{34-k} + 3^{17}}$

$$= \frac{(-1)^{24-k} \cdot 3}{3^{34-k} + 3^{17}} = \frac{(-1)^k \cdot (3 + 3^{34-k})}{3^{17} + 3^{34-k}} = (-1)^k$$

мы воспользовались $(-1)^k = (-1)^{34-k}$

Так как у k и $34-k$ одинаковая четность, так как их сумма четная. Тогда, пусть $S = p_1 + p_2 + \dots + p_{33}$

Бланк ответа

Всероссийская олимпиада школьников «Миссия выполнима. Твое призвание – финансист!»

Код участника:

М11-236

(заполняется организатором)

$$\text{Почему } 2S = (\cancel{P_{(1)}} + \cancel{P_{(3)}}) + (\cancel{P_{(1)}} + \cancel{P_{(3)}}) + \dots + (\cancel{P_{(3)}} + \cancel{P_{(1)}}) = (-1)^1 +$$

$$+ (-1)^2 + \dots + (-1)^{31} = -1 + 1 - 1 + 1 + \dots + 1 - 1 = -1$$

$$\text{значит } S = -0,5$$

$$\text{Ответ: } -0,5$$

N2

$$\begin{cases} 3A + 5B \leq 11 & x \\ 4A + 3B \leq 10 & y \\ 7A + 4B \leq 18 & z \end{cases}$$

$$2y + x: 11A + 11B \leq 31 \Rightarrow A + B \leq \frac{31}{11}$$

$$\text{если } a = \frac{17}{11} \text{ и } b = \frac{14}{11} \text{ то все неравенства верны, а значит}$$

$$a + b = \frac{31}{11} - \text{наибольшее значение.}$$

$$\text{Ответ: } \frac{31}{11}$$

N5.

$$\arctan \frac{2x-1}{x+2} + \arctan \frac{x+3}{3x-1} = x$$

$\begin{matrix} \text{II} & \text{II} \\ \alpha & \beta \end{matrix}$

$$\alpha \text{ и } \beta \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \in (-\pi; \pi)$$

$$\tan \alpha = \frac{2x-1}{x+2}$$

$$\tan \beta = \frac{x+3}{3x-1}$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta}$$

$$\frac{\frac{(2x-1)(3x-1) + (x+2)(x+3)}{(3x-1)(x+2)}}{1 - \frac{(2x-1)(x+3)}{(3x-1)(x+2)}} = \frac{(2x-1)(3x-1) + (x+2)(x+3)}{(3x-1)(x+2) - (2x-1)(x+3)} =$$

$$= \frac{6x^2 - 2x - 3x + 1 + x^2 + 3x + 2x + 6}{3x^2 - x + 6x - 2 - 2x^2 - 6x + x + 3} = \frac{7x^2 + 7}{x^2 + 1}$$

$$= 7$$

$$2 + \beta = x$$

$$\operatorname{tg}(2 + \beta) = \operatorname{tg} x$$

$$\operatorname{tg} x = 7$$

$$x = \operatorname{arctg} 7 + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Так как } x \in [-\pi; \pi], x = \{\operatorname{arctg} 7, \operatorname{arctg} 7 - \pi\}$$

и 7

$$f(x) = x^4 + bx^2 + cx$$

445

Заметим, что вертикальные прямые не могут касаться графика функции, значит мы рассматриваем только прямые вида $y = kx + \varphi$. Пусть есть прямая $y = kx + \varphi$, тогда прямая касается $f(x)$ в точке с абсциссой x_0 тогда что x_0 является корнем $f(x) - kx - \varphi = 0$ 4-й степени. Тогда существование прямой (сходящаяся точка касания) равносильно тому, что $f(x) - kx - \varphi$ можно

Записать $k \neq a \cdot (x-c)^2 \cdot (x-d)^2$, $a \neq 0$

$$x^4 + bx^2 + (1-k)x - p = a(x-c)^2(x-d)^2$$

рассмотрим коэффициент при x^4 : это a , значит $a=1$

$$x^4 + bx^2 + (1-k)x - p = (x^2 - 2cx + c^2)(x^2 - 2dx + d^2)$$

рассмотрим коэффициент при x^3 : $-2c - 2d = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow c+d=0 \Leftrightarrow d=-c$$

$$x^4 + bx^2 + (1-k)x - p = (x-c)^2(x+c)^2$$

$$x^4 + bx^2 + (1-k)x - p = (x^2 - c^2)^2$$

$$x^4 + bx^2 + (1-k)x - p = x^4 - 2c^2x^2 + c^4$$

Рассмотрим коэффициент при x^2

$$b = -2c^2 \Leftrightarrow c^2 = -\frac{b}{2} \Leftrightarrow \begin{matrix} b < 0 \\ c = \frac{\sqrt{-b}}{2} \end{matrix}$$

$b \neq 0$, так как тогда $c=0$ и $d=0$, но $c \neq d$

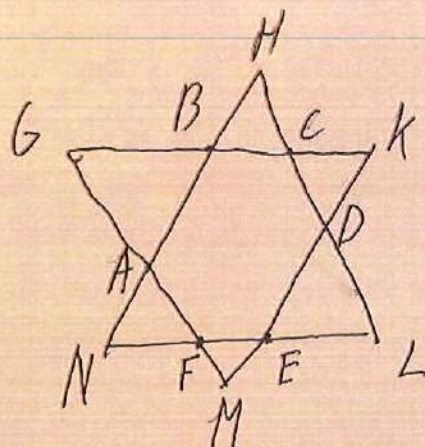
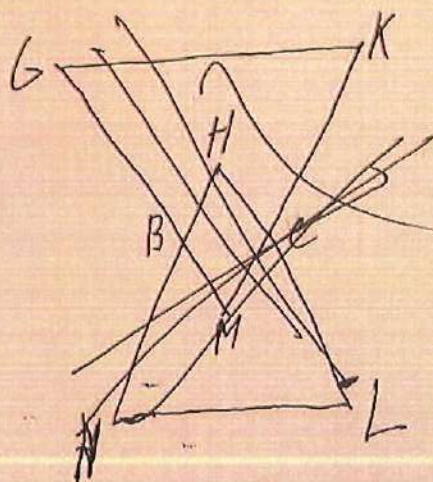
Рассмотрим коэффициент при x

$$1-k=0 \Rightarrow k=1$$

Рассмотрим свободный член

$$p = -c^4 = -\frac{b^2}{4}$$

получается такая прямая существует только при
 $b < 0$ и имеет вид $y = x - \frac{b^2}{4}$
 ✓6



Сумма смежных углов равна 180°
 и тогда по этой свойству углы. Угол $\angle HBC = \angle GBA = \angle GAB =$

$$= \angle NAF = \angle HCB = \angle KCD = \angle EDL =$$

$$= 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$$

$$\angle NFA = \angle FEM = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$$

$$\angle FEM = \angle DEL = 180^\circ - 140^\circ = 40^\circ$$

Сумма углов $\triangle$ равна 180°

$$\angle G = \angle H = \angle K = 180^\circ - 80^\circ - 80^\circ = 20^\circ$$

$$\angle N = 180^\circ - 80^\circ - 30^\circ = 70^\circ$$

$$\angle L = 180^\circ - 80^\circ - 40^\circ = 60^\circ$$

$$\angle M = 180^\circ - 30^\circ - 40^\circ = 110^\circ$$

Получили треугольник HNL, углы $20^\circ + 70^\circ + 60^\circ = 150^\circ$

Код участника:

М11-236

(заполняется организатором)

и $\triangle GKM$ с углами $20^\circ + 20^\circ + 110^\circ = 150^\circ$

в данной задаче сумма углов четырехугольника
равна 690° вместо 720° поэтому в точке
мы не получаем сумму 180° .

ОБ

№8 не

М11-304

Код участника
(заполняется организатором)



Олимпиадная работа
заключительного этапа
«Всероссийская олимпиада школьников "Миссия
выполнима. Твоё призвание - финансист!" 2023-2024
г.»
«(Математика 11 класс)»

Вариант №

1

«27 января 2024 г.»

Никакие другие записи на титульном листе делать не разрешается

М11-304.

Код участника

Всероссийская олимпиада школьников «Миссия выполнима. Твое призвание – финансист!» 2023/2024 уч.г.

Бланк проверки работы

Математика 11 класс

№ задания	ФИО эксперта	Балл	ФИО эксперта	Балл	Итоговый балл
1	Васильев	10	Гуреева	10	10
2	Застыков	10	Боздеев	10	10
3	Маркова	12	Ахмедов	12	12
4	Овчинников	9	Курсанова	9	9
5	Горислав	12	Кремев	12	12
6	Степанов	0	Осипов	0	0
7	Кеннон	3	Степанов	3	3
8	Шамов	0	Бремисев	0	0
ИТОГО					56

Код участника:

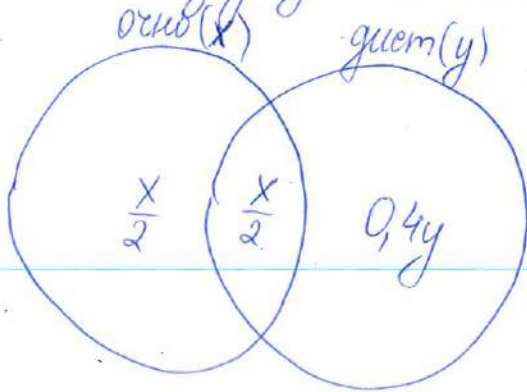
(заполняется организатором)

М11-304

стр. 1

Задача 1

Решим задачу с помощью кругов Эйлера:



Пусть всего очно занимают x чел.,
и дистанционно всего y чел., тогда
 $0,5x$ чел. занимается дистанционно,
но с другой стороны и очно, и дистан-
ционно занимают $0,6y$ чел., тогда

$$0,5x = 0,6y \Leftrightarrow x = 1,2y \quad (1)$$

Тогда только очно занимают $0,5x$ чел., и доля студентов,
занимающихся только очно равна $\frac{0,5x}{0,5x+y} = \frac{0,5 \cdot 1,2y}{0,5 \cdot 1,2y + y} =$

$$= \frac{0,6y}{1,6y} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8} \quad (\text{тк. объединение мн-во "очно" и "дистанционно"} \\ \text{равно } 0,5x+y)$$

Ответ: $0,375 = \frac{3}{8}$ (+)₁₀

Задача 2

$$\begin{cases} A+5B \geq 9 \\ 3A+4B \geq 11 \\ 5A+3B \geq 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A \geq -5B+9 \quad (1) \\ A \geq -\frac{4}{3}B+\frac{11}{3} \quad (2) \\ A \geq -\frac{3}{5}B+\frac{11}{5} \quad (3) \end{cases}$$

Построим в системе координат AOB графики (1), (2), (3) и
найдем область, соответствующую решению системы.

Пусть $A+B=t$, тогда $A=-B+t$. Найдем t из графика.

(см. график на стр. 2)

Сначала построим прямые $A=-5B+9$, $A=-\frac{4}{3}B+\frac{11}{3}$, $A=-\frac{3}{5}B+\frac{11}{5}$.

Код участника:

(заполняется организатором)

M 11-304

стр. 2

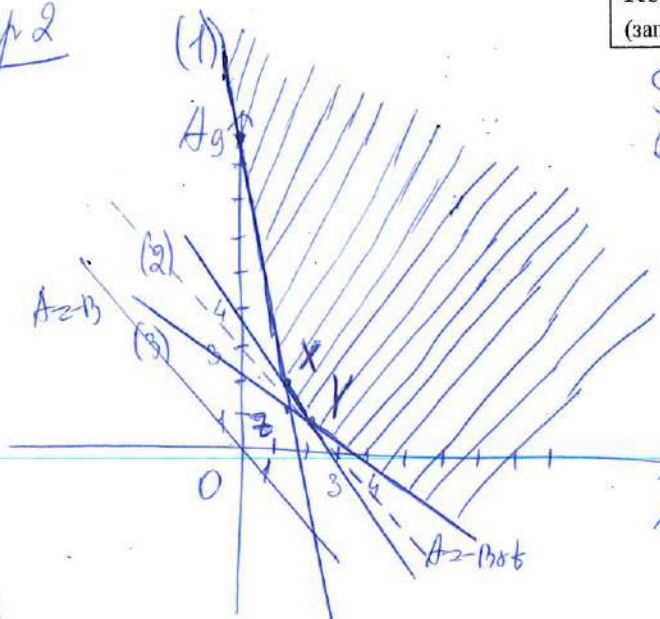


График (1) проходит через точки $(0; 9)$ и $(1,8; 0)$; гр. (2) через точки $(0; \frac{11}{3})$ и $(\frac{11}{4}; 0)$; гр. (3) через точки $(0; \frac{11}{5})$ и $(\frac{11}{3}; 0)$

Обозначим точки пересечения гр. за X, Y, Z (см. рис.) и найдём их координаты с помощью системы ур-н:

$$1) \text{ точка } X: \begin{cases} A = 5B + 9 \\ A = \frac{4}{3}B + \frac{11}{3} \end{cases} \Rightarrow -5B + 9 = -\frac{4}{3}B + \frac{11}{3} \Rightarrow -15B + 27 = -4B + 11$$

$$(2) 11B = 16 \Rightarrow B = \frac{16}{11}$$

$$A = -5 \cdot \frac{16}{11} + 9 = \frac{19}{11}; \quad X\left(\frac{16}{11}; \frac{19}{11}\right)$$

$$2) \text{ точка } Y: \begin{cases} A = \frac{4}{3}B + \frac{11}{3} \\ A = \frac{3}{5}B + \frac{11}{5} \end{cases} \Rightarrow \frac{4}{3}B + \frac{11}{3} = \frac{3}{5}B + \frac{11}{5} \Rightarrow -\frac{4}{3}B + \frac{11}{3} = -\frac{3}{5}B + \frac{11}{5} \Rightarrow -20B + 55 = -9B + 33$$

$$\Rightarrow 11B = 22 \Rightarrow B = 2$$

$$A = -\frac{8}{3} + \frac{11}{3} = 1; \quad Y(2; 1)$$

$$3) \text{ точка } Z: \begin{cases} A = 5B + 9 \\ A = \frac{3}{5}B + \frac{11}{5} \end{cases} \Rightarrow -5B + 9 = -\frac{3}{5}B + \frac{11}{5} \Rightarrow -25B + 45 = -3B + 11$$

$$\Rightarrow 22B = 34 \Rightarrow B = \frac{17}{11}$$

$$A = -\frac{85}{11} + 9 = \frac{14}{11}; \quad Z\left(\frac{17}{11}; \frac{14}{11}\right)$$

Решением системы является заштрихованная область

Стр 3

Заметим, что прямая $Az = B + t$ параллельна $Az = B$.
 Двигаем прямую $Az = B$ вдоль оси OA' , тогда прямая впервые
 пересекает заштрихованную область в точке $K(2; 1)$ (т.к.
 коэф. наклона прямых (1), (2) и (3) равны $-5 < -1, -\frac{4}{3} < -1, -\frac{3}{5} > -1$)
 поэтому прямая $Az = B + t$ впервые пересекает ^{штрихованную} область (здесь
 прямые (1), (2) и (3))
 Тогда прямая $Az = B + t$, где t — минимальная, проходит
 через точку $K(2; 1)$, поэтому $Az = 2 + t \Leftrightarrow \frac{t}{m_h} + 2 = 3$.
 Ответ: 3.

Zagura 3

$$p(h) = \frac{g^h}{g^h + g^{50}}$$

$$p(i) + p(100-i) = \frac{g^i}{g^i + g^{50}} + \frac{g^{100-i}}{g^{100-i} + g^{50}} = \frac{g^i(g^{100-i} + g^{50}) + g^{100-i}(g^i + g^{50})}{(g^i + g^{50})(g^{100-i} + g^{50})} = 1$$

$$\text{Morgan } (p(1) + p(99)) + (p(2) + p(98)) + \dots + (p(49) + p(51)) =$$

$$= 1 \cdot 49 = 49$$

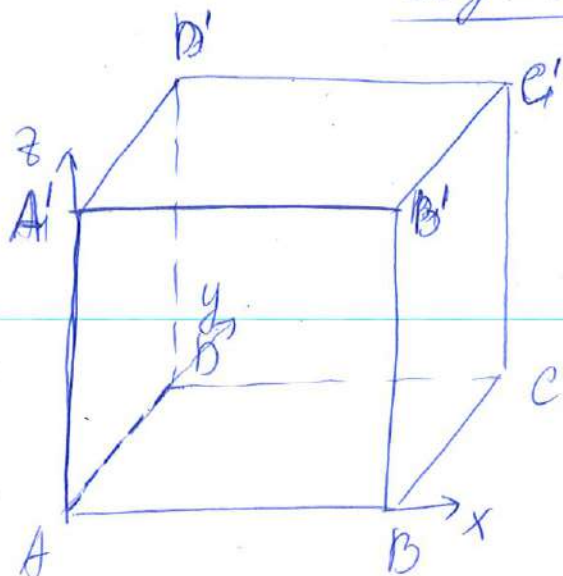
$$p(50) = \frac{g^{50}}{g^{50} g^{50}} = \frac{1}{2}$$

Morgan $p(1) + \dots + p(99) = 49 + \frac{1}{2} = 49,5$

Omber, 49,5.

стр 4

Задача 4



Введём систему координат, как на рис (начало координат — точка A), тогда

$$A(0;0;0), C(1;1;0), B(0;1;0),$$

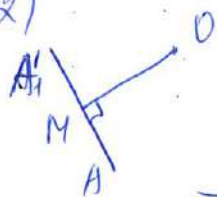
$$A'(0;0;1), B'(1;0;1)$$

Пусть $O(x_0; y_0; z_0)$ — центр сферы, R — её радиус; тогда

1) Так C лежит на сфере, то $R = OC$, тогда

$$R^2 = OC^2 = (x_0 - 1)^2 + (y_0 - 1)^2 + z_0^2 \quad (1)$$

2)



Пусть сфера касается AA' в точке M

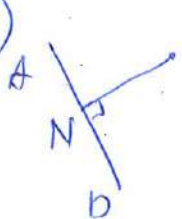
Так $M \in AA'$, то $M(0;0;z_M)$, где z_M — её координата по z

$$\vec{MO}(x_0; y_0; z_0 - z_M); \vec{AA'}(0;0;1)$$

$$\vec{MO} \perp \vec{AA'} \Leftrightarrow \vec{MO} \cdot \vec{AA'} = 0 \Leftrightarrow x_0 \cdot 0 + y_0 \cdot 0 + (z_0 - z_M) \cdot 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$R^2 = OM^2 = (x_0 - 0)^2 + (y_0 - 0)^2 + (z_0 - z_M)^2 = x_0^2 + y_0^2 \quad (2), \text{ так как } \underline{z_0 - z_M \geq 0}$$

3)



Пусть сфера кас AB в точке N

Так $N \in AB$, то $N(0; y_N; 0)$

$$\vec{NO}(x_0; y_0 - y_N; z_0), \vec{AB}(1;0;0)$$

$$\vec{NO} \perp \vec{AB} \Leftrightarrow \vec{NO} \cdot \vec{AB} = 0 \Leftrightarrow x_0 \cdot 0 + (y_0 - y_N) \cdot 1 + z_0 \cdot 0 = 0 \Leftrightarrow$$

$$R^2 = ON^2 = (x_0 - 0)^2 + (y_0 - y_N)^2 + (z_0 - 0)^2 = x_0^2 + z_0^2 \quad (3) \quad \underline{y_0 - y_N = 0}$$

4) Пусть сфера кас $A'B'$ в точке K, тогда

$$K(x_K; 0; 1); \vec{KO}(x_0 - x_K; y_0; z_0 - 1), \vec{A'B'}(1;0;0)$$

Код участника:

(заполняется организатором)

111-304

стр. 5.

$$\vec{EO} \perp \vec{A'B'} \Leftrightarrow \vec{EO} \cdot \vec{A'B'} = 0 \Leftrightarrow \underline{x_0 - x_k = 0}$$

$$R^2 = OK^2 = y_0^2 + (80-1)^2 \quad (4)$$

Допустим

$$R^2 = (x_0-1)^2 + (y_0-1)^2 + 80^2 \quad (1)$$

$$R^2 = x_0^2 + y_0^2 \quad (2)$$

$$R^2 = x_0^2 + 80^2 \quad (3)$$

$$R^2 = y_0^2 + (80-1)^2 \quad (4)$$

$$\text{из (2) и (3)} \Rightarrow y_0^2 = 80^2, \text{ тогда}$$

$$R^2 = (x_0-1)^2 + (y_0-1)^2 + y_0^2 \quad (1)$$

$$R^2 = x_0^2 + y_0^2 \quad (2)$$

$$R^2 = y_0^2 + (y_0-1)^2 \quad (4)$$

$$\text{из (1) и (4)} \Rightarrow (x_0-1)^2 = 0 \Leftrightarrow \underline{x_0 = 1}$$

$$\text{из (2) и (4)} \Rightarrow x_0^2 = (y_0-1)^2 \Leftrightarrow (y_0-1)^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} y_0-1=1 \\ y_0-1=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_0=2 \\ y_0=0 \end{cases}$$

1) Если $y_0=2$, то

$$R^2 = 1 + 2^2 = 5 \Rightarrow R = \sqrt{5}$$

$$2) \text{ Если } y_0=0, \text{ то } R^2 = 1 + 0^2 = 1 \Rightarrow R = 1$$

Ответ: $\sqrt{5}$ или 1.Задача 5

$$\arccotg \frac{5x+3}{3x-5} + \arccotg \frac{x-1}{x+1} = x$$

$$\text{Пусть } \arccotg \frac{5x+3}{3x-5} = \alpha, \arccotg \frac{x-1}{x+1} = \beta, \text{ тогда } \alpha + \beta = x$$

$$0 < \alpha, \beta < \pi \Rightarrow \alpha + \beta < 2\pi \Leftrightarrow 0 < x < 2\pi$$

$$1) \text{ Если } x = \frac{\alpha + \beta}{2} \Rightarrow \beta = x - \alpha$$

$$\text{Если } x = \frac{\pi}{2} \text{ или } x = \frac{3\pi}{2}, \text{ то}$$

Код участника:

(заполняется организатором)

И 11-304

стр. 6

$$\frac{3x-5}{5x+3} \cdot \frac{x+1}{x-1} = 1 \Leftrightarrow \frac{3x^2-5x+3x-5}{5x^2+3x-5x+3} = 1 \Leftrightarrow 2x^2 = 8 \Leftrightarrow$$

$$x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2, \text{ но } \frac{1}{2} \neq \pm 2, \frac{3}{2} \neq \pm 2$$

$$\text{Могла } x \neq \frac{1}{2}, x \neq \frac{3}{2}.$$

$$\text{tg } \beta = \text{tg}(x-\alpha) = \frac{\text{tg } x - \text{tg } \alpha}{1 + \text{tg } x \cdot \text{tg } \alpha}, \text{ где } \frac{x+1}{x-1} = \frac{\text{tg } x - \frac{3x-5}{5x+3}}{1 + \text{tg } x \cdot \frac{3x-5}{5x+3}} \quad (*)$$

Пусть $\text{tg } x = t$, тогда решая (*), получим

$$4x^2 + 4 = x^2 + t \Leftrightarrow t = \frac{4x^2 + 4}{x^2 + 1} = 4, \text{ где } \text{tg } x = 4 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \arctg 4 \\ x_2 = \arctg 4 + \pi \end{cases}$$

(так $0 < x < 2\pi$)Ответ: $x_1 = \arctg 4, x_2 = \arctg 4 + \pi$

12 баллов

Задача 8

$$f(x) = ax^4 + x^2 + x$$

Пусть прямая касается графика $f(x)$ в точках с абсциссами x_1 и $x_2, x_1 \neq x_2$.

$$f'(x) = 4ax^3 + 2x + 1$$

$$f'(x_1) = 4ax_1^3 + 2x_1 + 1$$

 $y_1 = f'(x_1)(x - x_1) + f(x_1)$ — уравнение касательной к графику $f(x)$ в точке с абсциссой x_1

$$y_1 = (4ax_1^3 + 2x_1 + 1)(x - x_1) + ax_1^4 + x_1^2 + x_1 = (4ax_1^3 + 2x_1 + 1)x - 3ax_1^4 - x_1^2 - x_1 + ax_1^4 + x_1^2 + x_1 = (4ax_1^3 + 2x_1 + 1)x - 2ax_1^4 - x_1^2$$

стр. 7

Код участника:

(заполняется организатором)

M11-304

Аналогично получаем для x_2 :

$$y_2 = (4ax_2^3 + 2x_2 + 1)x - 3ax_2^4 - x_2^2$$

Пк y_1 и y_2 — одна функция, то

$$\begin{cases} 4ax_1^3 + 2x_1 + 1 = 4ax_2^3 + 2x_2 + 1 \\ -3ax_2^4 - x_2^2 = -3ax_1^4 - x_1^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a(x_1^3 - x_2^3) + (x_1 - x_2) = 0 \quad | : (x_1 - x_2) \neq 0 \\ 3a(x_1^4 - x_2^4) + (x_1^2 - x_2^2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

1) Если $x_1 = x_2$, то

$$2a(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) + 1 = 0$$

1) Если $x_1 = -x_2$, то $2a(x_1^2 + x_1^2 + x_1^2) + 1 = 0$

$$2a x_1^2 + 1 = 0 \Rightarrow a = -\frac{1}{2x_1^2} \Rightarrow a < 0$$

Заметим, что такое a никому не противоречит, значит, $a < 0$ — удовлет. (для $\forall x_1 \neq 0$)2) Если $x_1 \neq -x_2$, то $x_1^2 \neq x_2^2$ ($x_1 \neq x_2$ по усл.)

$$\begin{cases} 3a(x_1^2 + x_2^2) + 1 = 0 \quad (1) \\ 2a(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) + 1 = 0 \end{cases}$$

$$3a(x_1^2 + x_2^2) = 2a(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2)$$

 $\nexists a \neq 0$ (иначе $1 = 0$ из (1))

$$x_1^2 + x_2^2 = 2x_1x_2 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 \text{ — прот.}$$

Ответ: $a < 0$. ($a \in (-\infty; 0)$).Задача 6

3 Ур. касат.?

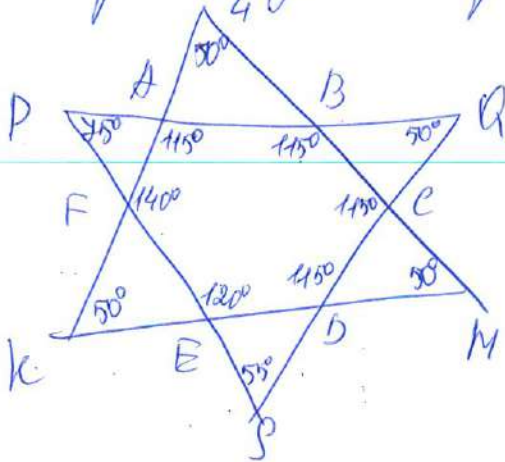
Код участника:

(заполняется организатором)

M11-304

стр. 8.

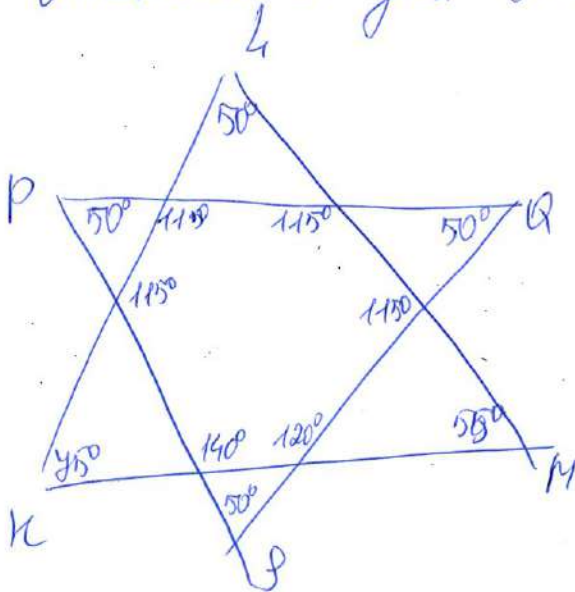
Если треугольник пересекает по 6-уголу, то каждая его сторона пересекает какую-то сторону другого



$$1) \text{ Из } \triangle AFB \Rightarrow \angle AFB = 180^\circ - (120^\circ - 115^\circ) - (180^\circ - 115^\circ) = 180^\circ - 65^\circ - 65^\circ = 50^\circ$$

Аналогично делаем для $\triangle BRC$, $\triangle CND$, $\triangle DPE$, $\triangle EKF$, $\triangle FPA$, получаем углы $\triangle KLM: 50^\circ, 50^\circ, 50^\circ$; углы $\triangle PQR: 55^\circ, 50^\circ, 55^\circ$.

Аналогично для 2-ого случая:



⊖ 05

Ответ: $50^\circ, 50^\circ, 50^\circ; 55^\circ, 55^\circ, 50^\circ$

МН-677

Код участника
(заполняется организатором)

Вход 12:43
Выход 12:46



**Олимпиадная работа
заключительного этапа**

**«Всероссийская олимпиада школьников "Миссия
выполнима. Твоё призвание - финансист!" 2023-2024
г.»**

«(Математика 11 класс)»

Вариант № 2 (gba)

«27 января 2024 г.»

Никакие другие записи на титульном листе делать не разрешается

- ① Бюджет за x людей (или число), которые не говорят по-английски и за y – тех, которые не говорят по-французски
 зн. говорит на французском, но не на английском – $0,04x$

говорит ^{не} на французском, но на английском – $0,2y$

тогда не говорит ни на одном языке – с одной стороны $0,96x$, с другой – $0,8y$

$$\begin{aligned} \text{зн. } 0,96x &= 0,8y \\ 96x &= 80y \\ 12x &= 10y \\ 6x &= 5y \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{6}{5} = 1,2$$

Ответ: 1,2

+ (108)

②

$$\begin{cases} (1) 3A + 5B \leq 11 \\ (2) 4A + 3B \leq 10 \\ (3) 5A + 4B \leq 18 \end{cases}$$

сложив (1) и (2) и - в а и воев у нео
 (3) получаем:

$$\begin{cases} 7A + 8B \leq 21 \\ 5A + 4B \leq 18 \end{cases} \quad 4B \leq 3 \Rightarrow B \leq \frac{3}{4}$$

сложив (1) и (3) и вычтем (2) на 3 получаем:
 $\begin{cases} 10A + 9B \leq 29 \\ 12A + 9B \leq 30 \end{cases}$ вычитаем $\rightarrow 2A \leq 1 \Rightarrow A \leq \frac{1}{2}$

$$\text{зн. } A + B \leq \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4} + \frac{2}{4} = \frac{5}{4}$$

$$\text{зн. } \max - \frac{5}{4} = 1,25$$

Ответ: 1,25

③ рассмотрим $p(12)$:

$$p(12) = \frac{(-3)^{12}}{3^{12} + 3^{12}} = -\frac{1}{1+1} = -\frac{1}{2}$$

$\exists k$ - четное ($k \in \mathbb{N}$), $k \leq 16$

$$p(12+k) = \frac{(-3)^{12+k}}{3^{12+k} + 3^{12}} = -\frac{3^k}{3^{k+1}}$$

$$p(12-k) = \frac{(-3)^{12-k}}{3^{12-k} + 3^{12}} = -\frac{\frac{1}{3^k}}{\frac{1}{3^k} + 1} = -\frac{1}{1+3^k}$$

$$\text{тогда } p(12+k) + p(12-k) = -\frac{3^{k+1}}{1+3^k} = -1$$

$\exists k$ - четное

$$p(12+k) = \frac{(-3)^{12+k}}{3^{12+k} + 3^{12}} = \frac{3^k}{3^{k+1}}$$

$$p(12-k) = \frac{\frac{1}{3^k}}{\frac{1}{3^k} + 1} = \frac{1}{3^{k+1}}$$

$$\Rightarrow p(12+k) + p(12-k) = 1$$

таким образом можно разбить сумму на

$$\begin{aligned} & p(1) + p(33) + \\ & + p(2) + p(32) + \\ & + \dots + \\ & + p(16) + p(18) \end{aligned}$$

н.к. число пар вида $p(12-k) + p(12+k)$ где k четное будет равно числу пар, где k - четное будут равны, а значит их сумма - 0

остается $p(12) = -\frac{1}{2}$ это и будет сумма

Ответ: -0,5

$$⑤ \quad \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{x+2} + \operatorname{arctg} \frac{x+3}{3x-1} = x$$

$$\text{м.к.} \quad -\frac{\pi}{2} \leq \operatorname{arctg} x \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow \underline{-\pi \leq x \leq \pi}$$

+

$$\operatorname{tg} \left(\operatorname{arctg} \frac{2x-1}{x+2} + \operatorname{arctg} \frac{x+3}{3x-1} \right) = \operatorname{tg} x$$

$$\frac{\frac{2x-1}{x+2} + \frac{x+3}{3x-1}}{1 - \frac{(2x-1)(x+3)}{(x+2)(3x-1)}} = \operatorname{tg} x$$

$$\begin{cases} \frac{(2x-1)(3x-1) + (x+3)(x+2)}{(x+2)(3x-1) - (2x-1)(x+3)} = \operatorname{tg} x \\ x \neq -2 \\ x \neq \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{6x^2 - 5x + 1 + x^2 + 5x + 6}{3x^2 + 5x - 2 - 2x^2 - 5x + 3} = \operatorname{tg} x \\ x \neq -2 \\ x \neq \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x(x^2+1)}{x^2+1} = \operatorname{tg} x \\ x \neq -2 \\ x \neq \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \neq \pm 1 \\ x \neq -2 \\ x \neq \frac{1}{3} \\ \operatorname{tg} x = x \end{cases}$$

$$x = 1 \quad \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \operatorname{arctg} 2 = 1$$

∅

$$x = -1 \quad \operatorname{arctg} 3 + \operatorname{arctg} \frac{1}{2} = -1$$

∅

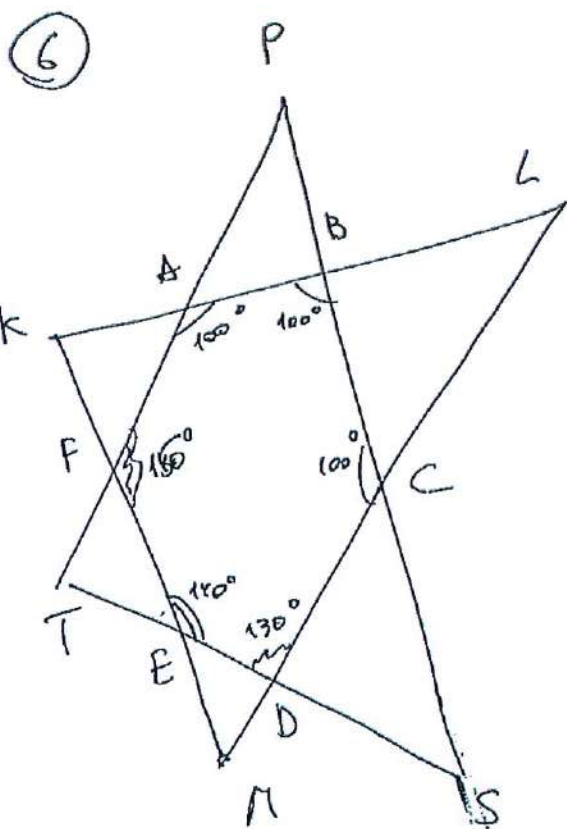
Код участника:

(заполняется организатором)

Н11-647

$$\begin{cases} -\pi \leq x \leq \pi \\ \operatorname{tg} x = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \operatorname{arctg} 7 \\ x = \operatorname{arctg} 7 - \pi \end{cases}$$

Ответ: $\{\operatorname{arctg} 7; -\pi + \operatorname{arctg} 7\}$



Исходя из 2-ой конфигурации:
 $\triangle KLM$ и $\triangle PTS$
 которые в пересечении имеют
 6-ти углов. $ABCDEF$
 (см. рисунок)

рассмотрим $\triangle APB$;

т.к. углы $\angle PAB$ и $\angle TAB$ — смежные $\Rightarrow$

$$\angle PAB = 180^\circ - \angle TAB = 80^\circ$$

углы $\angle KBP$ и $\angle S'BK$ — смежные $\Rightarrow$

$$\angle KBP = 180^\circ - \angle KBS = 80^\circ$$

зр. т.к. в $\triangle$ -е сумма углов $= 180^\circ$

$$\angle P = 180^\circ - 80^\circ - 80^\circ = \underline{\underline{20^\circ}}$$

аналогично для:

$$\triangle BCL: \angle L = 180^\circ - 80^\circ - 80^\circ = 20^\circ$$

$$\triangle CSM: \angle M = 180^\circ - 50^\circ - 40^\circ = 90^\circ$$

$$\triangle FTE: \angle T = 180^\circ - 40^\circ - 30^\circ = 110^\circ$$

$$\triangle FKA: \angle K = 180^\circ - 30^\circ - 80^\circ = 70^\circ$$

$$\triangle SCD: \angle S = 180^\circ - 80^\circ - 50^\circ = 50^\circ$$

таким образом углы одного $\div 20^\circ, 70^\circ, 90^\circ$

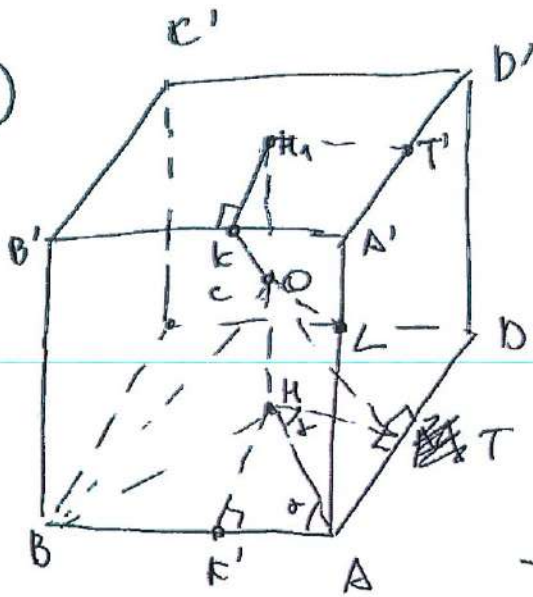
второго $- 110^\circ, 20^\circ, 50^\circ$

Ответ: $20^\circ, 70^\circ, 90^\circ$ и $110^\circ, 20^\circ, 50^\circ$

Код участника:
(заполняется организатором)

111-677

4



м.р. по условию

$\Delta' B'$

$A'A$ - касательные

AD ж. на них лежат точки, принадлежащие сфере (это K, L, T и др.)

то есть, внутри сферы есть O , такие, что $OK = OL = OM = OB$

$\exists H_1 H \perp (ABC)$
 $O \in H_1 H$

но $T O \perp \text{кас.}$ $H_1 K \perp \Delta' B'$

$H_1 T \perp AD$

$OL \perp AA'$

$\exists OK = h$
 $BH = x$
 $BK' = y$

м.р. $OH_1 = 1 \Rightarrow OH_1 = 1 - h$

$\exists K' - \text{проекция } K \text{ на } (ABC) \Rightarrow HK' = \sqrt{x^2 - y^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow OK = \sqrt{(1-h)^2 + (x^2 - y^2)}$

м.р. $AK' = 1 - y \Rightarrow$

$OL = \sqrt{(x^2 - y^2) + (1 - y^2)^2}$

м.р. $OL = OB = OK \Rightarrow \begin{cases} h^2 + x^2 = (1-h)^2 + (x^2 - y^2) & (1) \\ x^2 - y^2 + (1-y)^2 = h^2 + x^2 & (2) \end{cases}$

$x^2 + x^2 = 1 - 2h + h^2 + x^2 - y^2 \Rightarrow \begin{cases} y^2 = 1 - 2h \\ 1 - 2y = h^2 \end{cases}$

$\frac{1-y^2}{2} = 1 - 2h \Rightarrow 1 - h^2 = 2 - 4h$

$h^2 - 4h + 1 = 0 \Rightarrow h = \frac{4 \pm \sqrt{16-4}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{12}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}$

Код участника:

(заполняется организатором)

НН-674

м.р. ~~КНН-674~~

$$y^2 - 2y + 1 = h^2 - 2h + 1 \Rightarrow$$

$$(y-1)^2 = (h-1)^2 \Rightarrow$$

~~тогда $y^2 = 1 - 2h + h^2 = (h-1)^2$~~

$$\begin{cases} y-1 = h-1 \\ y-1 = 1-h \end{cases}$$

м.р. $OT = OB$

$$OT^2 = HT^2 + HO^2$$

$$OB^2 = BH^2 + OH^2$$

$$\left. \begin{matrix} OT^2 = HT^2 + HO^2 \\ OB^2 = BH^2 + OH^2 \end{matrix} \right\} \Rightarrow HT = BH$$

$$\begin{cases} y = h \\ y+h = 2 \end{cases}$$

$$\angle THA = \alpha \Rightarrow \angle HAT = 90 - \alpha \Rightarrow \angle HAB = \alpha$$

м.р. $HTAK'$ - прямоугольник $\Rightarrow AK' = HT = BH$

~~1-y=x $\Rightarrow x=1-\sqrt{283-3}$~~
~~y=1-x~~
 з.п.р. $OL = R \Rightarrow$
 ~~$OL^2 = x^2 + y^2 + 1 - 2y = x^2 + 1 - 2y = x^2 + 1 - 2 + 2x = x^2 + 2x - 1$~~

+

м.р. $HT = BH \Rightarrow x = 1 - y \Rightarrow$

~~$R = OL = \sqrt{1-y^2-y^2+1}$~~

з.п. получается 2 системы.

$$\text{I} \begin{cases} y = h \\ y^2 = 1 - 2h \\ x = 1 - y \end{cases}$$

$$\text{II} \begin{cases} y+h = 2 \\ y^2 = 1 - 2h \\ x = 1 - y \end{cases}$$

① $\begin{cases} y = h \\ h^2 + 2h - 1 = 0 \\ x = 1 - y \end{cases}$

$$\begin{cases} y = h \\ h = \frac{-2 \pm \sqrt{4+4}}{2} = -1 \pm \sqrt{2} \\ x = 1 - y \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

м.р. $h > 0 \Rightarrow$

$$\begin{cases} h = \sqrt{2} - 1 \\ y = \sqrt{2} - 1 \\ x = 2 - \sqrt{2} \end{cases}$$

Найдено только
одно из
возможных
значений
пары x

(неверно)
 $\sqrt{9+6\sqrt{2}}$

Код участника:

(заполняется организатором)

НН-647

II

$$\begin{cases} y = 2 - h \\ 4 - 4h + h^2 = 1 - 2h \\ x = 1 - y \end{cases} \quad \begin{cases} y = 2 - h \\ h^2 - 2h + 3 = 0 \\ x = 1 - y \end{cases} \quad h = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 12}}{2} \quad \emptyset$$

— решений нет.

м.р. $R = OB = \sqrt{h^2 + x^2} = \sqrt{(2-1)^2 + (2+5)^2} =$

$$= \sqrt{2+1-752+4+2-452} = \sqrt{9-652} = \sqrt{6-53} = (\sqrt{2}-1) \cdot \sqrt{3}$$

Ответ: $R = \sqrt{9-652} = \sqrt{3} \cdot (\sqrt{2}-1) = \sqrt{6-53}$

- 8 м.р. $x, y, z \leq 100 \in \mathbb{N}$ — Верная оценка 25
- получается, что вычисление последовательности из 100 чисел мы одновременно проверим 99 пар (нам достаточно, чтобы рядом оказались хотя бы 2 из x, y, z ; при этом для каждого числа за 1 „последовательность“ проверяется 2 „соседа“-пара; тогда suffice 49 написаний данного числа точно можно расположить 98 другим числам; тогда 50-ое мы можем проверить 1 из чисел; но м.р. можно это сделать параллельно для всех чисел, то можно существенно сократить число вариантов: за 1 проход 98 чисел имеют по 2 соседа и 2-ое по 1; тогда нам точно хватит 50 переборов; м.р. каждое из 100 чисел окажется 1 раз в крайней последовательности, а остальные 49 — нет; и тогда у нас точно пов. пара после этого перебора
- Ответ: 50

М 11- 677

Код участника

Всероссийская олимпиада школьников «Миссия выполнима. Твое призвание – финансист!» 2023/2024 уч.г.

Бланк проверки работы

Математика 11 класс

№ задания	ФИО эксперта	Балл	ФИО эксперта	Балл	Итоговый балл
1	Аниськина	10	Гурьянова	10	10
2	Иван	0	Зинеская	0	0
3	Иван	12	Александров	12	12
4	Иван	5	Овчинникова	5	5
5	Иван	12	Угрюмов	12	12
6	Иван	3	Кориков	3	3
7	Иван	14	Лепачкина	14	14
8	Иван	0	Шасков	0	0
ИТОГО					56

Код участника:

(заполняется организатором)

111-644

$$④) f(x) = x^4 + bx^2 + x$$

найдем у-ние касательной:

$$f'(x_0) = 4x_0^3 + 2bx_0 + 1$$

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) \Rightarrow$$

$$y = x_0^4 + bx_0^2 + x_0 + x_0(4x_0^3 + 2bx_0 + 1) + (4x_0^3 + 2bx_0 + 1)x =$$

$$= -3x_0^4 - bx_0^2 + (4x_0^3 + 2bx_0 + 1)x$$

т.е. $g(x) = -3x^4 - bx^2$ ~~принимает единственное значение~~
 касательная, значит она только принимает один значен
 при 2-х x

рассмотрим, когда это условие будет выполняться
 у $\psi(x) = 4x^3 + 2bx + 1$

$$4x^3 + 2bx + 1 = -4x^3 - 2bx + 1$$

$$8x^3 + 4bx = 0$$

$$4x(2x^2 + b) = 0$$

при $b \geq 0$ - есть только

$$b < 0$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{-b}{2}}$$

но есть 2 точки касания -

$$\begin{cases} x_0 = \sqrt{\frac{-b}{2}} \\ x_0 = -\sqrt{\frac{-b}{2}} \end{cases}$$

у-ние касательной примет вид:

$$-3 \cdot \frac{b^2}{4} + b \cdot \frac{b}{2} + \left(4 \cdot \sqrt{\frac{-b}{2}} \cdot \left(-\frac{b}{2} \right) + 2b \cdot \sqrt{\frac{-b}{2}} + 1 \right) x =$$

$$= x - \frac{b^2}{4}$$

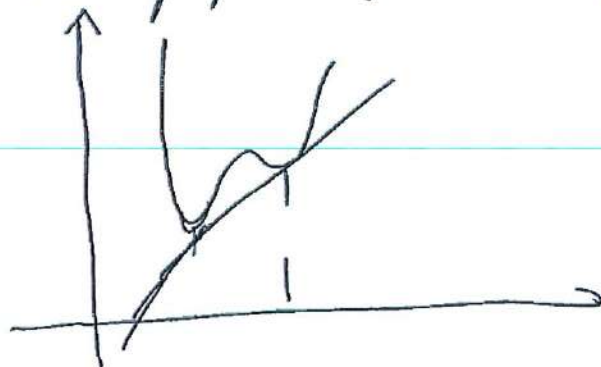
Код участника:

(заполняется организатором)

111-644

⑦ (графическ):

н.м.р. графика. примет вид:



$$\text{н.м.р. } f\left(\sqrt{\frac{b}{2}}\right) = \sqrt{\frac{b}{2}} - \frac{b^2}{4}$$

$$f\left(-\sqrt{\frac{b}{2}}\right) = -\frac{b^2}{4} - \sqrt{\frac{b}{2}}$$

н.м.р. из последнего равенства $\Rightarrow$

$$\frac{\sqrt{-\frac{b}{2}} - \frac{b^2}{4}}{\frac{b^2}{4} + 2\sqrt{-\frac{b}{2}}} = \frac{-\sqrt{-\frac{b}{2}} - \frac{b^2}{4}}{\frac{b^2}{4}} \quad \left[-\sqrt{-\frac{b}{2}} = b \right]$$

$$\frac{b - b^4}{b^4 + 2b} = \frac{b + b^4}{b^4} \quad \text{н.м.р. } b \neq 0 \Rightarrow b \neq 0$$

$$\frac{1 - b^3}{b^3 + 2} = \frac{1 + b^3}{b^3} \quad \frac{1 - b^3}{b^3 + 2} + \frac{1 - b^3}{b^3} = 0$$

$$\frac{b^3 - b^6 + b^6 + b^3 + 2 + 2b^3}{(b^3 + 2)b^3} = 0$$

$$\frac{4b^3 + 2}{(b^3 + 2)b^3} = 0 \Rightarrow 2b^3 + 1 = 0 \Rightarrow b^3 = -\frac{1}{2}$$

$$\text{н.м.р. } \sqrt{-\frac{b}{2}} = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}}$$

$$b = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}}$$

$$\sqrt{-\frac{b}{2}} = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$$

$$-\frac{b^3}{8} = \frac{1}{4} \Rightarrow -b^3 = 2 \Rightarrow b = -\sqrt[3]{2}$$

$$\text{н.м.р. } y = x - \frac{\sqrt[3]{4}}{4} = x - \frac{1}{\sqrt[3]{16}} \quad \text{Ответ: } -3$$

М 11-023

Код участника
(заполняется организатором)



**Олимпиадная работа
заключительного этапа
«Всероссийская олимпиада школьников "Миссия
выполнима. Твоё призвание - финансист!" 2023-2024
г.»
«(Математика 11 класс)»**

Вариант № 2 (второй)

«27 января 2024 г.»

Никакие другие записи на титульном листе делать не разрешается

№ 11-023

Код участника

Всероссийская олимпиада школьников «Миссия выполнима. Твое призвание – финансист!» 2023/2024 уч.г.

Бланк проверки работы

Математика 11 класс

№ задания	ФИО эксперта	Балл	ФИО эксперта	Балл	Итоговый балл
1	Кашакина	10	Гурьянов	10	10
2	Ортов	10	Тюздева	10	10
3	Маркова	10	Александрович	10	10
4	Бакиров	0	Овсешников	0	0
5	Валеева	12	Уфуров	12	12
6	Олехов	0	Берзина	0	0
7	Сенаня	14	Липагина	14	14
8	Грешин	0	Щадилов	0	0
ИТОГО					56

№8 чел

Бланк ответа 1

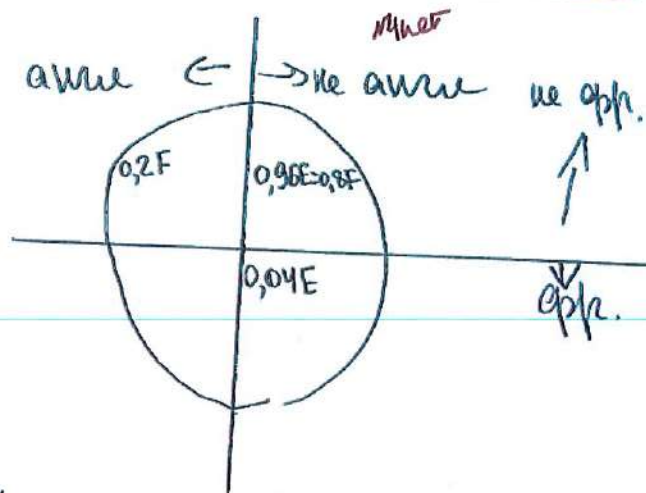
Всероссийская олимпиада школьников «Миссия выполнима. Твое призвание – финансист!»

Код участника:

(заполняется организатором)

M11-023

Задача 1.



Пусть F - количество слонов, не говорящих по-французски (это верхняя полуокружность), E - количество слонов, не говорящих по-английски (это правая полуокружность).
Тогда по условию справа снизу слоны, не говорящие по-английски, но говорящие по-французски и их $0,04E$; аналогично слева сверху $0,2F$; тогда со стороны справа сверху $0,96E$, а с другой стороны $0,8F$, откуда $0,96E = 0,8F$ и $F = \frac{0,96E}{0,8}$
это равно $1,2E$

Ответ: 1, 2 +10

Задача 2.

Обозначим $A - x$, $B - y$ для удобства
Тогда задача $x + y \rightarrow \max$ при ограничениях

$$\begin{cases} 3x + 5y \leq 11; \\ 4x + 3y \leq 10; \\ 7x + 4y \leq 18. \end{cases} = \begin{cases} ① y \leq \frac{11}{5} - \frac{3}{5}x \\ ② y \leq \frac{10}{3} - \frac{4}{3}x \\ ③ y \leq \frac{9}{2} - \frac{7}{4}x \end{cases}$$

Заметим, что $\frac{3}{5} < \frac{4}{3}$, а $\frac{4}{3} < \frac{7}{4}$
Крошечки не имеют смысла и изображают прямую.
 $x + y = a \Rightarrow y = a - x$

Заметим $\frac{5}{2} < \frac{9}{7}$ и $\frac{5}{2} < \frac{11}{3}$
 $\frac{5}{2} < \frac{9}{7} < \frac{11}{3}$ и $\frac{11}{5} < \frac{10}{3} < \frac{9}{2}$
Обозначим пересечение прямых ① и ② ... А

Код участника:

(заполняется организатором)

M11-023

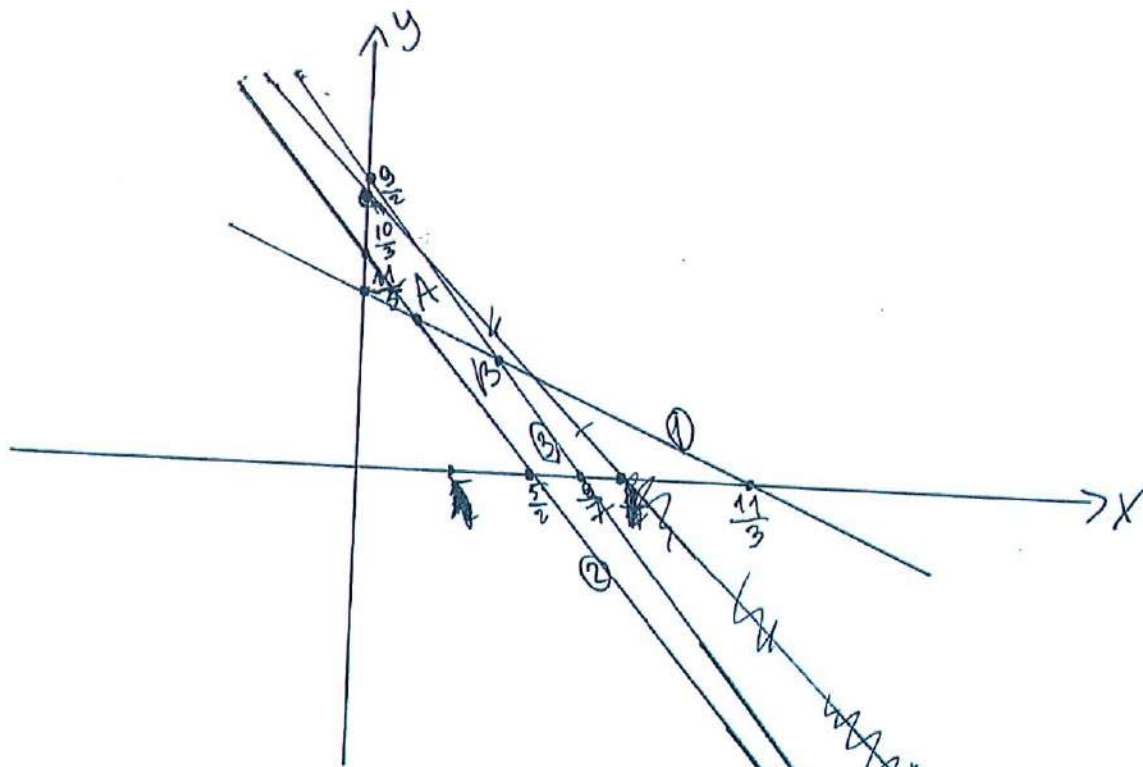
Пересечение ① и ③ за B ; ② и ③ за C
найдем их координаты

$$A: \frac{11}{5} - \frac{3}{5}x = \frac{10}{3} - \frac{4}{3}x \Rightarrow x = \frac{17}{11}, y = \frac{14}{11}$$

$$B: \frac{11}{5} - \frac{3}{5}x = \frac{9}{2} - \frac{7}{4}x \Rightarrow x = 2, y = 1$$

$$C: \frac{9}{2} - \frac{7}{4}x = \frac{10}{3} - \frac{4}{3}x \Rightarrow x = \frac{14}{5}, y = -\frac{2}{5}$$

Тогда область, задаваемая системой – это выпуклая область под A, B и C



Тогда $x+y \rightarrow \max$, когда прямая $x+y=A$ проходит через точку A, то есть $\frac{17}{11} + \frac{14}{11} = A$, $A = \frac{31}{11}$
ответ: $\frac{31}{11}$

108

Код участника:

(заполняется организатором)

M11-023

Задача 3

Заметим, что $p(n) = \frac{(-3)^n}{3^n + 3^{17}} = \frac{(-1)^n}{1 + 3^{17-n}}$

$p(1) + \dots + p(33)$

$(p(1) + p(33)) + (p(2) + p(31)) + \dots + (p(16) + p(18)) + p(17) = -\left(\frac{1}{1+3^{16}} + \frac{1}{1+3^{-16}}\right) + \left(\frac{1}{1+3^{15}} + \frac{1}{1+3^{-15}}\right) - \dots + \left(\frac{1}{1+3^1} + \frac{1}{1+3^{-1}}\right) - \frac{1}{2}$

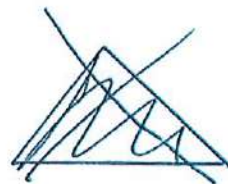
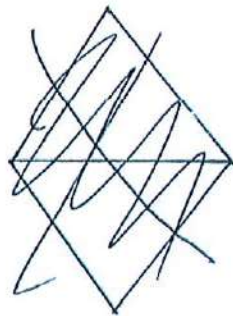
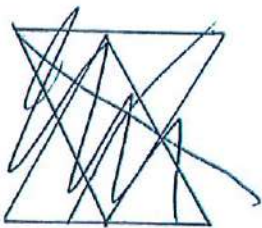
Заметим, что $\frac{1}{1+3^n} + \frac{1}{1+3^{-n}} = \frac{1+3^{-n} + 1+3^n}{(1+3^n)(1+3^{-n})} = \frac{(1+3^n) \cdot (1+3^{-n})}{(1+3^n)(1+3^{-n})} = 2$

≈ 1

Тогда наша сумма равна $-1+1-1+1-\dots-1+1-\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$

Ответ: $-\frac{1}{2}$

не доказано!



Задача 6.

Обозначим фигурами из условия за ~~x, y, z~~ и ~~u, v, w~~
наблюдим все углы меньшие ~~у~~ $\angle A, \angle B, \dots, \angle F$ - смежные
 $180^\circ - \angle A$, $180^\circ - \angle B \dots 180^\circ - \angle F$

Тогда из $\triangle AFx \triangle ABM \triangle BCy \dots \triangle EFw$...

Код участника:

(заполняется организатором)

M11-023

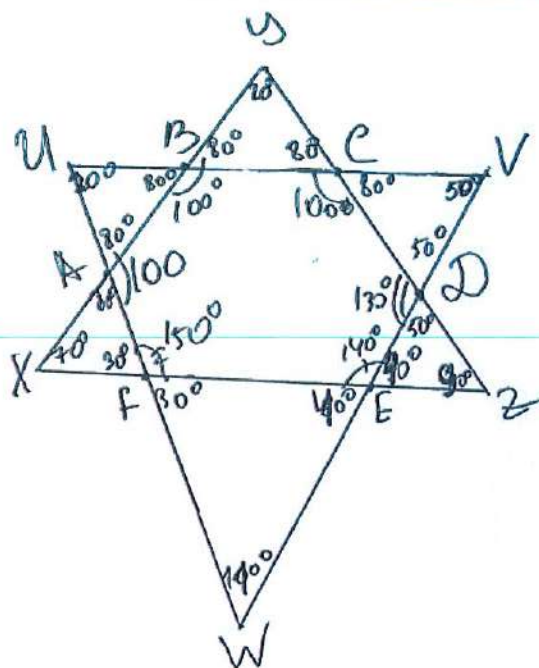
Если по рисунку неочевидны
некоторые углы, то:

$$\begin{aligned}\angle DEF &= 40^\circ \\ \angle DZE &= 90^\circ \\ \angle BCA &= 20^\circ \\ \angle XAF &= 80^\circ\end{aligned}$$

?

— 05

Задача
не решена.



Задача 5:

$$\arctan\left(\frac{2x-1}{x+2}\right) + \arctan\left(\frac{x+3}{3x-1}\right) = x$$

Запомним, что LHS

$$\begin{aligned}\tan(\text{LHS}) &= \frac{\tan(\alpha) + \tan(\beta)}{1 + \tan(\alpha)\tan(\beta)} = \frac{\frac{2x-1}{x+2} + \frac{x+3}{3x-1}}{1 + \frac{2x-1}{x+2} \cdot \frac{x+3}{3x-1}} = \\ &= \frac{(2x-1)(3x-1) + (x+3)(x+2)}{(x+2)(3x-1) - (2x-1)(x+3)} = \frac{7x^2+7}{x^2+1} = 7\end{aligned}$$

$$\tan(\alpha + \beta) = 7 \Leftrightarrow \alpha + \beta = \arctan(7) + \pi k$$

$$\arctan(7) \in [0; \frac{\pi}{2}]$$

$\Downarrow$

$$\text{Учитывая, что } \alpha, \beta \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}], \\ \alpha + \beta \in [-\pi; \pi]$$

получаем $k=0$ или $k=-1$

Тогда уравнение принимает вид:

$$\begin{cases} \arctan(7) = x \\ \arctan(7) - \pi = x \end{cases}$$

Откуда: $\arctan(7), -$

ОДЗ:

$$\begin{aligned}x &\neq -2 \\ x &\neq \frac{1}{3}\end{aligned}$$

Код участника:

(заполняется организатором)

M11-023

Задача 7.

$$f(x) = x^4 + bx^2 + x, \quad f'(x) = 4x^3 + 2bx + 1$$

По формуле касательной, она имеет вид:

$$y = (x - x_0)(4x_0^3 + 2bx_0 + 1) + x_0^4 + bx_0^2 + x_0 = \underbrace{x(4x_0^3 + 2bx_0 + 1)}_{\text{как бы}} - \underbrace{3x_0^4 - bx_0^2}_{\text{сдвиг}}$$

Две точки касания x_1, x_2 , прямые совпадают, поэтому

$$\begin{cases} 4x_1^3 + 2bx_1 + 1 = 4x_2^3 + 2bx_2 + 1 & (*) \\ -3x_1^4 - bx_1^2 = -3x_2^4 - bx_2^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3(x_1^4 - x_2^4) + b(x_1^2 - x_2^2) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x_1^2 - x_2^2)(3x_1^2 + 3x_2^2 + b) = 0 \stackrel{(*)}{\Rightarrow}$$

$$\stackrel{(*)}{\Rightarrow} x_1^2 - x_2^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_1 = -x_2 \end{cases}$$

$x_1 \neq x_2$, поэтому $x_1 = -x_2$. Тогда пусть абсциссы точек касания — это x_0 и $-x_0$.

Тогда $f(x_0) = x_0^4 + bx_0^2 + x_0$

$$f(-x_0) = x_0^4 + bx_0^2 - x_0 = f(x_0) - 2x_0$$

Эти точки имеют одну общую касательную, поэтому ее наклон $= \frac{2x_0}{2x_0} = 1$

тогда $x_0^3 + 2bx_0 + 1 = 1 \Rightarrow b = -2x_0^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ касательная

1/45

$$y = x \cdot (4x_0^3 + 2bx_0 + 1) - 3x_0^4 - bx_0^2 = x - \frac{1}{4}b^2$$

имеет, что $x_0 \neq 0$, т.к. тогда $x_1 = x_2$

и $b = -2x_0^2 < 0 \Rightarrow$ такая касательная существует только при $b < 0$ и имеет вид $y = x - \frac{1}{4}b^2$

МРТ11-12

Код участника
(заполняется организатором)



**Олимпиадная работа
заключительного этапа
«РЕГИСТРАЦИЯ ТОЛЬКО для победителей и
призеров ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНОГО ЭТАПА 2022-2023
учебного года "Миссия выполнима. Твоё призвание -
финансист!"»
«(Математика 11 класс)»**

Вариант № 1

«27 января 2024 г.»

Никакие другие записи на титульном листе делать не разрешается

МПГ 11-12

Код участника

Всероссийская олимпиада школьников «Миссия выполнима. Твое призвание – финансист!» 2023/2024 уч.г.

Бланк проверки работы

Математика 11 класс

№ задания	ФИО эксперта	Балл	ФИО эксперта	Балл	Итоговый балл
1	Гостовалова	10	Минаева	10	10
2	Масленков Р.М.	10	Савина С.В.	10	10
3	Марков	12	Кремль	12	12
4	Овчинник	4	Курсанова	4	4
5	Сундари	12	Уфуров	12	12
6	Труфанов	3	Степанян	3	3
7	Кешиков	3	Степанян	3	3
8	Федосин	0	Иванов	0	0
ИТОГО					54



ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМА.

ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ – ФИНАНСИСТ!»

ПО ПРЕДМЕТУ МАТЕМАТИКА 2023-2024 уч. года

ОЧНЫЙ ЭТАП

11 класс

Вариант 1

Задание 1 (10 баллов)

В некотором ВУЗе существуют очная и дистанционная формы обучения. При этом среди студентов, занимающихся очно, 50% занимаются также и дистанционно, а среди студентов, занимающихся дистанционно, 60% занимаются также и очно. Какую часть составляют студенты, занимающиеся только очно?

Задание 2 (10 баллов)

Каким наименьшим может быть значение выражения $A + B$, если A и B — числа, удовлетворяющие следующей системе неравенств

$$\begin{cases} A + 5B \geq 9; \\ 3A + 4B \geq 11; \\ 5A + 3B \geq 11. \end{cases}$$

Задание 3 (12 баллов)

Для каждого натурального числа n положим $p(n) = \frac{9^n}{9^n + 9^{50}}$.

Вычислите сумму $p(1) + p(2) + p(3) + \dots + p(99)$.

Задание 4 (12 баллов)

Длина ребра куба $ABCA'B'C'D'$ равна 1. Найдите радиус сферы, проходящей через точку C и касающейся прямых AD , AA' и $A'B'$.

Задание 5 (12 баллов)

Решите уравнение $\arcsin \frac{5x+3}{3x-5} + \arcsin \frac{x-1}{x+1} = x$.

Задание 6 (14 баллов)

Два треугольника пересекаются по шестиугольнику $ABCDEF$, в котором $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 115^\circ$, $\angle E = 120^\circ$, $\angle F = 140^\circ$.
Найдите углы этих треугольников.

Задание 7 (14 баллов)

При каких значениях параметра a существует прямая, касающаяся графика функции $f(x) = ax^4 + x^2 + x$ в двух точках? Для каждого такого значения параметра a найдите уравнение соответствующей прямой.

Задание 8 (16 баллов)

Про последовательность $X = \{x_1, \dots, x_{100}\}$ известно, что она состоит из всех натуральных чисел от 1 до 100, переставленных в некотором порядке. Мы должны узнать этот порядок. За один шаг можно выписать любую, также состоящую из чисел от 1 до 100, последовательность $Y = \{y_1, \dots, y_{100}\}$, про каждый член $y_i (i = 1, \dots, 100)$ которой нам сообщат, какое из соотношений $y_i < x_i$, $y_i = x_i$ или $y_i > x_i$ имеет место. За какое наименьшее число шагов можно наверняка определить последовательность X ?

Код участника:
(заполняется организатором)

МПГ11-12

Задание №1

Пусть x учеников занимаются очно, а y учеников дистанционно.

Тогда тех, кто занимается и там и там $0,5 \cdot x$ или же $0,6y$

$$\Rightarrow 0,5x = 0,6y \Rightarrow x = 1,2y$$

Это $x+y$ — (количество учеников, которые занимаются и там и там, так как мы их посчитали дважды) $= 1,2y + y - 0,6y = 1,6y$

Учеников, которые занимаются очно: $x - 0,5x = 0,5x = 0,5 \cdot 1,2y = 0,6y$

$$\Rightarrow \frac{0,6y}{1,6y} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$

То есть $\frac{3}{8}$ студентов занимаются

только очно Ответ: $\frac{3}{8}$ либо же другими словами 37,5%

Задание №2

$$\begin{cases} A+5B \geq 9 \\ 3A+4B \geq 11 \\ 5A+3B \geq 11 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A+5B \geq 9 \\ 6A+8B \geq 22 \\ 15A+9B \geq 33 \end{cases}$$

Сложим 3 нерав. (их можно складывать так как у всех одинаковые знаки $\geq$)

$$\Rightarrow 22A + 32B \geq 64$$

$$\Rightarrow 22A + 32B \geq 64 \Rightarrow A+B \geq \frac{64}{22} \Rightarrow A+B \geq \frac{32}{11}$$

Мы получили оценку на $A+B \geq \frac{32}{11}$ осталось проверить пример
Таких A и B , что $A+B = \frac{32}{11}$, $A = \frac{9}{11}$

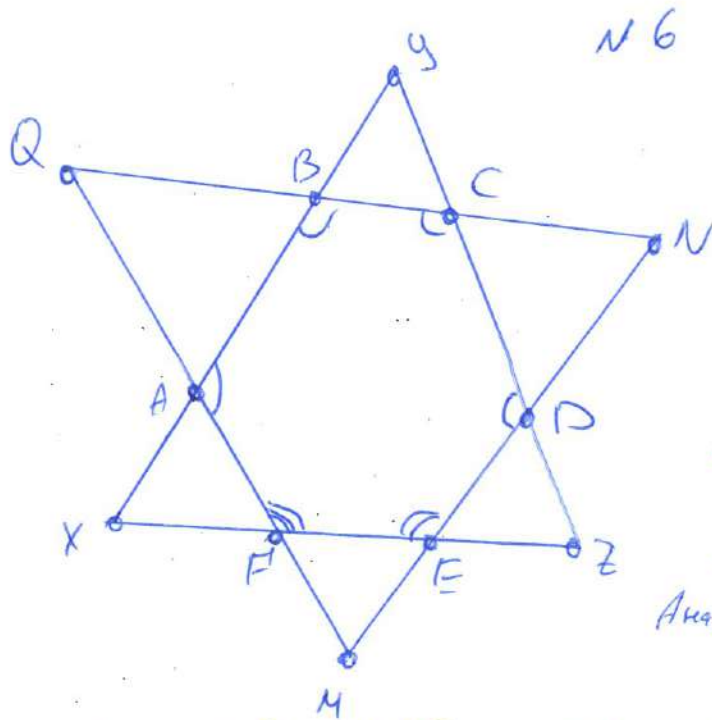
$$\begin{aligned} A+5B \geq 9 &\Rightarrow 6A+8B \geq 20 \\ 5A+3B \geq 11 &\Rightarrow 6A+8B \geq 22 \end{aligned} \quad \left| \begin{array}{l} \text{это означает, что} \\ 6A+8B \geq 22 \end{array} \right.$$

N 2 продолжение

$$A+5B+6A+8B+5A+9B = 6A+8B+6A+8B+10A+6B \geq \\ \geq 22+22+22=66 \Rightarrow 22A+22B \geq 66 \Rightarrow A+B \geq 3$$

Пример $A+B=3$ $A=1; B=2 \Rightarrow$ $A+5B=11 \geq 9$
 $3A+4B=11 \geq 11$ верно.
 $5A+3B=11 \geq 11$

Ответ: $A+B=3$ минимально. 105.



$$\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 115^\circ$$

$$\angle E = 120^\circ; \angle F = 140^\circ$$

Найти: углы $\triangle XYZ$; $\triangle QMN$

$$1) \angle Q = 180^\circ - \angle OAB - \angle QBA = \\ = 180^\circ - (180^\circ - \angle A) - (180^\circ - \angle B) = \\ = \angle A + \angle B - 180^\circ = 50^\circ$$

Аналогично: $\angle Y = 50^\circ = \angle N$

$$2) \angle X = 180^\circ - \angle XAF - \angle XFA = \angle A + \angle F - 180^\circ = 75^\circ$$

$$3) \angle M = 180^\circ - \angle Q - \angle N = 80^\circ; \angle Z = 180^\circ - \angle X - \angle Y = 55^\circ$$

Ответ: $\triangle QMN$: $\angle Q = 50^\circ$; $\angle N = 50^\circ$; $\angle M = 80^\circ$
 $\triangle XYZ$: $\angle X = 75^\circ$; $\angle Y = 50^\circ$; $\angle Z = 55^\circ$

1 вар
мин
30.

Задача 3

Докажем, что $p(k) + p(100-k) = 1$, $k \leq 50$, $k \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} p(k) + p(100-k) &= \frac{g^k}{g^k + g^{50}} + \frac{g^{100-k}}{g^{100-k} + g^{50}} = \frac{g^k}{g^k (1 + g^{50-k})} + \frac{g^{100-k}}{g^{100-k} (1 + g^{k-50})} = \\ &= \frac{1}{1 + g^{50-k}} + \frac{1}{1 + \frac{1}{g^{50-k}}} = \frac{1}{1 + g^{50-k}} + \frac{1}{\frac{g^{50-k} + 1}{g^{50-k}}} = \frac{1}{1 + g^{50-k}} + \\ &+ \frac{g^{50-k}}{1 + g^{50-k}} = \frac{1 + g^{50-k}}{1 + g^{50-k}} = 1 \end{aligned}$$

Получается, что $p(1) + p(2) + \dots + p(99) = (p(1) + p(99)) + (p(2) + p(98)) + \dots + (p(49) + p(51)) + p(50) = 49 \cdot 1 + p(50) = 49 + \frac{1}{2} = 49,5$
 $p(50) + p(50) = 1 \Rightarrow p(50) = \frac{1}{2}$ (12) Ответ: 49,5

Задача 5

Пусть $\arccotg \frac{5x+3}{3x-5} = \alpha$, $\alpha \in (0; \pi)$

$\begin{cases} 3x-5 \neq 0 \\ x+1 \neq 0 \end{cases}$ $\arccotg \frac{x-1}{x+1} = \beta$, $\beta \in (0; \pi)$

$$\Rightarrow \alpha + \beta = \pi \Rightarrow \cotg(\alpha + \beta) = \cotg(\pi) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\cotg(\alpha) \cotg(\beta) - 1}{\cotg(\beta) + \cotg(\alpha)} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{(5x+3)(x-1)}{(3x-5)(x+1)} - 1}{\frac{5x+3}{3x-5} + \frac{x-1}{x+1}} = 0 \Rightarrow \frac{(5x+3)(x-1) - (3x-5)(x+1)}{(5x+3)(x+1) + (x-1)(3x-5)} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{5x^2 - 5x + 3x - 3 - 3x^2 - 3x + 5x + 5}{5x^2 + 5x + 3x + 3 + 3x^2 - 5x - 3x + 5} = 0 \Rightarrow \frac{2x^2 + 2}{8x^2 + 8} = 0$$

Задание 5 продолжение

$$\Rightarrow \frac{2(x^2+1)}{8(x^2+1)} = \operatorname{ctg} x \Rightarrow \frac{1}{4} = \operatorname{ctg}(x) \quad +$$

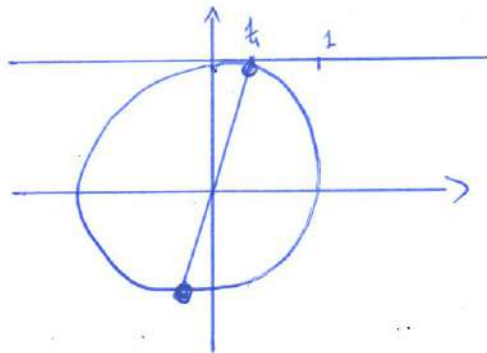
Собираем всё:

$$\begin{cases} 3x-5 \neq 0 \\ x+1 \neq 0 \\ \alpha+\beta=x \in (0; 2\pi) \\ \frac{1}{4} = \operatorname{ctg}(x) \end{cases} \quad +$$

$$x = \operatorname{arccotg}\left(\frac{1}{4}\right) + \pi n; n \in \mathbb{Z}$$

Так как у нас $x \in (0; 2\pi)$, то

$$\begin{cases} x = \operatorname{arccotg}\left(\frac{1}{4}\right) \\ x = \operatorname{arccotg}\left(\frac{1}{4}\right) + \pi \\ x \neq -1 \\ x \neq \frac{5}{3} \end{cases} \quad +$$

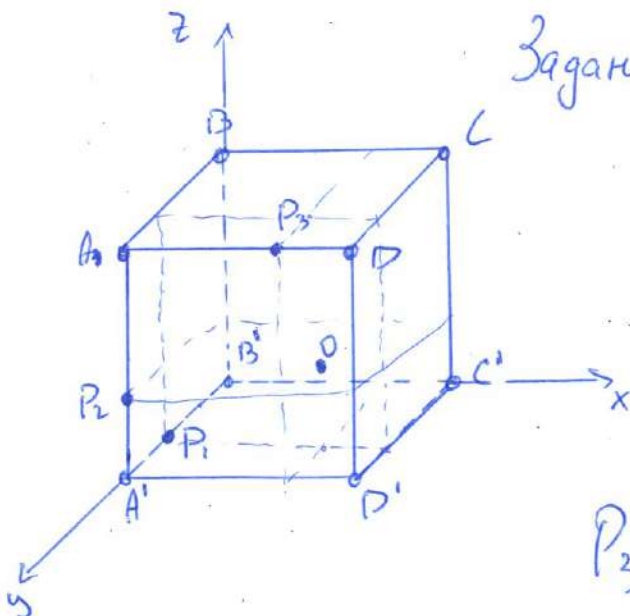


Ответ:

$$\begin{cases} x = \operatorname{arccotg}\left(\frac{1}{4}\right) \\ x = \operatorname{arccotg}\left(\frac{1}{4}\right) + \pi \\ x \neq \frac{5}{3} \end{cases} \quad +$$

возможно этого и не надо в конспекте ответа, но я не знаю чему равен $\operatorname{arccotg}\left(\frac{1}{4}\right)$, поэтому вписал.

Задание 4



Введём ДСК: начало $B'(0;0;0)$
 $B'B' - OZ$; $B'C' - OX$; $B'A' - OY$
 Пусть сфера касается $A'B'$ в точке $P_1(0; q; 0)$, тогда AA_1 в точке $P_2(0; 1; 1-q)$, тогда AD в точке

$$\begin{aligned} P_3(q; 1; 1) \\ C(1; 0; 1) \end{aligned}$$

Задача 4 продолжение

Уравнение сферы: $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$ R – радиус, O – центр $O(a; b; c)$

$$\text{Тогда } C: (1-a)^2 + b^2 + (1-c)^2 = R^2 \quad (1)$$

$$P_1: a^2 + (q-b)^2 + c^2 = R^2 \quad (2)$$

$$P_2: a^2 + (1-b)^2 + (1-q-c)^2 = R^2 \quad (3)$$

$$P_3: (q-a)^2 + (1-b)^2 + (1-c)^2 = R^2 \quad (4)$$

$$(3)-(4): (2a-q)q + (-q)(2-q-2c) = 0 \Rightarrow q(2a-q-2c+q+2c) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} q=0 \\ a+c=1 \end{cases}$$

$$(2)-(3): (q-1)(q+1-2b) + (2c+q-1)(1-q) = 0 \Rightarrow (q-1)(q+1-2b-2c-q+1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} q=1 \\ b+c=1 \end{cases}$$

$$(1)-(2): (1-2a) + q(q-2b) + (1-2c) = 0$$

$$\text{Пусть } q \neq 0; 1 \Rightarrow a=b; c=1-a \Rightarrow (1-2a) + q(q-2a) + (1-2+2a) = 0$$

$$\Rightarrow q(q-2a) = 0 \Rightarrow \begin{cases} q=0 \\ q=2a \end{cases}$$

$$\text{Пусть } q=0 \Rightarrow (1-2a) + 0 + (1-2c) = 0 \Rightarrow a+c=1$$

$$\text{Пусть } q=1 \Rightarrow 3-2(a+b+c) = 0 \Rightarrow a+b+c = \frac{3}{2} \Rightarrow b = \frac{1}{2} \quad a+c=1$$

Вариант решения

Код участника:

(заполняется организатором)

МПГ 11-12

Задание 4 продолжение

Центр сферы должен лежать на плоскости $\perp A'B'$ и проходящей чрез P_1 , на плоскости $\perp AA'$ и проходящей чрез P_2 и на плоскости $\perp B_2^{AP}$ и проходящей чрез P_3 . Но тогда мы можем легко написать координаты

$$O(q; q; 1-q) \Rightarrow a=q; b=q; c=1-q$$

~~или наоборот~~

Теперь считаем $OP_1 = \sqrt{q^2 + 0 + 1 + q^2 - 2q} = \sqrt{2q^2 - 2q + 1}$

$$OP_2 = \sqrt{q^2 + q^2 + 1 - 2q + 0} = \sqrt{2q^2 - 2q + 1}$$

$$OP_3 = \sqrt{0 + q^2 + 1 - 2q + q^2} = \sqrt{2q^2 - 2q + 1}$$

$$OC = \sqrt{q^2 + 1 - 2q + q^2 + q^2} = \sqrt{3q^2 + 1 - 2q}$$

$$\Rightarrow 3q^2 + 1 - 2q = 2q^2 - 2q + 1 \Rightarrow q^2 = 0 \Rightarrow q = 0$$

~~не существует~~

~~Объём сферы не существует~~

$$q=0 \Rightarrow O(0; 0; 1) \Rightarrow O=B \Rightarrow R=BC=1$$

Ответ: $R=1$

Код участника:
(заполняется организатором)

МНГ11-11

Непрерывная функция

Задача 7

$$f(x) = ax^4 + x^2 + x \Rightarrow f'(x) = 4ax^3 + 2x + 1$$

$$y - \text{урав. кас.} \quad y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) = f'(x_0)x + (f(x_0) - f'(x_0)x_0)$$

$$y_1 = f'(x_1)x + (f(x_1) - f'(x_1)x_1); \quad y_2 = f'(x_2)x + (f(x_2) - f'(x_2)x_2)$$

 $\Rightarrow$ если y_1 совпадает с y_2 , то:

$$\begin{cases} f'(x_1) = f'(x_2) \\ f(x_1) - f'(x_1)x_1 = f(x_2) - f'(x_2)x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4ax_1^3 + 2x_1 + 1 = 4ax_2^3 + 2x_2 + 1 \\ ax_1^4 + x_1^2 + x_1 - ax_2^4 - 2x_1^2 - x_1 = ax_2^4 + x_2^2 + x_2 - 4ax_2^4 - 2x_2^2 - x_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4a(x_1^3 - x_2^3) + 2(x_1 - x_2) = 0 \\ 3a(x_1^4 - x_2^4) + x_1^2 - x_2^2 = 0 \end{cases} \quad x_1 \neq x_2 \text{ (тогда разделим)}$$

$$\begin{cases} 4a(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) + 2 = 0 & (1) \\ 3a(x_1^2 + x_2^2)(x_1 + x_2) + x_1 + x_2 = 0 & (2) \end{cases}$$

$$(2): \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = -x_2 \Rightarrow (1): 4ax_1^2 + 2 = 0 \Rightarrow 2ax_1^2 = -1 \Rightarrow \\ 3ax_1^2 + 3ax_2^2 + 1 = 0 \Rightarrow 4ax_1^2 + 4ax_2^2 + \frac{4}{3} = 0 \Rightarrow (1): -\frac{4}{3} + 4ax_1x_2 + 2 = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow 4ax_1x_2 = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

 $\Rightarrow a$ - любое отриц. $\neq 0$

Ответ: $a < 0$ ✓
 $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$
 для любого x_0

$$\Rightarrow \begin{cases} 2ax_1x_2 = -\frac{1}{3} \\ 3a(x_1^2 + x_2^2) = -1 \end{cases}$$

$\rightarrow$ отсюда следует, что a - отриц., а мы уже знаем, что при любом $a < 0$ есть такая кас.

3

Код участника:
(заполняется организатором)

МПГ11-12

Задание 8

После каждого шага мы уменьшаем количество возможных значений на место, то есть если к примеру $x_i < 70$, то это значит x_i может быть любым от 1 до 69. И в каждом ходе количество таких чисел уменьшается пока не останется одно число. Получается, что потребуется минимум 8 шагов. Мы получили оценку ≥ 8 . Получу именно 8. При каждом шаге мы уменьшаем количество претендентов в таком случае не более чем в 2 раза, откуда и получается оценка на 8. Осталось привести пример на 8. Этого у меня не получилось сделать, но полагаю, что он есть

Ответ: 8

неверно

⊖ 00

M11-035

Код участника
(заполняется организатором)



**Олимпиадная работа
заключительного этапа
«Всероссийская олимпиада школьников "Миссия
выполнима. Твоё призвание - финансист!" 2023-2024
г.»
«(Математика 11 класс)»**

Вариант № 1

«27 января 2024 г.»

Никакие другие записи на титульном листе делать не разрешается

111-035

Код участника

Всероссийская олимпиада школьников «Миссия выполнима. Твое призвание – финансист!» 2023/2024 уч.г.

Бланк проверки работы

Математика 11 класс

№ задания	ФИО эксперта	Балл	ФИО эксперта	Балл	Итоговый балл
1	Косилов	10	Гурьев	10	10
2	Защипков	10	Гордеев	10	10
3	Александрович	12	Чаканов	12	12
4	Овчинников	12	Курсанова	12	12
5	Сурган	2	Уфимов	2	2
6	Степанов	3	Олежков	3	3
7	Кеменов	5	Степанов	5	5
8	Сурган	0	Уфимов	0	0
ИТОГО					54

Задание 1.

Пусть x – студенты, обучающиеся только огню.Пусть y – студенты, обучающиеся только заклятию.Пусть z – студенты, обучающиеся и огню, и заклятию.По условию задачи $z = 0,5(x+z)$, $z = 0,6(y+z)$

$$\begin{cases} x = z \\ 0,6y = 0,4z \end{cases}$$

$$y = \frac{2}{3}z$$

Находим искоемую часть:

$$\frac{x}{x+y+z} = \frac{z}{z + \frac{2}{3}z + z} = \frac{1}{\frac{8}{3}} = \frac{3}{8} = 0,375$$

Ответ: 37,5%.

+ 10 баллов

Задание 2.

$$\begin{cases} A + 5B \geq 9 \\ 3A + 4B \geq 11 \\ 5A + 3B \geq 11 \end{cases}$$

Умножим второе неравенство на 2 и сложим с третьим:

$$11A + 11B \geq 33$$

$$A + B \geq 3$$

Докажем, что это наименьшее значение:

$$A = 1, B = 2$$

$$\begin{cases} 1 + 5 \cdot 2 = 11 \\ 3 + 4 \cdot 2 = 11 \\ 5 + 3 \cdot 2 = 11 \end{cases}$$

Все условия выполняются. ~~А значит наименьшее значение, что при более маленьких второе и третье неравенства выполняться не будут.~~

$$A + B = 3$$

Ответ: 3.

105

Задача 3.

$$p(n) = \frac{g^n}{g^n + g^{50}}$$

Для $k = 1, 2, 3, \dots, 49$:

$$p(50-k) + p(50+k) = \frac{g^{50-k}}{g^{50-k} + g^{50}} + \frac{g^{50+k}}{g^{50+k} + g^{50}}$$

Сокращаем каждую дробь на g^{50} :

$$\frac{g^{-k}}{g^{-k} + 1} + \frac{g^k}{g^k + 1} = \frac{1}{1 + g^k} + \frac{g^k}{g^k + 1} = 1$$

Для $k = 0$:

$$n = 50, p(50) = \frac{1}{2}$$

$$p(1) + p(2) + \dots + p(99) = p(50) + \sum_{k=1}^{49} (p(50-k) + p(50+k)) =$$

$$= \frac{1}{2} + 49 = 49,5$$

Ответ: 49,5 +

Задача 4.

Выберем начало координат в точке A.

Оx: OAD Тогда центр сферы равноудалён
 Оy: OAB от прямых, обозначенных
 Оz: OAA' ните.

$$Ox: y^2 + z^2 = R^2$$

$$Oz: x^2 + y^2 = R^2$$

$$z = 1, x = 0, \text{ значит } (z-1)^2 + x^2 = R^2$$

Тогда $(1, 1, 0)$

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = R^2$$

Вычтем из первого уравнения второе, получим

$$z^2 = x^2$$

Рассмотрим два возможных варианта:

I. $z = x$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = R^2 \\ (x-1)^2 + x^2 = R^2 \\ (x-1)^2 + x^2 + (y-1)^2 = R^2 \end{cases}$$

Задание 4 (продолжение)

Из первого и второго уравнений: $(x-1)^2 = 1$ Из второго и третьего уравнений: $y = 1$

Следовательно:

либо $x = 0, R = 1$

либо $x = 2, R^2 = 5, R = \sqrt{5}$

II. $z = -x$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = R^2 \\ (x+1)^2 + x^2 = R^2 \\ (x-1)^2 + x^2 + (y-1)^2 = R^2 \end{cases}$$

Из первого и второго уравнений: $y = \pm(x+1)$

Рассмотрим два варианта дальнейшего развития событий:

а) $y = x+1$

$$\begin{cases} (x+1)^2 + x^2 = R^2 \\ (x-1)^2 + 2x^2 = R^2 \end{cases}$$

При сложении получим:

$$5x^2 + 2 = 2R^2$$

$$0,5x^2 - 2x = 0$$

1) $x = 4, y = 5, R^2 = 41, R = \sqrt{41}$

2) $x = 0, R = 1$. Такой случай уже был ранее.

б) $y = -x-1$

$$\begin{cases} (x+1)^2 + x^2 = R^2 \\ (x-1)^2 + x^2 + (x+2)^2 = R^2 \end{cases}$$

При вычитании получим:

$$x^2 + 4 = 0, \text{ решений нет}$$

Ответ: $R_1 = 1$

$$R_2 = \sqrt{5}$$

$$R_3 = \sqrt{41}$$

Задание 5.

$$\operatorname{arctg} \frac{5x+3}{3x-5} + \operatorname{arctg} \frac{x-1}{x+1} = x$$

Так как $0 \leq \operatorname{arctg}(y) \leq \pi$, можно, чтобы корень удовлетворял неравенству $0 \leq x \leq 2\pi$

Возьмём $a = \operatorname{arctg} \frac{3x-5}{5x+3}$, $b = \operatorname{arctg} \frac{x+1}{x-1}$

Тогда получим две ситуации, рассмотрим их:

I. $a + b = x$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(a+b) &= \frac{\operatorname{tg}(a) + \operatorname{tg}(b)}{1 - \operatorname{tg}(a) \cdot \operatorname{tg}(b)} = \frac{\frac{3x-5}{5x+3} + \frac{x+1}{x-1}}{1 - \frac{3x-5}{5x+3} \cdot \frac{x+1}{x-1}} = \\ &= \frac{(3x-5)(x-1) + (5x+3)(x+1)}{(5x+3)(x-1) - (3x-5)(x+1)} = \frac{8x^2+8}{2x^2+2} = 4 = \operatorname{tg}(x) \end{aligned}$$

$x = \operatorname{arctg}(4)$

II. $a + b = x - \pi$

$x = \operatorname{arctg}(4) + \pi$

?

Мы получили необратимые следствия, значит, решений нет.

Ответ: решений нет.

Задание 7. откуда?

$$f(x) - vx - c = ax^4 + x^2 + x(1-v) - c$$

Имеет не более четырех корней с учетом кратности.

Случай $a = 0$ невозможен, тогда корни еще меньше.Два касания, два кратных корня, x_1 и x_2 , различные.

$$\text{Тогда: } ax^4 + x^2 + x(1-v) - c = a(x-x_1)^2(x-x_2)^2$$

По теореме Виета:

$$x_1 + x_2 = 0$$

$$\text{Обозначим } x_1 = z = -x_2$$

$$ax^4 + x^2 + x(1-v) - c = a(x-z)^2(x+z)^2 = a(x^2-z^2)^2 =$$

$$= ax^4 - 2ax^2z^2 + az^4$$

Это тождество по x , следовательно, коэффициенты равны слева и справа.

$$-2az^2 = 1$$

$$v = 1$$

$$az^4 = \frac{1}{4a} = -c$$

$$a = -\frac{1}{2z^2} < 0 \text{ — любое}$$

$$c = -\frac{1}{4a}$$

$$z = \sqrt{-\frac{1}{2a}}$$

Проверка:

$$f(x) - (a + \frac{1}{4a}) = ax^4 + x^2 + \frac{1}{4a} = a(x^2 + \frac{1}{2a})^2$$

Имеет два кратных корня для любого $a < 0$.Ответ: $p(x) = x - \frac{1}{4a}$ для любого $a < 0$.

F 5

Код участника: 411-035

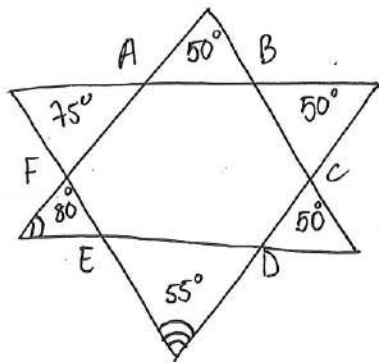
(заполняется организатором)

Задача 6.

Рассмотрим, какие мы можем сделать повороты.

В углу А повернем на угол $180^\circ - 115^\circ = 65^\circ$.

В углу В на столько же.

В сумме на 130° .Внутренний угол треугольника на пересечении равен $180^\circ - 130^\circ = 50^\circ$.Напротив каждого из углов А, В, С, D, E, F, напомним углы поворота: $65^\circ, 65^\circ, 65^\circ, 65^\circ, 60^\circ, 40^\circ$.У каждой пары соседних по кругу углов есть вершина, принадлежащая одному из треугольников. Мало ли! напомним сумму углов поворота: $130^\circ, 130^\circ, 130^\circ, 125^\circ, 100^\circ, 105^\circ$. Это внешние углы.Внутренние: $50^\circ, 50^\circ, 50^\circ, 55^\circ, 80^\circ, 75^\circ$.Одному треугольнику принадлежат острые углы, $50^\circ, 50^\circ$ и 80° , а другому – тупые, $50^\circ, 55^\circ, 75^\circ$.

—
+

35

Задача 8.

Покажем, как решить задачу за 6 шагов.

? -

I. Рассмотрим последовательность a_i , в которой на всех 100 позиций находится число 50. На этом этапе мы поймём, какое число равно 50 а какие строго меньше или строго больше. Нам осталось 49 чисел < 50 и 50 чисел > 50 .

Код участника: M11-035
(заполняется организатором)

Задание 8 (продолжение)

- I. На этом шаге задаём вопрос с помощью чисел $A_2 = \{25; 75\}$. Чтобы было правильно определить меньшее и большее бы было, применяем 25 в группе чисел меньше 50 и 75 в группе чисел больше 50. После этого шага мы получили разбиение уже на 4 группы и точные позиции чисел 25 и 75.
- II. Теперь используем $A_3 = \{12; 37; 62; 88\}$. Руководствуясь описанным выше принципом, в результате получили позиции чисел из множества A_3 и 8 групп.
- III. $A_4 = \{6; 19; 31; 44; 56; 68; 81; 94\}$. 16 групп и точные позиции чисел из множества A_4 .
- IV. $A_5 = \{16 \text{ чисел}\}$. Получаем 32 группы. Заметим, что ещё не известные нам числа образуют отрезки длиной не более 3.
- V. На последнем шаге будем использовать из каждого такого отрезка среднее число. Если отрезок состоит из двух чисел, можно выбрать любое.
- Почему можно получить ответ за меньшее число шагов? У нас всего 100! вариантов расположения чисел в последовательности, и каждый раз мы количество оставшихся вариантов сокращаем не более чем вдвое. За 300 шагов получится сокращение в 2^{300} раз. Заметим, что $2^{300} < 100!$. Противоречие. 6 шагов действительно минимальны.
- Ответ: 6 шагов. —

М 11 331

Код участника
(заполняется организатором)



**Олимпиадная работа
заключительного этапа
«Всероссийская олимпиада школьников "Миссия
выполнима. Твоё призвание - финансист!" 2023-2024
г.»
«(Математика 11 класс)»**

Вариант № 1

«27 января 2024 г.»

Никакие другие записи на титульном листе делать не разрешается



ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМА.
ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ – ФИНАНСИСТ!»
ПО ПРЕДМЕТУ МАТЕМАТИКА 2023-2024 уч. года

ОЧНЫЙ ЭТАП

11 класс

Вариант 1

✓ Задание 1 (10 баллов)

В некотором ВУЗе существуют очная и дистанционная формы обучения. При этом среди студентов, занимающихся очно, 50% занимаются также и дистанционно, а среди студентов, занимающихся дистанционно, 60% занимаются также и очно. Какую часть составляют студенты, занимающиеся только очно?

✓ Задание 2 (10 баллов)

Каким наименьшим может быть значение выражения $A + B$, если A и B – числа, удовлетворяющие следующей системе неравенств

$$\begin{cases} A + 5B \geq 9; \\ 3A + 4B \geq 11; \\ 5A + 3B \geq 11. \end{cases}$$

✓ Задание 3 (12 баллов)

Для каждого натурального числа n положим $p(n) = \frac{9^n}{9^n + 9^{50}}$.

Вычислите сумму $p(1) + p(2) + p(3) + \dots + p(99)$.

✓ Задание 4 (12 баллов)

Длина ребра куба $ABCA'B'C'D'$ равна 1. Найдите радиус сферы, проходящей через точку C и касающейся прямых AD , AA' и $A'B'$.

Код участника:

(заполняется организатором)

M 11.331

$$\begin{aligned}
 \sim 3 \quad p(n) + p(100-n) &= \frac{q^n}{q^n + q^{50}} + \frac{q^{100-n}}{q^{100-n} + q^{50}} = \frac{1}{1 + q^{50-n}} + \frac{q^{50-n}}{1 + q^{50-n}} = \\
 &= \frac{1 + q^{50-n}}{1 + q^{50-n}} = 1 \Rightarrow p(1) + p(2) + \dots + p(49) + p(99) = \\
 &= (p(1) + p(99)) + (p(2) + p(98)) + \dots + (p(49) + p(51)) + p(50) = \\
 &= 49 + \frac{q^{50}}{q^{50} + q^{50}} = 49 + \frac{1}{2} = 49,5
 \end{aligned}$$

Ответ: 49,5

$$\begin{aligned}
 \sim 1 \quad 0,5x &= 0,6y \\
 y &= \frac{0,5x}{0,6} \quad x = \frac{0,6y}{0,5} \\
 0,5x &= \frac{3}{5}y \quad \text{калькуляционные}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Всего студентов} &= 0,5x + 0,5x + 0,4y = \\
 &= \frac{3}{5}y + \frac{3}{5}y + 0,4y = 0,6y + 0,6y + 0,4y = 1,6y
 \end{aligned}$$

Найдём отношение студентов по очным обучением и заочным

$$\begin{aligned}
 \frac{0,5x}{1,6y} \quad x &= \frac{3}{5}y \quad \frac{\frac{3}{5}y}{1,6y} = \frac{3}{5} \cdot \frac{10}{16} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8} \quad +10
 \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{3}{8}$

Код участника:

(заполняется организатором)

М 11. 331

$$\begin{cases} A + 5B \geq 9 \\ 3A + 4B \geq 11 \\ 5A + 3B \geq 11 \end{cases}$$

Найти A и B , при $A+B \min$.

Решим задачу графическим методом.

$$A + 5B \geq 9$$

$$A \geq 9 - 5B$$

$$\begin{array}{c|c|c} B & 0 & 2 \\ \hline A & 9 & -1 \end{array}$$

$$3A + 4B \geq 11$$

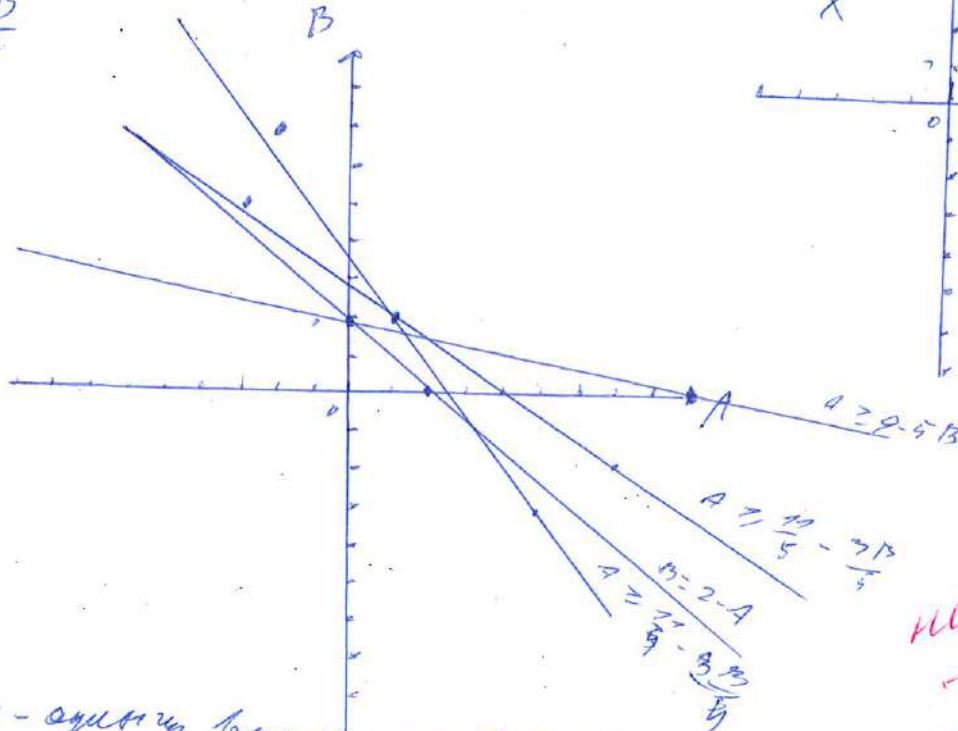
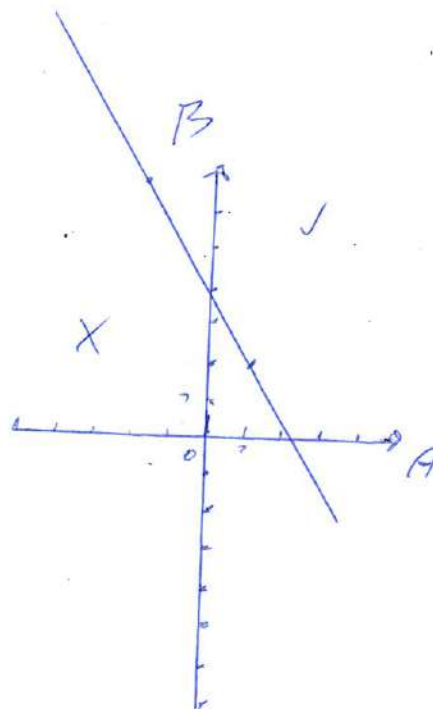
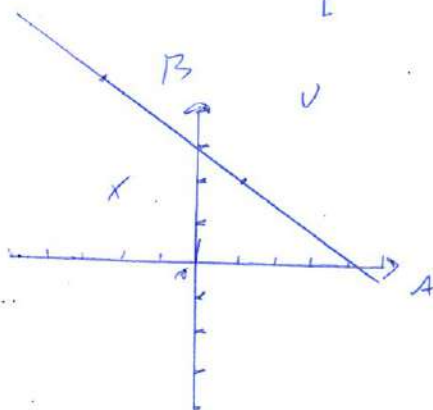
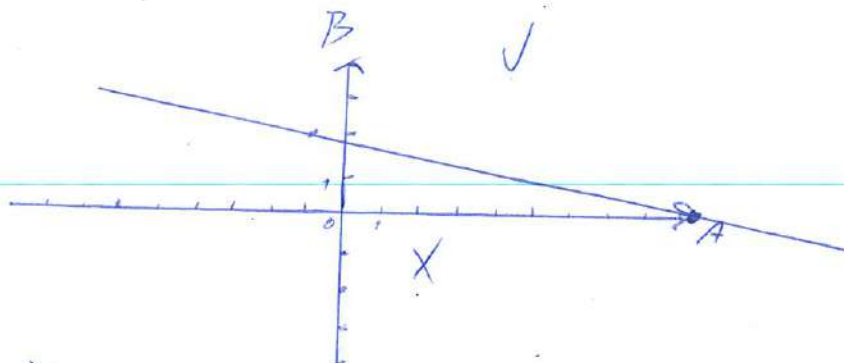
$$A \geq \frac{11}{3} - \frac{4}{3}B$$

$$\begin{array}{c|c|c} B & 2 & 5 \\ \hline A & 1 & -3 \end{array}$$

$$5A + 3B \geq 11$$

$$A \geq \frac{11}{5} - \frac{3}{5}B$$

$$\begin{array}{c|c|c} B & 2 & 14 \\ \hline A & 1 & -2 \end{array}$$



6
не доказано,
что 3-
минимум

Пусть $A+B=2$ - линия

$A+B \rightarrow \min$ - целевая ф-ция

$$A+B=2$$

$$B=2-A$$

$$\begin{array}{c|c|c} B & 0 & 2 \\ \hline A & 2 & 0 \end{array}$$

первое пересечение целевой ф-ции

$$C(0,3) (7,2) \Rightarrow A+B \min = 2+1=3$$

Ответ: 3

$$\arcsctg \frac{5x+3}{3x-5} + \arcsctg \frac{x-1}{x+1} = x, \quad x \neq -1, \quad x \neq \frac{5}{3}$$

Стр. равности условий равны

$$\operatorname{ctg}(\arcsctg \frac{5x+3}{3x-5} + \arcsctg \frac{x-1}{x+1}) = \operatorname{ctg} x$$

$$\frac{\operatorname{ctg}(\arcsctg \frac{5x+3}{3x-5}) \cdot \operatorname{ctg}(\arcsctg \frac{x-1}{x+1}) - 1}{\operatorname{ctg}(\arcsctg \frac{5x+3}{3x-5}) + \operatorname{ctg}(\arcsctg \frac{x-1}{x+1})} = \operatorname{ctg} x$$

$$\operatorname{ctg}(\arcsctg \frac{5x+3}{3x-5}) + \operatorname{ctg}(\arcsctg \frac{x-1}{x+1})$$

$$\frac{\frac{5x+3}{3x-5} \cdot \frac{x-1}{x+1} - 1}{\frac{5x+3}{3x-5} + \frac{x-1}{x+1}} = \operatorname{ctg} x$$

$$\frac{5x+3}{3x-5} + \frac{x-1}{x+1}$$

$$\frac{5x^2 + 3x - 5x - 3}{3x^2 + 3x - 5x - 5} = \operatorname{ctg} x$$

$$\frac{5x^2 + 3 - 3x - 5}{3x^2 + 3x - 5x - 5}$$

$$\frac{5x^2 - 3 - 3x^2 + 5}{8x^2 + 8} = \operatorname{ctg} x$$

$$\frac{2x^2 + 2}{8x^2 + 8} = \operatorname{ctg} x$$

$$\frac{2(x^2 + 1)}{4(x^2 + 1)} = \operatorname{ctg} x$$

$$\operatorname{ctg} x = \frac{1}{2}$$

$$= \arcsctg(\frac{1}{2}) + \pi n$$

$$\arcsctg \in (0, \pi) \Rightarrow x = \arcsctg \frac{1}{2}$$

$$\text{Данное: } \arcsctg \frac{1}{2}$$

6. Треть треугольников $\triangle LTN$ и $\triangle WVN$

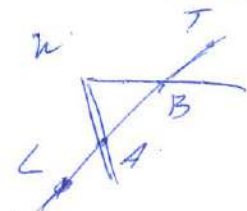
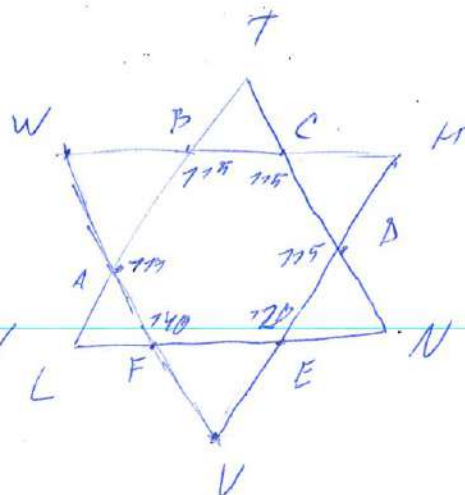
знаем, что они равносторонние.

Рассмотрим 2 возможных случая:

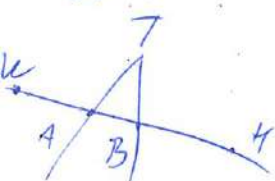
• А и В принадлежат одной стороне $\triangle LTN$

• А и В принадлежат разным сторонам $\triangle LTN$

А и В лежат на разных сторонах $\triangle WVN$



В другом случае на одной стороне $\triangle WVN$



Пользуясь равносторонностью почти скаляр, что рассматриваемые конфигурации симметричны, а значит можно рассмотреть только один.

$$\angle L = 180^\circ - (180^\circ - 115^\circ) - (180^\circ - 140^\circ) = 75^\circ$$

$$\angle T = 180^\circ - (180^\circ - 115^\circ) \cdot 2 = 50^\circ$$

$$\angle N = 180^\circ - (180^\circ - 115^\circ) - (180^\circ - 120^\circ) = 55^\circ$$

$$\angle W = 180^\circ - (180^\circ - 115^\circ) \cdot 2 = 50^\circ$$

$$\angle H = 180^\circ - (180^\circ - 115^\circ) \cdot 2 = 50^\circ$$

$$\angle V = 180^\circ - (180^\circ - 120^\circ) - (180^\circ - 140^\circ) = 80^\circ$$

Ответ: первый $\triangle$ -ник: $75^\circ, 55^\circ, 50^\circ$

второй $\triangle$ -ник: $80^\circ, 50^\circ, 50^\circ$

3

Код участника:

(заполняется организатором)

M11331

и 4 шара сферы вписаны в AB и $A'B'$

AMC и $A'M'C'$

Она сфера касается AMC и $A'M'C'$

Она касается AA_1 в середине и O как
равноудален от C и C'

сечение сферы из центра через C и C'
из-за симметрии

Пусть $AA_1 = k$

Рассмотрим сечение куба $AA_1C'C$ со сферой

A_1 Пусть H - середина CC_1

и т.к. сечение, то r сферы = r окружности

$\triangle KCC_1$ - $1/2$ м.т. $KC_1 = KC$

$AC = \sqrt{2} \cdot AA_1 \Rightarrow$

$KA = KA' = \frac{3}{2}$ (м.т. K - середина)

Рассмотрим $\triangle KAC$:

$$KC = \sqrt{\frac{9}{4} + 1} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$CC_1 = 1 \text{ (дана)}$$

$$KH \perp CC_1 \quad \text{тогда } KH = AC = \sqrt{2}$$

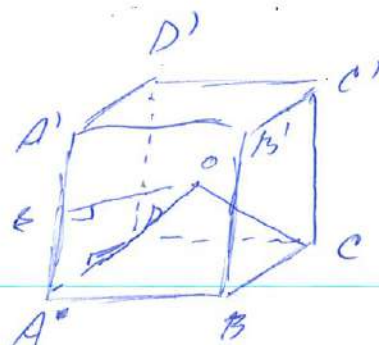
Рассмотрим $\triangle KCH$:

$$\sin \angle KCC_1 = \frac{KH}{KC} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$$

из формулы описанной окружности

$$2r = \frac{KC'}{\sin \angle KCC_1} = \frac{5}{4\sqrt{2}} \Rightarrow r = \frac{5}{8\sqrt{2}}$$

Ответ: $\frac{5}{8\sqrt{2}}$



M11-749

Код участника

Всероссийская олимпиада школьников «Миссия выполнима. Твое призвание – финансист!» 2023/2024 уч.г.

Бланк проверки работы

Математика 11 класс

№ задания	ФИО эксперта	Балл	ФИО эксперта	Балл	Итоговый балл
1	Кашапов	10	Гурьянов	10	10
2	Сивина В	6	Мамедов Р.М.	6	6
3	Марков	12	Ускаев	12	12
4	Авсеев	1	Курсанов	1	1
5	Борисов	8	Кремев	8	8
6	Осехов	3	Степанов	3	3
7	Кешиев	14	Степанов	14	14
8	В	0	Усманов	0	0
ИТОГО					54

Код участника:

(заполняется организатором)

1411.331

$$y = ax^3 + x^2 + x$$

$$① a > 0$$

$$y' = 4ax^3 + 2x + 1$$

$y'' = 12ax^2 + 2 > 0 \Rightarrow y'$ возрастает, минимум y' (для любого $a > 0$) трижды, $\Rightarrow$ не суж 2 касат. точек

$$② a < 0$$

Найдем ур-ие касат. в $x=0$

$$y = 0 + x$$

$y = x$ - ур-ие касат.

найдем точки, в которых $y' = 1$

$$4ax^3 + 2x + 1 = 1$$

$$x(4ax^2 + 2) = 0$$

$$\begin{cases} x=0 \\ 4ax^2 + 2 = 0 \end{cases}$$

№8 web

$$x^2 = -\frac{1}{2a} \quad \text{2 реш при } a < 0$$

$$x_1 = -\sqrt{-\frac{1}{2a}} \quad x_2 = \sqrt{-\frac{1}{2a}}$$

$$f(x) = \frac{a^3}{4} + f\left(\sqrt{-\frac{1}{2a}}\right) = \frac{a^3}{4} + \left(-\frac{a}{2} + \sqrt{-2a}\right) = f\left(\sqrt{-\frac{1}{2a}}\right)$$

$$f\left(-\sqrt{-\frac{1}{2a}}\right) = \frac{a^3}{4} + \left(-\frac{a}{2} - \sqrt{-2a}\right)$$

касат. пересекаются через 2 точки

$$\frac{a^3}{4} + \frac{-a + \sqrt{-2a}}{2} = \frac{a^3}{4} + \frac{-a - \sqrt{-2a}}{2} + \sqrt{-\frac{1}{2a}}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{-2a}}{2} - \frac{1}{\sqrt{-2a}} = -\frac{\sqrt{-2a}}{2} + \frac{1}{\sqrt{-2a}}$$

$$\Rightarrow -2a = 2$$

$$a = -1$$

ур-ия касат. встан в точках $x = \pm \sqrt{\frac{1}{2a}}; y = x + \frac{1}{4a}$

При $a = -1$ $y = x + \frac{1}{4}$

Ответ: $f(x) = -\frac{x}{4} + x^2 + x$

касат. $y = x + \frac{1}{4}$

~~Част. случай~~

14

М 11 215
Код участника
(заполняется организатором)



**Олимпиадная работа
заключительного этапа
«Всероссийская олимпиада школьников "Миссия
выполнима. Твоё призвание - финансист!" 2023-2024
г.»
«(Математика 11 класс)»**

Вариант № 1

«27 января 2024 г.»

Никакие другие записи на титульном листе делать не разрешается

Всероссийская олимпиада школьников «Миссия выполнима. Твое призвание – финансист!» 2023/2024 уч.г.

Бланк проверки работы

Математика 10 класс

№ задания	ФИО эксперта	Балл	ФИО эксперта	Балл	Итоговый балл
1	Васильева	10	Гурьякова	10	10
2	Гроздева	10	Заплатов	10	10
3	Александрович	12	Маркова	12	12
4	Башкина	9	Лавина	9	9
5	Башкина	7	Сергеев	7	7
6	Гроздева	3	Осечкина	3	3
7	Колесов	3	Степанова	3	3
8	И	0	Щакин	0	0
ИТОГО					54



ОЧНЫЙ ЭТАП

11 класс

Вариант 1

Задание 1 (10 баллов)

В некотором ВУЗе существуют очная и дистанционная формы обучения. При этом среди студентов, занимающихся очно, 50% занимаются также и дистанционно, а среди студентов, занимающихся дистанционно, 60% занимаются также и очно. Какую часть составляют студенты, занимающиеся только очно?

Задание 2 (10 баллов)

Каким наименьшим может быть значение выражения $A + B$, если A и B — числа, удовлетворяющие следующей системе неравенств

$$\begin{cases} A + 5B \geq 9; \\ 3A + 4B \geq 11; \\ 5A + 3B \geq 11. \end{cases}$$

Задание 3 (12 баллов)

Для каждого натурального числа n положим $p(n) = \frac{9^n}{9^n + 9^{50}}$.

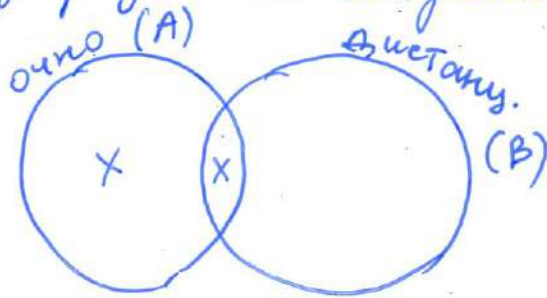
Вычислите сумму $p(1) + p(2) + p(3) + \dots + p(99)$.

3

Задание 4 (12 баллов)

Длина ребра куба $ABCA'B'C'D'$ равна 1. Найдите радиус сферы, проходящей через точку C и касающейся прямых AD , AA' и $A'B'$.

51) Изобразим мн-во учеников ВУЗа



Пусть только очно ($\overline{A \cap B}$)
учится x человек
Тогда по условию

x - половина от всех

учеников, учащиеся очно

$$\overline{A \cap B} = \frac{x}{50} \cdot 50 = x$$

Также известно, что $\overline{A \cap B} \neq \overline{A \cap B} = x$ ~~не пересекается~~
всех учеников, учащиеся дистанционно ~~не~~ ~~сост.~~ 60% от

$$\overline{B} = \frac{x}{60\%} \cdot 100\% = \frac{5}{3}x$$

$$\text{Найдем } \overline{A \cup B} = \overline{A \cap B} + \overline{B} = x + \frac{5}{3}x = \frac{8x}{3}$$

Значит студенты, давшие только очно сост.

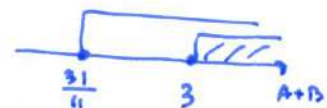
$$\frac{x}{\frac{8x}{3}} = \frac{3}{8} \text{ от общего кол-ва}$$

$$\text{Ответ: } \frac{3}{8} (0,375) + 105.$$

52)

$$\begin{cases} A+5B \geq 9 \\ 3A+4B \geq 11 \\ 5A+3B \geq 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A+5B \geq 9 \quad (1) \\ 6A+8B \geq 22 \quad (2) \\ 10A+6B \geq 22 \quad (3) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (1) & \quad A+5B \geq 9 \\ (3) & \quad \Rightarrow 11A+11B \geq 31 \Leftrightarrow A+B \geq \frac{31}{11} \\ (2) & \quad \Leftrightarrow 11A+11B \geq 33 \Leftrightarrow A+B \geq 3 > \frac{31}{11} \\ (4) & \quad \Leftrightarrow 11A+11B \geq 33 \Leftrightarrow A+B \geq 3 > \frac{31}{11} \end{aligned} \Rightarrow$$



Т.к. оба условия данных выполняются,

$$A+B \geq 3$$

Проверим, что миним. $A+B=3$ подходит

$$\begin{cases} 3+4B \geq 9 \\ 3 \cdot 3+B \geq 11 \\ 3 \cdot 3+2A \geq 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq \frac{3}{2} \\ B \geq 2 \\ A \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 2 \\ A \geq 1 \end{cases} \rightarrow \text{миним. сумма равна 3}$$

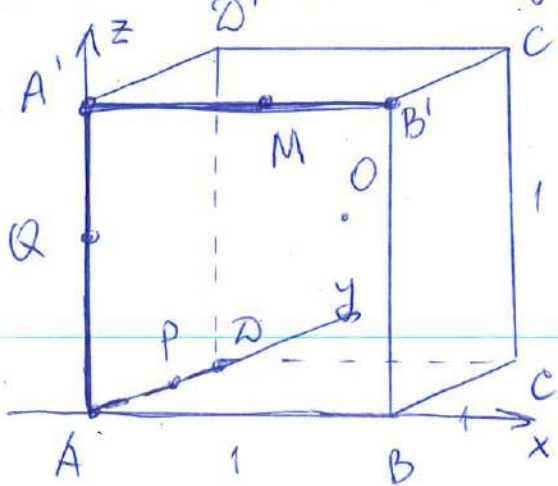
$$\text{Ответ: } 3$$

10

Код участника:

(заполняется организатором)

N 11.215

ЗЧ1 $AB=1$ $ABCA'B'C'D'$ - кубПусть центр сферы O имеет координаты $(a; b; c)$ Тогда $R = |\vec{OC}|$, где R - радиус искомой сферы

$$R = |\vec{CO}| = \sqrt{(a-1)^2 + (b-1)^2 + c^2}$$

При этом известно, что сфера кас. (AD) , (AA') , $(A'B')$
 Это означает, что вектор, проведенный из центра сферы к
 точке кас. будет перпенд. прямой, которой кас. сфера,
 и равен радиусу сферы.

Пусть иск. сфера кас. (AD) , (AA') , $(A'B')$ в точках P, Q, M (соответств.)Тогда $\vec{AP} = p \cdot \vec{AD}$, $\vec{AQ} = q \cdot \vec{AA'}$, $\vec{AM} = m \cdot \vec{A'B'}$, как коллинеарные

Посчитаем координаты этих точек

$$P = (0 + 0 \cdot p; 0 + 1 \cdot p; 0 + 0 \cdot p) = (0; p; 0) \rightarrow \vec{PO} = (a; b-p; c)$$

$$Q = (0 + 0 \cdot q; 0 + 0 \cdot q; 0 + 1 \cdot q) = (0; 0; q) \rightarrow \vec{QO} = (a; b; c-q)$$

$$M = (0 + m \cdot 1; 0 + m \cdot 0; 1 + m \cdot 0) = (m; 0; 1) \rightarrow \vec{MO} = (a-m; b; c-1)$$

Напишем условие перпенд. Если вектора $\perp \Rightarrow$ их скал. произв. $= 0$

$$\vec{PO} \cdot \vec{AD} = a \cdot 0 + (b-p) \cdot 1 + c \cdot 0 = 0 \Leftrightarrow b = p \rightarrow \vec{PO} = (a; 0; c)$$

$$\vec{QO} \cdot \vec{AA'} = 0 \cdot a + 0 \cdot b + 1 \cdot (c-q) = 0 \Leftrightarrow c = q \rightarrow \vec{QO} = (a; b; 0)$$

$$\vec{MO} \cdot \vec{A'B'} = 1 \cdot (a-m) + 0 \cdot b + 0 \cdot (c-1) = 0 \Leftrightarrow a = m \rightarrow \vec{MO} = (0; b; c-1)$$

Найдите радиус сферы, ⁸проход.
 через C и кас. прямых
 $AD, AA', A'B'$

Введем сист. координат, как на
рисунке

$$A(0; 0; 0)$$

$$D(0; 1; 0)$$

$$A'(0; 0; 1)$$

$$B'(1; 0; 1)$$

$$C(1; 1; 0)$$

$$\vec{AD} = (0; 1; 0)$$

$$\vec{A'B'} = (1; 0; 0)$$

$$\vec{AA'} = (0; 0; 1)$$

Теперь мы должны написать условие о равенстве радиусов:

$$(|\vec{PO}|)^2 = a^2 + c^2 = R^2 \quad (1)$$

$$(|\vec{QO}|)^2 = a^2 + b^2 = R^2 \quad (2)$$

$$(|\vec{MO}|)^2 = b^2 + (c-1)^2 = b^2 + c^2 - 2c + 1 = R^2 \quad (3)$$

$$R^2 = a^2 - 2a + 1 + b^2 - 2b + 1 + c^2 \quad (4)$$

$$\left. \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix} \right\} \Rightarrow a^2 + c^2 = a^2 + b^2 \Leftrightarrow b = c \text{ (так как } b > 0, c > 0) \rightarrow (3):$$

$$(3): b^2 + b^2 - 2b + 1 = R^2$$

$$(4): R^2 = (a-1)^2 + \underbrace{b^2 + b^2 - 2b + 1}_{R^2} \Rightarrow (a-1)^2 = 0 \Leftrightarrow a = 1 \rightarrow (2): b^2 + 1 = R^2$$

$$(4) \Leftrightarrow R^2 = \cancel{1-2+1} + b^2 - 2b + 1 + b^2 \Leftrightarrow 2b^2 - 2b + 1 = R^2 \rightarrow b^2 - 2b = 0$$

$$b(b-2) = 0$$

~~Вариант 1~~ 1 вариант: $b = 0$

Тогда $a = 1, b = 0, c = 0$

$$R^2 = 1^2 + 0^2 = 1 \Leftrightarrow R = 1 \text{ (так как } R > 0)$$

2 вариант: $b = 2$

Тогда $a = 1, b = 2 = c$

$$R^2 = 1^2 + 2^2 = 5 \Leftrightarrow R = \sqrt{5} \text{ (так как } R > 0)$$

Ответ: 1 или $\sqrt{5}$ ± 95

не все решения
найденно

Код участника:

(заполняется организатором)

M11215

55)

$$\text{arccotg} \frac{5x+3}{3x-5} + \text{arccotg} \frac{x-1}{x+1} = x$$

$$\text{arccotg} \frac{5x+3}{3x-5} = x - \text{arccotg} \frac{x-1}{x+1}$$

По определению $\text{arccotg}()$:

$$\text{ctg} \left(x - \text{arccotg} \frac{x-1}{x+1} \right) = \frac{5x+3}{3x-5} \quad (1)$$

$$x - \text{arccotg} \frac{x-1}{x+1} \in [0; \pi] \quad (2)$$

$$\text{ctg} \left(x - \text{arccotg} \frac{x-1}{x+1} \right) = \frac{\text{ctg} x \cdot \text{ctg} \left(\text{arccotg} \frac{x-1}{x+1} \right) + 1}{\text{ctg} \left(\text{arccotg} \frac{x-1}{x+1} \right) - \text{ctg} x} = \frac{\text{ctg} x \cdot \left(\frac{x-1}{x+1} \right) + 1}{\frac{x-1}{x+1} - \text{ctg} x} =$$

$$= \frac{(x-1) \cdot \text{ctg} x + x+1}{x-1 - (x+1) \text{ctg} x}$$

$$\textcircled{1} \quad \frac{(x-1) \text{ctg} x + x+1}{x-1 - (x+1) \text{ctg} x} = \frac{5x+3}{3x-5}$$

$$x-1 - (x+1) \text{ctg} x \neq 0$$

$$(3x-5)(x \text{ctg} x + x + 1 - \text{ctg} x) = (5x+3)(x-1 - x \text{ctg} x - \text{ctg} x)$$

$$3x^2 \text{ctg} x + 3x^2 + 3x - 3x \text{ctg} x - 5x \text{ctg} x - 5x - 5 + 5 \text{ctg} x =$$

$$= 5x^2 - 5x - 5x^2 \text{ctg} x - 5x \text{ctg} x + 3x - 3 - 3x \text{ctg} x - 3 \text{ctg} x$$

$$8x^2 \text{ctg} x + 8 \text{ctg} x - 2x^2 - 2 = 0$$

$$8 \text{ctg} x (x^2 + 1) - 2(x^2 + 1) = 0$$

$$(x^2 + 1)(8 \text{ctg} x - 2) = 0$$

$$\begin{cases} x^2 = -1 \\ \text{ctg} x = \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \text{ctg} x = \frac{1}{4} \longrightarrow x = \text{arccotg} \frac{1}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

~~and other solutions are not possible~~

Код участника:

(заполняется организатором)

M 11215

55 (продолжение)

Проверим (2)

$$\operatorname{arccotg} \frac{1}{4} + \pi n - \operatorname{arccotg} \frac{x-1}{x+1} \in [0; \pi], \text{ где } n \in \mathbb{Z}$$

$\operatorname{arccotg} x$ принимает знач. от 0 до π включит.

Значит, нам нужно аккуратно выбрать n

Понятно, что n может быть только $-1, 0, 1$

① $n=0$

$$\operatorname{arccotg} \frac{1}{4} - \operatorname{arccotg} \frac{x-1}{x+1} \in [0; \pi], \text{ где } x = \operatorname{arccotg} \frac{1}{4}$$

сравниваем

$$(*) \quad \frac{1}{4} > \frac{x-1}{x+1} \quad | \cdot 4(x+1), \text{ т.к. } x \neq -1, x+1 > 0$$

$$x+1 > 4x-4$$

$$5 > 3x$$

$$\frac{5}{3} > x$$

$$\frac{5}{3} > \operatorname{arccotg} \frac{1}{4}$$

Рассмотрим $\frac{5\pi}{12}$:

$$1) \quad \frac{5\pi}{12} < \frac{5}{3} \quad \left| \begin{array}{l} \pi < 4 \end{array} \right.$$

$$2) \quad \operatorname{ctg} \frac{5\pi}{12} = \operatorname{ctg} \left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\operatorname{ctg} \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \quad \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} = 1$$

$$\operatorname{ctg} \frac{5\pi}{12} = \frac{-\frac{1}{\sqrt{3}} + 1}{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{2} = 2-\sqrt{3}$$

$$\text{Сравним } \frac{1}{4} < 2-\sqrt{3}$$

$$4\sqrt{3} < 7$$

$$48 < 49$$

$$\Rightarrow \operatorname{arccotg} \frac{1}{4} < \operatorname{arccotg} (2-\sqrt{3}) = \frac{5\pi}{12} < \frac{5}{3}$$

$$(*) \Rightarrow \operatorname{arccotg} \frac{1}{4} > \operatorname{arccotg} \frac{x-1}{x+1} \Rightarrow \text{их разность больше 0}$$

при этом, т.к. оба $\operatorname{arccotg}$ не больше π и неотрицательны,

их разность точно $\in [0; \pi]$

Значит, если мы возьмем $n \neq 0$, разность $\operatorname{arccotg}$ -ов перестанет лежать в нужном промежутке $\Rightarrow n=0$

Остальное условие x удовлетворяет

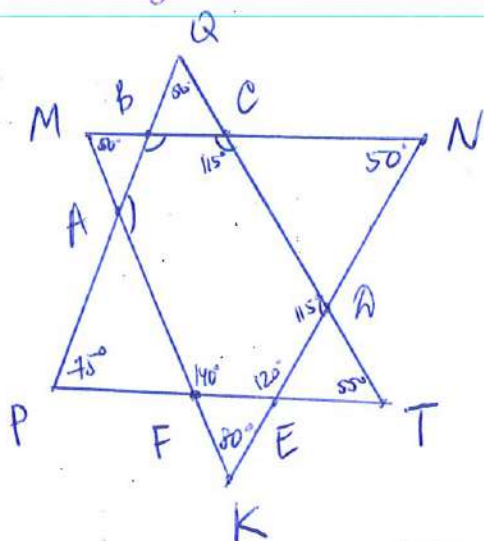
$$\text{Ответ: } \left\{ \operatorname{arccotg} \frac{1}{4} \right\} +.$$

Код участника:

(заполняется организатором)

M11215

56) Прямая может пересекать Δ -к максимум в двух точках, если не совпадает с его стороной.
 Пусть на один Δ -к накладывается второй, тогда по условию должно образоваться 6 точек пересечения. У второго Δ -ка три стороны, значит, каждая из них должна пересечь макс. Возможное кол-во сторон первого Δ -ка, т.е. где



Пусть изнач. Δ -ки: ΔPQR и ΔMNR

Считаем углы где:

$$115^\circ \rightarrow 65^\circ$$

$$120^\circ \rightarrow 60^\circ$$

$$140^\circ \rightarrow 40^\circ$$

$$\Delta BQC: \angle Q = 180^\circ - 65^\circ \cdot 2 = 50^\circ$$

$$\Delta TER: \angle T = 180^\circ - 60^\circ - 65^\circ = 55^\circ$$

$$\Delta PAF: \angle P = 180^\circ - 65^\circ - 40^\circ = 75^\circ$$

$$\Delta ABM: 180^\circ - 65^\circ \cdot 2 = 50^\circ = \angle M$$

$$\Delta CND: \angle N = 180^\circ - 65^\circ \cdot 2 = 50^\circ$$

$$\Delta FKE: \angle K = 180^\circ - 40^\circ - 60^\circ = 80^\circ$$

3 ✓

т.к. 1 вар. решит

Ответ: В 1 Δ -ке: 50° , 55° и 75° ; во 2 Δ -ке: 50° , 50° и 80°

57) Если прямая касается графика функции, то должно выполняться

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x) \end{cases}$$

, где $g(x) = kx + b$ — ур-е прямой

$$\begin{cases} ax^4 + x^2 + x = kx + b & (1) \\ 4ax^3 + 2x + 1 = k & (2) \end{cases}$$

, причем по условию система

должна иметь 2 решения

$$(1) \rightarrow (2): ax^4 + x^2 + x = 4ax^3 + 2x + 1 + b$$

$$3ax^4 + x^2 + b = 0 \quad (3)$$

Код участника:

(заполняется организатором)

411215

57 (продолжение)

~~Вспомогательная функция~~ При этом, чтобы функции можно было коснуться в 2-х точках, знак второй производной должен меняться, чтобы график функции менял изгиб (выпуклая/вогнутая)

$$f''(x) = 12ax^2 + 2 \rightarrow \text{знак меняется при } x^2 = -\frac{2}{12a} = -\frac{1}{6a}$$

~~Нужно найти~~ Найдем, где меняется знак:

$$12ax^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow 6ax^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow 6ax^2 = -1$$

$$1) a = 0$$

$$0 = -1 \rightarrow \text{не подходит}$$

$$2) a \neq 0$$

$$x^2 = -\frac{1}{6a}$$

$$2.1) a > 0$$

$$x^2 = -\frac{1}{6a} < 0$$

$$x \in \emptyset$$

$$\Downarrow$$

$$f''(x) > 0$$

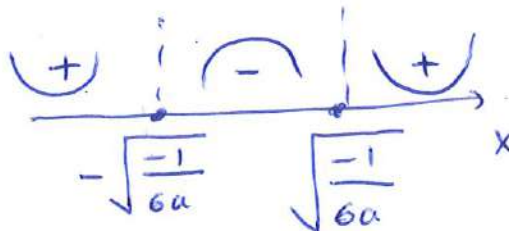


не подходит

$$2.2) a < 0$$

$$x^2 = -\frac{1}{6a}$$

$$x = \pm \sqrt{-\frac{1}{6a}}$$



3

уравнение

Код участника:

(заполняется организатором)

111 215

581 При каждом шаге мы, по сути, определяем, по какую сторону от поставленного в соответствие числа лежат искомого числа на числовой прямой

531 $p(n) = \frac{g^n}{g^{100} + g^{50}}$ Найдите $p(1) + p(2) + \dots + p(99) = S$

Разобьем сумму на пары:

$$(p(1) + p(99)) + (p(2) + p(98)) + \dots + p(50) = S$$

Посчитаем $p(k) + p(100-k)$ отдельно: $\frac{g^k}{g^k + g^{50}} + \frac{g^{100-k}}{g^{100-k} + g^{50}} =$

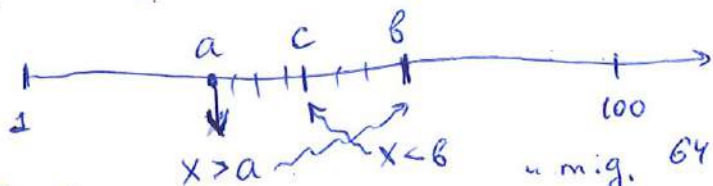
$$= \frac{g^k(g^{100-k} + g^{50}) + g^{100-k}(g^k + g^{50})}{(g^k + g^{50})(g^{100-k} + g^{50})} = \frac{g^{100} + g^{50+k} + g^{100} + g^{150-k}}{g^{100} + g^{50+k} + g^{150-k} + g^{100}} = 1$$

Значит, $S = 1 \cdot 49 + p(50) = 49 + \frac{g^{50}}{2 \cdot g^{50}} = 49,5$

↑
кол-во пар

Ответ: 49,5 +

581 При каждом шаге мы для искомого числа уменьшаем область на числ. прямой, в которой оно может находиться. Воспользуемся самым оптимальным методом быстрого поиска области – бинарным поиском, при котором каждый раз область, в которой мы будем искать число, будет сокращаться в два раза. Для этого после каждого шага будем выбирать для каждого числа новое число для сравнения, которое будет лежать справа или слева от числа на пред. шаге и делить отрезок ~~между~~ между крайними правыми (левыми) числами из ряда чисел, с которыми мы уже сравнивали и 100 (1). Проще нарисовать



Таким образом, сокращая область поиска каждый раз в 2 раза мы найдем пос-ть за:

т.е. $64 = 2^6 < 100 < 2^7 = 128 \Rightarrow 7 \text{ шагов}$

Поскольку у нас есть только натур. числа, установив гранично-однознач соответствие переходов. Если четные идут влево, делим на 2, если неч. идут влево, возм. 1 и делим на 2. Аналогично с делением вправо, но с умнож. и прибавлением. Если находим рав-во, записываем и идем дальше

Ответ: 7

дубликат

МН-008

Код участника
(заполняется организатором)



**Олимпиадная работа
заключительного этапа**

**«Всероссийская олимпиада школьников "Миссия
выполнима. Твоё призвание - финансист!" 2023-2024
г.»**

«(Математика 11 класс)»

Вариант № 2

«27 января 2024 г.»

Никакие другие записи на титульном листе делать не разрешается

Дополнительный бланк №

Всероссийская олимпиада школьников «Миссия выполнима. Твоё призвание – финансист!»

Код участника:

(заполняется организатором)

ММ-008
Код участникаВсероссийская олимпиада школьников «Миссия выполнима. Твое
призвание – финансист!» 2023/2024 уч.г.

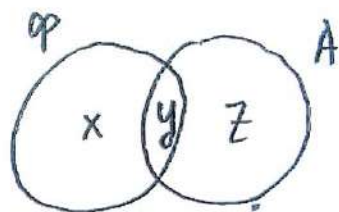
Бланк проверки работы

Математика 10 класс

№ задания	ФИО эксперта	Балл	ФИО эксперта	Балл	Итоговый балл
1	Васильков	10	Гурьев	10	10
2	Гроздев	10	Затеев	10	10
3	Марков	12	Укаев	12	12
4	Обаин	2	Савина	2	2
5	Сунга	11	Урядов	11	11
6	Олехов	3	Гроздев	3	3
7	Терехова	5	Липатин	5	5
8	Машков	0	Геленин	0	0
ИТОГО					53

Задача 1

Легко видеть, что
 x - количество людей, говорящих по F , но не говорящих по A
 y - количество людей, говорящих и по F , и по A
 z - количество людей, говорящих по A , но не по F .
 t - количество людей, говорящих и на A , и на F .



F - французский
 A - английский

$$\text{Тогда, } 4\% = \frac{x}{x+t}; \quad \frac{4}{100} = \frac{x}{x+t} \Rightarrow 4x + 4t = 100x \\ 4t = 96x \\ \boxed{x = \frac{t}{24}} \quad (1)$$

$$20\% = \frac{z}{z+t}; \quad \frac{20}{100} = \frac{z}{z+t} \Rightarrow 20z + 20t = 100z \\ 20t = 80z \\ \boxed{z = \frac{t}{4}} \quad (2)$$

К-во людей, не говорящих по F : $z+t$

К-во людей, не говорящих по A : $x+t$

по условию
 $z(1) = z(2)$

$$\frac{z+t}{x+t} = \frac{\frac{t}{4}+t}{\frac{t}{24}+t} = \frac{(t+4t) \cdot 24}{(t+24t) \cdot 4} = \frac{\frac{1}{4}+1}{\frac{1}{24}+1} = \frac{6+24}{1+24} = \frac{30}{25} = \frac{6}{5} = 1,2$$

Ответ: 1,2. + 105.

Задача 2.

Введем н/у декартову систему координат: $B(0;0;0)$

$Bx \uparrow \uparrow BA$

$By \uparrow \uparrow BC$

$Bz \uparrow \uparrow BB_1$ $(1-2 \cdot (-1+5z)) =$

Куб единичный, т.е. $z = (3-25z)$

$A(1;0;0); B_1(0;0;1)$

$D(1;1;0); A_1(1;0;1)$

следующих прямых параметрически:

(AD): $\vec{AB} \{0;1;0\}$, то

(AA'): $\vec{AA'} \{0;0;1\}$, то

(A'B'): $\vec{A'B'} \{-1;0;0\}$

$$\begin{cases} x=1+t \\ y=t \\ z=0 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

$$\begin{cases} x=1 \\ y=0 \\ z=p \end{cases}, p \in \mathbb{R}.$$

$$\begin{cases} x=1-k \\ y=0 \\ z=1 \end{cases}, k \in \mathbb{R}.$$

$$(x_0-1)^2 - x_0^2 =$$

$$= (x_0-1-x_0) =$$

$$= (2x_0-1) =$$

$$= (1-2x) =$$

$$= 1-2(1+5z)$$

Задача №2 (...)

Пусть центр этой сферы имеет координаты $P(x_0; y_0; z_0)$

То $\rho(O; AD) = \rho(O; A'B') = \rho(AA') = \rho(O; B) = OB$.

$OB = \sqrt{(x_0-0)^2 + (y_0-0)^2 + (z_0-0)^2} = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2} = R$ - искомый радиус.

Зададим y -е/ следующие/ прямые/ по двум/ точкам и проведем/ y -е и образуем/ фигуру.

(AD): $x=1$ Зададим уравнение прямой параметрически. Найдем $P(O; AD), \dots$

(AD) $\vec{AD} \{0; 1; 0\}$, то $\begin{cases} x=1 \\ y=t \\ z=0 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

(AA'): $\vec{AA'} \{0; 0; 1\}$, то $\begin{cases} x=1 \\ y=0 \\ z=p \end{cases}, p \in \mathbb{R}$

(A'B'): $\vec{A'B'} \{-1; 0; 0\}$, то $\begin{cases} x=1-k \\ y=0 \\ z=1 \end{cases}, k \in \mathbb{R}$

$\vec{OF} \perp \vec{AD}, F \in (AD)$
 $\vec{OF} \in \{1-x_0; t-y_0; -z_0\}$
 $\vec{OF} \cdot \vec{AD} = 0$

$(1-x_0) \cdot 0 + (t-y_0) \cdot 1 + 0 \cdot (-z_0) = 0$

$t = y_0$, то $F(1; y_0; 0)$

По аналогии для двух других прямых получим $k = 1 - x_0, p = z_0$

$P(1; 0; z_0)$

$\rho(O; AD) = \dots$

Зададим плоскость, которая будет содержать эти точки, прямые и будут $\perp$ радиусу проведенному в точку касания.

где (AD): $\alpha: \vec{n}_\alpha \{x_0-1; y_0-t; z_0\}$
 $(x_0-1)(x-1) + (y_0-t)(y-0) + z_0(z-0) = 0$

$\alpha: (x_0-1)x + (y_0-t)y + z_0z + 1-x_0 = 0$

где (AA'): $\beta: \vec{n}_\beta \{x_0-1; y_0-z; z_0-p\}$

$\beta: (x_0-1)(x-1) + (y_0-z)(y-0) + (z_0-p)(z-1) = 0$

$\beta: (x_0-1)x + y_0y + (z_0-p)z + 1-x_0+p-z_0 = 0$

где (A'B'): γ Запишем систему из трех уравнений.

$\begin{cases} (x_0-1)^2 + (y_0-y_0)^2 + z_0^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 \\ (x_0-x_0)^2 + y_0^2 + (z_0-1)^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 \\ (x_0-1)^2 + y_0^2 + (z_0-z_0)^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 \end{cases}$

$(x_0-1)^2 = x_0^2 + y_0^2$ (а)

$(z_0-1)^2 = x_0^2 + z_0^2$ (б)

$(x_0-1)^2 = x_0^2 + z_0^2$ (в)

из (б) и (д) $\Rightarrow |z_0-1| = |x_0-1|$

или: $z_0-1 = 1-x_0$ или (R) и (a)

или: $z_0-1 = x_0-1$
 $x_0 = z_0$

$(x_0-1)^2 = x_0^2 + x_0^2$

$2x_0^2 - 2x_0 + 1 = 0$

$\begin{cases} x_0 = -1 - \sqrt{2} \\ z_0 = -1 - \sqrt{2} \\ y_0^2 = 3 + 2\sqrt{2} \end{cases}$ или $\begin{cases} x = -1 + \sqrt{2} \\ y = -1 + \sqrt{2} \\ y_0^2 = 3 - 2\sqrt{2} \end{cases}$

Проверка: подставляем, что получаем, и проверяем. $R = \sqrt{2 \cdot (5 \pm 2\sqrt{2}) + 3 + 2\sqrt{2}} = (1 \pm \sqrt{2})\sqrt{3}$.
В первом: $R = (1 + \sqrt{2})\sqrt{3}$. Ответ: $(5 \pm 1)\sqrt{3}$.

Код участника:

(заполняется организатором)

111-008

Задача 7.

$$\operatorname{arctg} \frac{2x-1}{x+2} + \operatorname{arctg} \frac{x+3}{3x-1} = x. \quad (0)$$

$$\operatorname{tg} \left(\operatorname{arctg} \frac{2x-1}{x+2} + \operatorname{arctg} \frac{x+3}{3x-1} \right) = \operatorname{tg} x.$$

$$\frac{\operatorname{tg} \left(\operatorname{arctg} \frac{2x-1}{x+2} \right) + \operatorname{tg} \left(\operatorname{arctg} \frac{x+3}{3x-1} \right)}{1 - \operatorname{tg} \left(\operatorname{arctg} \frac{2x-1}{x+2} \right) \cdot \operatorname{tg} \left(\operatorname{arctg} \frac{x+3}{3x-1} \right)} = \operatorname{tg} x$$

$$\frac{\frac{2x-1}{x+2} + \frac{x+3}{3x-1}}{1 - \frac{2x-1}{x+2} \cdot \frac{x+3}{3x-1}} = \operatorname{tg} x.$$

$$\frac{(2x-1) \cdot (3x-1) + (x+3) \cdot (x+2)}{(x+2)(3x-1) - (2x-1)(x+3)} = \operatorname{tg} x$$

$$\frac{6x^2 - 2x - 3x + 1 + x^2 + 5x + 6}{3x^2 - x + 6x - 2 - 2x^2 - 6x + x + 3} = \operatorname{tg} x$$

$$\frac{7x^2 + 7}{x^2 + 1} = \operatorname{tg} x$$

$$\frac{7(x^2 + 1)}{x^2 + 1} = \operatorname{tg} x.$$

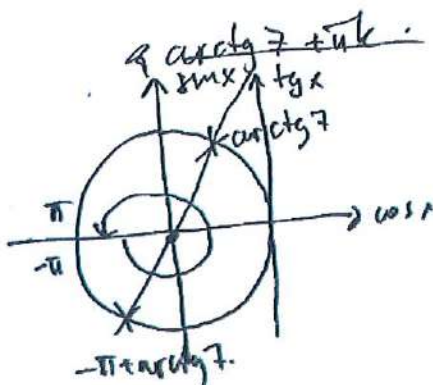
$$7 = \operatorname{tg} x. \quad +$$

$$x = \operatorname{arctg} 7 + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Но $x \in (-\pi; \pi)$ из (0), т.к.

$$E(y) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right),$$

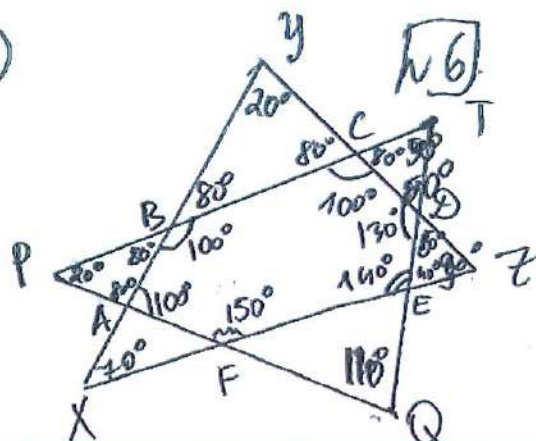
где $y = \operatorname{arctg} x$.



$$\begin{cases} x = \operatorname{arctg} 7 \\ x = \operatorname{arctg} 7 - \pi \end{cases}$$

Ответ. $\operatorname{arctg} 7; \operatorname{arctg} 7 - \pi.$ +

4



Пусть эти два прямоугольных
треугольника: $\triangle XYZ$ и $\triangle PTQ$

Для $\triangle PBA$: $\angle PAB = 180^\circ - \angle BAQ =$
 $= 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$

$\angle PBA = 180^\circ - \angle ABC = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$

$\angle APB = 180^\circ - 2 \cdot 80^\circ = 20^\circ$

Для $\triangle BYC$: $\angle YBC = 180^\circ - \angle ACB = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$.
 $\angle YCB = 180^\circ - \angle BCD = 180^\circ - 100^\circ - 80^\circ$

$\angle YBC = 180^\circ - 80^\circ \cdot 2 = 20^\circ$

Для $\triangle CDT$: $\angle DCT = 180^\circ - \angle BCD = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$.
 $\angle CDT = 180^\circ - \angle CDE = 180^\circ - 130^\circ = 50^\circ$.
 $\angle CTD = 180^\circ - 2 \cdot 80^\circ = 20^\circ$ $180^\circ - 50^\circ - 80^\circ = 50^\circ$

Для $\triangle DEZ$: $\angle DEZ = 180^\circ - \angle DEF = 180^\circ - 140^\circ = 40^\circ$.
 $\angle EDZ = 180^\circ - \angle CDE = 180^\circ - 130^\circ = 50^\circ$.
 $\angle DZE = 180^\circ - \angle DEZ - \angle EDZ = 180^\circ - 40^\circ - 50^\circ = 90^\circ$

Для $\triangle XYZ$: $\angle YXZ = 180^\circ - \angle XYZ - \angle YZX = 180^\circ - 20^\circ - 90^\circ = 70^\circ$

Для $\triangle PTQ$: $\angle PQT = 180^\circ - \angle QPT - \angle PTQ =$
 $= 180^\circ - 20^\circ - 50^\circ = 110^\circ$

Ответ: где одно: 20° ; 50° ; 140° .
где второе: 20° ; 70° ; 90° .

25

$$\sum_{i=1}^{33} P(i) = \frac{-3}{3+3^{17}} + \frac{3^2}{3^2+3^{17}} + \frac{-3^3}{3^3+3^{17}} + \dots + \frac{3^{33}}{3^{33}+3^{17}} = \frac{-1}{1+3^{16}} + \frac{1}{1+3^{15}} - \frac{1}{1+3^{14}} + \dots +$$

$$+ \frac{1}{1+3} - \frac{1}{2} + \frac{3}{3+1} + \frac{3^2}{3^2+1} + \dots - \frac{3^{16}}{3^{16}+1} =$$

$$- \frac{(1+3^{16})}{3^{16}+1} + \frac{1+3^{15}}{1+3^{15}} - \frac{(1+3^{14})}{1+3^{14}} + \frac{1+3^{13}}{1+3^{13}} - \frac{(1+3^{12})}{1+3^{12}} + \frac{(1+3^{11})}{1+3^{11}} + \dots +$$

$$+ \frac{1+3}{1+3} - \frac{1}{2} = \underbrace{-1+1-1+1-1+\dots}_{16 \text{ раз, то } 2=0} + \left(-\frac{1}{2}\right) = -0,5.$$

Ответ. -0,5.

+

⑤

Задача 7.

$$f(x) = x^4 + bx^2 + c$$

Итак, так как эта касательная не вертикальна,
т.е. $f(x)$ дифференцируема на R .

То, пусть $y = kx + b$ - уравнение этой прямой

Условие касания в 2-х точках: $\begin{cases} f'(x) = k \\ f(x) = kx + l \end{cases}$ имеет 2 решения

$$f'(x) = 4x^3 + 2bx + 1$$

$$\sqrt[4]{2}x^3 + 2bx + 1 = k \quad (1)$$

$$\begin{cases} x^3 + 2bx + 1 = k & (1) \\ x^4 + bx^2 + 2 = 4bx^3 + 2b^2x + kx + 1 & (2) \end{cases}$$

~~$x^4 + bx^2 + c = 4kx^3 + 2b^2kx + c - k^2k$~~ (2)

Подставим вместо k выражение из (1) в (2).

$$x^4 + bx + c = (2x^3 + 2bx + 1)x + c.$$

(o) $3x^4 + 6x^2 + 6 = 0$ имеет 2 решения.

$$X^2 \equiv a,$$

$\hat{= a}$,
(3) $3a^2 + b + c = 0$. ~~not a 2 person~~

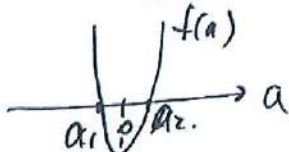
(3) $3a^2 + ba + c = 0$. ~~имеет 2 решения~~
уравнение (0) имеет два решения в следующих случаях

$[1 \text{ см}]$ (3) имеет один положительный и один отрицательный корень.

2сн) (3) имеет один положительный корень.

$\boxed{10n}$ $D = b^2 - \underline{4c}$;

$b^2 - 4c > 0$ $f(a) = 3x^2 + bx + c$ — квадратичная
функция,
график — парабола,
ветви вверх.

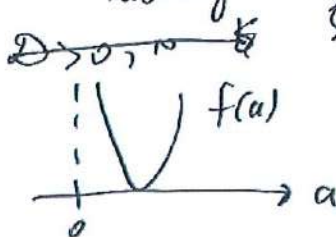


$$f(0) < 0$$

необходимое и достат. усл.

Значит, в этом случае влияет.

240



$$\begin{cases} f(0) > 0 \\ \Delta_{\text{ber}} > 0 \\ D < 0 \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} l > 0 \\ -\frac{b}{l} > 0 \\ b^2 - 4l = 0 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} l > 0 \\ b < 0 \\ b = -2\sqrt{l} \\ b = 2\sqrt{l} \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} l > 0 \\ b = \sqrt{2} \cdot l \end{cases}$$

Exam 6

Код участника:

(заполняется организатором)

М-11-008

№2.

$$A+B=C \rightarrow \max.$$

$$\begin{cases} 3A+5B \leq 11 \\ 4A+3B \leq 10 \\ 7A+4B \leq 18 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & \parallel \\ & B=C-A \quad (1) \end{aligned}$$

Подставим в первое и второе неравенства вместо B выражение из (1)

$$3A+5(C-A) \leq 11 \quad ;$$

$$3A+5C-5A \leq 11$$

$$2A \geq 5C-11$$

$$A \geq \frac{5C-11}{2} \quad (2)$$

$$4A+3(C-A) \leq 10$$

$$4A+3C-3A \leq 10$$

$$\underline{A \leq 10-3C} \quad (3)$$

Чтобы одновременно могли выполняться и (2), и (3);

$$10-3C \geq \frac{5C-11}{2}$$

$$20-6C \geq 5C-11$$

$$11C \leq 31$$

$$C \leq \frac{31}{11}$$

$$A+B \leq \frac{31}{11}$$

Пример: $A = \frac{17}{11}$, $A+B = \frac{17+14}{11} = \frac{31}{11}$

$$B = \frac{14}{11}$$

1) $3 \cdot \frac{17}{11} + 5 \cdot \frac{14}{11} = \frac{51+70}{11} = \frac{121}{11} = 11 \leq 11$ верно.

2) $4 \cdot \frac{17}{11} + 3 \cdot \frac{14}{11} = \frac{68+42}{11} = \frac{110}{11} = 10 \leq 10$ верно.

3) $7 \cdot \frac{17}{11} + 4 \cdot \frac{14}{11} = \frac{119+56}{11} = \frac{175}{11} < 18, 714$

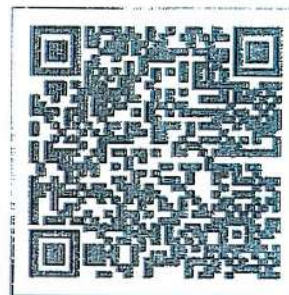
$$17,5 < 18 \cdot 11 = 198 \cdot \text{верно.}$$

Ответ: $\frac{31}{11}$; при $A = \frac{17}{11}$, $B = \frac{14}{11}$.

105

111-609

Код участника
(заполняется организатором)



**Олимпиадная работа
заключительного этапа
«Всероссийская олимпиада школьников "Миссия
выполнима. Твоё призвание - финансист!" 2023-2024
г.»
«(Математика 11 класс)»**

Вариант № 2

«27 января 2024 г.»

Никакие другие записи на титульном листе делать не разрешается

М11-609

Код участника

Всероссийская олимпиада школьников «Миссия выполнима. Твое призвание – финансист!» 2023/2024 уч.г.

Бланк проверки работы

Математика 11 класс

№ задания	ФИО эксперта	Балл	ФИО эксперта	Балл	Итоговый балл
1	Васильева	10	Гурьянов	10	10
2	Васильева	0	Тоздма	0	0
3	Кремь	12	Иванов	12	12
4	Марин	2	Дубинин	2	2
5	Кремь	0	Курдов	0	0
6	Окороков	3	Гузеев	3	3
7	Алиханов	14	Семанов	14	14
8	Степанов	0	Цыганков	0	0
ИТОГО					41

Код участника:

(заполняется организатором)

ННН-609

Н1



A - много людей, которые не говорят на англ. яз.
 B - много людей, которые не говорят на фр. яз.

$$\begin{cases} A - x = 0,04A & (\text{по условию}) \\ B - x = 0,2B & (\text{по условию}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0,96A = x \\ 0,8B = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{100x}{96} \\ B = \frac{100x}{8} \end{cases} \Rightarrow \frac{B}{A} = \frac{10 \cdot x \cdot 96^{12}}{8 \cdot 100x} = 1,2$$

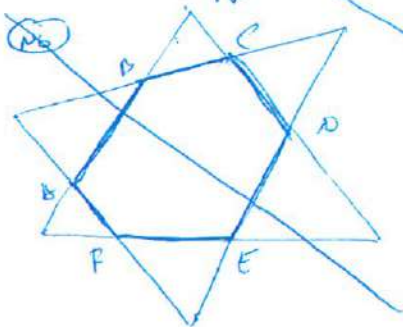
Ответ: 1,2 **108**

Н2

$$\begin{cases} 3A + 5B \leq 11 & ① \\ 4A + 3B \leq 10 & ② \\ 5A + 4B \leq 12 & ③ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3A + 5B \leq 11 & ① \\ 4A + 3B \leq 12 & ② \\ 14A + 12B \leq 33 & ③ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3A + 5B \leq 11 \\ 4A + 3B \leq 18 \\ 14A + 12B \leq 50 \end{cases}$$

к.сб. $14A + 12B \leq 50 \Leftrightarrow A + B \leq \frac{50}{14} \Rightarrow \max(A+B) = \frac{50}{14}$

Ответ: $\frac{50}{14}$



при пересечении
 при $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 100^\circ$
 $\angle E = 140^\circ$
 $\angle F = 150^\circ$

угол $\angle ABC$ равен 60°

Н3

$$\arctg \frac{2x-1}{x+2} + \arctg \frac{x+3}{3x-1} = x \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$\arctg \left(\arctg \frac{2x-1}{x+2} + \arctg \frac{x+3}{3x-1} \right) = \arctg x \quad x \in (-\pi; \pi) \setminus \left\{ \pm \frac{\pi}{2} \right\} \quad (2)$$

$$\frac{\arctg \left(\arctg \frac{2x-1}{x+2} \right) + \arctg \left(\arctg \frac{x+3}{3x-1} \right)}{1 - \arctg \left(\arctg \frac{2x-1}{x+2} \right) \cdot \arctg \left(\arctg \frac{x+3}{3x-1} \right)} = \arctg x \quad x \in (-\pi; \pi) \setminus \left\{ \pm \frac{\pi}{2} \right\} \quad (2)$$

$$\frac{2x-1}{x+2} + \frac{x+3}{3x-1}$$

$$1 - \frac{(2x-1)(x+3)}{(3x-1)(x+2)}$$

$$(2) \frac{(3x-1)(2x-1) + (x+3)(x+2)}{(3x-1)(x+2) - (2x-1)(x+3)}$$

$$(2) \frac{6x^2 - 5x + 1 + x^2 + 5x + 6}{3x^2 + 5x - 2 - x^2 - 5x + 3}$$

$$\arctg x \quad x \in (-\pi; \pi) \setminus \left\{ \pm \frac{\pi}{2}, -2, \frac{1}{3} \right\}$$

$$\arctg x \quad x \in (-\pi; \pi) \setminus \left\{ \pm \frac{\pi}{2}, -2, \frac{1}{3} \right\} \quad (2)$$

(12)

$$f(x) = x^4 + bx^2 + x$$

$$f'(x) = 4x^3 + 2bx + 1$$

$$L(x, y) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

$$\exists x_1, x_0 \in \mathbb{R}: x_1 \neq x_0 \text{ и } f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) = f'(x_1)(x - x_1) + f(x_1) \text{ и } y \text{ совб}$$

$$(2) \exists x_1, x_0 \in \mathbb{R}: x_1 \neq x_0 \text{ и } (4x_0^3 + 2bx_0 + 1)(x - x_0) + x_0^4 + bx_0^2 + x_0 = (4x_1^3 + 2bx_1 + 1)(x - x_1) + x_1^4 + bx_1^2 + x_1$$

$$\Rightarrow \exists x_1, x_0 \in \mathbb{R}: x_1 \neq x_0 \text{ и } (x_0 - x_1)(4x_0^2 + 4x_0x_1 + 4x_1^2 + 2b) = x_1^4 - 3x_0^4 - bx_0 + 3x_1^4 + bx_1$$

$$(\Rightarrow) \exists x_1, x_0 \in \mathbb{R}: x_1 \neq x_0 \text{ и } (x_0 - x_1)(4x_0^2 + 4x_0x_1 + 4x_1^2 + 2b) = x_1^4 - 3x_0^4 - bx_0 + 3x_1^4 + bx_1$$

$$(\Rightarrow) \exists x_1, x_0 \in \mathbb{R}: x_1 \neq x_0 \text{ и } (4x_0^2 + 4x_0x_1 + 4x_1^2 + 2b) = 3(x_0^2 - x_1^2)(x_0 + x_1) - b(x_0 - x_1)$$

$$(\Rightarrow) \exists x_1, x_0 \in \mathbb{R}: x_1 \neq x_0 \text{ и } (4x_0^2 + 4x_0x_1 + 4x_1^2 + 2b) = 3(x_0^2 - x_1^2)(x_0 + x_1) - b(x_0 - x_1)$$

$$(\Rightarrow) \exists x_1, x_0 \in \mathbb{R}: x_1 \neq x_0 \text{ и } (4x_0^2 + 4x_0x_1 + 4x_1^2 + 2b) = 3(x_0^2 - x_1^2)(x_0 + x_1) - b(x_0 - x_1)$$

$$(\Rightarrow) \exists x_1, x_0 \in \mathbb{R}: x_1 \neq x_0 \text{ и } (4x_0^2 + 4x_0x_1 + 4x_1^2 + 2b) = 3(x_0^2 - x_1^2)(x_0 + x_1) - b(x_0 - x_1)$$

$$\exists x_1, x_0 \in \mathbb{R}: x_1 \neq x_0 \text{ и } \begin{cases} x_0 = -x_1 \\ 4x_1^2 + 2b = 0 \\ x_0^2 + x_1^2 = \frac{b}{3} = 0 \\ 2x_0^2 + 2bx_0 + 2x_1^2 + b = 0 \end{cases} \quad (\Rightarrow)$$

$$\exists x_1, x_0 \in \mathbb{R}: x_1 \neq x_0 \text{ и } \begin{cases} x_1 = \pm \sqrt{-\frac{b}{2}} \\ x_0 = \mp \sqrt{-\frac{b}{2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = \pm \sqrt{-\frac{b}{2}} \\ x_0 = \mp \sqrt{-\frac{b}{2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = \pm \sqrt{-\frac{b}{2}} \\ x_0 = \mp \sqrt{-\frac{b}{2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = \pm \sqrt{-\frac{b}{2}} \\ x_0 = \mp \sqrt{-\frac{b}{2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = \pm \sqrt{-\frac{b}{2}} \\ x_0 = \mp \sqrt{-\frac{b}{2}} \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} y = (2b\sqrt{-\frac{b}{2}} + 2b\sqrt{-\frac{b}{2}} + 1)x - b^2 + b^2 - \sqrt{\frac{b}{2}} + \sqrt{\frac{b}{2}} + \frac{b^2}{4} - \frac{b^2}{2} \\ y = (2b\sqrt{-\frac{b}{2}} - 2b\sqrt{-\frac{b}{2}} + 1)x + b^2 - b^2 + \sqrt{\frac{b}{2}} - \sqrt{\frac{b}{2}} + \frac{b^2}{4} - \frac{b^2}{2} = \sqrt{\frac{b}{2}} \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} y = x - \frac{b^2}{4} \text{ и } b \leq 0, \text{ т.к. при } b > 0 \text{ корни совпадают} \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} y = x - \frac{b^2}{4} \text{ и } b \leq 0, \text{ т.к. при } b > 0 \text{ корни совпадают} \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} y = x - \frac{b^2}{4} \text{ и } b \leq 0, \text{ т.к. при } b > 0 \text{ корни совпадают} \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} y = x - \frac{b^2}{4} \text{ и } b \leq 0, \text{ т.к. при } b > 0 \text{ корни совпадают} \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} y = x - \frac{b^2}{4} \text{ и } b \leq 0, \text{ т.к. при } b > 0 \text{ корни совпадают} \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} y = x - \frac{b^2}{4} \text{ и } b \leq 0, \text{ т.к. при } b > 0 \text{ корни совпадают} \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} y = x - \frac{b^2}{4} \text{ и } b \leq 0, \text{ т.к. при } b > 0 \text{ корни совпадают} \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} y = x - \frac{b^2}{4} \text{ и } b \leq 0, \text{ т.к. при } b > 0 \text{ корни совпадают} \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} y = x - \frac{b^2}{4} \text{ и } b \leq 0, \text{ т.к. при } b > 0 \text{ корни совпадают} \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} y = x - \frac{b^2}{4} \text{ и } b \leq 0, \text{ т.к. при } b > 0 \text{ корни совпадают} \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} y = x - \frac{b^2}{4} \text{ и } b \leq 0, \text{ т.к. при } b > 0 \text{ корни совпадают} \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} y = x - \frac{b^2}{4} \text{ и } b \leq 0, \text{ т.к. при } b > 0 \text{ корни совпадают} \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} y = x - \frac{b^2}{4} \text{ и } b \leq 0, \text{ т.к. при } b > 0 \text{ корни совпадают} \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} y = x - \frac{b^2}{4} \text{ и } b \leq 0, \text{ т.к. при } b > 0 \text{ корни совпадают} \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} y = x - \frac{b^2}{4} \text{ и } b \leq 0, \text{ т.к. при } b > 0 \text{ корни совпадают} \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} y = x - \frac{b^2}{4} \text{ и } b \leq 0, \text{ т.к. при } b > 0 \text{ корни совпадают} \end{cases}$$

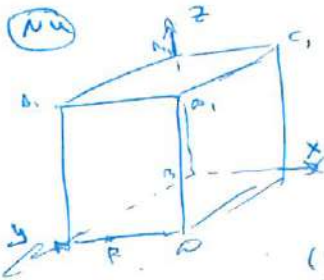
$$(2) \begin{cases} y = x - \frac{b^2}{4} \text{ и } b \leq 0, \text{ т.к. при } b > 0 \text{ корни совпадают} \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} y = x - \frac{b^2}{4} \text{ и } b \leq 0, \text{ т.к. при } b > 0 \text{ корни совпадают} \end{cases}$$

Код участника:

(заполняется организатором)

МН-609



Выведем систему координат: ~~как показано на рис~~
~~сфера~~ $\exists$ ~~сфера~~ $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$,
 где (a, b, c) — центр. OO — центр сферы

$$(1) B \in W(z) \mid a^2 + b^2 + c^2 = r^2 \mid (1)$$

$\overline{OP} = (1, 0, 0)$ (н.к. W) $\Rightarrow \exists x_0: (1, 0, 0) \in [A \cap W]$ $(1, 0, 0) \in W(z)$
 $\overline{OP} = (0, 1, 0)$ (н.к. W) $\Rightarrow \exists x_0: (0, 1, 0) \in [A \cap W]$ $(0, 1, 0) \in W(z)$
 $\overline{OP} = (0, 0, 1)$ (н.к. W) $\Rightarrow \exists x_0: (0, 0, 1) \in [A \cap W]$ $(0, 0, 1) \in W(z)$
 $\overline{OP} = (x_0, y_0, z_0)$ (н.к. W) $\Rightarrow \exists x_0: (x_0, y_0, z_0) \in [A \cap W]$ $(x_0, y_0, z_0) \in W(z)$

$\overline{AP} = (1, 0, 0)$ (н.к. W) $\Rightarrow \exists x_0: (1, 0, 0) \in [A \cap W]$ $(1, 0, 0) \in W(z)$
 $(2) \mid a^2 + (1-b)^2 + (z-c)^2 = r^2 \mid z_0 - c = 0 \mid (2)$

$\overline{AP} = (0, 1, 0)$ (н.к. W) $\Rightarrow \exists x_0: (0, 1, 0) \in [A \cap W]$ $(0, 1, 0) \in W(z)$
 $\overline{AP} = (0, 0, 1)$ (н.к. W) $\Rightarrow \exists x_0: (0, 0, 1) \in [A \cap W]$ $(0, 0, 1) \in W(z)$
 $\overline{AP} = (x_0, y_0, z_0)$ (н.к. W) $\Rightarrow \exists x_0: (x_0, y_0, z_0) \in [A \cap W]$ $(x_0, y_0, z_0) \in W(z)$

$$\mid a^2 + (y_0 - b)^2 + (1 - c)^2 = r^2 \mid b - y_0 = 0 \mid (4)$$

① & ② & ③ & ④ & ⑤

$$\begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = r^2 \\ (1-b)^2 + c^2 = r^2 \\ a^2 + (1-b)^2 = r^2 \\ a^2 + (1-c)^2 = r^2 \end{cases} (2)$$

$$\begin{cases} (1-b-c) / (b-c) = 0 \\ a^2 + b^2 + c^2 = r^2 \\ (a-c)(a+c) = 0 \\ a^2 + (1-c)^2 = r^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = c \vee a = -c \\ b = c \vee b = -c \\ a^2 + b^2 + c^2 = r^2 \\ a^2 + (1-c)^2 = r^2 \end{cases} (2)$$

25

н.к. W

$$\begin{cases} a = c = b \\ a^2 + b^2 + c^2 = r^2 \\ a^2 + (1-c)^2 = r^2 \\ a = c \\ b = 1 - c \\ a^2 + (1-b)^2 = r^2 \\ a^2 + b^2 + c^2 = r^2 \\ a = -c = -b \\ a^2 + b^2 + c^2 = r^2 \\ a^2 + (1-c)^2 = r^2 \\ a = -c \& b = c \\ a^2 + (1-b)^2 = r^2 \\ a^2 + b^2 + c^2 = r^2 \end{cases}$$

$a = -1 \& 5$

$$\begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = r^2 \\ a^2 + (1-c)^2 = r^2 \\ a = c \\ 3a^2 - 6a + 5 = 0 \text{ — не реш} \\ a^2 + b^2 + c^2 = r^2 \\ a = -c \\ r^2 = 3a^2 \\ 2a^2 + 2a + 1 = 0 \text{ — не реш} \\ a = -c \\ b = 2 + a \\ a^2 + 2a + 3 = 0 \text{ — не реш} \\ a^2 + (1-b)^2 = r^2 \end{cases}$$

Оконч. $r^2 = 6 \pm 5$

(заполняется организатором)

NY-609

N-2

Всего поездов: 100!
 мин поездов: $C_{99}^1 = 3 \cdot 2 = 98!$ $99! \cdot 3 \cdot 3 = 99! \cdot 9$ ①

~~указано в журнале учета~~

но у нас погрешка в том, что 2, 3 числа
перезаписаны 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100, 101, 102, 103, 104, 105, 106, 107, 108, 109, 110, 111, 112, 113, 114, 115, 116, 117, 118, 119, 120, 121, 122, 123, 124, 125, 126, 127, 128, 129, 130, 131, 132, 133, 134, 135, 136, 137, 138, 139, 140, 141, 142, 143, 144, 145, 146, 147, 148, 149, 150, 151, 152, 153, 154, 155, 156, 157, 158, 159, 160, 161, 162, 163, 164, 165, 166, 167, 168, 169, 170, 171, 172, 173, 174, 175, 176, 177, 178, 179, 180, 181, 182, 183, 184, 185, 186, 187, 188, 189, 190, 191, 192, 193, 194, 195, 196, 197, 198, 199, 200, 201, 202, 203, 204, 205, 206, 207, 208, 209, 210, 211, 212, 213, 214, 215, 216, 217, 218, 219, 220, 221, 222, 223, 224, 225, 226, 227, 228, 229, 230, 231, 232, 233, 234, 235, 236, 237, 238, 239, 240, 241, 242, 243, 244, 245, 246, 247, 248, 249, 250, 251, 252, 253, 254, 255, 256, 257, 258, 259, 260, 261, 262, 263, 264, 265, 266, 267, 268, 269, 270, 271, 272, 273, 274, 275, 276, 277, 278, 279, 280, 281, 282, 283, 284, 285, 286, 287, 288, 289, 290, 291, 292, 293, 294, 295, 296, 297, 298, 299, 300, 301, 302, 303, 304, 305, 306, 307, 308, 309, 310, 311, 312, 313, 314, 315, 316, 317, 318, 319, 320, 321, 322, 323, 324, 325, 326, 327, 328, 329, 330, 331, 332, 333, 334, 335, 336, 337, 338, 339, 340, 341, 342, 343, 344, 345, 346, 347, 348, 349, 350, 351, 352, 353, 354, 355, 356, 357, 358, 359, 360, 361, 362, 363, 364, 365, 366, 367, 368, 369, 370, 371, 372, 373, 374, 375, 376, 377, 378, 379, 380, 381, 382, 383, 384, 385, 386, 387, 388, 389, 390, 391, 392, 393, 394, 395, 396, 397, 398, 399, 400, 401, 402, 403, 404, 405, 406, 407, 408, 409, 410, 411, 412, 413, 414, 415, 416, 417, 418, 419, 420, 421, 422, 423, 424, 425, 426, 427, 428, 429, 430, 431, 432, 433, 434, 435, 436, 437, 438, 439, 440, 441, 442, 443, 444, 445, 446, 447, 448, 449, 450, 451, 452, 453, 454, 455, 456, 457, 458, 459, 460, 461, 462, 463, 464, 465, 466, 467, 468, 469, 470, 471, 472, 473, 474, 475, 476, 477, 478, 479, 480, 481, 482, 483, 484, 485, 486, 487, 488, 489, 490, 491, 492, 493, 494, 495, 496, 497, 498, 499, 500, 501, 502, 503, 504, 505, 506, 507, 508, 509, 510, 511, 512, 513, 514, 515, 516, 517, 518, 519, 520, 521, 522, 523, 524, 525, 526, 527, 528, 529, 530, 531, 532, 533, 534, 535, 536, 537, 538, 539, 540, 541, 542, 543, 544, 545, 546, 547, 548, 549, 550, 551, 552, 553, 554, 555, 556, 557, 558, 559, 560, 561, 562, 563, 564, 565, 566, 567, 568, 569, 570, 571, 572, 573, 574, 575, 576, 577, 578, 579, 580, 581, 582, 583, 584, 585, 586, 587, 588, 589, 590, 591, 592, 593, 594, 595, 596, 597, 598, 599, 600, 601, 602, 603, 604, 605, 606, 607, 608, 609, 610, 611, 612, 613, 614, 615, 616, 617, 618, 619, 620, 621, 622, 623, 624, 625, 626, 627, 628, 629, 630, 631, 632, 633, 634, 635, 636, 637, 638, 639, 640, 641, 642, 643, 644, 645, 646, 647, 648, 649, 650, 651, 652, 653, 654, 655, 656, 657, 658, 659, 660, 661, 662, 663, 664, 665, 666, 667, 668, 669, 670, 671, 672, 673, 674, 675, 676, 677, 678, 679, 680, 681, 682, 683, 684, 685, 686, 687, 688, 689, 690, 691, 692, 693, 694, 695, 696, 697, 698, 699, 700, 701, 702, 703, 704, 705, 706, 707, 708, 709, 710, 711, 712, 713, 714, 715, 716, 717, 718, 719, 720, 721, 722, 723, 724, 725, 726, 727, 728, 729, 730, 731, 732, 733, 734, 735, 736, 737, 738, 739, 740, 741, 742, 743, 744, 745, 746, 747, 748, 749, 750, 751, 752, 753, 754, 755, 756, 757, 758, 759, 760, 761, 762, 763, 764, 765, 766, 767, 768, 769, 770, 771, 772, 773, 774, 775, 776, 777, 778, 779, 780, 781, 782, 783, 784, 785, 786, 787, 788, 789, 790, 791, 792, 793, 794, 795, 796, 797, 798, 799, 800, 801, 802, 803, 804, 805, 806, 807, 808, 809, 810, 811, 812, 813, 814, 815, 816, 817, 818, 819, 820, 821, 822, 823, 824, 825, 826, 827, 828, 829, 830, 831, 832, 833, 834, 835, 83

но сивае

Судан, Корея

≥ 4 изкориз, $\{x, y, z\}$, $C'_{xy} \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 =$
 кегу коу рог , $= 9y \cdot 81 = 96! = 9y! \cdot 81$
 а ост укор - мидне

Нам может быть интересно узнать $(1-2) = 99! \cdot 99 - 99! \cdot 812$
 $= 99! / (9 \cdot 98 \cdot 99 - 812) = 9 \cdot 9 \cdot 99! / (92 \cdot 11 - 1) = 1089 \cdot 81 \cdot 99!$

и того и тогда корану фавно мильны хомедн 1
милны. 1000 - (3) + 1 = 1001

uzus
bentulus.

$$2 \cdot 100! - 99! \cdot 21 \cdot 1088 + 1$$
$$\text{Only: } 100! - 99! \cdot 21 \cdot 105y + 1$$

N 3 0

Week July

259

М11-386

Код участника
(заполняется организатором)



**Олимпиадная работа
заключительного этапа
«Всероссийская олимпиада школьников "Миссия
выполнима. Твоё призвание - финансист!" 2023-2024
г.»
«(Математика 11 класс)»**

Вариант № 2

«27 января 2024 г.»

Вариант №

Никакие другие записи на титульном листе делать не разрешается

№ 11-386

Код участника

Всероссийская олимпиада школьников «Миссия выполнима. Твое призвание – финансист!» 2023/2024 уч.г.

Бланк проверки работы

Математика 11 класс

№ задания	ФИО эксперта	Балл	ФИО эксперта	Балл	Итоговый балл
1	Амелина Т.Б.	10	Васильева	10	10
2	Зайкина	10	Роздеч	10	10
3	Марков	8	Торисова	8	8
4	Иван	0	Курсанова	0	0
5	Сурин	7	Урзулов	7	7
6	Гундеев	3	Степанов	3	3
7	Постовалова	14	Липа-шка	14	14
8	Сурин	0	Урзулов	0	0
ИТОГО					52

Код участника:

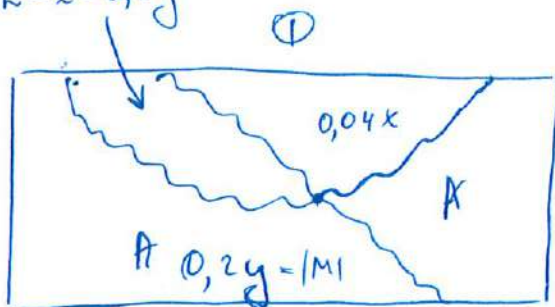
(заполняется организатором)

N11-386

N1

Представим условие в виде диаграммы

$$|H| = k - x - 0,2y$$



Пусть

$$|A| = x$$

$$|\Phi| = y$$

Тогда

$$|A| = k - x$$

$$|\Phi| = k - y$$

$$(1) \quad |\Phi| = 0,04x + |H|$$

$$(2) \quad |H| = |A| - |M| = k - x - 0,2y$$

$$\text{из (1) и (2)} \quad k - y = 0,04x + k - x - 0,2y$$

$$0,96x = 0,8y$$

$$\frac{|\Phi|}{|A|} = \frac{y}{x} = \frac{0,96}{0,8} = \frac{96}{80} = \frac{12 \cdot 8}{8 \cdot 10} = 1,2$$

Ответ 1,2

A - говорящие
по-английскиA - не говорящие
по-английскиΦ - говорящие по-
французскиΦ - не говорящие по-
французскиH - говорят по-француз-
ски и английскиM - говорят по-англий-
ски, но не говорят
по-французски

k - кон-во всех людей

+ (10%)

① из ⑮

Код участника:

(заполняется организатором)

M11-386

N 2

$$\begin{cases} 3A + 5B \leq 11 \\ 4A + 3B \leq 10 \\ 7A + 4B \leq 18 \end{cases}$$

$$4A + 3B \leq 10$$

$$7A + 4B \leq 18$$

$$A + B = x$$

$$2B = 2x - 2A$$

$$\begin{cases} 3x + 2B \leq 11 \\ 3x + A \leq 10 \\ 4x + 3A \leq 18 \end{cases}$$

$$3x + A \leq 10$$

$$4x + 3A \leq 18$$

$$\begin{cases} 3x + 2x - 2A \leq 11 \\ 3x + A \leq 10 \\ 4x + 3A \leq 18 \end{cases}$$

$$3x + A \leq 10$$

$$4x + 3A \leq 18$$

$$\begin{cases} A \geq 2,5x - 5,5 \\ A \leq 10 - 3x \\ A \leq 6 - \frac{4x}{3} \end{cases}$$

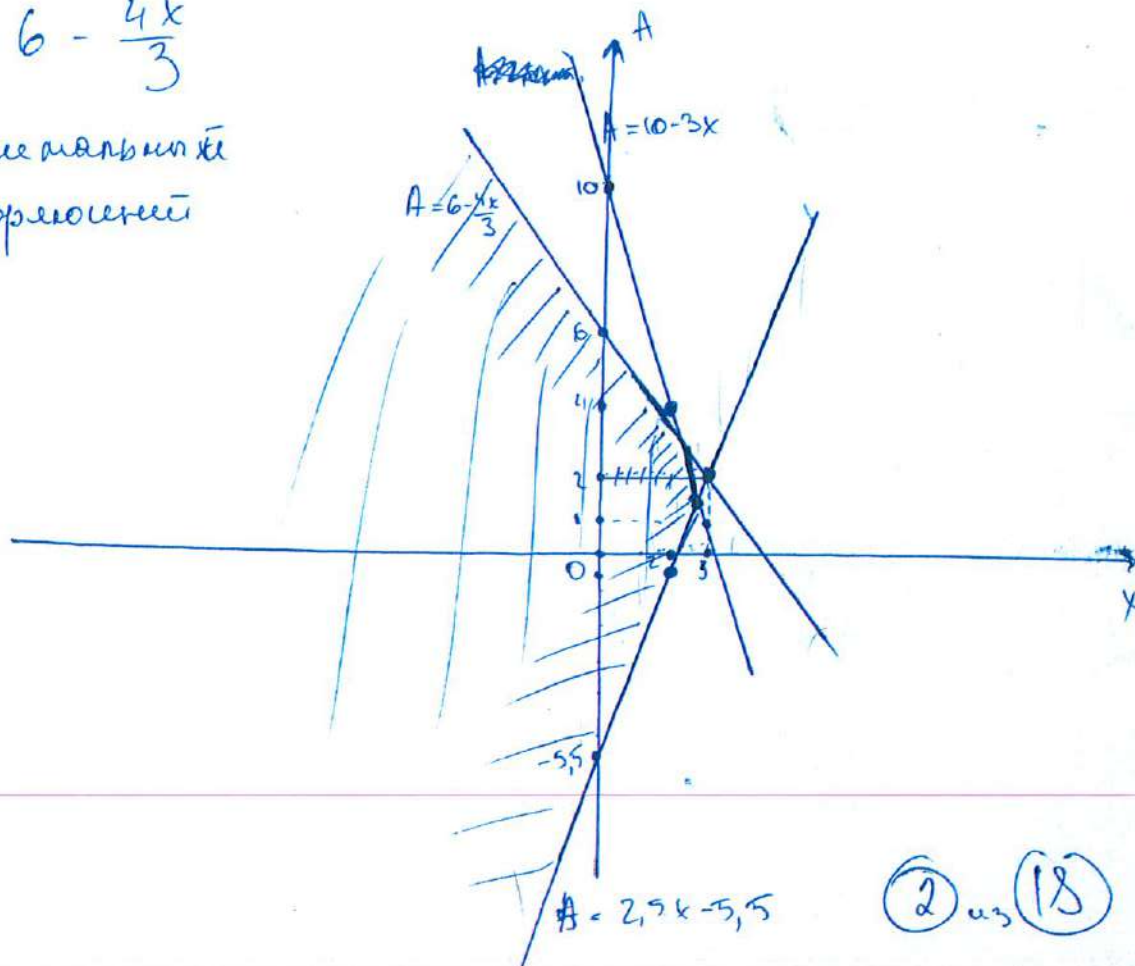
$$A \leq 10 - 3x$$

$$A \leq 6 - \frac{4x}{3}$$

Answer

10

! Найти максимальный x удовлетворяющий данному н.н.



② и ⑮

Код участника:

(заполняется организатором)

M11-386

Из графика видно, что это точка пересечения графиков $A = 10 - 3x$ и $A = 2,5x - 5,5$ Найдем:

$$10 - 3x = 2,5x - 5,5$$

$$5,5x = 15,5$$

$$\frac{11x}{2} = \frac{31}{2}$$

$$x = \frac{31}{11}$$

$$A = \frac{19}{11}$$

$$B = \frac{12}{11}$$

$$\text{Ответ } \frac{31}{11}$$

Код участника:

(заполняется организатором)

M11-386

N 3

$$p(n) = \frac{(-3)^n}{3^n + 3^{17}}$$

$$p(1) + p(2) + \dots + p(33) = ?$$

$$\begin{aligned} p(1) + p(33) &= \frac{-3}{3 + 3^{17}} + \frac{-3^{33}}{3^{33} + 3^{17}} = \frac{-1}{3^{16} + 1} + \frac{-3^{16}}{3^{16} + 1} = \\ &= \frac{-3^{16} - 1}{3^{16} + 1} = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p(2) + p(32) &= \frac{9}{9 + 3^{17}} + \frac{3^{32}}{3^{32} + 3^{17}} = \frac{1}{1 + 3^{15}} + \frac{3^{15}}{3^{15} + 1} = \\ &= \frac{3^{15} + 1}{3^{15} + 1} = 1 \end{aligned}$$

$$p(3) + p(31) = \frac{-3^3}{3^3 + 3^{17}} + \frac{-3^{31}}{3^{31} + 3^{17}} = -1$$

$$p(4) + p(30) = 1$$

.....

$$p(n) + p(34-n) = 1 \quad n - \text{чет}$$

$$p(n) + p(34-n) = -1 \quad n - \text{нечет}$$

$$p(1) + p(2) + \dots + p(33) = 0 - 1 + p(18) = \frac{3^{18}}{3^{18} + 3^{17}} - 1 =$$

$$= \frac{3}{3+1} - 1 = \frac{3}{4} - 1 = -\frac{1}{4}$$

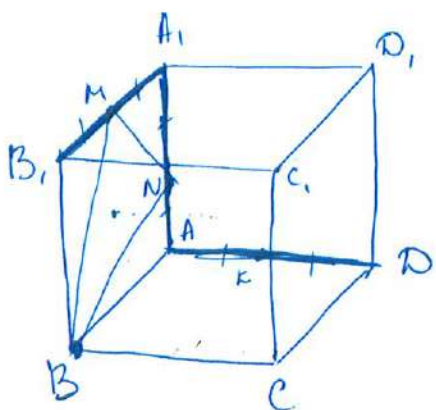
Ответ $-\frac{1}{4}$

(4) из (18)

Код участника:

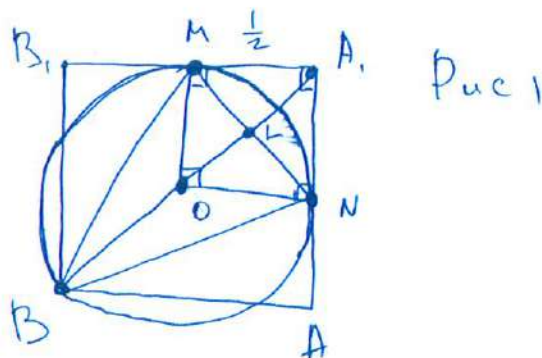
(заполняется организатором)

M11386



N4

Рассмотрим ип-ть
(B B₁ A₁ A) :



(-) M и (-) N

точки касания

$A_1M = A_1N$ (как кас из одной точки)

Проведем ~~диаг~~ диаг A_1B (она будет явн диаг
 $\angle B_1AA_1 \Rightarrow A_1B$ проходит $2/3$ центр вкр-ти
вписанной в $\angle B_1AA_1$

т.к. $OM \perp A_1B_1$ и $ON \perp A_1A$ (как радиусы) и
 $OM = ON$; $A_1M = A_1N \Rightarrow ONA_1M$ - квадрат

$$A_1B_1 = \sqrt{A_1A^2 + AB^2} = \sqrt{2}$$

$$OB = OA_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$OA^2 = OM^2 + MA_1^2 = 2MA_1^2 = \frac{1}{2}$$

$$MA_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow AN = \frac{1}{2}$$

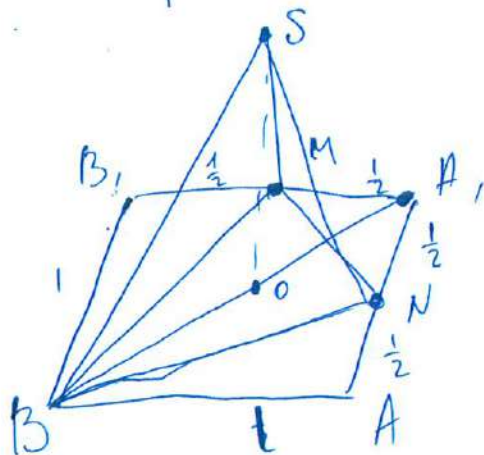
Рассмотрим ~~и~~ (A, A D D₁)

к - точка касания сферы

$$NA = AK = \frac{1}{2} \text{ (как кас из одной точки)}$$

5 из 18

~~Рассмотрим пп-IV (A B B, A,)~~



T.K $S^M = S^N = S^B \Rightarrow$

$$OB = OM = ON \Rightarrow$$

(.) центр опис дарты

7. $\hookrightarrow BM = BN \Rightarrow$

$$\hookrightarrow BMN - p/\sqrt{5} \Rightarrow$$

(.) 0 пенит ма бис $\in B$

Вернемся к рис 1.

$$\angle MBA_1 = \angle \frac{MOA}{2} = 22,5^\circ$$

Анапоирико

$$\angle ABN = \frac{\angle LON}{2} = 22,5^\circ$$
$$\angle MBL = \angle LBN = 22,5^\circ \Rightarrow$$

BA, - дус

Найдём радиус шар-14

$$S_1 = \frac{abc}{4R} = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \frac{1}{4} \quad \textcircled{=}$$

$$\textcircled{=}\quad \frac{3}{8} = \frac{MN \cdot BN \cdot BM}{4R} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{5}{4 \cdot 4R}$$

$$\frac{3}{8} = \frac{552}{320}$$

⑥uz ⑧18 4

Вис и централниот

Код участника:

(заполняется организатором)

111-386

$$3R \cdot 8 \cdot 4 = 8 \cdot 5 \sqrt{2}$$

$$R = \frac{5\sqrt{2}}{12}$$

$$BO = \frac{5\sqrt{2}}{12}$$

Центр сферы лежит на перпендикуляре к пл-ти (ABV, A_1) проходящий $\frac{2}{3} (-) O$

Аналогично найдем перпендикуляр к пл-ти (BVK) (где $BM = BK$ и центр осес сфр-ти лежит на бис), на котором лежит центр сферы пересечем два перпендикуляра, ~~зависит~~ они однозначно зададут центр сферы.

Далее найдем расстояние от $(-) B$ до центра это и будет радиус сферы

решение не завершено
уравнение не составлено
или одна из сфер не найдена

Код участника:

(заполняется организатором)

M11-386

N5

$$\arcsin + \operatorname{tg} \frac{2x-1}{x+2} + \arcsin + \operatorname{tg} \frac{x+3}{3x-1} = x$$

~~tg~~

α

β

~~tg(α+β) = tg x~~

$$\alpha + \beta = x ; \alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\beta \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$$

⇓

$$x \in (-\pi; \pi)$$

на данном промежутке $\operatorname{tg} x$
не определен в 2-ух точках
 $-\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2}$ (проверим отдельно)

$$\begin{aligned} 1) \alpha + \beta &= \frac{\pi}{2} \\ 2) \alpha + \beta &= -\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Проверим в конце

$$\operatorname{tg} \left(\arcsin + \operatorname{tg} \frac{2x-1}{x+2} + \arcsin + \operatorname{tg} \frac{x+3}{3x-1} \right) = \operatorname{tg} x$$

$$\operatorname{tg} \left(\arcsin + \operatorname{tg} \frac{2x-1}{x+2} \right) + \operatorname{tg} \left(\arcsin + \operatorname{tg} \frac{x+3}{3x-1} \right)$$

$$\frac{1 - \operatorname{tg} \left(\arcsin + \operatorname{tg} \frac{2x-1}{x+2} \right) \operatorname{tg} \left(\arcsin + \operatorname{tg} \frac{x+3}{3x-1} \right)}{1 - \operatorname{tg} \left(\arcsin + \operatorname{tg} \frac{2x-1}{x+2} \right) \operatorname{tg} \left(\arcsin + \operatorname{tg} \frac{x+3}{3x-1} \right)} = \operatorname{tg} x$$

$$\frac{2x-1}{x+2} + \frac{x+3}{3x-1}$$

$$= \operatorname{tg} x$$

$$1 - \frac{2x-1}{x+2} \cdot \frac{x+3}{3x-1}$$

$$x \neq -2; x \neq \frac{1}{3}$$

+

$$(2x-1)(3x-1) + (x+3)(x+2)$$

$$(x+2)(3x-1) - (2x-1)(x+3)$$

$$= +9x$$

$$6x^2 - 5x + 1 + x^2 + 5x + 6$$

$$3x^2 + 6x - x - 2 - 2x^2 - 6x + x + 3$$

$$= +9x$$

$$7x^2 + 1$$

$$x^2 + 1$$

$$= +9x$$

$$+9x = 7$$

+

$$x = \arctan 9 + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Надо было решить } \alpha + \beta = x$$

+

$$\text{И решил } \tan(\alpha + \beta) = +9x$$

Возможно появились посторонние корни
проверим их

$$\alpha + \beta = \arctan 9 + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Код участника:

(заполняется организатором)

M11-386

При $k \geq 1$ правая часть $> \pi$, а левая $< \pi$
??При $k \leq -2$ правая часть $< -\frac{3\pi}{2}$, а левая часть $> -\pi$??

Остаток проверить

 $k = 0$ и $k = -1$ 1) $k = -1$

$$x = \arctan z - \pi +$$

$$-\frac{2\pi}{3} < \arctan z - \pi < -\frac{\pi}{2}$$

$$\arctan \frac{2x-1}{x+2} - \arctan \frac{x+3}{3x-1} = \arctan z - \pi$$

$$\text{при } x = \arctan z - \pi$$

$$\frac{2x-1}{x+2} > 0 \Rightarrow \arctan \frac{2x-1}{x+2} > 0$$

$$\frac{x+3}{3x-1} > 0 \Rightarrow \arctan \frac{x+3}{3x-1} > 0$$

$$\arctan z - \pi < 0$$

$$\arctan \frac{2x-1}{x+2} - \arctan \frac{x+3}{3x-1} = \arctan z - \pi$$

??

✓
0

0 (10) и (18)

Код участника:

(заполняется организатором)

111-386

при $k = -1$ нет корней

2) $k = 0$

$$x = \arctan t + \frac{\pi}{3} \quad \frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{2}$$

$$\arctan t + \frac{\arctan t + \frac{\pi}{3}}{x+2} + \arctan t + \frac{x+3}{3x-1} = \arctan t + \frac{\pi}{3}$$

$$\text{при } \frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{2}$$

$$0 < \frac{2x-1}{x+2} < 1 \Rightarrow 0 < \arctan t + \frac{2x-1}{x+2} < \frac{\pi}{4}$$

$$0 < \frac{x+3}{3x-1} \Rightarrow$$

$$\arctan t + \frac{x+3}{3x-1} < \frac{\pi}{2}$$

$$0 < \arctan t + \frac{x+3}{3x-1} < \frac{\pi}{2}$$

$$0 < \alpha + \beta < \frac{3\pi}{4}$$

$$\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{2}$$

$$\arctan t(\alpha + \beta) = \arctan t x$$

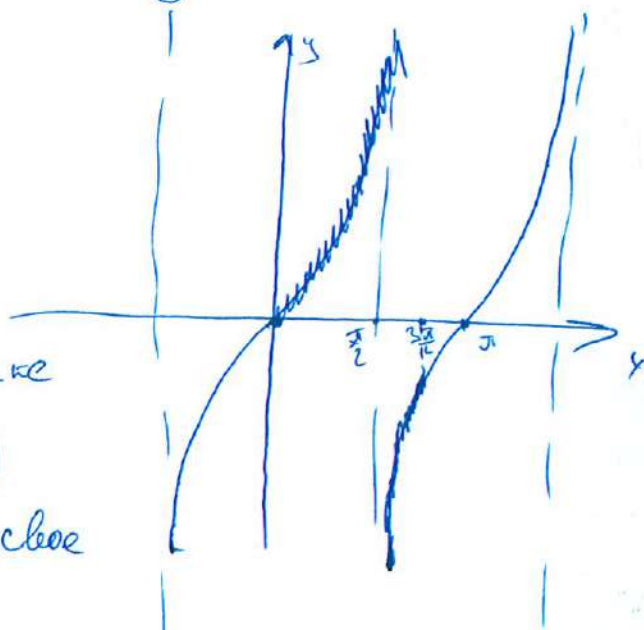
Заметим, что на графике

$$y = \arctan t x \quad \text{при } x \in (0; \frac{3\pi}{4})$$

тангенс принимает каждое свое значение единжды $\Rightarrow$

$$\text{при } \arctan t(\alpha + \beta) = \arctan t x$$

$$\alpha + \beta = x$$



Проверим случаи

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} \quad \text{и} \quad \alpha + \beta = -\frac{\pi}{2}$$

$$\arctg \frac{2x-1}{x+2} + \arctg \frac{x+3}{3x-1} = \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\pi}{2} - \arctg \frac{2x-1}{x+2}$$

$$\arctg \frac{2x-1}{x+2} = \frac{\pi}{2} - \arctg \frac{x+3}{3x-1}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta$$

$$\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$$

$$0 < \frac{\pi}{2} - \beta < \pi$$

$$\tg \left(\arctg \frac{2x-1}{x+2} \right) = \tg \left(\frac{\pi}{2} - \arctg \frac{x+3}{3x-1} \right) \quad \alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\frac{\pi}{2} - \beta \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\frac{2x-1}{x+2} = \ctg \left(\arctg \frac{x+3}{3x-1} \right)$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \tg \alpha = \tg \left(\frac{\pi}{2} - \beta \right) \\ \alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

$$\frac{2x-1}{x+2} = \frac{\pi}{2} - \tg \left(\arctg \frac{x+3}{3x-1} \right)$$

$$\frac{2x-1}{x+2} = \frac{\pi}{2} - \frac{x+3}{3x-1}$$

$$\frac{(2x-1)(3x-1) + (x+3)(x+2)}{(x+2)(3x-1)} = \frac{\pi}{2}$$

$$6x^2 - 5x + 1 + x^2 + 5x + 6$$

$$3x^2 - x + 6x - 2$$

$$= \frac{\pi}{2}$$

$$(12) \rightarrow (18)$$

Код участника:

(заполняется организатором)

М11-386

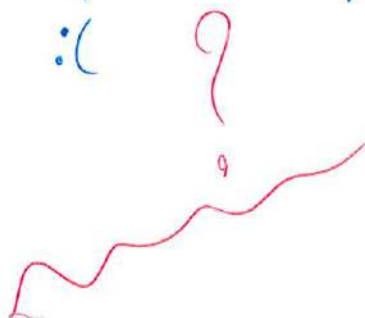
$$\frac{7x^2 + 7}{3x^2 + 5x - 2} = \frac{\pi}{2}$$

$$14x^2 + 14 = 3\pi x^2 + \pi \cdot 5x - 2\pi$$

$$(14 - 3\pi)x^2 - 5\pi x + 14 + 2\pi = 0$$

$$D = 25\pi^2 - 4(14 + 2\pi)(14 - 3\pi)$$

Каждо с самого начала брать и переносить
 arc tg выралю и равносильно переходить
 к tg :!

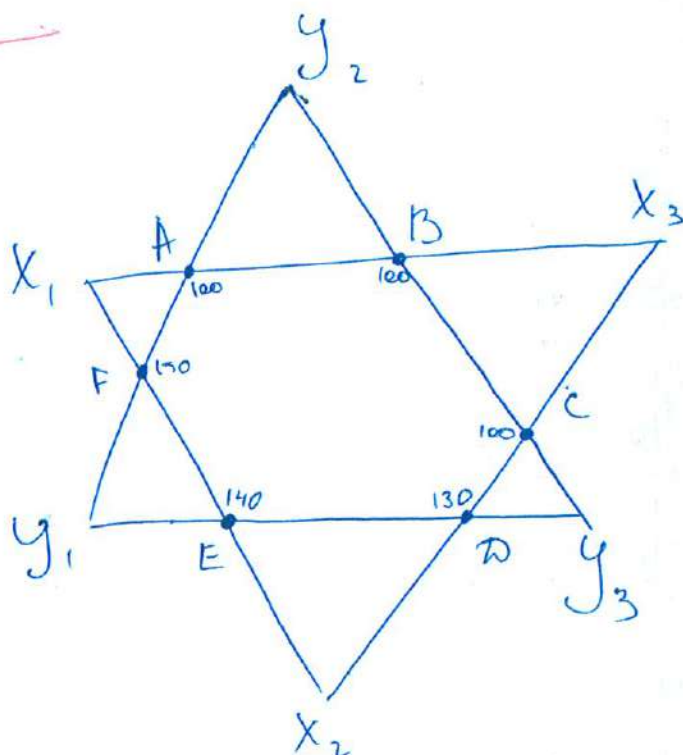
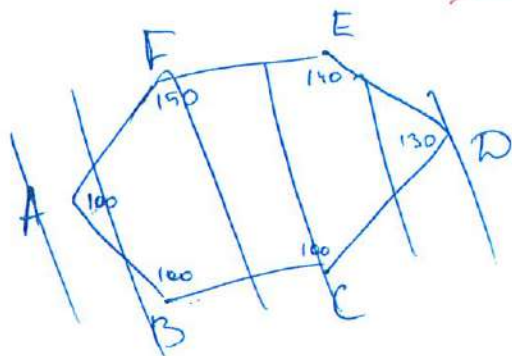


Код участника:

(заполняется организатором)

111-386

N6



$$\angle X_1 A F = 180^\circ - \angle A = 80^\circ$$

$$\angle X_1 F A = 180^\circ - \angle F = 30^\circ$$

$$\angle X_1 = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$$

$$\angle X_3 B C = 180^\circ - \angle B = 80^\circ$$

$$\angle X_3 C B = 180^\circ - \angle C = 20^\circ$$

$$\angle X_3 = 180^\circ - 160^\circ = 20^\circ$$

$$\angle D E X_1 = 180^\circ - \angle E = 40^\circ$$

$$\angle E D X_2 = 180^\circ - \angle D = 50^\circ$$

$$\angle X_2 = 180^\circ - 40^\circ - 50^\circ = 90^\circ$$

$$\angle Y_1 A B = 180^\circ - \angle A = 80^\circ$$

$$\angle Y_1 B A = 180^\circ - \angle B = 80^\circ$$

$$\angle Y_1 = 180^\circ - 160^\circ = 20^\circ$$

$$\angle Y_1 F E = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$$

$$\angle Y_1 E F = 180^\circ - 140^\circ = 40^\circ$$

$$\angle Y_1 = 180^\circ - 30^\circ - 40^\circ = 110^\circ$$

1 верно
3 ✓

$$\angle Y_3 = 180^\circ - \angle Y_1 - \angle Y_2 = 180^\circ - 20^\circ - 110^\circ = 50^\circ$$

Ответ 1-й бл: 70°; 20°; 90°
2-ой: 110°; 20°; 50°

(14) и (13)

Код участника:

(заполняется организатором)

111-386

N 7

145

$$f(x) = x^4 + bx^2 + x$$

Пусть $g(x)$ — касательная

$$g(x) = f'(a)(x-a) + f(a), \text{ где } a \text{ — абсцисса точки кас.}$$

$$f'(x) = 4x^3 + 2bx + 1$$

$$g(x) = (4a^3 + 2ba + 1)(x-a) + a^4 + ba^2 + a$$

$$g(x) = f(x) \text{ — два корня}$$

$$x^4 + bx^2 + x = (x-a)(4a^3 + 2ab + 1) + a^4 + a^2b + a$$

два корня

$$x^4 + bx^2 + x = 4a^3x + 2abx + x - 4a^4 - 2a^2b - a + a^4 + a^2b + a$$

$$x^4 + bx^2 - 4a^3x - 2abx = -a^2b - 3a^4$$

$$x^4 + bx^2 - 4a^3x - 2abx + a^2b + 3a^4 = 0$$

$$x^4 - a^3x + 3a^4 - 3a^3x + bx^2 - abx + a^2b - abx = 0$$

$$x(x^3 - a^3) + 3a^3(a - x) + bx(x - a) + ab(a - x) = 0$$

$$x(x^2 + ax + a^2)(x - a) - 3a^3(x - a) + bx(x - a) - ab(x - a) = 0$$

$$(x-a)(x^3 + ax^2 + a^2x - 3a^3 + bx - ab) = 0$$

$$(x-a)(x^3 + ax^2 + a^2x + bx - ab - 3a^3) = 0$$

$$(x-a)((x^3 - a^3) + (ax^2 - a^3) + (a^2x - a^3) + (bx - ab)) = 0$$

$$(x-a)((x-a)(x^2 + ax + a^2) + a(x-a)(x-a) + a^2(x-a) + b(x-a)) = 0$$

(15) и (18)

Код участника:

(заполняется организатором)

111-386

$$(x-a)(x-a)(x^2+ax+a^2+ax+a^2+a^2+b)=0$$

$$(x-a)^2(x^2+2ax+3a^2+b)=0$$

Именно два корня

1) $x=a$ и во второй скобке один корень
($D=0$), причем корень не совпадает с a

2) во второй скобке два корня один из которых равен a

$$1) x^2+2ax+3a^2+b=0$$

$$D = 4a^2 - 4(3a^2+b) = 4a^2 - 12a^2 - 4b = -8a^2 - 4b = 0$$

$$2a^2 + b = 0$$

$$a^2 = -\frac{b}{2}$$

$$b \leq 0$$

$$a = \sqrt{-\frac{b}{2}}$$

$$x = \frac{-2a}{2} = -a$$

$$a \neq -a \Rightarrow \frac{a \neq 0}{\downarrow}$$

$$b \neq 0 \Rightarrow b < 0$$

Код участника:

(заполняется организатором)

M11-386

$$2) \quad y^2 + 2ax + 3a^2 + b = 0$$

$$a^2 + 2a^2 + 3a^2 + b = 0$$

$$6a^2 + b = 0$$

$$a^2 = -\frac{b}{6}$$

$$a = \sqrt{-\frac{b}{6}} \quad b \leq 0$$

Тогда

~~b=0~~ $b=0$ - не подходит

$$(b < 0)$$

$$g(x) = \left(4\left(\sqrt{-\frac{b}{6}}\right)^3 + 2 \cdot b \sqrt{-\frac{b}{6}} + 1 \right) \left(x - \sqrt{-\frac{b}{6}} \right) + \frac{b^2}{36} - \frac{b^2}{6} + \sqrt{-\frac{b}{6}}$$

$$g(x) = \left(-\frac{2b}{3} \sqrt{-\frac{b}{6}} + 2b \sqrt{-\frac{b}{6}} + 1 \right) \left(x - \sqrt{-\frac{b}{6}} \right) + \frac{-5b^2}{36} + \sqrt{-\frac{b}{6}}$$

$$b < 0$$

$$g(x) = \left(4\left(-\frac{b}{2}\right) \sqrt{-\frac{b}{2}} + 2b \sqrt{-\frac{b}{2}} + 1 \right) \left(x - \sqrt{-\frac{b}{2}} \right) + \frac{b^2}{4} - \frac{b^2}{2} + \sqrt{-\frac{b}{2}}$$

$$g(x) = \left(-2b \sqrt{-\frac{b}{2}} + 2 \sqrt{-\frac{b}{2}} + 1 \right) \left(x - \sqrt{-\frac{b}{2}} \right) + \frac{b^2}{4} + \sqrt{-\frac{b}{2}}$$

$$g(x) = \left(x - \sqrt{-\frac{b}{2}} \right) - \frac{b^2}{4} + \sqrt{-\frac{b}{2}}$$

Код участника:

МН-386

(заполняется организатором)

N 8

Всего возможных пар чисел ~~рядов~~ ~~матрицы~~

$$C_{100}^2 = \frac{100!}{2! \cdot 98!} = \frac{99 \cdot 100}{2} = 4950$$

Нам нужно найти хотя бы одну пару составленную из 3 чисел, т.е. таких пар $C_3^2 = 3$ (выбрать одну из трех)

За каждый ход (придумываемое посл.) мы можем проверить 99 пар

Тогда минимальное кол-во ходов:

$$S = 1 + \left\lceil \frac{4950}{99 \cdot 3} \right\rceil = \left\lceil \frac{50 \cdot 99}{3} \right\rceil = \left\lceil \frac{50}{3} \right\rceil + 1 = 17$$

Ответ: 17

М11-511

Код участника
(заполняется организатором)



**Олимпиадная работа
заключительного этапа**

**«Всероссийская олимпиада школьников "Миссия
выполнима. Твоё призвание - финансист!" 2023-2024
г.»**

«(Математика 11 класс)»

Вариант № 2

«27 января 2024 г.»

Никакие другие записи на титульном листе делать не разрешается

МН-511

Код участника

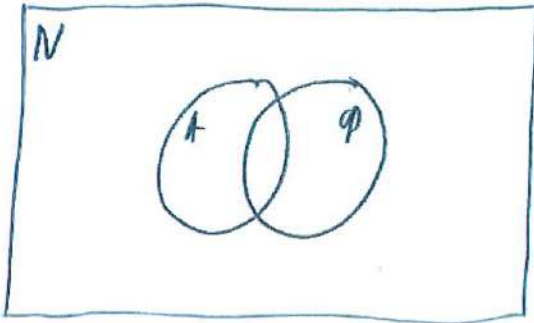
Всероссийская олимпиада школьников «Миссия выполнима. Твое призвание – финансист!» 2023/2024 уч.г.

Бланк проверки работы

Математика 11 класс

№ задания	ФИО эксперта	Балл	ФИО эксперта	Балл	Итоговый балл
1	Васильева	10	Гурьянова	10	10
2	Заслуженная	10	Поздеева	10	10
3	Маркова	12	Александрович	12	12
4	Авдеева	5	Башкина	5	5
5	Угрюмов	7	Васильева	7	7
6	Олегов	3	Генерал	3	3
7	Коннова	5	Минаева	5	5
8	Машков	0	Григорьев	0	0
ИТОГО					52

N1



Пусть N - мн-во всех людей, A - мн-во людей говорящих на английском, Φ - мн-во людей говорящих на французском

~~Пусть $|N| - |A \cup \Phi| = x$~~

+10

Пусть $|N| - |A| = x$, тогда по условию $|\Phi| - |\Phi \cap A| = 0.04x \Rightarrow$

$\Rightarrow |N| - |A \cup \Phi| = 0.96x$

Пусть $|N| - |\Phi| = y$, тогда по условию $|A| - |A \cap \Phi| = 0.2y \Rightarrow$

$\Rightarrow |N| - |A \cup \Phi| = 0.8y$

Тогда получаем, что $0.8y = 0.96x \Rightarrow y = \frac{0.96x}{0.8} = \frac{96}{80} = \frac{24}{20} = \frac{6}{5} = 1.2$

Получается, что людей говорящих на французском в 1.2 раза больше людей не говорящих на английском.

N2

$$\begin{cases} 3A + 5B \leq 77 \\ 4A + 3B \leq 70 \\ 7A + 4B \leq 78 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} 4A + 3B \leq 70 \Rightarrow 8A + 6B \leq 140 \\ 3A + 5B \leq 77 \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} \Rightarrow 11A + 11B \leq 37 \Rightarrow A + B \leq \frac{37}{11} \end{array} \right.$$

Пример на $\frac{37}{11}$.Пусть $A = \frac{77}{11}$, $B = \frac{74}{11}$. Тогда

10

$$\frac{77}{11} \cdot 3 + \frac{74}{11} \cdot 5 = \frac{51}{11} + \frac{70}{11} = \frac{121}{11} = 11 \leq 77 \text{ — первое неравенство выполняется.}$$

$$\frac{77}{11} \cdot 4 + \frac{74}{11} \cdot 3 = \frac{68}{11} + \frac{42}{11} = \frac{110}{11} = 10 \leq 70 \text{ — второе неравенство выполняется}$$

$$\frac{77}{11} \cdot 7 + \frac{74}{11} \cdot 3 = \frac{77}{11} + \frac{42}{11} = \frac{119}{11} < \frac{78}{11} = 7 \text{ — третье неравенство выполняется.}$$

Получается при данных A и B достигается максимум $A+B$, т.к. $\frac{77}{11} + \frac{74}{11} = \frac{37}{11}$ Ответ: $\frac{37}{11}$

W3.

Покажем, что $p(i) + p(i+17) = 0$, при $1 \leq i \leq 17$

$$p(i) + p(i+17) = \frac{(-1)^i}{3^i + 3^{17}} + \frac{(-1)^{i+17}}{3^{i+17} + 3^{17}} =$$

$$= \frac{(-1)^i}{3^i(1+3^{17-i})} + \frac{(-1)^{i+17}}{3^{17}(1+3^{i-17})} =$$

W3

Таким образом, у нас $p(i) + p(34-i)$. Заметим, что i и $34-i$ имеют одинаковую четность, поэтому $(-1)^i$ и $(-1)^{34-i}$ будут иметь одинаковый знак. Поэтому $p(i) + p(34-i) = (-1)^i \cdot \left(\frac{3^i}{3^i + 3^{17}} + \frac{3^{34-i}}{3^{34-i} + 3^{17}} \right) =$

$$= (-1)^i \cdot \left(\frac{1}{3^{17-i} + 1} + \frac{3^{17-i}}{3^{17-i} + 1} \right) = (-1)^i \cdot \frac{1 + 3^{17-i}}{1 + 3^{17-i}} = (-1)^i$$

Таким образом, что

$$p(1) + p(33) = (-1)^1$$

$$p(2) + p(32) = (-1)^2$$

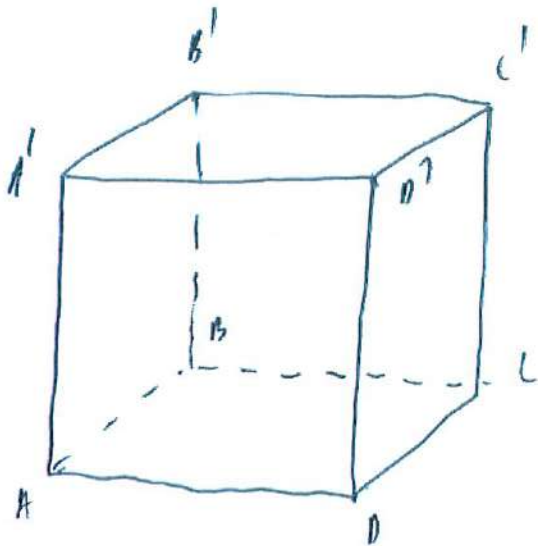
$$\vdots$$

$$p(16) + p(18) = (-1)^{16}$$

$$p(17) = \frac{(-1)^{17}}{3^{17} + 3^{17}} = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow p(1) + p(2) + \dots + p(33) = -\frac{1}{2}$$

W/4



Пусть уравнение сферы $-(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$

Введем ПКА в центре точки A, так, что

$$A(0;0;0)$$

$$B(1;0;0)$$

$$D(0;1;0)$$

$$A'(0;0;1)$$

Примем 1-к сфера касается ребер бруска куба, то и центр лежит в бруске куба $a, b, c \geq 0$

Тогда прямая AA' имеет вид $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=t \end{cases}$

Подставим в уравнение сферы

$$a^2 + b^2 + (t-c)^2 = r^2$$

$$(t-c)^2 = r^2 - a^2 - b^2$$

$$\text{Есть } r^2 - a^2 - b^2 \geq 0, \text{ то}$$

тогда то уравнение имеет 2 решения относительно t, а прямая AA' будет касаться сферы $\Rightarrow r^2 - a^2 - b^2 = 0 \Rightarrow r^2 = a^2 + b^2$

1-к сфера касается прямой AB, которая имеет вид $\begin{cases} x=0 \\ y=t \\ z=0 \end{cases}$, то

аналогично предыдущим рассуждениям

$$r^2 = a^2 + c^2$$

и 1-к сфера касается прямой A'B', которая имеет вид

$$\begin{cases} x=t \\ y=0 \\ z=1 \end{cases}, \text{ то } (t-a)^2 + b^2 + (c-1)^2 = r^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r^2 = b^2 + c^2 - 2c + 1$$

1-к сфера проходит через C(1;0;0), то

$$(1-a)^2 + b^2 + c^2 = r^2$$

$$r^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2a + 1$$

Мы найдем r :

$$\begin{cases} r^2 = a^2 + b^2 \\ r^2 = a^2 + c^2 \\ r^2 = b^2 + c^2 - 2c + 1 \\ r^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2a + 1 \end{cases}$$

т.к. $r^2 = a^2 + b^2 = a^2 + c^2$, то $b^2 = c^2 \Rightarrow$

$$\begin{cases} r^2 = a^2 + c^2 \\ r^2 = c^2 + c^2 - 2c + 1 \\ r^2 = a^2 + 2c^2 - 2a + 1 \end{cases}$$

~~то~~

$$r^2 = a^2 + c^2 + c^2 - 2a + 1$$

$$r^2 = a^2 + c^2$$

$$\Rightarrow 0 = c^2 - 2a + 1$$

$$2a = c^2 + 1$$

$$a = \frac{c^2 + 1}{2}$$

$$\Rightarrow r^2 = a^2 + c^2 = \left(\frac{c^2 + 1}{2}\right)^2 + c^2 = \frac{c^4}{4} + \frac{c^2}{2} + \frac{1}{4} + c^2 = \frac{c^4}{4} + \frac{3c^2}{2} + \frac{1}{4}$$

$$r^2 = a^2 + c^2 - 2a + 1 = \left(\frac{c^2 + 1}{2}\right)^2 + c^2 - 2 \cdot \frac{c^2 + 1}{2} + 1 = \frac{c^4}{4} + \frac{c^2}{2} + \frac{1}{4} + c^2 - c^2 - 1 + 1 = \frac{c^4}{4} + \frac{c^2}{2} + \frac{1}{4}$$

Получим, что

$$r^2 = \frac{c^4}{4} + \frac{3c^2}{2} + \frac{1}{4}$$

Таким же образом, что

$$r^2 = 2c^2 - 2c + 1 \Rightarrow \frac{c^4}{4} + \frac{3c^2}{2} + \frac{1}{4} - 2c^2 + 2c - 1 = 0$$

$$\frac{c^4}{4} - \frac{1}{2}c^2 + 2c - \frac{3}{4} = 0$$

$$\frac{c^4}{4} - \frac{1}{2}c^2 + 3c - \frac{3}{4} = 0$$

$$c^4 - 2c^2 + 12c - 3 = 0$$

$$2c^2 - 2$$

$$2 + 4(3 - 2\sqrt{2})(17 - 2\sqrt{2})$$

Код участника: М11-511

(заполняется организатором)

Мы получили, что $a = \frac{c^2+1}{2} \Rightarrow c^2+1=2a$.

Итак, мы получили $r^2 = c^2+2+c^2-2c$, упростим $r^2 = 2c^2+2-2c$.

Также $r^2 = a^2+c^2$
 $r^2 = 2a+c^2-2c$
 $r^2 = a^2+c^2-2ac+1$

Итак, мы получили $r^2 = c^2+2+c^2-2c$, упростим $r^2 = 2c^2+2-2c$.

Также $r^2 = a^2+c^2$
 $r^2 = 2a+c^2-2c$
 $r^2 = a^2+c^2-2ac+1$

Также $r^2 = a^2+c^2$
 $r^2 = c^2+c^2-2c+1$

Итак, мы получили $r^2 = c^2+2+c^2-2c$, упростим $r^2 = 2c^2+2-2c$.

1. $a=c-1$

2. $c=1-a$

① $a=c-1$

$a = \frac{c^2+1}{2}$

$c-1 = \frac{c^2+1}{2}$

$2c-2 = c^2+1$

$c^2-2c+3=0$

$\Delta < 0$ → нет корней

② $c=1-a$

$\begin{cases} a=1-c \\ a=\frac{c^2+1}{2} \end{cases} \Rightarrow 1-c = \frac{c^2+1}{2}$

$2-2c = c^2+1$

$c^2+2c-1=0$

$\Delta = 4+4=8$

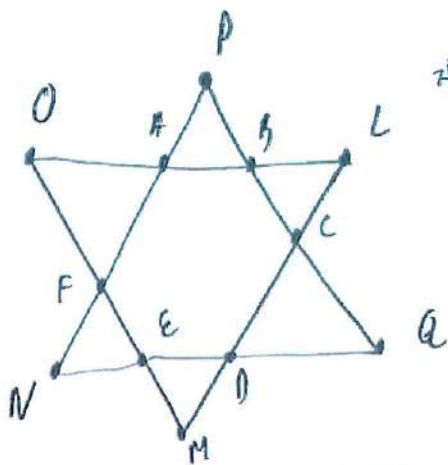
$c_1 = \frac{-2+\sqrt{8}}{2} = -1+\sqrt{2}$

$c_2 = \frac{-2-\sqrt{8}}{2} < 0$ — не подходит

Итак $c = -1+\sqrt{2}$, тогда $a = 2-\sqrt{2}$

Тогда $r^2 = a^2+c^2 = (2-\sqrt{2})^2 + (-1+\sqrt{2})^2 = 4-4\sqrt{2}+2+1-2\sqrt{2}+2 = 9-6\sqrt{2} \Rightarrow r = \sqrt{9-6\sqrt{2}}$

(заполняется организатором)



WB

~~70-100~~

$$\angle D = 130^\circ \Rightarrow \angle AOC = 50^\circ$$

на стороне окружности угол 20°

$$\angle E = 740^\circ \Rightarrow \angle N \{ F = 40^\circ$$

$\angle A = 100^\circ \Rightarrow \angle OAF = 80^\circ$

$$\angle F = 750^\circ \Rightarrow \angle OFA = 30^\circ$$
$$\angle A = 70^\circ \quad \angle C = 70^\circ \quad \angle B = 40^\circ - 50^\circ = 90^\circ$$

$\angle D = 740^\circ$

Проверим, что $\angle O + \angle L + \angle M = 750^\circ$: $70^\circ + 120^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

Еще бы верилось в существование Божьего и друзей порока, то от этого

Еще бы проверить и уличные фонари в 7-м,
так же не мешком, т.к. мы можем повернуть картину так, чтобы ребро

Аз, разглядаючы так на дачына рэчыва і в ранах іхных, могу пачаць
слова і прэзюмцыя. Часта іх у гэтых дачынах: $20^\circ, 50^\circ, 70^\circ$, а

и градусы: $70^\circ, 60^\circ, 90^\circ$

1 2

Код участника: М11-511

(заполняется организатором)

N5

$$\arctg \frac{2x-1}{x+2} + \arctg \frac{(x+3)}{3x-1} = \pi$$

$$\operatorname{tg} \left(\arctg \frac{(2x-1)}{x+2} + \arctg \frac{(x+3)}{3x-1} \right) = \operatorname{tg}(\pi)$$

$$\text{т.к. } \operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg}(a) + \operatorname{tg}(b)}{1 - \operatorname{tg}(a) \cdot \operatorname{tg}(b)} \neq \text{т.д.}$$

$$\frac{\frac{2x-1}{x+2} + \frac{x+3}{3x-1}}{1 - \frac{(2x-1)(x+3)}{(x+2)(3x-1)}} = \operatorname{tg}(\pi)$$

$$1 - \frac{(2x-1)(x+3)}{(x+2)(3x-1)}$$

$$\frac{(2x-1)(3x-1) + (x+3)(x+2)}{(x+2)(3x-1) - (2x-1)(x+3)} = \operatorname{tg}(\pi)$$

$$\frac{6x^2 - 2x - 3x + 1 + x^2 + 2x + 3x + 6}{3x^2 + 6x - x - 2 - 2x^2 + x - 6x + 3} = \operatorname{tg}(\pi)$$

$$\frac{7x^2 + 7}{x^2 + 1} = \operatorname{tg}(\pi)$$

$$7 = \operatorname{tg}(\pi) \Rightarrow \pi = \arctg(7) \quad ?$$

$$\text{ответ: } \pi = \arctg(7) \quad \perp$$

Код участника: М11-511

(заполняется организатором)

~~Пусть~~ Пусть $b < 0$ где начало задачи?

Тогда в качестве $x_1 = \sqrt{\frac{-b}{2}}$?

а в качестве x_2 возьмем $x_2 = -x_1$

Тогда касательная в точке x_1 имеет вид $f'(x_1)(x - x_1) + f(x_1)$

А касательная в точке x_2 имеет вид $f'(x_2)(x - x_2) + f(x_2)$

Покажем, что у данных прямых координатный пересек соответствует

$$f'(x_1) \overset{?}{=} f'(x_2)$$

$$f'(x_1) - f'(x_2) \overset{?}{=} 0$$

$$4x_1^3 + 2bx_1 + 1 - 4x_2^3 - 2bx_2 - 1 \overset{?}{=} 0$$

$$4(x_1 - x_2) \left(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 \right) + 2b(x_1 - x_2) \overset{?}{=} 0$$

$$(x_1 - x_2) (4x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2^2 + 2b) \overset{?}{=} 0$$

т.к. $x_1 \neq -x_2$, то

$$(x_1 - x_2) (4x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2^2 + 2b) = (x_1 - x_2) (4x_1^2 - 4x_1^2 + 4x_1^2 + 2b) = (x_1 - x_2) (4x_1^2 + 2b)$$

т.к. $x_1 = \sqrt{\frac{-b}{2}}$, то $4x_1^2 = 4 \cdot \left| \frac{b}{2} \right| = |2b|$, т.к. $b < 0$, то $|2b| + 2b = 0 \Rightarrow f'(x_1) = f'(x_2)$

Теперь проверим, что свободные члены тоже равны

$$f(x_1) - x_1 f'(x_1) \overset{?}{=} f(x_2) - x_2 f'(x_2)$$

$$x_1^4 + bx_1^2 + 1 - 4x_1^3 - 2bx_1 - 1 - x_1 \left(4x_1^3 + 2bx_1 + 1 \right) \overset{?}{=} x_2^4 + bx_2^2 + 1 - 4x_2^3 - 2bx_2 - 1 - x_2 \left(4x_2^3 + 2bx_2 + 1 \right)$$

$$-3x_1^4 - bx_1^2 \overset{?}{=} -3x_2^4 - bx_2^2, \text{ т.к. } x_2 = -x_1, \text{ то } -3x_2^4 - bx_2^2 = -3x_1^4 - bx_1^2.$$

Получается, что свободные члены тоже совпадают $\Rightarrow$ прямые совпадают.

⊕ 58

Тогда градиенте такой прямой будет иметь вид



$$f'(\sqrt{\frac{-b}{2}}) = 4 \cdot \frac{b}{2} \cdot \sqrt{\frac{-b}{2}} + 2b \cdot \sqrt{\frac{-b}{2}} + 1 =$$

$$= 2|b| \cdot \sqrt{\frac{-b}{2}} + 2b \cdot \sqrt{\frac{-b}{2}} + 1$$

$$\text{т.к. } b = -|b|, \text{ то } 2|b| \cdot \sqrt{\frac{-b}{2}} + 2b \cdot \sqrt{\frac{-b}{2}} + 1 = 1$$

$$f'(\sqrt{\frac{-b}{2}}) = 1$$

~~Рассмотрим функцию~~

$$f(\sqrt{\frac{-b}{2}}) = \frac{b^2}{4} + \frac{b \cdot |b|}{2} + \sqrt{\frac{-b}{2}}$$

$$\text{тогда } y = f'(\sqrt{\frac{-b}{2}}) \cdot (x - \sqrt{\frac{-b}{2}}) + \frac{b^2}{4} + \frac{b \cdot |b|}{2} + \sqrt{\frac{-b}{2}} =$$

$$= x - \sqrt{\frac{-b}{2}} + \frac{b^2}{4} + \frac{b \cdot |b|}{2} + \sqrt{\frac{-b}{2}} = x + \frac{b^2}{4} + \frac{b \cdot |b|}{2}$$

$$y = x + \frac{b^2}{4} + \frac{b \cdot |b|}{2}$$

Если же $b \geq 0$, то пусть найдем такие x_1 и x_2 , что в них точка оптимальна.

Также через x в градиенте той же функции совпадают, $\Rightarrow f'(x_1) = f'(x_2)$.

$$\text{то есть } 4x_1^2 + 2bx_1 + 1 = 4x_2^2 + 2bx_2 + 1$$

$$(x_1 - x_2)(4x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2^2 + 2b) = 0$$

$$\text{т.к. } x_1 \neq x_2, \text{ то } x_1 + x_2 \neq 0 \Rightarrow 4x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2^2 + 2b = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4(x_1 + x_2)^2 + 2b = 0 \Rightarrow |x_1| \geq |x_2|, \text{ или } |x_2| \geq |x_1| \text{ по симметрии.}$$

$$\text{тогда } |x_1| \geq |x_1 + x_2| \Rightarrow |4x_1^2| \geq 4|x_1 + x_2|^2, \text{ т.к. } 4x_1^2 \geq 0, \text{ то } 4x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2^2 \geq 0,$$

$$\text{но } b \geq 0 \Rightarrow 2b \geq 0, \text{ тогда } 4x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2^2 + 2b \geq 0.$$

Код участника: М11-511

(заполняется организатором)

Тогда мы получим, что $k_L = 0$, но тогда

$$4k_1^2 + 4k_1k_L + 4k_L^2 + 2b = 4k_1^2 + 2b = 0$$

т.к. $2b \geq 0$, то если $k_1 \neq 0$, то $4k_1^2 > 0 \Rightarrow k_1 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow k_1 = k_L$, но k_1 и k_L – различные чис. Противоречие. Получается для

~~каждого~~ $b \geq 0$ такой минимальный не существует

Код участника: М11-511
(заполняется организатором)

№ 8

Заметим, что в последовательности $a_1, a_2, \dots, a_{100}$ ровно 99 пар:

$$a_1 a_2, a_2 a_3, a_3 a_4, \dots, a_{99} a_{100}.$$

Следует выбрать три числа x, y, z — ~~то~~ $\binom{3}{100} = \frac{100 \cdot 99 \cdot 98}{3!}$.

При этом тройка x, y, z образует ~~то~~ 3 пары, и ~~то~~

и при этом каждая-то из этих пар обязательно имеет некоторое количество
в ~~то~~ какой-то из последовательностей. ~~то~~ При этом

~~то~~ каждую пару мы получим не более 98 раз, т.к. для заданной
пары чисел a_i и a_j существует всего 98 других чисел, с которыми a_i
пары a_i и a_j образуют. Тогда если мы хотим проверить все пары

или $\frac{\text{каждое число пар}}{98}$ пар, т.к. $\frac{100 \cdot 99 \cdot 98}{6}$, то мы должны

проверить не менее чем $\frac{100 \cdot 99 \cdot 98}{6 \cdot 98} = 50.33$ пар.

Тогда ~~то~~ последовательностей должно быть не менее чем $\frac{50.33 \cdot 3}{1} = 50.33$,
т.е. не менее чем 51.

Тогда не менее чем 51

12:02-12:05
14:09-14:13

МН-012
Код участника
(заполняется организатором)



[Handwritten signature]

**Олимпиадная работа
заключительного этапа
«Всероссийская олимпиада школьников "Миссия
выполнима. Твоё призвание - финансист!" 2023-2024
г.»
«(Математика 11 класс)»**

Вариант № 2

«27 января 2024 г.»

Никакие другие записи на титульном листе делать не разрешается

1) Пусть x - число людей, говорящих по-английски и по-французски,
 k - число, говорящих по-английски, но не по-французски.

r - число, говорящих по-французски, но не по-английски.

z - число, не говорящих ни по-английски, ни по-французски.

из условия $\frac{r+z}{r+k+z} = 0,04$ $\frac{k}{k+z} = 0,2$.

получим $\left(\begin{array}{l} \frac{r}{r+z} = \frac{1}{25} \\ \frac{k}{k+z} = \frac{1}{5} \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{l} 15r = r+z \\ 5k = k+z \end{array} \right) \Rightarrow$

$\Rightarrow z = 24r$
 $z = 4k \Rightarrow k = 6r$

надо найти: $\frac{k+z}{r+z} = \frac{k+4k}{r+24r} = \frac{5k}{25r} = \frac{k}{5r} =$
 $= \frac{6r}{5r} = \frac{6}{5} = 1,2$

Ответ: 1,2 раза.

2) Ответ: $\frac{31}{11}$

$$\begin{cases} 3A + 5B \leq 11 & (1) \\ 4A + 3B \leq 10 & (2) \\ 7A + 4B \leq 18 & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1) & \begin{cases} 3A + 5B \leq 11 \\ 4A + 3B \leq 10 \end{cases} \cdot 2 \\ (2) & \begin{cases} 3A + 5B \leq 11 \\ 8A + 6B \leq 20 \end{cases} \end{cases}$$

$$11A + 11B \leq 31 \quad | : 11$$

$$A + B \leq \frac{31}{11} \quad ; \text{Пусть } A = x ; B = y$$

(.) пересечение прямых $\begin{cases} 3x + 5y = 11 \\ 4x + 3y = 10 \end{cases}$

(.) пересечение прямых координаты $x = \frac{17}{11}$
 $y = \frac{14}{11}$

то есть равенство достигается при $A = \frac{17}{11}$ и $B = \frac{14}{11}$; Эти значения удовлетворяют третьему неравенству: $7 \cdot \frac{17}{11} + 4 \cdot \frac{14}{11} \leq 18$
поэтому $A + B \leq \frac{31}{11}$ и max значение достигается при $A = \frac{17}{11}$; $B = \frac{14}{11}$, то есть max значение $A + B = \frac{31}{11}$

Ответ: $\frac{31}{11}$

3) Ответ: $-\frac{1}{2}$.

$$p(n) = \frac{(-3)^n}{3^n + 3^{17}}$$

$$p(1) + p(2) + p(3) + \dots + p(33) = ?$$

Пусть $x \in [1; 16]$, x — целое число.

$$p(x) + p(34-x) = \frac{-3^x}{3^x + 3^{17}} + \frac{-3^{34-x}}{3^{34-x} + 3^{17}} = \frac{-1 \cdot 3^x}{3^x + 3^{17}} + \frac{-1 \cdot 3^{34-x}}{3^{34-x} + 3^{17}} =$$

$$= \frac{-1 \cdot 3^x}{3^x(1 + 3^{17-x})} + \frac{-1 \cdot 3^{34-x}}{3^{17-x} + 1} = \frac{-1 - 1 \cdot 3^{17-x}}{1 + 3^{17-x}}$$

при четных x мы получим $\frac{1 + 3^{17-x}}{1 + 3^{17-x}} = 1$

при нечетных x получим $\frac{-1 - 3^{17-x}}{1 + 3^{17-x}} = -1$.

Всего таких пар у нас 16, из них 8 равны единице и 8 равны минус единице.

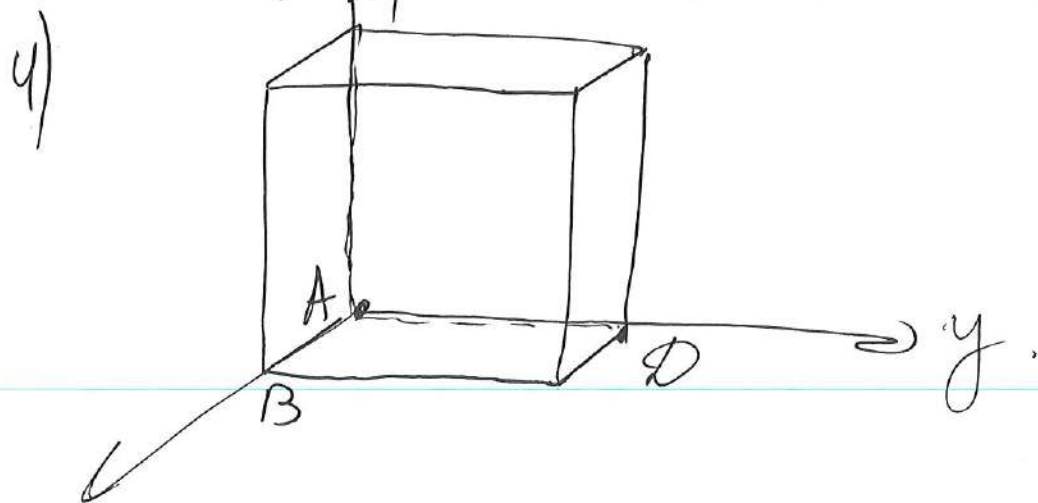
Если все сложить, получится 0.

$$p(1) + p(2) + p(3) + \dots + p(33) = (p(1) + p(33)) + (p(2) + p(32)) + \dots + (p(16) + p(18)) + p(17) = p(17)$$

$$p(17) = \frac{-3^{17}}{3^{17} + 3^{17}} = -\frac{3^{17}}{2 \cdot 3^{17}} = -\frac{1}{2}$$

Код участника: МН-012

(заполняется организатором)



Пусть оси координат заданы так: Начало координат в точке A, ось OX, по лучу AB

ось OY по AD

ось OZ по лучу AA₁,

Пусть центр шара имеет координаты $(x_0; y_0; z_0)$. Радиус R , тогда уравнение шара: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$

(1) В лежит на шаре $\Rightarrow (1 - x_0)^2 + y_0^2 + z_0^2 = R^2$

касание с AD $\Rightarrow x_0^2 + z_0^2 = R^2$

касание с AA₁ $\Rightarrow x_0^2 + y_0^2 = R^2$

касание с A₁B₁ $\Rightarrow y_0^2 + (1 - z_0)^2 = R^2$

возьмем из (1) уравнение (2):

$$z_0^2 - y_0^2 = 0$$

$$z_0^2 = y_0^2 \Rightarrow \begin{cases} z_0 = y_0 \\ z_0 = -y_0 \end{cases} \Leftrightarrow \text{иногда возьмем (3) уравнение из (2) } \Rightarrow (1 - z_0)^2 = x_0^2$$

возможны случаи

$$\begin{cases} 1 - x_0 = z_0 \\ y_0 = z_0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 1 - x_0 = z_0 \\ y_0 = -z_0 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ подставим в уравнение, где В лежит на шаре, подставим в уравнение:

$$z_0^2 + z_0^2 + z_0^2 = R^2 \Rightarrow R = \sqrt{3} \cdot z_0$$

Код участника: МК-012
(заполняется организатором)

Продолжение №4

Кроме того из уравнений касания АО

$$\begin{aligned}
 &\text{имеем: } (1-x_0)^2 + y_0^2 = x_0^2 \Rightarrow z_0^2 + z_0^2 = (1-z_0)^2 \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \sqrt{2} \cdot z_0 = \pm (1-z_0) \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{2} \cdot z_0 = 1-z_0 \\ \sqrt{2} \cdot z_0 = z_0 - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_0 = \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2}-1 \\ z_0 = -\frac{1}{\sqrt{2}-1} = -(\sqrt{2}+1) \end{cases} \\
 &\Rightarrow R^2 = 3z_0^2 \Rightarrow R = \sqrt{3}(\sqrt{2} \pm 1)
 \end{aligned}$$

Остальные случаи дадут те же значения радиуса, т.к. поменяются лишь знаки у координат и координаты переставятся местами.

Ответ: $R = \sqrt{3}(\sqrt{2} \pm 1)$

$$5) \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{x+2} + \operatorname{arctg} \frac{x+3}{3x-1} = \lambda.$$

т.к. $\operatorname{arctg} k \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$, то пробав
 равно уравнению $x \in (-\pi; \pi)$, $x \neq 2$, $x \neq \frac{1}{3}$.

Возьмем tg от обеих частей:

$$\operatorname{tg} \left(\operatorname{arctg} \left(\frac{2x-1}{x+2} \right) + \operatorname{arctg} \left(\frac{x+3}{3x-1} \right) \right) = \operatorname{tg} \lambda.$$

по формуле tg суммы; левая часть:

$$\begin{aligned} & \frac{\operatorname{tg} \left(\operatorname{arctg} \left(\frac{2x-1}{x+2} \right) \right) + \operatorname{tg} \left(\operatorname{arctg} \left(\frac{x+3}{3x-1} \right) \right)}{1 - \operatorname{tg} \left(\operatorname{arctg} \left(\frac{2x-1}{x+2} \right) \right) \cdot \operatorname{tg} \left(\operatorname{arctg} \left(\frac{x+3}{3x-1} \right) \right)} = \\ & = \frac{\frac{2x-1}{x+2} + \frac{x+3}{3x-1}}{1 - \frac{2x-1}{x+2} \cdot \frac{x+3}{3x-1}} = \frac{6x^2 - 3x - 2x + 1 + x^2 + 2x + 3x + 6}{3x^2 + 6x - x - 2 - 2x^2 - 6x + x + 3} = \\ & = \frac{7x^2 + 7}{x^2 + 1} = 7. \end{aligned}$$

поэтому $\operatorname{tg} x = 7 \Rightarrow x = \operatorname{arctg} 7 + \pi n$,
 $n \in \mathbb{Z}$

с учетом ограничений

имеем: $x = \operatorname{arctg} 7$
 $x = -\pi + \operatorname{arctg} 7.$

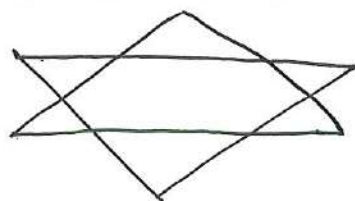
6) Пусть $\triangle TNK$ и $\triangle PRQ$ пересекаются по шестиграннику, так, что: $PQ \sim TN = A$.

$$PR \sim TN = C$$

$$NK \sim RQ = D$$

$$TK \sim RQ = E$$

$$TK \sim PQ = F$$



П.к. смежные углы в сумме дают 180° , и сумма углов в т.р. равна 180° , тогда
 $\angle PBA = \angle NBC = 80^\circ$; $\angle PAB = \angle TAF = 80^\circ$
 $\angle NCB = \angle RCD = 80^\circ$; $\angle KED = \angle QEF = 40^\circ$
 $\angle RDC = \angle KDE = 50^\circ$; $\angle QFE = \angle TFA = 30^\circ$
 тогда $\angle P = 20^\circ$; $\angle N = 20^\circ$; $\angle R = 50^\circ$; $\angle K = 90^\circ$
 $\angle Q = 110^\circ$; $\angle T = 70^\circ$; сумма углов $\triangle TNK =$
 $= 20^\circ + 70^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ — такой $\triangle$ существует.
 Сумма углов $\triangle PRQ = 20^\circ + 50^\circ + 110^\circ = 180^\circ$
 — такой $\triangle$ существует.

Ответ: $20^\circ; 50^\circ; 110^\circ$ и $20^\circ; 70^\circ; 90^\circ$

8) Всего перестановок 100!

1) Если x, y, z идут по порядку $\Rightarrow$ 6 вариантов последовательности x, y, z . 97! перестановок ~~остатка~~

97! перестановок остальных элементов, цепочка x, y, z ставится в ряд 98 способами $\Rightarrow (6 \cdot 97! \cdot 98)$ — комбинаций 100 x, y, z

2) Если стоит два из трёх букв x, y, z , тогда пар xy, yx, xz, zx, yz, zy и рядом не третья буква. Это 97 комбинаций, если пара скраю и два край. Это: $6 \cdot 97 \cdot 2 \cdot 97!$

и если пара не скраю $\Rightarrow$ 97 парочек для пар, рядом не третья буква, то есть $97 \cdot 96 \cdot 6 \cdot 97 \cdot 97 \cdot 96 \cdot 96!$. Чтобы точно считать одна из хороших комбинаций, надо перебрать все плохие и выбрать ещё одну $\Rightarrow$ необходимое кол-во: $100! - 6 \cdot 97 \cdot 2 \cdot 97! - 6 \cdot 97 \cdot 97 \cdot 96 \cdot 96! -$
 $- 6 \cdot 97! \cdot 98 + 1$

197
111 197
Код участника
(заполняется организатором)



**Олимпиадная работа
заключительного этапа
«Всероссийская олимпиада школьников "Миссия
выполнима. Твоё призвание - финансист!" 2023-2024
г.»
«(Математика 11 класс)»**

Вариант № 1

«27 января 2024 г.»

Никакие другие записи на титульном листе делать не разрешается

М 11 199

Код участника

Всероссийская олимпиада школьников «Миссия выполнима. Твое призвание – финансист!» 2023/2024 уч.г.

Бланк проверки работы

Математика ¹¹10 класс

№ задания	ФИО эксперта	Балл	ФИО эксперта	Балл	Итоговый балл
1	Васильев	10	Гурьянова	10	10
2	Гордеев	0	Зюжиков	0	0
3	Александрович	12	Горшкова	12	12
4	Овчинков	12	Башин	12	12
5	Башин	0	Криву	0	0
6	Груздев	3	Сенатор	3	3
7	Криков	14	Сенатор	14	14
8	Шашин	0	Жемин	0	0
ИТОГО					51

Задание 5 (12 баллов)

Решите уравнение $\operatorname{arccctg} \frac{5x+3}{3x-5} + \operatorname{arccctg} \frac{x-1}{x+1} = x$.

Задание 6 (14 баллов)

Два треугольника пересекаются по шестиугольнику $ABCDEF$, в котором $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 115^\circ$, $\angle E = 120^\circ$, $\angle F = 140^\circ$.

Найдите углы этих треугольников.

Задание 7 (14 баллов)

При каких значениях параметра a существует прямая, касающаяся графика функции $f(x) = ax^4 + x^2 + x$ в двух точках? Для каждого такого значения параметра a найдите уравнение соответствующей прямой.

Задача 8 (16 баллов)

Про последовательность $X = \{x_1, \dots, x_{100}\}$ известно, что она состоит из всех натуральных чисел от 1 до 100, переставленных в некотором порядке. Мы должны узнать этот порядок. За один шаг можно выписать любую, также состоящую из чисел от 1 до 100, последовательность $Y = \{y_1, \dots, y_{100}\}$, про каждый член y_i ($i = 1, \dots, 100$) которой нам сообщат, какое из соотношений $y_i > x_i$, $y_i < x_i$ или $y_i = x_i$ имеет место. За какое наименьшее число шагов можно наверняка определить последовательность X ?

Код участника:

(заполняется организатором)

111 199

N1.

Пусть очно занимаются x студентов, а дистанционно — y студентов, тогда

$$0,5x = 0,6y$$

$$x = \frac{6}{5}y$$

людей, занимающихся только очно

$$x - 0,5x = 0,5x = \frac{6}{10}y = \frac{3}{5}y.$$

$$\text{Всего людей в вузе } x + (1 - 0,6)y =$$

$$= \frac{6}{5}y + \frac{4}{10}y = \frac{6}{5}y + \frac{2}{5}y = \frac{8}{5}y$$

$$\text{Соотношение} = \frac{\frac{3}{5}y}{\frac{8}{5}y} = \frac{3}{8} \quad +10$$

$$\text{Ответ: } \frac{3}{8}.$$

N2.

$$\begin{cases} A + 5B \geq 9 \\ 3A + 4B \geq 11 \\ 5A + 3B \geq 11 \end{cases}$$

Умножим третье неравенство на 2 и сложим с первым неравенством:

$$A + 5B + 10A + 6B \geq 9 + 11 \cdot 2$$

$$11A + 11B \geq 31$$

$$A + B \geq \frac{31}{11}$$

Минимальное значение — $\frac{31}{11}$.

Оно достигается, например, при

Код участника:

(заполняется организатором)

М11 144

$$A = \frac{3}{11}, B = \frac{28}{11}$$

Все три неравенства достигаются
 Это значение достигается, например,
 при $A = \frac{14}{11}, B = \frac{17}{11}$

Ответ: $\frac{31}{11}$. *ответ верный*

нет обособл., 256, 05
 $A+B \geq 3$

N3

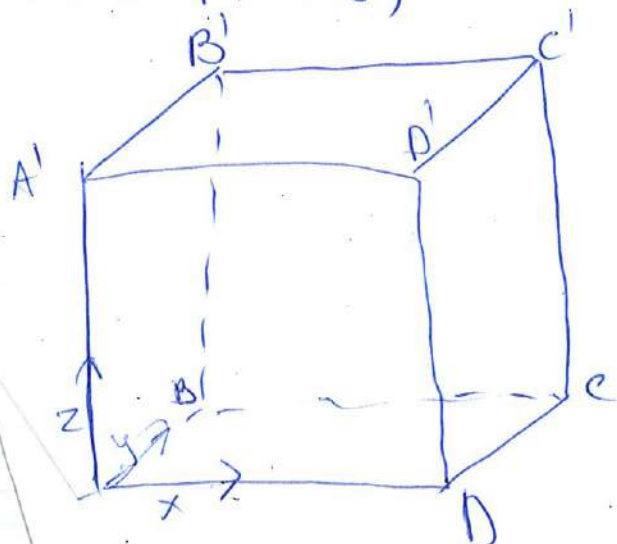
Рассмотрим
 положим для каждого натурального
 числа n положим $f(n) = p(n) + p(100-n) =$

$$= \frac{g^n}{g^n + g^{50}} + \frac{g^{100-n}}{g^{100-n} + g^{50}} = \frac{g^n}{g^n + g^{50}} + \frac{g^{100}}{g^{100} + g^{50+n}} =$$

$$= \frac{g^n}{g^n + g^{50}} + \frac{g^{50}}{g^{50} + g^n} = \frac{g^n + g^{50}}{g^n + g^{50}} = 1.$$

Искомая сумма $p(1) + p(2) + p(3) + \dots + p(99)$
 равна $f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(49) + p(50) =$
 $= 49 + p(50) = 49 + \frac{g^{50}}{g^{50} + g^{50}} = 49 + \frac{1}{2} = 49,5$

Ответ: 49,5. +



N4.

Введем прямоугольную
 систему координат x, y, z .
 Начало координат – (A)

Ось $O_x \uparrow \overrightarrow{AD}$
 Ось $O_y \uparrow \overrightarrow{AB}$
 Ось $O_z \uparrow \overrightarrow{AA'}$

Пусть центр сферы – $(\cdot) O$ с координатами $(x; y; z)$.

Опустим перпендикуляр из $(\cdot) O$ на ABC в точку H и перпендикуляр $HK \perp AD$ $K \in$ прямой AD . Тогда по т.о трех перпендикуляров $OK \perp AD$. $OH = z$, $HK = y \Rightarrow$

$$\Rightarrow OK = \sqrt{y^2 + z^2} - \text{радиус сферы } (R)$$

$$\text{Аналогично } \rho((\cdot) O; AA') = \sqrt{x^2 + y^2} = R$$

$$\rho((\cdot) O; A'B') = \sqrt{(1-z)^2 + x^2} = R$$

$$\rho((\cdot) C(1; 1; 0); (\cdot) O) = OC = \sqrt{(1-x)^2 + (1-y)^2 + z^2} = R$$

$$\sqrt{y^2 + z^2} \stackrel{①}{=} \sqrt{x^2 + y^2} \stackrel{②}{=} \sqrt{x^2 + (1-z)^2} \stackrel{③}{=} \sqrt{(1-x)^2 + (1-y)^2 + z^2} = R$$

из ① получаем, что $|x| = |z|$.

из ② получаем, что $|y| = |z-1|$

$$\text{③: } x^2 + (1-z)^2 = (1-x)^2 + (1-y)^2 + z^2$$

$$x^2 + y^2 = 1 - 2x + x^2 + 1 - 2y + y^2 + z^2$$

$$z^2 - 2(x+y) + 2 = 0$$

$$\begin{cases} x = z \\ y = z - 1 \\ z^2 - 4z + 4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -z \\ y = z - 1 \\ z^2 + 4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = z \\ y = 1 - z \\ z^2 - 2z + 2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -2 \\ y = 1 - z \\ z^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

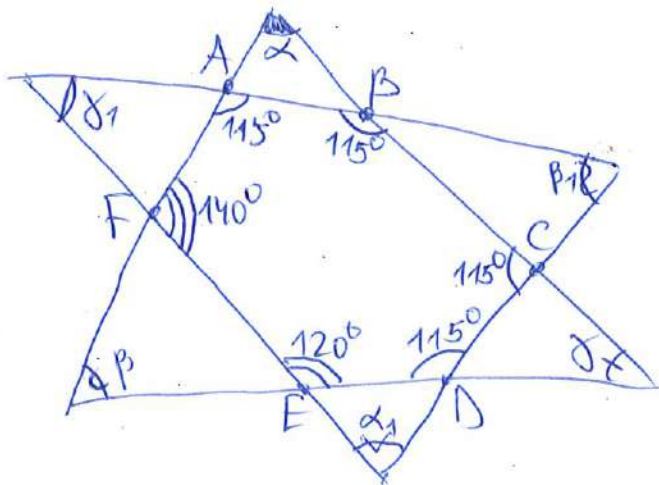
$$\begin{cases} z = 2 & (x = 2, y = 1) \\ z = 0 & (x = 0, y = 1) \\ z = -4 & (x = 4, y = 5) \end{cases}$$

$$R = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z^2 + (z-1)^2}$$

$$\begin{cases} R = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5} \\ R = 1 \\ R = \sqrt{16 + 25} = \sqrt{41} \end{cases}$$

Ответ: $\sqrt{5}$, 1 и $\sqrt{41}$.

№6.



1 вар. рн
3 ✓.

Докажем углы
треугольников как
 α, β, γ и $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$

$$\angle \alpha = 180^\circ - (480^\circ - \angle A + 180^\circ - \angle B) =$$

$$= \angle A + \angle B - 180^\circ = 230^\circ - 180^\circ = 50^\circ$$

$$\angle \beta = \angle F + \angle E - 180^\circ =$$

$$= 260^\circ - 180^\circ = 80^\circ$$

$$\angle \gamma = \angle \alpha = \angle A + \angle B - 180^\circ =$$

$$= \angle C + \angle D - 180^\circ = 50^\circ$$

$$\angle \alpha_1 = \angle E + \angle D - 180^\circ = 55^\circ$$

$$\angle \beta_1 = \angle \beta + \angle C - 180^\circ = 50^\circ$$

$$\angle \gamma_1 = \angle A + \angle F - 180^\circ = 75^\circ$$

Ответ: углы одного треугольника — $50^\circ, 50^\circ, 80^\circ$, углы
другого — $55^\circ, 50^\circ, 75^\circ$

Код участника:
(заполняется организатором)

М11 199

№7.

$$f(x) = ax^4 + x^2 + x$$

$$f'(x) = 4ax^3 + 2x + 1$$

касательная к графику $f(x)$ в точке t –

$$g(x) = (4at^3 + 2t + 1)(x - t) + at^4 + t^2 + t =$$

$$= (4at^3 + 2t + 1)x - 4at^4 - 2t^2 - t + at^4 + t^2 + t =$$

$$= (4at^3 + 2t + 1)x - 3at^4 - t^2$$

При двух разных t_1 и t_2 должно выполняться равенство (тождество);

$$g(t_1) = g(t_2) \quad (t_1 \neq t_2)$$

$$\begin{cases} 4at_1^3 + 2t_1 + 1 = 4at_2^3 + 2t_2 + 1 \\ -3at_1^4 - t_1^2 = -3at_2^4 - t_2^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2at_1^3 + t_1 = 2at_2^3 + t_2 \\ 3at_1^4 + t_1^2 = 3at_2^4 + t_2^2 \end{cases}$$

$$2a(t_1 - t_2)(t_1^2 + t_1t_2 + t_2^2) = t_2 - t_1$$

$$3a(t_1^2 + t_2^2)(t_1 - t_2)(t_1 + t_2) = (t_2 - t_1)(t_1 + t_2)$$

$$\begin{cases} t_1^2 + t_1t_2 + t_2^2 = -\frac{1}{2a} \\ (3a(t_1^2 + t_2^2) + 1)(t_1 + t_2) = 0 \end{cases}$$

$$\textcircled{2} \quad t_1 = \sqrt{-\frac{1}{2a}}, \quad t_2 = -\sqrt{-\frac{1}{2a}}$$

Для любых отрицательных a существует пара t_1, t_2 :

~~$$g(x) = \left(\sqrt{\frac{1}{2a}} + \sqrt{-\frac{1}{2a}} + 1\right)x - \frac{3}{4a} + \frac{1}{2a}$$~~

$$g(x) = \left(-2\sqrt{-\frac{1}{2a}} + 2\sqrt{-\frac{1}{2a}} + 1\right)x - \frac{3}{4a} + \frac{1}{2a}$$

$$g(x) = x - \frac{1}{4a}$$

14

Код участника:

(заполняется организатором)

111 199

$$\textcircled{1} \begin{cases} t_1 + t_2 \neq 0 \\ t_1^2 + t_1 t_2 + t_2^2 = -\frac{1}{2a} \\ 3a(t_1^2 + t_2^2) = -1 \end{cases}$$

$$t_1 t_2 - \frac{1}{3a} = -\frac{1}{2a}$$

$$t_1 t_2 = -\frac{1}{6a} \Rightarrow t_1 = -\frac{1}{6a t_2}$$

$$\frac{1}{36a^2 t_2^2} + t_2^2 = -\frac{1}{3a}$$

① Может выполняться только при $a < 0$, так как в последнем равенстве слева сумма квадратов, а справа $-\frac{1}{3a}$.
~~При $a < 0$~~ Случай $a < 0$ мы рассмотрим в пункте ②.

Ответ: При $a < 0$. Уравнение: $y = x - \frac{1}{4a}$.

Ответ: за 99 попыток.

№ 5 ①

44828

Код участника
(заполняется организатором)



**Олимпиадная работа
заключительного этапа
«Всероссийская олимпиада школьников "Миссия
выполнима. Твоё призвание - финансист!" 2023-2024
г.»
«(Математика 11 класс)»**

Вариант № 1

«27 января 2024 г.»

Никакие другие записи на титульном листе делать не разрешается

М11 828

Код участника

Всероссийская олимпиада школьников «Миссия выполнима. Твое призвание – финансист!» 2023/2024 уч.г.

Бланк проверки работы

Математика 11 класс

№ задания	ФИО эксперта	Балл	ФИО эксперта	Балл	Итоговый балл
1	Васильева	10	Гурьевов	10	10
2	Тюжцова	10	Эмочкин	10	10
3	Александрович	12	Марков	12	12
4	Уридов	0	Сурган	0	0
5	Крейсер	2	Борисов	2	2
6	Олехов	3	Трутин	3	3
7	Кашков	14	Степанов	14	14
8	Шашков	0	Геминичев	0	0
ИТОГО					(57)



ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМА.

ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ – ФИНАНСИСТ!»
ПО ПРЕДМЕТУ МАТЕМАТИКА 2023-2024 уч. года

ОЧНЫЙ ЭТАП

11 класс

Вариант 1

Задание 1 (10 баллов)

В некотором ВУЗе существуют очная и дистанционная формы обучения. При этом среди студентов, занимающихся очно, 50% занимаются также и дистанционно, а среди студентов, занимающихся дистанционно, 60% занимаются также и очно. Какую часть составляют студенты, занимающиеся только очно?

Handwritten marks: a star and an arrow pointing right.

Задание 2 (10 баллов)

Каким наименьшим может быть значение выражения $A + B$, если A и B – числа, удовлетворяющие следующей системе неравенств

$$\begin{cases} A + 5B \geq 9; \\ 3A + 4B \geq 11; \\ 5A + 3B \geq 11. \end{cases}$$

Handwritten mark: an arrow pointing right.

Задание 3 (12 баллов)

Для каждого натурального числа n положим $p(n) = \frac{9^n}{9^n + 9^{50}}$.
Вычислите сумму $p(1) + p(2) + p(3) + \dots + p(99)$.

Задание 4 (12 баллов)

Длина ребра куба $ABCA'B'C'D'$ равна 1. Найдите радиус сферы, проходящей через точку C и касающейся прямых AD , AA' и $A'B'$.

Задание 5 (12 баллов)

Решите уравнение $\arcsin \frac{5x+3}{3x-5} + \arcsin \frac{x-1}{x+1} = x$.

12

Задание 6 (14 баллов)

Два треугольника пересекаются по шестиугольнику $ABCDEF$, в котором $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 115^\circ$, $\angle E = 120^\circ$, $\angle F = 140^\circ$.

Найдите углы этих треугольников.

Задание 7 (14 баллов)

При каких значениях параметра a существует прямая, касающаяся графика функции $f(x) = ax^4 + x^2 + x$ в двух точках? Для каждого такого значения параметра a найдите уравнение соответствующей прямой.

Задание 8 (16 баллов)

Про последовательность $X = \{x_1, \dots, x_{100}\}$ известно, что она состоит из всех натуральных чисел от 1 до 100, переставленных в некотором порядке. Мы должны узнать этот порядок. За один шаг можно выписать любую, также состоящую из чисел от 1 до 100, последовательность $Y = \{y_1, \dots, y_{100}\}$, про каждый член $y_i (i = 1, \dots, 100)$ которой нам сообщат, какое из соотношений $y_i < x_i$, $y_i = x_i$ или $y_i > x_i$ имеет место. За какое наименьшее число шагов можно навстречка определить последовательность X ?

Код участника:

(заполняется организатором)

111828

2

каким

наименьшим может
значение $A+B$?

$$\begin{cases} A+5B \geq 9 \\ 3A+4B \geq 11 \\ 5A+3B \geq 11 \end{cases}$$

Пусть $A+B=k$, тогда $A=k-B$

$$\begin{cases} k-B+5B \geq 9 \\ 3k-3B+4B \geq 11 \\ 5k-5B+3B \geq 11 \end{cases}$$

$$\begin{cases} k \geq 9-4B \\ k \geq \frac{11-B}{3} \\ k \geq \frac{11+2B}{5} \end{cases}$$

① $k = 9-4B$

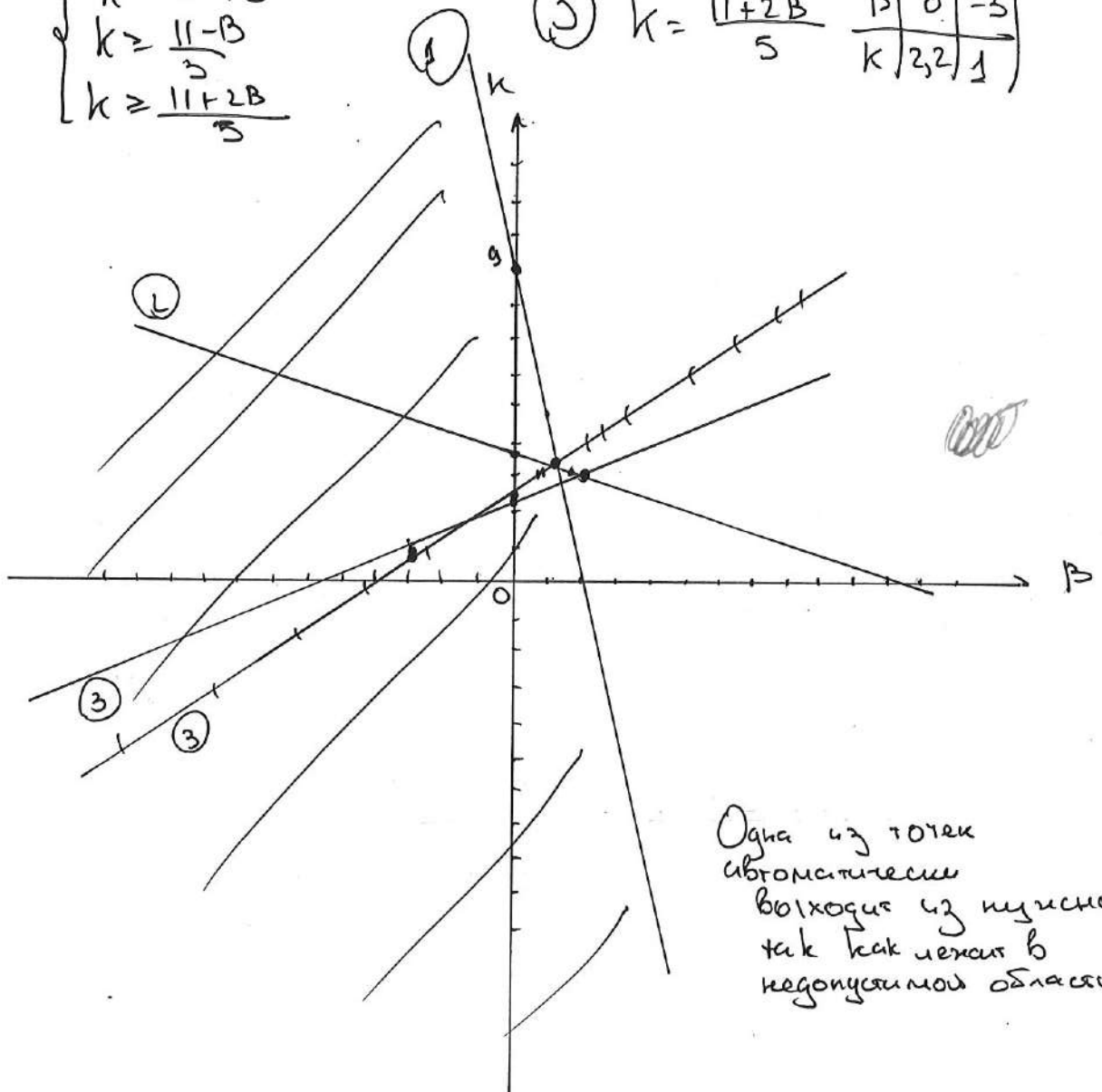
② $k = \frac{11-B}{3}$

③ $k = \frac{11+2B}{5}$

B	0	1
k	9	5

B	0	2
k	$\frac{11}{3}$	3

B	0	-3
k	$\frac{11}{5}$	1



Одна из точек
автоматически
выходит из нуля,
так как лежит в
недопустимой области.

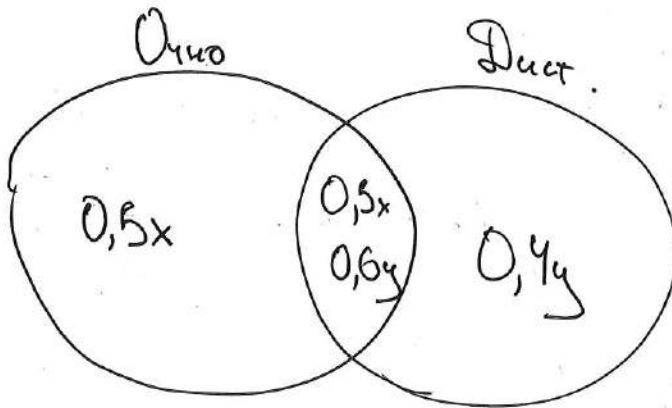
Код участника:

(заполняется организатором)

МЧР 828

№1

Очная и Дистанционные Формы Обучения

k
xl
y

$$\frac{6y}{10} = \frac{5x}{10}$$

$$60y = 50x$$

$$y = \frac{50}{60}x$$

$$y = \frac{5}{6}x$$

Только на очном - $\frac{x}{2}$ Всего $\frac{x}{2} + \frac{x}{2} + \frac{2}{5}y$

$$\frac{x}{2}$$

$$x + \frac{2}{5}y$$

Подставим вместо $y = \frac{5}{6}x$

$$\frac{x}{2} : \left(x + \frac{2}{5} \cdot \frac{5}{6}x \right)$$

$$\frac{x}{2} : \frac{8x}{6} = \frac{x}{2} \cdot \frac{6}{8x} = \frac{3}{8}$$

Ответ: $\frac{3}{8}$ аудентов учатся только очно.

182 Kalkül kann man auch hier
 Seite 327

$$\begin{cases} A + 5B = 9 \\ 3A + 4B \geq 11 \\ 5A + 3B \geq 11 \end{cases}$$

Diese $A+B=k$, trägt $A=k-B$

$$\begin{cases} k-B+5B \geq 9 \\ 3k-3B+4B \geq 11 \\ 5k-5B+3B \geq 11 \end{cases}$$

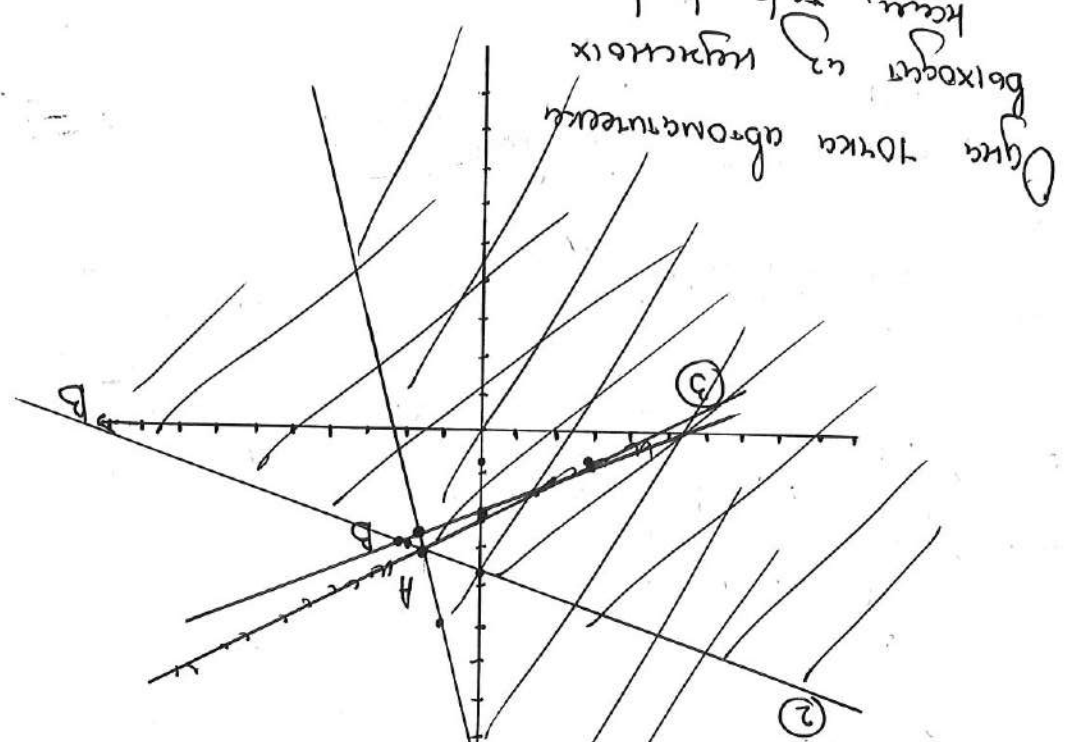
$$\begin{cases} k \geq 9-4B \\ k \geq 11-B \\ k \geq \frac{11+2B}{5} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad k &= 9-4B & \textcircled{2} \quad k &= \frac{11-B}{3} \\ \textcircled{3} \quad k &= \frac{11+2B}{5} \end{aligned}$$

B	0	1
k	9	5

B	0	2
k	11	3

B	0	-3
k	22	1



Diese Werte ablesen
 Beispiel zu Beispiel
 kann, falls
 & weiter & weiter

#2 Проверим 2 точки:

Приравняем (1) и (2):

$$9 - 4B = \frac{11 - B}{3}$$

$$27 - 12B = 11 - B$$

$$16 = 11B$$

$$B = \frac{16}{11}$$

||

Подставим, чтобы найти k , то есть $A+B$:

$$k = 9 - 4 \cdot \frac{16}{11}$$

$$k = \frac{99 - 64}{11} = \frac{35}{11} = 3 \frac{2}{11}$$

$$3 \frac{2}{11} > 3$$

||

3-наим. возможная
целая

Ответ: 3

#5 арс ctg $\frac{5x+3}{3x-5} + \text{арс ctg} \frac{x-1}{x+1} = x$

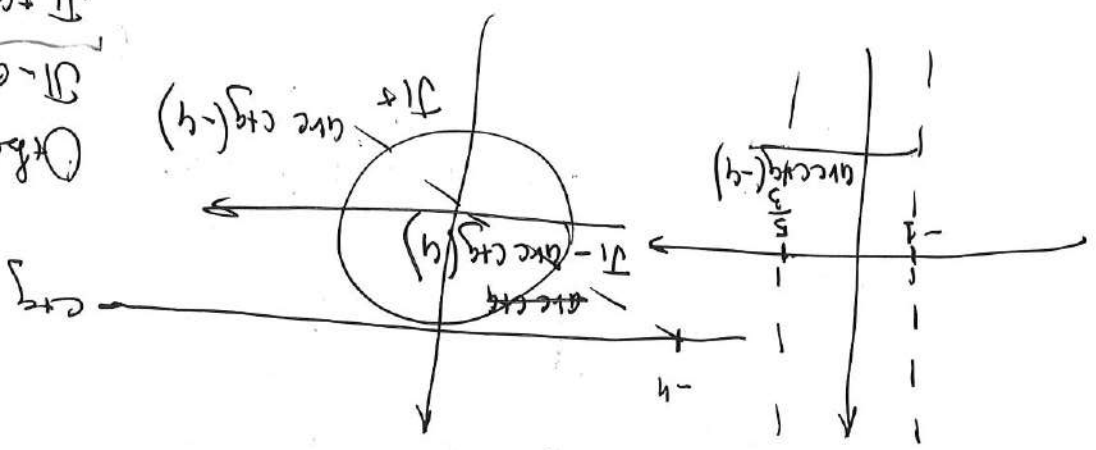
ОДЗ: $\begin{cases} 3x-5 \neq 0 \\ x+1 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x \neq 5 \\ x \neq -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq \frac{5}{3} \\ x \neq -1 \end{cases}$

$$f'(x) = -\frac{1}{1 + \left(\frac{5x+3}{3x-5}\right)^2} \cdot \left(\frac{5x+3}{3x-5}\right)' - \frac{1}{1 + \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2} \cdot \left(\frac{x-1}{x+1}\right)' \Rightarrow$$

$$f'(x) = -\frac{1}{\frac{(3x-5)^2 + (5x+3)^2}{(3x-5)^2}} \cdot \frac{5(3x-5) - 3(5x+3)}{(3x-5)^2} - \frac{1}{\frac{(x+1)^2 + (x-1)^2}{(x+1)^2}} \cdot$$

$$\frac{(x+1) - (x-1)}{(x+1)^2}$$

Other:
 $\text{II} - \text{arc ctg}(4)$
 $\text{II} + \text{arc ctg}(-4)$



$$\begin{aligned} f(2) &= \text{arc ctg}(-4) - \text{arc ctg}(4) \\ f(1) &= \text{arc ctg}\left(-\frac{2}{8}\right) \\ X &= 1, \quad 0 = \frac{X+1}{X-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f\left(-\frac{3}{5}\right) &= \text{arc ctg}(-4) - \text{arc ctg}\left(-\frac{3}{5}\right) \\ f\left(-\frac{3}{5}\right) &= \text{arc ctg}\left(-\frac{3}{5} \cdot \frac{8}{8} \cdot \frac{2}{2}\right) \\ f\left(-\frac{3}{5}\right) &= \text{arc ctg} 0 + \text{arc ctg}\left(-\frac{3}{5} - 1\right) \\ X &= -\frac{3}{5}, \quad 0 = \frac{5X+3}{5X-5} \end{aligned}$$

$$f(x) = \begin{cases} a_1, & x < -1 \\ a_2, & -1 < x < \frac{3}{5} \\ a_3, & x > \frac{3}{5} \end{cases}$$

непрерывная функция $\Rightarrow f(x) = \frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1} = 0$

$$f(x) = \frac{34}{34} - \frac{34x^2+34}{2x^2+2}$$

$$f(x) = \frac{-34}{-34} - \frac{9x^2-30x+25+25x^2+30x+9}{2x^2+2x+1+x^2-x+1}$$

$$f(x) = \frac{(3x-5)^2}{(3x-5)^2 + (5x+3)^2} - \frac{(3x-5)^2}{(3x-5)^2 + (5x+3)^2} - \frac{(x+1)^2}{(x+1)^2 + (x-1)^2} \cdot \frac{x+1-x+1}{(x+1)^2}$$

Код участника:

(заполняется организатором)

M11828

$$\#5 \quad f'(x) = \frac{-(3x-5)^2}{(3x-5)^2 + (5x+3)^2} \cdot \frac{15x-25-15x-9}{(3x-5)^2} - \frac{(x+1)^2}{(x+1)^2 + (x-1)^2} \cdot \frac{x+1-x+1}{(x+1)^2}$$

$$\frac{x+1-x+1}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = - \frac{-34}{9x^2 - 30x + 25 + 25x^2 + 30x + 9} - \frac{2}{x^2 + 2x + 1 + x^2 - 2x + 1}$$

$$f'(x) = \frac{34}{34x^2 + 34} - \frac{2}{2x^2 + 2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{x^2 + 1} - \frac{1}{x^2 + 1} = 0 \Rightarrow \text{функция кусочно-непрерывная}$$

$$① \quad \frac{5x+3}{3x-5} = 0; \quad x = -\frac{3}{5}$$

$$f\left(-\frac{3}{5}\right) = \arctg 0 + \arctg \left(\frac{-\frac{3}{5} - 1}{-\frac{3}{5} + 1} \right)$$

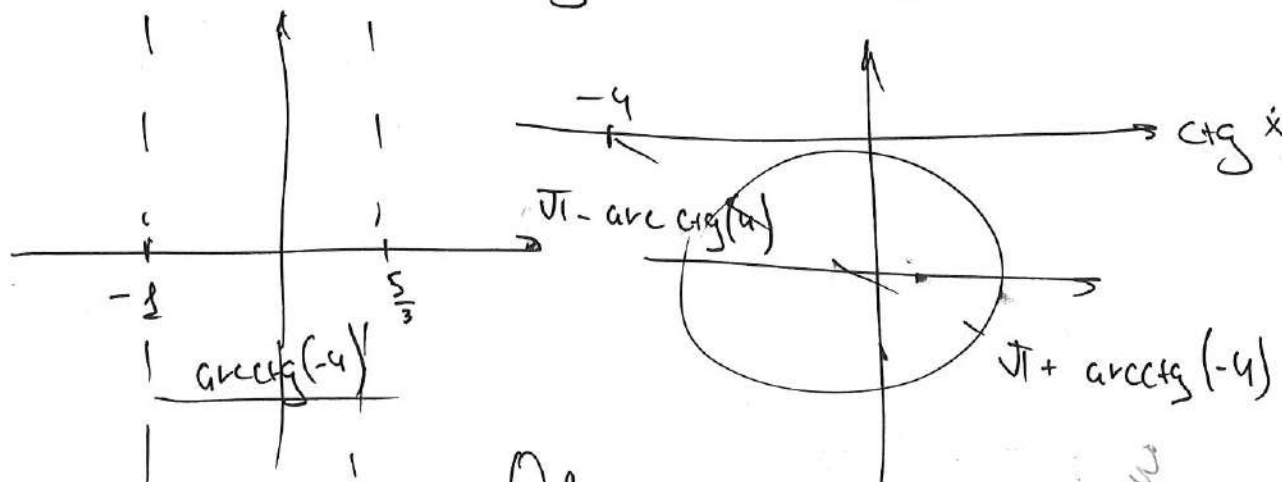
$$f\left(-\frac{3}{5}\right) = \arctg(-4) - 2\text{ой квад.}$$

$$② \quad \frac{x-1}{x+1} = 0; \quad x = 1$$

$$f(1) = \arctg\left(\frac{8}{-2}\right)$$

$$f(1) = \arctg(-4) - 2\text{ой квадрант}$$

$$f(x) = \begin{cases} a_1, & x < -1 \\ a_2, & -1 < x < \frac{5}{3} \\ a_3, & x > \frac{5}{3} \end{cases}$$



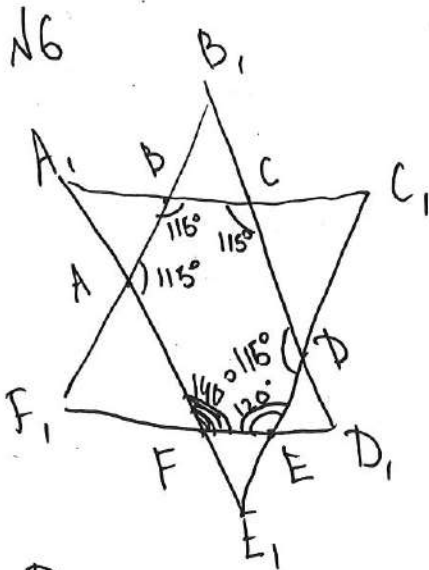
Ответ: $\pi - \arctg(4)$
 $\pi + \arctg(-4)$

неверно

Код участника:

(заполняется организатором)

111 828

Дано: $ABCDEF$

$$\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 115^\circ$$

$$\angle E = 120^\circ$$

$$\angle F = 140^\circ$$

Найти: $\angle AA_1B_1$; $\angle BB_1C_1$; $\angle CC_1D_1$;
 $\angle DD_1E_1$; $\angle EE_1F_1$; $\angle FF_1A_1$.

Решение:

1) Рассмотрим $\triangle AA_1B_1$ (смежные)

$$\left. \begin{aligned} \angle A_1AB_1 &= 180^\circ - \angle FAB = 180^\circ - 115^\circ = 65^\circ \\ \angle A_1BA_1 &= 180^\circ - 115^\circ = 65^\circ \end{aligned} \right\} \Rightarrow \angle AAB_1 = 180^\circ - 130^\circ = 50^\circ$$

2) Аналогично рассмотрим $\triangle BB_1C_1$ и $\triangle CC_1D_1$:

$$\angle BB_1C_1 = 50^\circ$$

$$\angle CC_1D_1 = 50^\circ$$

3) Рассмотрим $\triangle DD_1E_1$:

$$\angle D_1DE_1 = 180^\circ - 115^\circ = 65^\circ$$

$$\angle D_1ED_1 = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$$

$$\left. \begin{aligned} \angle D_1DE_1 &= 180^\circ - 115^\circ = 65^\circ \\ \angle D_1ED_1 &= 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ \end{aligned} \right\} \Rightarrow \angle DD_1E_1 = 180^\circ - 125^\circ = 55^\circ$$

4) Рассмотрим $\triangle EE_1F_1$:

$$\angle FEE_1 = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$$

$$\angle E_1FE = 180^\circ - 140^\circ = 40^\circ$$

$$\left. \begin{aligned} \angle FEE_1 &= 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ \\ \angle E_1FE &= 180^\circ - 140^\circ = 40^\circ \end{aligned} \right\} \Rightarrow \angle EE_1F_1 = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$$

5) Рассмотрим $\triangle FF_1A_1$:

$$\angle F_1AF = 180^\circ - 115^\circ = 65^\circ$$

$$\angle AFF_1 = 180^\circ - 140^\circ = 40^\circ$$

$$\left. \begin{aligned} \angle F_1AF &= 180^\circ - 115^\circ = 65^\circ \\ \angle AFF_1 &= 180^\circ - 140^\circ = 40^\circ \end{aligned} \right\} \Rightarrow \angle AF_1F = 180^\circ - 105^\circ = 75^\circ$$

Ответ: $\angle AA_1B_1 = 50^\circ$; $\angle BB_1C_1 = 50^\circ$; $\angle CC_1D_1 = 50^\circ$; $\angle DD_1E_1 = 55^\circ$; $\angle EE_1F_1 = 80^\circ$; $\angle FF_1A_1 = 75^\circ$

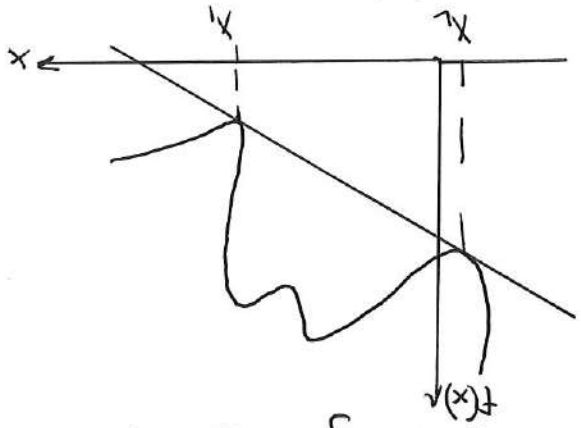
$$y = ax^4 + x^2 + x$$

б гбгх точек

графике начертать

$$\textcircled{x_1 \neq x_2} \text{ б гбгх точек}$$

норму на графике отметить



Так как это касательная, она задается уравнением

$$y = kx + b \text{ или } f(x) = kx + b$$

как мы знаем, k - это тангенс угла наклона касательной, и поэтому она выбирается так, чтобы касательная была горизонтальной.

$$f'(x_1) = f'(x_2) = k$$

$$4ax_1^3 + 2x_1 + 1 = 4ax_2^3 + 2x_2 + 1$$

$$4ax_1^3 - 4ax_2^3 + 2x_1 - 2x_2 = 0$$

$$4a(x_1^3 - x_2^3) + 2(x_1 - x_2) = 0 \quad | :2$$

$$2a(x_1^3 - x_2^3) + (x_1 - x_2) = 0$$

$$2a(x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) + (x_1 - x_2) = 0$$

$$(x_1 - x_2) (2a(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) + 1) = 0$$

$$2a(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) + 1 = 0$$

это не может быть так, так как углы отрицательны.

Код участника:
(заполняется организатором)

M11 828

#7

$$y = ax^4 + x^2 + x$$

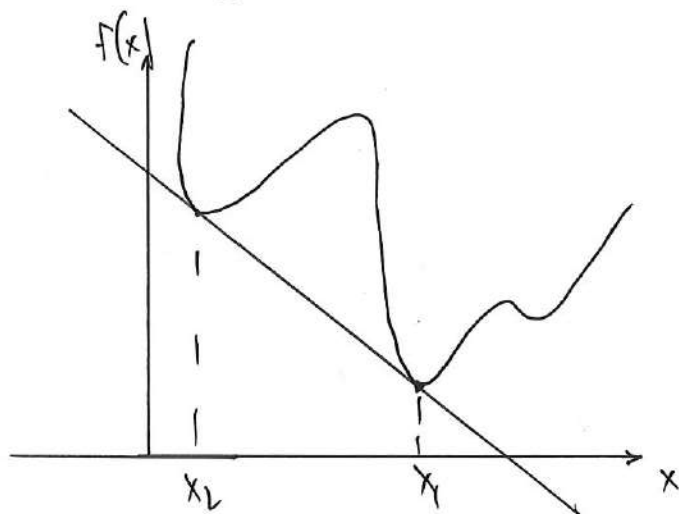
в

двух

точках

значения

параметра



$$\Downarrow$$

$$x_1 \neq x_2$$

потому что, если
они ~~бы~~ будут равны, то
будет 1 точка.

Так как это касательная, она задается уравнением
прямой $y = kx + b$ или $f(x) = kx + b$

Как мы знаем, k – это тангенс угла наклона
касательной, и производная тоже является
тангенсом $\angle$ наклона касательной, то есть:

$$f'(x_1) = f'(x_2) = k$$

$$4ax_1^3 + 2x_1 + 1 = 4ax_2^3 + 2x_2 + 1$$

$$4ax_1^3 - 4ax_2^3 + 2x_1 - 2x_2 = 0$$

$$4a(x_1^3 - x_2^3) + 2(x_1 - x_2) = 0 \quad | :2$$

$$2a(x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) + (x_1 - x_2) = 0$$

$$(x_1 - x_2)(2a(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) + 1) = 0$$

это
не может
быть, выво
сверху.

$$2a(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) + 1 = 0$$

#7

А ещё мы знаем, что k — это $\tan \alpha$ наклона касательной, это значит, что его можно заменить на производную:

$$f(x_1) = kx_1 + b$$

$$f(x_2) = kx_2 + b$$

$$\Downarrow$$

$$\left. \begin{aligned} b &= f(x_1) - f'(x_1) \cdot x_1 \\ b &= f(x_2) - f'(x_2) \cdot x_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{Приравняем:}$$

$$f(x_1) - f'(x_1) \cdot x_1 = f(x_2) - f'(x_2) \cdot x_2$$

$$ax_1^4 + x_1^2 + x_1 - (4ax_1^4 + 2x_1^2 + x_1) = ax_2^4 + x_2^2 + x_2 - (4ax_2^4 + 2x_2^2 + x_2)$$

$$ax_1^4 + x_1^2 + x_1 - 4ax_1^4 - 2x_1^2 - x_1 = ax_2^4 + x_2^2 + x_2 - 4ax_2^4 - 2x_2^2 - x_2$$

$$-3ax_1^4 - x_1^2 = -3ax_2^4 - x_2^2$$

$$3ax_2^4 - 3ax_1^4 + x_2^2 - x_1^2 = 0$$

$$3a(x_2^4 - x_1^4) + (x_2 - x_1)(x_2 + x_1) = 0$$

$$3a(x_2^2 + x_1^2)(x_2 - x_1)(x_2 + x_1) + (x_2 - x_1)(x_2 + x_1) = 0$$

$$(x_2 - x_1)(x_2 + x_1)(3a(x_2^2 + x_1^2) + 1) = 0$$

не
может
быть,
так как
будет
решение
противоречит
условию

$$\neq 0$$

$$\left\{ \begin{aligned} x_1 &= -x_2 \\ 3a(x_2^2 + x_1^2) + 1 &= 0 \\ 2a(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) + 1 &= 0 \end{aligned} \right.$$

неполный квадрат, он ≥ 0

$\Rightarrow$ а должно быть < 0

1)

#4

$$\begin{cases} x_1' = -x_2 \\ 2a(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) + 1 = 0 \end{cases}$$

$$2a(x_1^2 - x_2^2 + x_2^2) + 1 = 0$$

$$2ax_2^2 + 1 = 0$$

$$2ax_2^2 = -1$$

$$ax_2^2 = -\frac{1}{2a}$$

$$x_2 = \pm \sqrt{-\frac{1}{2a}}$$

$$\text{Eau } x_2 = -\sqrt{-\frac{1}{2a}}, \text{ et } x_1 = \sqrt{-\frac{1}{2a}}$$

Forge l'expression de la courbe

avec les valeurs

$$\begin{aligned} y &= f(x_1)(x-x_1) + f(x_1) \\ y &= \left(\frac{1}{2a} \right) \left(-\frac{1}{2a} \right) \cdot \left(\sqrt{-\frac{1}{2a}} + 2\sqrt{-\frac{1}{2a}} + 1 \right) + \left(\sqrt{-\frac{1}{2a}} + 1 \right) \\ y &= \left(-\frac{1}{4a} \right) \left(\sqrt{-\frac{1}{2a}} + 2\sqrt{-\frac{1}{2a}} + 1 \right) + \left(\sqrt{-\frac{1}{2a}} + 1 \right) \\ y &= x - \sqrt{-\frac{1}{2a}} + \frac{1}{4a} - \frac{1}{2a} + \sqrt{-\frac{1}{2a}} \end{aligned}$$

$$y = x - \frac{1}{4a}$$

Код участника:

(заполняется организатором)

111 828

7

$$1) \begin{cases} x_1 = -x_2 \\ 2a(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) + 1 = 0 \end{cases}$$

$$2a(x_1^2 - x_2^2 + x_2^2) + 1 = 0$$

$$2ax_2^2 + 1 = 0$$

$$2ax_2^2 = -1$$

$$x_2^2 = -\frac{1}{2a}$$

$$x_2 = \pm \sqrt{-\frac{1}{2a}}$$

$$\text{Если } x_2 = -\sqrt{-\frac{1}{2a}}, \text{ то } x_1 = \sqrt{-\frac{1}{2a}}$$

Тогда уравнение касательной
будет выглядеть так:

$$y = f'(x_1)(x - x_1) + f(x_1)$$

$$y = 4a \cdot \left(-\frac{1}{2a}\right) \cdot \sqrt{-\frac{1}{2a}} + 2\sqrt{-\frac{1}{2a}} + 1 \left(x - \sqrt{-\frac{1}{2a}}\right) + a\left(-\frac{1}{2a}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2a}\right) - \sqrt{-\frac{1}{2a}}$$

$$y = \left(-2\sqrt{-\frac{1}{2a}} + 2\sqrt{-\frac{1}{2a}} + 1\right)(x - \sqrt{-\frac{1}{2a}}) + a \cdot \frac{1}{4a^2} - \frac{1}{2a} - \sqrt{-\frac{1}{2a}}$$

$$y = x - \sqrt{-\frac{1}{2a}} + \frac{1}{4a} - \frac{1}{2a} + \sqrt{-\frac{1}{2a}}$$

$$y = x - \frac{1}{4a}$$

$$\# 4 \quad 2) \begin{cases} 3a(x_2^2 + x_1^2) + 1 = 0 \\ 2a(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) + 1 = 0 \end{cases}$$

$$3ax_2^2 + 3ax_1^2 + 1 - 2ax_1^2 - 2ax_1x_2 - 2ax_2^2 - 1 = 0$$

$$ax_2^2 - 2ax_1x_2 + ax_1^2 = 0$$

$$a(x_2^2 - 2x_1x_2 + x_1^2) = 0$$

$$a(x_2 - x_1)^2 = 0$$

||

здесь x_1 и x_2 будут равны $\Rightarrow$ и удовлетворяет условию задачи.

Соответственно удовлетворяет

только 1 система

Ответ: $y = x - \frac{1}{4a}$, при $a < 0$

Задача 13

$$p(n) = \frac{g^n}{g^n + g^{50}}$$

Найдем сумму первого и последнего членов прогрессии:

$$p(L) = \frac{g^L}{g^L + g^{50}}$$

$$p(2L-1) = \frac{g^{2L-1}}{g^{2L-1} + g^{50}}$$

$$\frac{gg-1}{2} = 4g$$

$$4g \cdot 1 =$$

4g - сумма всех

$$\begin{aligned} & \frac{g^L}{g^L + g^{50}} + \frac{g^{2L-1}}{g^{2L-1} + g^{50}} = \frac{g^L}{g^L + g^{50}} + \frac{g^{2L}}{g} : \left(\frac{g^{2L}}{g} + g^{50} \right) = \\ & = \frac{g^L}{g^L + g^{50}} + \frac{g^{2L}}{Lg^{51}g} : \left(\frac{g^{2L} + g^{51}}{g} \right) = \frac{g^L}{g^L + g^{50}} + \frac{g^{2L}}{g} \cdot \frac{g}{g^{2L} + g^{51}} = \\ & = \frac{g^L}{g^L + g^{50}} + \frac{g^{2L}}{g^{2L} + g^{51}} = \frac{g^L}{g^L + g^{50}} + \frac{g^{2L}}{g^{2L} + g^{51}} = 1 \end{aligned}$$

Oben: 49,5

$$49 + \frac{1}{2} = 49,5$$

symmetrisch

$$\frac{g_e}{g_e + g_e} = \frac{2g_e}{2g_e} = \frac{1}{1}$$

symmetrisch

Код участника:

(заполняется организатором)

N11828

#3

и центральный член:

$$\frac{g^L}{g^L + g^L} = \frac{g^L}{2g^L} = \frac{1}{2}$$

Сумма всех членов:

$$49 + \frac{1}{2} = 49,5$$

Ответ: 49,5

+

N8 He bewaard.

М 11 - 368

Код участника
(заполняется организатором)



**Олимпиадная работа
заключительного этапа
«Всероссийская олимпиада школьников "Миссия
выполнима. Твоё призвание - финансист!" 2023-2024
г.»
«(Математика 11 класс)»**

Вариант № 2

«27 января 2024 г.»

Никакие другие записи на титульном листе делать не разрешается

№ 11-368

Код участника

Всероссийская олимпиада школьников «Миссия выполнима. Твое призвание – финансист!» 2023/2024 уч.г.

Бланк проверки работы

Математика 11 класс

№ задания	ФИО эксперта	Балл	ФИО эксперта	Балл	Итоговый балл
1	Васильев	10	Гурьянов	10	10
2	Тюзеев	0	Орлов	0	0
3	Марков	12	Александров	12	12
4	Рубинский	0	Трундаев	0	0
5	Валова	2	Урозов	2	2
6	Олехова	0	Семанян	0	0
7	Семанян	0	Ананин	0	0
8	Кеминев	0	Щакин	0	0
ИТОГО					24

W5

$$\arcsin \frac{2n-1}{n+2} + \arcsin \frac{n+3}{3n-1} = \pi \quad n \neq -2, n \neq \frac{1}{3}$$

Возьмем тангенс от обеих частей уравнения:
 $\operatorname{tg}(\arcsin \frac{2n-1}{n+2} + \arcsin \frac{n+3}{3n-1}) = \operatorname{tg} \pi$. Распишем левую часть по формуле тангенса суммы:

$$\frac{\operatorname{tg}(\arcsin \frac{2n-1}{n+2}) + \operatorname{tg}(\arcsin \frac{n+3}{3n-1})}{1 - \operatorname{tg}(\arcsin \frac{2n-1}{n+2}) \cdot \operatorname{tg}(\arcsin \frac{n+3}{3n-1})} = \operatorname{tg} \pi$$

$$\frac{\frac{2n-1}{n+2} + \frac{n+3}{3n-1}}{1 - \frac{2n-1}{n+2} \cdot \frac{n+3}{3n-1}} = \operatorname{tg} \pi$$

$$\frac{\frac{2n-1}{n+2} + \frac{n+3}{3n-1}}{1 - \frac{(2n-1)(n+3)}{(n+2)(3n-1)}} = \frac{\frac{7n^2+7}{(n+2)(3n-1)}}{\frac{n^2+1}{(n+2)(3n-1)}}$$

$$\frac{7n^2+7}{n^2+1} = \operatorname{tg} \pi; \text{ т.к. } n^2+1 \neq 0: \operatorname{tg} \pi = 7$$

Отсюда $n = \arcsin 7 + \pi k, k \in \mathbb{Z}$. Это, где такое число не равно -2 и $\frac{1}{3}$.

Ответ: $n = \arcsin 7 + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

W7

Пусть n чел. не знают по-английски, а y чел. – по-французски. Тогда их общее количество равно $\frac{y}{n}$.
 Если n чел. – знают по-французски, но не знают по-англ.
 Тогда $0,96n$ чел не знают ни по-француз, ни по-англ. Аналогично
 $0,2y$ чел – знают по-англ. и не знают по-француз $\Rightarrow 0,8y$ чел.
 не знают ни по-француз, ни по-англ. Отсюда получаем:

$$0,8y = 0,96n \quad \frac{y}{n} = \frac{0,96}{0,8} = 1,2$$

Ответ: в 1,2 раза. $\dagger 10$



В оргкомитет
Всероссийской олимпиады школьников
«Миссия выполнима. Твое призвание -
финансист!»

Заявление

Прошу Вас допустить меня к участию в заключительном этапе Всероссийской олимпиады школьников «Миссия выполнима. Твое призвание - финансист!».

Для регистрации меня как участника олимпиады сообщаю о себе следующие данные:

Фамилия:	Кромский
Имя:	Игоревич
Отчество:	Сергеевич
Гражданство:	Российское
Класс:	11
Полное наименование образовательной организации:	МБОУ лицей 150 при ДЮСШ
Регион постоянной регистрации:	Республика Беларусь
Населенный пункт:	г. Вельяны - на - Волга
Телефон:	88887025212
Email:	v.kromskiy@yandex.ru

С Порядком проведения олимпиад школьников, положением о Всероссийской олимпиаде школьников «Миссия выполнима. Твое призвание - финансист!» и ее регламентом ознакомлен.



Подпись участника

27.01.2024

Дата

СООРГАНИЗАТОРЫ ОЛИМПИАДЫ

- Республиканский центр по работе с одаренными детьми "Алтай-Хаксия"
- ГАНБОУ «Региональный центр выявления, поддержки и развития способностей и талантов у детей и молодежи»
- Региональный центр выявления, поддержки и развития способностей и талантов у детей и молодежи "Сирис-Проморье"
- ГАНБОУ ВО «Региональный центр «Орион»
- ФГАОУ ВО «Северо-Кавказский федеральный университет»
- Государственное бюджетное учреждение «Региональный центр оценки качества образования Сахалинской области»
- ФГБОУ ВО «Калининградский государственный технический университет»
- Специализированный учебно-научный центр Южного федерального округа (СУНЦ ЮФО)
- ЧОУ "Гимназия 212 "Батлеровбург-Париж"
- Красноярское государственное автономное негосударственное образовательное учреждение «Красный центр образования» КГАИРОУ «КЦО»

W3

$$p(n) = \frac{(-3)^n}{3^n + 3^{17}} = \frac{3^n \cdot (-1)^n}{3^n(1 + 3^{17-n})} = \frac{(-1)^n}{1 + 3^{17-n}}$$

Заметим, что $p(1) = -\frac{1}{1+3^{16}}$ и $p(33) = -\frac{1}{1+\frac{1}{3^{16}}}$ в сумме дают -1 , т.е. в сумме $\frac{1}{1+n} + \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = \frac{1}{1+n} + \frac{n}{n+1} = \frac{n+1}{n+1} = 1$ с точностью до знака и при $n \neq 0$ и $n \neq -1$, а т.е. 3^{17-n} – показательная функция, то формула выполняется при любых n . Докажем, что для $\forall n \in \mathbb{N}$ выполняется:

$$p(n) + p(34-n) = (-1)^n \quad p(34-n) = \frac{(-1)^{34-n}}{1 + 3^{17-(34-n)}} = \frac{(-1)^{34} \cdot (-1)^{-n}}{1 + \frac{1}{3^{17-n}}} = \frac{(-1)^{34} \cdot (-1)^{-n}}{1 + \frac{1}{3^{17-n}}} = \frac{(-1)^n}{1 + \frac{1}{3^{17-n}}}$$

$$= \frac{(-1)^n}{1 + 3^{17-n}} + \frac{(-1)^n}{1 + \frac{1}{3^{17-n}}} = (-1)^n \left(\frac{1}{1 + 3^{17-n}} + \frac{1}{1 + \frac{1}{3^{17-n}}} \right) = (-1)^n \text{ т.е. г.}$$

В сумме, которую нам необходимо найти, нечетное кол-во элементов, значит $p(17)$ останется «без пары». Вдар же будет 16, среди которых 8 с четными n и 8 с нечетными: $-1 \cdot 8 + 1 \cdot 8 = 0$. Тогда вся сумма равна $p(17) = -\frac{1}{1+3^0} = -\frac{1}{2}$

Ответ: $-\frac{1}{2}$ +

W2

$$\begin{cases} 3A + 5B \leq 11 \\ 4A + 3B \leq 10 \\ 7A + 4B \leq 18 \end{cases} \quad \begin{cases} 3(A+B) + 2B \leq 11 \\ 3(A+B) + A \leq 10 \\ 4(A+B) + 3A \leq 18 \end{cases} \quad \begin{cases} A+B \leq -\frac{2}{3}B + \frac{11}{3} \\ A+B \leq -\frac{1}{3}A + \frac{10}{3} \\ A+B \leq -\frac{3}{4}A + \frac{9}{2} \end{cases}$$

Для того, чтобы $A+B$ было наибольшим, в одном из неравенств должно достигаться равенство.

решения ответа не получил 05

Количество страниц 04 из 05 Код участника

Время: 11.20
Земля:

МН-392

(заполняется организатором)

Время сдачи: 11:39

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА
На заключительном этапе
Всероссийской олимпиады школьников «Миссия выполнима. Твоё призвание
– финансист!»
(математика 11 класс)

Кривкин Владимир Сергеевич

(Фамилия, имя, отчество участника в именительном падеже)

Учащегося Финансового 11 класса

(цифрами и прописью)

Дата рождения 22.01.2006

(ДДММГГГГ)

МБОУ гимназия № 50 при ДОТГУ

(Полное наименование образовательной организации, в которой обучается)

г. Ростов-на-Дону

(Населенный пункт/ субъект РФ/ иностранное государство)

Вариант № 2 два

(Цифрами и прописью)

(Подпись участника)

Абакан – Барнаул – Благоевск – Брянск – Бузулук – Владивосток – Владикавказ – Владимир –
Воронеж – Екатеринбург – Калуга – Казань – Калининград – Краснодар – Красноярск – Курск –
Липецк – Магнитогорск – Москва – Мурманск – Новороссийск – Новосибирск – Омск – Орел – Пенза –
Пермь – Ростов-на-Дону – Самара – Санкт-Петербург – Смоленск – Ставрополь – Сургут –
Сыктывкар – Тула – Улан-Удэ – Уфа – Хабаровск – Челябинск – Шадринск – Южно-Сахалинск –
Якутск – Ярославль

27 января 2024 года

Никакие другие записи на титульном листе делать не разрешается



№ 7.

Заметим, что условие касания двух функций равносильно системе: $\begin{cases} f(x_0) = g(x_0) \\ f'(x_0) = g'(x_0) \end{cases}$ Пусть $g(x) = kx + a$

$$f'(x) = 4x^3 + 2bx + 1 \quad g'(x) = k$$

$$\begin{cases} 4x_0^3 + 2bx_0 + 1 = k \\ x_0^4 + bx_0^2 + x_0 = kx_0 + a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0^4 + bx_0^2 + x_0 = 4x_0^3 + 2bx_0^2 + x_0 + a \\ 3x_0^4 + bx_0^2 + a = 0 \end{cases}$$

Для того, чтобы прямая касалась графика данной функции в единственном, данное уравнение должно иметь 2 и более решения.

$$\begin{aligned} x_0^2 = t \quad 3t^2 + bt + a &= 0 \\ D = b^2 - 12a &\geq 0. \end{aligned}$$

ОК!

№ 6 не б

№ 8 не б

№ 9 не б

Российская Федерация
Управление образования
г. Ростов-на-Дону
муниципальное бюджетное
общеобразовательное учреждение
города Ростов-на-Дону
«Лицей № 50 при ДГТУ имени Героя
Советского Союза Калининца Н.Д.»
344018, г. Ростов-на-Дону
пер. Соборный, 88,
тел.: 210-63-56; 234-34-22
от 10.06.2024 № 10

СПРАВКА

Выдана Краснову Владиславу Сергеевичу 14.06.2006
года рождения, в том, что он (она) является учащимся (ейся) 11-б класса
МБОУ «Лицей № 50 при ДГТУ» (приказ о зачислении № 416-У от 11.07.2022г.).
Форма обучения очная. Стипендией не обеспечивается.
Срок окончания МБОУ «Лицей № 50 при ДГТУ» 30.06.2024 г.

Справка дана для предоставления по месту требования.

Директор МБОУ
«Лицей № 50 при ДГТУ»



Желябина Н.А.

М11-890

Код участника
(заполняется организатором)



**Олимпиадная работа
заключительного этапа
«Всероссийская олимпиада школьников "Миссия
выполнима. Твоё призвание - финансист!" 2023-2024
г.»
«(Математика 11 класс)»**

Вариант № 1

«27 января 2024 г.»

Никакие другие записи на титульном листе делать не разрешается

М11-830

Код участника

Всероссийская олимпиада школьников «Миссия выполнима. Твое призвание – финансист!» 2023/2024 уч.г.

Бланк проверки работы

Математика 11 класс

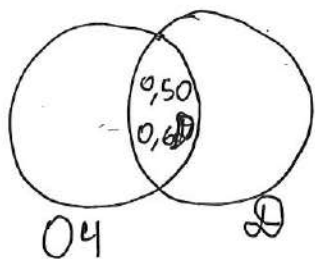
№ задания	ФИО эксперта	Балл	ФИО эксперта	Балл	Итоговый балл
1	Александрова М.Т.	10	Васильев А.В.	10	10
2	Роздеев	10	Заставин	10	10
3	Мартков	12	Иванова	12	12
4	Мам	0	Васильев	0	0
5	Кремев	8	Борисов	8	8
6	Олегов	3	Троцкий	3	3
7	Корнев	3	Степанов	3	3
8	Фелин	0	Щеглов	0	0
ИТОГО					46

Код участника: 411-830

(заполняется организатором)

Задача 1

1. Представим условие задачи в виде кругов Эйлера, тогда по условию нам дано, что общих студентов всего 0,4 человек, из них 0,5 · 0,4 также занимаются дистанционно. Пусть дистанционных студентов всего D. Тогда по условию 0,6 D также занима-ются и оно:



Тогда всего студентов, занимающихся и оно и дистанцион-но: $0,5 \cdot 0,4 = 0,6 \cdot D$

и. $0,4 = \frac{0,6}{0,5} D = 1,2 D$ ⁽¹⁾ ~~отражает~~ ~~этого~~ ~~числа~~

это выражение ~~является~~ ~~более~~ ~~число~~ ~~дистанционно~~ то, как ~~выразить~~ ~~более~~ ~~число~~ ~~общих~~ ~~студентов~~ ~~через~~ ~~общее~~ ~~число~~ ~~дистанционных~~.

2. Всего ~~общих~~ ~~студентов~~ ~~са~~ ~~только~~ ~~одно~~ ~~студентов~~ ~~занимающихся~~ ~~дистанционно~~ $0,4 - 0,5 \cdot 0,4 = 0,5 \cdot 0,4$. А сту-дентов всего: $0,5 \cdot 0,4 + D$, т.е. это ~~число~~ ~~только~~ ~~одно~~ ~~дистанционно~~ ~~и~~ ~~тех~~, кто ~~занимается~~ ~~дистанционно~~. ~~из~~ ~~(1)~~ ~~знаем~~, что $0,4 = 1,2 D$, и. студен-тов всего: $0,5 \cdot 0,4 + D = 0,5 \cdot 1,2 D + D = 0,6 D + D = 1,6 D$

3. Найдем отношение ~~только~~ ~~одно~~ ~~студентов~~, ~~занимающихся~~ ~~дистанционно~~ к общему числу студентов: $\frac{0,5 \cdot 1,2 D}{1,6 D} = \frac{0,6 D}{1,6 D} = \frac{3}{8}$, что в процен-тах составляет $37,5\%$.
 Ответ: $\frac{3}{8}$ или $37,5\%$.

+ 10 баллов!

Код участника: 111-830

(заполняется организатором)

Задание. 2

1. $A+B$ – наибольшее

Построим график системы, данной в условии:

$$\begin{cases} A+5B \geq 9 & (1) \\ 3A+4B \geq 11 & (2) \\ 5A+3B \geq 11 & (3) \end{cases}$$

2. Пусть в данной системе координат будем B , а по оси абсцисс – A . Построим ограничительные прямые (1), (2) и (3) – это получимось $A+5B=9$;

$$3A+4B=11$$

Тогда

$$\text{т.е. } B = \frac{9}{5} - \frac{A}{5}$$

Получаемость (1) находится справа от этой прямой.

Аналогично строим прямые $3A+4B=11$,

$$\text{т.е. } B = \frac{11}{4} - \frac{3}{4}A$$

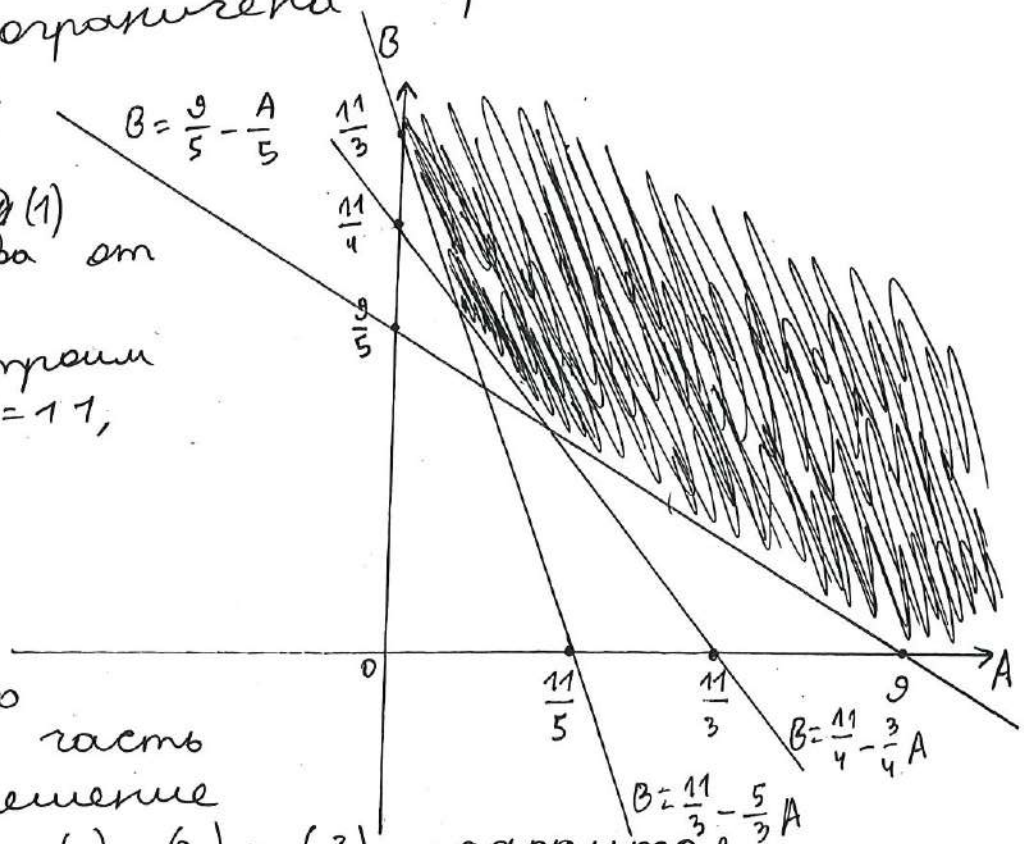
и $5A+3B=11$,

$$\text{т.е. } B = \frac{11}{3} - \frac{5}{3}A$$

Получается, что необходимая часть плоскости – решение системы из (1), (2) и (3), находится правее всех этих прямых (см. рисунок) – заштрихованная часть.

3. Пусть $A+B=N$, тогда множество параллельных

$B=N-A$ – это прямые.



Код участника: М11-850

(заполняется организатором)

к заданию 2.

П.к. по условию необходимо найти наименьшее значение N , то необходимо эту прямую $B = N - A$ перенести как можно ниже, чтобы данная прямая касалась заштрихованной области. Из графика понятно, что наименьшее N будет достигаться при пересечении прямых $B = \frac{11}{3} - \frac{5}{3}A$ и $B = \frac{11}{4} - \frac{3}{4}A$, когда $A = 1$ и $B = 2$

или при пересечении прямых $B = \frac{11}{4} - \frac{3}{4}A$ и $B = \frac{9}{5} - \frac{A}{5}$, когда $A = \frac{19}{11}$ и $B = \frac{16}{11}$.

Найдём значение N в этих двух точках, при $A = 1$ и $B = 2$ $N = A + B = 1 + 2 = 3$
 При $A = \frac{19}{11}$ и $B = \frac{16}{11}$ $N = \frac{19}{11} + \frac{16}{11} = \frac{35}{11} > 3$

Сл. $N = 3$ - наименьшее возможное.

Ответ: ~~при~~ ~~наим~~ 3 - наименьшее возможное значение $A + B$.

10

Задача. 3

1. Рассмотрим значение выражения $p(a) + p(100-a)$, где по условию $p(n) = \frac{9^n}{9^n + 9^{50}}$, при этом a – натуральное число и $a \in [1; 99]$.

$$\begin{aligned} \text{Тогда } p(a) + p(100-a) &= \frac{9^a}{9^a + 9^{50}} + \frac{9^{100-a}}{9^{100-a} + 9^{50}} = \\ &= \frac{9^a(9^{100-a} + 9^{50}) + 9^{100-a}(9^a + 9^{50})}{(9^a + 9^{50})(9^{100-a} + 9^{50})} = \\ &= \frac{9^{100} + 9^{50+a} + 9^{100} + 9^{150-a}}{9^{100} + 9^{50+a} + 9^{150-a} + 9^{100}} = 1 \quad (1) \end{aligned}$$

2. Таким образом, искомое выражение может быть выражено через сумму $p(a)$ и $p(100-a)$ в сумме, на паре $p(1)$ через разложение как сказа-

$$\begin{aligned} \text{По утверждению (1) даём 1.} \\ p(1) + p(2) + p(3) + \dots + p(99) = \\ = (p(1) + p(99)) + (p(2) + p(98)) + \dots + (p(49) + p(51)) + \end{aligned}$$

$$+ p(50) = 1 \cdot 49 + p(50) = 49 + p(50).$$

Заметим, что всего чисел 99, поэтому

из м.к. $99 \div 2$ по принципу пары не все числа, одно число останется "одиночкой", как выше показано,

$$\text{Этим числом является } p(50). \\ \text{Найдём } p(50) = \frac{9^{50}}{9^{50} + 9^{50}} = \frac{9^{50}}{2 \cdot 9^{50}} = \frac{1}{2}.$$

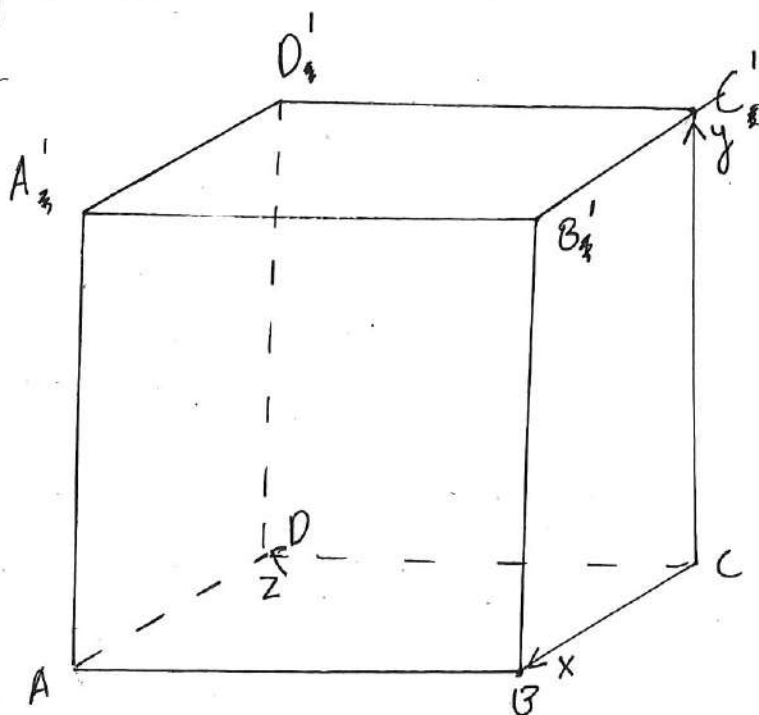
$$\text{Тогда } p(1) + p(2) + p(3) + \dots + p(99) = 49 + \frac{1}{2} = 49,5.$$

Ответ: 49,5.

Задача 4



Задача 4



Решение
1. Зная, что все точки равноудалены от $A'B'$ и AA' лежат на биссекторной плоскости, т.е. биссекторная плоскость этих прямых — это плоскость $A'BCD'$, т.к. $A'B$ — биссектриса $\angle A'AB'$.
Биссекторная плоскость, на которой лежат точки, равноудаленные от прямых AD и AA' — это плоскость $ABC'D'$.

Решение задачи 4.

Код участника: МЧ-830
(заполняется организатором)

П.Р. центр симметрии (обозначим его O) равноудален от прямых AA' , $A'B'$ и AD , то т. O лежит на прямой пересечения биссектрис углов треугольника, описанного выше.

т.Р. $A'B'C \cap A'B'C' = BD'$, то точка O лежит на прямой BD' .

2. Для дальнейшего решения задачи введем систему координат, где центром куба, лежащая на с - вершина куба, лежащая на сфере, радиус которой мы знаем по условию.

Пусть CB - это ось x , CD - это ось z , а CC_1 - это ось y .

Тогда в точке B куба $\vec{BD'} = (-1; 1; 1)$, т.Р. $B(1; 0; 0)$ $D'(0; 1; 1)$ и $O \in BD'$, то

т.Р. знаем, что т. $O \in BD'$, то можем сказать, что координаты точки O представим как:

т.е. $O(x_B + a \cdot x_{BD'}; y_B + a \cdot y_{BD'}; z_B + a \cdot z_{BD'})$, где a - некоторое действительное число.

3. Через координаты выразим $|OC| = R$, по условию, что C - центр координат и $C(0; 0; 0)$.

$$|OC| = \sqrt{(1-a)^2 + a^2 + a^2}$$

Код участника: М11-830

(заполняется организатором)

4. Проведем перпендикуляр из м. О на прямую $A'B'$, обозначим его OH , где $H \in A'B'$, т.к. $A'B' \parallel CZ$, то м. Н совпадает с м. перпендикуляра к прямой CZ , что и сама м. О, как было показано ранее это а. с. координата $H(1; 1; a)$.

По тогда по построению $OH = R$
 т.е. $OH = R = |\vec{OH}| = \sqrt{(1-a-1)^2 + (a-1)^2 + (a-a)^2}$
 $= \sqrt{a^2 + (a-1)^2}$

5. $OH = OC = R$ с. OC из пункта (3),
 равняется OH из пункта (4), т.е.:
 $OH = OC = \sqrt{(1-a)^2 + a^2 + a^2} = \sqrt{a^2 + (a-1)^2}$
 с. $a^2 = 0$
 и $a = 0$,

т.е. м. О совпадает с точкой
 ее координаты $(1; 0; 0)$.

В и тогда, можно найти радиус, зная,
 что BC – сторона куба и BC – ради-
 ус. Тогда $BC = R = 1$, с. искомый
 равен стороне куба.

Ответ: 1.

решение не
 обосновано
 ответ неверный

Код участника: 11-11-830
(заполняется организатором)

Задача . 5

$$\operatorname{arccctg} \frac{5x+3}{3x-5} + \operatorname{arccctg} \frac{x-1}{x+1} = x \quad (1)$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} 3x-5 \neq 0 \\ x+1 \neq 0 \\ x \neq \frac{5}{3} \\ x \neq -1 \end{cases}$$

При этом значение максимума стоит отнюдь не то, что по определению $\operatorname{arccctg} x$ определен на интервале от 0 до π , т.е. $\operatorname{arccctg} x \in [0; \pi]$. Т.е. x по уравнению - это сумма двух $\operatorname{arccctg}$, то $x \in [0.2; 2\pi]$, т.е. $0 \leq x \leq 2\pi$ - возможно.

более значение π . Тогда по ОДЗ: $x \in [0; \frac{5}{3}) \cup (\frac{5}{3}; 2\pi]$. через формулу котангенса. сумма

$= \operatorname{ctg} x$, тогда:

$$\frac{\operatorname{ctg}(\operatorname{arccctg} \frac{5x+3}{3x-5}) \cdot \operatorname{ctg}(\operatorname{arccctg} \frac{x-1}{x+1}) - 1}{\operatorname{ctg}(\operatorname{arccctg} \frac{5x+3}{3x-5}) + \operatorname{ctg}(\operatorname{arccctg} \frac{x-1}{x+1})} = \operatorname{ctg} x$$

$$\frac{\frac{5x+3}{3x-5} \cdot \frac{x-1}{x+1} - 1}{\frac{5x+3}{3x-5} + \frac{x-1}{x+1}} = \operatorname{ctg} x$$

$$\operatorname{ctg} x = \frac{(5x+3)(x-1) - (3x-5)(x+1)}{(5x+3)(x+1) + (x-1)(3x-5)} =$$

$$= \frac{5x^2 - 5x + 3x - 3 - 3x^2 - 3x + 5x + 5}{5x^2 + 5x + 3x + 3 + 3x^2 - 5x - 3x + 5} =$$

Код участника: 411-850

(заполняется организатором)

$$= \frac{2x^2+2}{8x^2+8} = \frac{2(x^2+1)}{8(x^2+1)} = \frac{1}{4}$$

т.е. $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{4}$
 Тогда $x = \operatorname{arccctg} \frac{1}{4} + \pi k$, где $k \in \mathbb{N}$

Однако по ОДЗ $x \leq 2\pi$
 т.е. $x = \left[\operatorname{arccctg} \frac{1}{4} + \pi \right]$

Проверим эти корни подстановкой в исходное уравнение.

$$x = \operatorname{arccctg} \frac{1}{4} + \pi$$

$$\operatorname{arccctg} \frac{5(\operatorname{arccctg} \frac{1}{4} + \pi) + 3}{3(\operatorname{arccctg} \frac{1}{4} + \pi) - 5} + \operatorname{arccctg} \frac{\operatorname{arccctg} \frac{1}{4} + \pi - 1}{\operatorname{arccctg} \frac{1}{4} + \pi + 1} =$$

$$= \operatorname{arccctg} \frac{1}{4} + \pi$$

Однако, заметим, что

$$\text{и что } \frac{\operatorname{arccctg} \frac{1}{4} + \pi - 1}{\operatorname{arccctg} \frac{1}{4} + \pi + 1} > 0, \text{ т.е. } \frac{5(\operatorname{arccctg} \frac{1}{4} + \pi) + 3}{3(\operatorname{arccctg} \frac{1}{4} + \pi) - 5} > 0$$

т.е. $\operatorname{arccctg} \frac{5x+3}{3x-5} < \frac{\pi}{2}$ и $\operatorname{arccctg} \frac{x-1}{x+1} < \frac{\pi}{2}$ при $x = \operatorname{arccctg} \frac{1}{4} + \pi$

данным x . Получаем, что $\operatorname{arccctg} \frac{5x+3}{3x-5} + \operatorname{arccctg} \frac{x-1}{x+1} < \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$ при $x = \operatorname{arccctg} \frac{1}{4} + \pi$

данным x , но данный x больше π , получаем, что равенство невозможно и $x = \operatorname{arccctg} \frac{1}{4} + \pi$ не является корнем уравнения.

С другим корнем $x = \operatorname{arccctg} \frac{1}{4}$ такого противоречия не возникает.

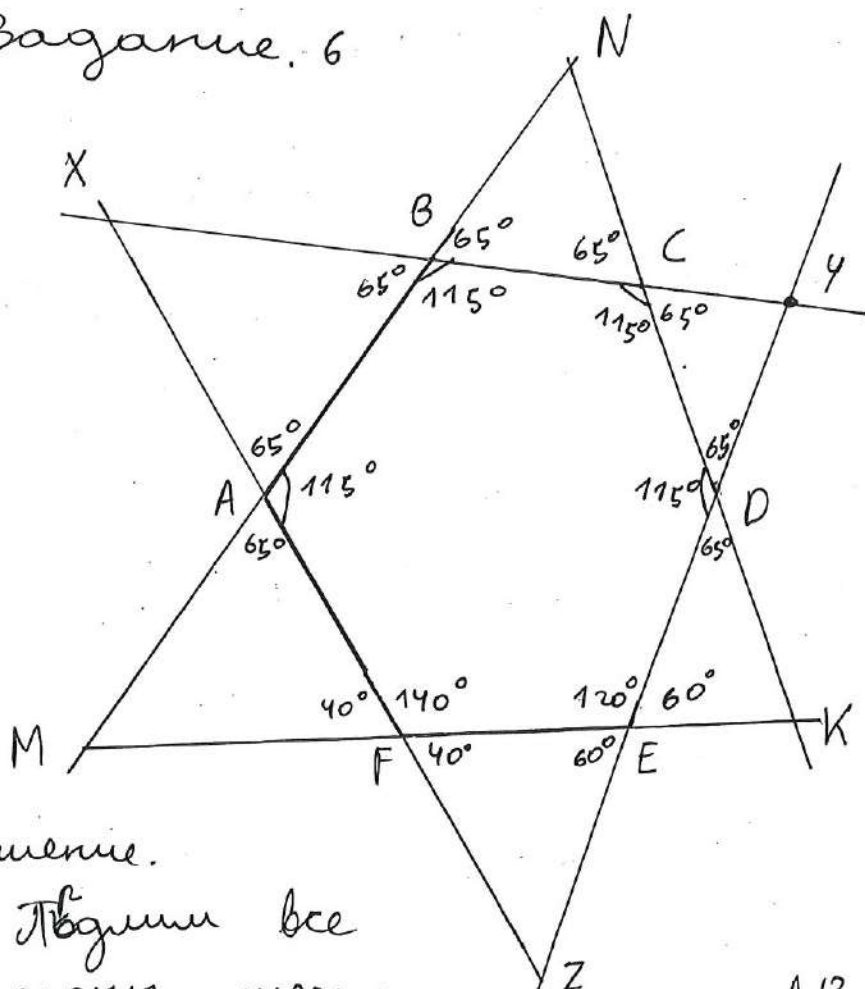
$$\operatorname{arccctg} \frac{5\operatorname{arccctg} \frac{1}{4} + 3}{3\operatorname{arccctg} \frac{1}{4} - 5} + \operatorname{arccctg} \frac{\operatorname{arccctg} \frac{1}{4} - 1}{\operatorname{arccctg} \frac{1}{4} + 1} = \operatorname{arccctg} \frac{1}{4}$$

Ответ: $x = \operatorname{arccctg} \frac{1}{4}$

Код участника: 111-830

(заполняется организатором)

Задача 6



Решение.

1. Проведём все стороны шестиугольника AB, BC, CD, DE, EF и AF до пересечения друг с другом, тогда $AB \cap FE = M$, $AB \cap CD = N$ и $CD \cap FE = K$ и MNK — один из изначальных треугольников.

$AF \cap BC = X$, $BC \cap DE = Y$ и $DE \cap AF = Z$ таким образом $\triangle XYZ$ — второй из изначальных треугольников.

и $ABCDEF$ образовался из пересечения треугольников MNK и XYZ . Так что по вопросу задачи необходимо найти углы этих треугольников.

2. $\angle MAF = \angle XAB = 180^\circ - \angle BAF$, т.к. $\angle MAF$ и $\angle XAB$ — вертикальные, смежные с $\angle BAF$
 и. $\angle MAF = \angle XAB = 180^\circ - 115^\circ = 65^\circ$

Код участника: **111-850**
(заполняется организатором)

Аналогично

$$\angle XBA = \angle NBC = 180^\circ - 115^\circ = 65^\circ$$

$$\angle NCB = \angle DCU = 180^\circ - 115^\circ = 65^\circ$$

$$\angle CDY = \angle EDK = 180^\circ - 115^\circ = 65^\circ$$

по свойствам смежных углов,
по вертикальным углам.
Аналогично образом:

$$\angle DEK = \angle FEZ = 180^\circ - \angle DEF = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$$

по свойству вертикальных и смежных углов

$$\angle EFZ = \angle MFA = 180^\circ - \angle AFE = 180^\circ - 140^\circ = 40^\circ$$

Все найденные углы подписаны на рисунке (см. предыдущий лист)

3. Найдём углы треугольника MNK:

$$\angle NMK = 180^\circ - \angle MAF - \angle AFM = 180^\circ - 65^\circ - 40^\circ = 75^\circ, \text{ по сумме углов } \triangle MAF$$

$$\angle MNK = 180^\circ - \angle NBC - \angle NCB = 180^\circ - 65^\circ - 65^\circ = 50^\circ, \text{ по сумме углов } \triangle NBC$$

$$\angle NKM = 180^\circ - \angle KDE - \angle DEK = 180^\circ - 65^\circ - 60^\circ = 55^\circ, \text{ по сумме углов } \triangle KDE$$

4. Найдём углы треугольника XYZ:

$$\angle XYZ = 180^\circ - \angle XCD - \angle YDC = 180^\circ - 65^\circ - 65^\circ = 50^\circ, \text{ по сумме углов } \triangle CUD$$

$$\angle YZX = 180^\circ - \angle FEZ - \angle EFZ = 180^\circ - 60^\circ - 40^\circ = 80^\circ, \text{ по сумме углов } \triangle FEZ$$

$$\angle ZXY = 180^\circ - \angle XAB - \angle XBA = 180^\circ - 65^\circ - 65^\circ = 50^\circ, \text{ по сумме углов } \triangle XAB$$

Ответ: в одном треугольнике углы 75° , 50° и 55° , а в другом треугольнике углы 50° , 80° и 50° .

35

Код участника: 411-850
(заполняется организатором)

Задача. 7.

1. Для решения данной задачи воспользуемся тем, что если взять от функции двойную производную, то приравняв ее к нулю, мы найдем значения точек перегиба изначальной функции. Если после взятия второй производной у функции будет 2 точки перегиба, то значит, что где изначальной функции будет существовать две касательные в двух точках.

2. Дана функция $f(x) = ax^4 + x^2 + x$
тогда $f'(x) = 4ax^3 + 2x + 1$
и $f''(x) = 12ax^2 + 2$
и $f''(x) = 0$. Найдем:

Приравняем

$$12ax^2 + 2 = 0$$

$$x^2 = -\frac{2}{12a} = -\frac{1}{6a}$$

и x будет значение,

при $x^2 = -\frac{1}{6a} > 0$, т.е.

$$-\frac{1}{6a} > 0$$

$$a < 0$$

Таким образом при

любом $a < 0$ у нас будет 2 точки перегиба и касательной одновременно.

$f(x)$ будет возможно построить график функции в двух точках

Ответ: при $a < 0$, также уравнение прямой касательной к $f(x)$ будет най-

3

М11-168

Код участника
(заполняется организатором)



**Олимпиадная работа
заключительного этапа
«Всероссийская олимпиада школьников "Миссия
выполнима. Твоё призвание - финансист!" 2023-2024
г.»
«(Математика 11 класс)»**

Вариант № 1

«27 января 2024 г.»

Никакие другие записи на титульном листе делать не разрешается

М11-168

Код участника

Всероссийская олимпиада школьников «Миссия выполнима. Твое призвание – финансист!» 2023/2024 уч.г.

Бланк проверки работы

Математика 11 класс

№ задания	ФИО эксперта	Балл	ФИО эксперта	Балл	Итоговый балл
1	Васканов	10	Гурьянов	10	10
2	Тордига	10	Забина	10	10
3	Маркова	12	Иванова	12	12
4	Васильев	4	Курсанова	4	4
5	Смирнов	7	Уфимов	7	7
6	Трунцев	3	Олегов	3	3
7	Котов	0	Степанов	0	0
8	Ш	0	Щакин	0	0
ИТОГО					66

②

Пусть x человек занимается очно; y - дистанционно; z - очно и дистанционно

Тогда всего учеников: $x+y-z$

по условию: $z - 50\%$ от $x \Rightarrow z = 0,5x$;

$z - 60\%$ от $y \Rightarrow z = 0,6y$

Тогда $x = 2z$ $y = \frac{5}{3}z$ р10

Отсюда ~~ка~~ отношение занимающихся только очно ко всем остальным:

$$\frac{x-z}{x+y-z} = \frac{2z-z}{2z+\frac{5}{3}z-z} = \frac{z}{\frac{8}{3}z} = \frac{3}{8} = 0,375 = 37,5\%$$

Ответ: 37,5 %

③

$$p(2)+p(2)+\dots+p(99) = \frac{9}{9+9^{50}} + \frac{9^2}{9^2+9^{50}} + \dots + \frac{9^{49}}{9^{49}+9^{50}} +$$

$$+ \frac{9^{50}}{9^{50}+9^{50}} + \frac{9^{51}}{9^{51}+9^{50}} + \dots + \frac{9^{98}}{9^{98}+9^{50}} + \frac{9^{99}}{9^{99}+9^{50}}$$

(сокращаем каждое слагаемое на соответствующую степень 9) = $\frac{1}{1+9^{49}} + \frac{1}{1+9^{48}} + \dots + \frac{1}{1+9} + \frac{1}{1+1} +$

$+\frac{9}{9+9} + \dots + \frac{9^{48}}{9^{48}+1} + \frac{9^{49}}{9^{49}+1}$ (группируем первое и последнее, второе и предпоследнее, и т.д.)

сн. на след. шр.

НТ существует 0

продолжение решения 3 задачи:
получим

$$\left(\frac{1}{1+9^{49}} + \frac{9^{49}}{1+9^{49}} \right) + \left(\frac{1}{1+9^{48}} + \frac{1}{1+9^{48}} \right) + \dots + \left(\frac{1}{1+9} + \frac{9}{1+9} \right) + \frac{1}{2}$$

2 (в каждой из 49 скобок сумма чисел будет равна 1) = $\underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{49} + \frac{1}{2} = 49,5$

Ответ: 49,5

Код участника: **МН-168**
(заполняется организатором)(2) $A+B$ - максимум

$$\begin{cases} A+5B \geq 9 & (1) \\ 3A+4B \geq 11 & (2) \\ 5A+3B \geq 11 & (3) \end{cases}$$

I нарисуем на координатной плоскости график
 A - это x ; B - это y множество, заданное
 неравенствами (1), (2), (3)

1) $B \geq -\frac{A}{5} + \frac{9}{5}$ - полуплоскость, лежащая

выше прямой $B = -\frac{A}{5} + \frac{9}{5}$

при $A=0$ $B = \frac{9}{5}$

$A=1$ $B = \frac{8}{5}$

2) $B \geq -\frac{3A}{4} + \frac{11}{4}$ - полуплоскость, лежащая выше

прямой $B = -\frac{3A}{4} + \frac{11}{4}$

при $A=0$ $B = \frac{11}{4}$

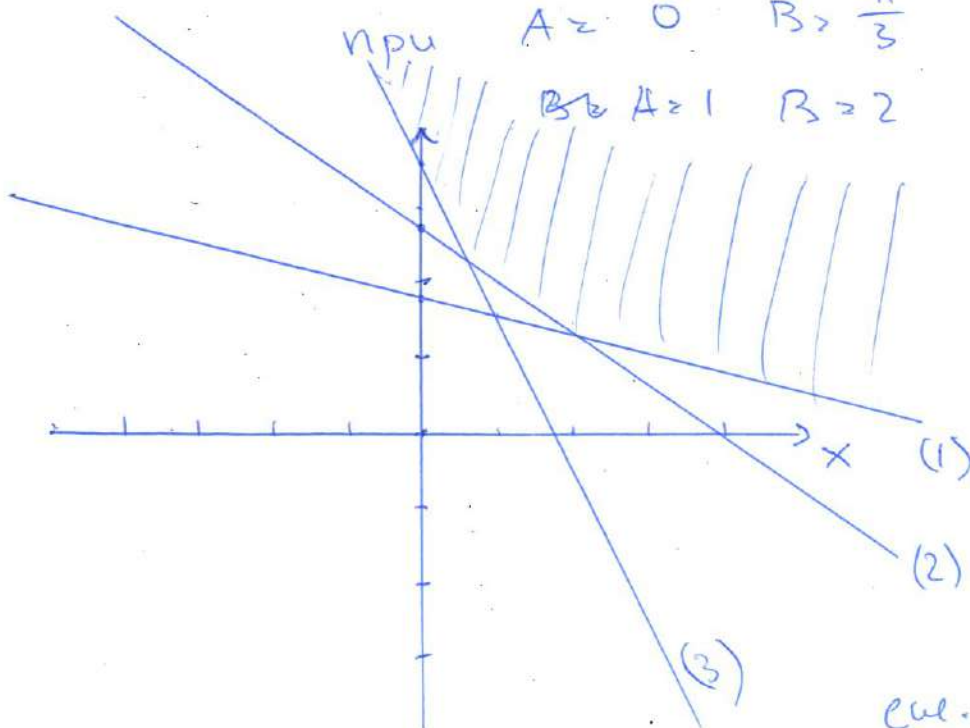
$A=1$ $B = 2$

3) $B \geq -\frac{5A}{3} + \frac{11}{3}$ - полуплоскость, лежащая выше

прямой $B = -\frac{5A}{3} + \frac{11}{3}$

при $A=0$ $B = \frac{11}{3}$

В $A=1$ $B=2$



запишем
 подходящую
 плоскость

еще на след. стр.

продолжение 2 задачи

$$2) B = -\frac{A}{5} + \frac{9}{5} \quad (4)$$

$$B = -\frac{3A}{4} + \frac{11}{4} \quad (5)$$

$$B = -\frac{5A}{3} + \frac{11}{3} \quad (6)$$

Ищем пересечение 4 и 6; 5 и 6

$$4 \text{ и } 6: \begin{cases} B = -\frac{A}{5} + \frac{9}{5} \\ B = -\frac{3A}{4} + \frac{11}{4} \end{cases} = C \left(\frac{19}{11}; \frac{16}{11} \right)$$

$$5 \text{ и } 6: \begin{cases} B = -\frac{3A}{4} + \frac{11}{4} \\ B = -\frac{5A}{3} + \frac{11}{3} \end{cases} = D (1; 2)$$

$$\text{Пусть } A+B > k \quad B = -A + k$$

Это семейство параллельных прямых
чтобы найти минимально $B = -A + k$ перенести
максимально низко, но так, чтобы оно
пересекло нужную плоскость
или будет в точке D или C

$$D: A+B = 1+2 = 3$$

$$C: A+B = \frac{19}{11} + \frac{16}{11} = \frac{35}{11} > 3$$

Тогда в D: $A+B$ - мин и равно 3

Ответ: 3

105

Код участника: М11-168
(заполняется организатором)

④) Все точки P/Q от A/B AD и AA' лежат на биссекторной плоскости, образованной этими прямыми
т.е. принадлежат плоскости $AD'C'B$

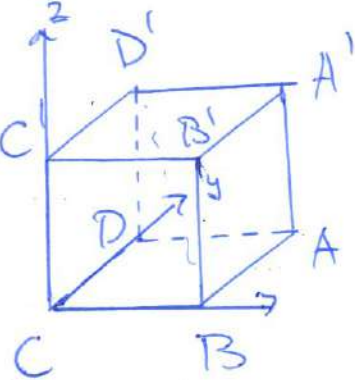
Аналогично

точки P/Q от AA' и $B'A'$ лежат на плоскости $A'B'CD'$

Заметим, что эти плоскости пересекаются по прямой BD' центр (точка O) сферы лежит на BD'

2) Введем систему координат как на рисунке
Затем координаты некоторых точек:

$C_z \parallel \overline{CC'}$
 $C_x \parallel \overline{CB}$
 $C_y \parallel \overline{CD}$



$$C(0; 0; 0)$$

$$B(1; 0; 0)$$

$$D'(0; 1; 1)$$

$$A(1; 1; 0)$$

$$A'(1; 1; 1)$$

Точка O (центр сферы) имеет координаты
 $O = (B + t \cdot \overline{BD'}) = (1; 0; 0) + t(0-1; 1-0; 1-0) =$

$$(1-t; t; t) \quad t - \text{действ.}$$

$$|OC| = \sqrt{(1-t)^2 + t^2 + t^2} \quad (1)$$

см. на след. стр.

Код участника: МН-168

(заполняется организатором)

продолжение задачи 4

3) Пусть сфера с центром в O касается AA_1 в точке M ($OM \perp AA_1$; $AA_1 \parallel$

тогда M имеет координаты $(1; 1; t)$

$$|OM| = \sqrt{(1-t-1)^2 + (t-1)^2 + 0^2} = \sqrt{t^2 + (1-t)^2} \quad (2)$$

Тк у нас сфера касается AA_1 и проходит через C , то $|OC| = |OM|$ ($M \in AA_1$)

Из (1) и (2)

$$1^2 + \frac{(1-t)^2}{2} = \frac{(1-t)^2}{2} + \frac{1^2}{2} + t^2$$

$$t^2 = 0$$

$$t = 0$$

Тогда точка O имеет координаты

$$(1-t; t; t) \quad t=0$$

$$(1; 0; 0)$$

Заметим, что точка O совпадает с точкой

B

Отсюда радиус сферы равен $|BC| = 1$

Ответ: 1

5) $\arcsctg \left(\frac{5x+3}{3x-5} \right) + \arcsctg \left(\frac{x-1}{x+1} \right) = x$

1) ОДЗ:

$$\begin{cases} 3x-5 \neq 0 & x \neq \frac{5}{3} & x \neq -1 \\ x+1 \neq 0 \end{cases}$$

Заметим, что для любого t

$\arcsctg t \in [0; \pi]$ тк в левой части ур-я

2 $\arcsctg$, то левая часть $\in [0; 2\pi]$

значит $x \in [0; 2\pi]$

2) Берем ctg от обеих частей

и используем формулу суммы ctg

$$(\text{ctg} a + \text{ctg} b = \frac{\text{ctg} a \cdot \text{ctg} b - 1}{\text{ctg} a + \text{ctg} b})$$

подставляя ее

$$a = \arcsctg \left(\frac{5x+3}{3x-5} \right) \quad b = \arcsctg \left(\frac{x-1}{x+1} \right)$$

$$\frac{\frac{5x+3}{3x-5} \cdot \frac{x-1}{x+1} - 1}{\frac{5x+3}{3x-5} + \frac{x-1}{x+1}} = \text{ctg}(x)$$

$$\frac{5x+3}{3x-5} + \frac{x-1}{x+1}$$

(в левой части сократили в числ. и знаменателе $(x+1)(3x-5)$)

$$\frac{(5x+3)(x-1) - (3x-5)(x+1)}{(x-1)(3x-5) + (x+1)(5x+3)} = \text{ctg} x$$

Раскроем скобки, приведем подобным:

$$\frac{2x^2-12}{8x^2+8} = \text{ctg}(x) +$$

см. продолжение на след. стр.

Код участника: ММ-168
(заполняется организатором)

продолжение задачи 5

$$\operatorname{ctg}(x) = \frac{1}{4} \quad \uparrow$$

$$x = \operatorname{arccotg}\left(\frac{1}{4}\right) + \pi k \quad k \in \mathbb{Z}$$

учитывая ограничение на x из п. (1)

у нас получается 2 корня:

$$x_1 = \operatorname{arccotg}\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$x_2 = \operatorname{arccotg}\left(\frac{1}{4}\right) + \pi \quad \uparrow$$

Заметим, что $x_2 - \pi > 0$

$$\frac{x_2 - \pi}{x_2 + \pi} > 0 \Rightarrow \operatorname{arccotg}\left(\frac{x_2 - \pi}{x_2 + \pi}\right) < \frac{\pi}{2}$$

$$\operatorname{arccotg}\left(\frac{5x_2 + 3}{3x_2 - 5}\right) < \frac{\pi}{2}$$

Поэтому

$$\operatorname{arccotg}\left(\frac{x_2 - \pi}{x_2 + \pi}\right) + \operatorname{arccotg}\left(\frac{5x_2 + 3}{3x_2 - 5}\right) < \pi$$

При этом

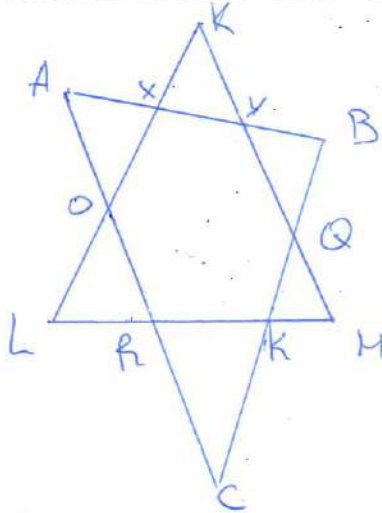
$$x_2 > \pi \quad \text{значит, что}$$

Если подставить x_2 , то левая часть не равна правойПолучается, что x_2 не подходит?При подставлении x_1 все сходится, значит $x_2 = \operatorname{arccotg}\left(\frac{1}{4}\right)$ подходит

$$\text{Ответ: } x = \operatorname{arccotg}\left(\frac{1}{4}\right) \quad \pm$$

Код участника: **МН-16Р**
(заполняется организатором)

6)



1) По условию в шестиугольнике 4 равных угла $\Rightarrow$ как бы мы их ни рассредотачивали будет хотя бы 2 одинаковых угла, которые стоят рядом.

Пусть это будут $\angle OXY = \angle XYQ = 115^\circ$
 $\angle KRL = 30^\circ$ и $\angle K = 50^\circ$

2) Формула для $\angle$ треугольников $= -\pi + \alpha + \beta$ (и β углы шестиугольника)

3) Обозначим $\angle XOR$; $\angle ORK$; $\angle RKR$; $\angle KQY$ за

1, 2, 3, 4

и переберем все варианты углов

I	1, 2 = 115°	3 = 120°	4 = 140°
	$\angle L = 30^\circ$	$\angle M = 80^\circ$	
	в Δ сумма углов = 180		
	в ΔKLM сумма углов = $30 + 30 + 80 \neq 180$		
	НЕ ПОДХОДИТ		
II	1, 2 = 115°	3 = 140°	4 = 120°
	Аналогично I Вар.		
III	1, 3 = 115°	2 = 120°	4 = 140°

I 1, 2 = 115° 3 = 120° 4 = 140°
 $\angle L = 50^\circ$ $\angle M = 80^\circ$ $\angle K + \angle L + \angle M = 180^\circ$ ✓
 $\angle A = 50^\circ + \angle C = 55^\circ + \angle B = 75^\circ = 180^\circ$
ПОДХОДИТ

II 1, 2 = 115° 3 = 140° 4 = 120°
 аналогично I случ.

см. на след. стр.

Код участника: М11-168
(заполняется организатором)

продолжение решения

Задачи № 6

$$\text{III} \quad \begin{aligned} \angle 1, 3 &= 115^\circ & \angle 2 &= 120^\circ & \angle 4 &= 140^\circ \\ \angle L &= 55^\circ + \angle M = 45^\circ + \angle K \approx 50^\circ = 180^\circ \\ \angle A &= 50^\circ + \angle B = 75^\circ + \angle C \approx 55^\circ = 180^\circ \end{aligned}$$

$$\text{IV} \quad \begin{aligned} \angle 1, 3 &= 115^\circ & \angle 2 &= 140^\circ & \angle 4 &= 120^\circ \end{aligned} \quad \text{Подходит}$$

~~Заметим, что для каждого из составленных случаев будет выполняться только буква~~

$$\text{IV} \quad \begin{aligned} \angle 1, 3 &= 115^\circ & \angle 2 &= 140^\circ & \angle 4 &= 120^\circ \\ \angle L &= 75^\circ + \angle M = 55^\circ + \angle K \approx 50^\circ = 180^\circ \\ \angle A &= 50^\circ + \angle B = 55^\circ + \angle C \approx 75^\circ = 180^\circ \end{aligned} \quad \text{Подходит}$$

$$\text{V} \quad \begin{aligned} \angle 1, 4 &= 115^\circ & \angle 2 &= 120^\circ & \angle 3 &= 140^\circ \\ \angle L &= 55^\circ + \angle M = 75^\circ + \angle K \approx 50^\circ = 180^\circ \\ \angle A &= 50^\circ + \angle B \approx 50^\circ + \angle C \approx 80^\circ = 180^\circ \end{aligned}$$

$$\text{VI} \quad \begin{aligned} \angle 1, 4 &= 115^\circ & \angle 2 &= 140^\circ & \angle 3 &= 120^\circ \\ \angle L &= 75^\circ & \angle M &= 55^\circ & \angle K &= 50^\circ \\ \angle A &= 50^\circ & \angle B &= 50^\circ & \angle C &= 80^\circ \end{aligned}$$

Итого 3 варианта

Если пойдем дальше то увидим, что у нас так и останется 2 варианта которые будут комбинироваться

Ответ: 3 варианта $75; 55; 50$
 $80; 50; 50$

1 вариант
30.

МО может быть только один с в 80°

т.е. 2 вторых Δ не может появиться

№ 8

М11 404
Код участника
(заполняется организатором)



**Олимпиадная работа
заключительного этапа
«Всероссийская олимпиада школьников "Миссия
выполнима. Твоё призвание - финансист!" 2023-2024
г.»
«(Математика 11 класс)»**

Вариант № 1

«27 января 2024 г.»

Никакие другие записи на титульном листе делать не разрешается

Задание 5 (12 баллов)

Решите уравнение $\operatorname{arccctg} \frac{5x+3}{3x-5} + \operatorname{arccctg} \frac{x-1}{x+1} = x$.

+Задание 6 (14 баллов)

Два треугольника пересекаются по шестиугольнику $ABCDEF$, в котором $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 115^\circ$, $\angle E = 120^\circ$, $\angle F = 140^\circ$.

Найдите углы этих треугольников.

Задание 7 (14 баллов)

При каких значениях параметра a существует прямая, касающаяся графика функции $f(x) = ax^4 + x^2 + x$ в двух точках? Для каждого такого значения параметра a найдите уравнение соответствующей прямой.

Задача 8 (16 баллов)

Про последовательность $X = \{x_1, \dots, x_{100}\}$ известно, что она состоит из всех натуральных чисел от 1 до 100, переставленных в некотором порядке. Мы должны узнать этот порядок. За один шаг можно выписать любую, также состоящую из чисел от 1 до 100, последовательность $Y = \{y_1, \dots, y_{100}\}$, про каждый член y_i ($i = 1, \dots, 100$) которой нам сообщат, какое из соотношений $y_i > x_i$, $y_i < x_i$ или $y_i = x_i$ имеет место. За какое наименьшее число шагов можно наверняка определить последовательность X ?

Всероссийская олимпиада школьников «Миссия выполнима. Твое призвание – финансист!» 2023/2024 уч.г.

Бланк проверки работы

Математика 10 класс

№ задания	ФИО эксперта	Балл	ФИО эксперта	Балл	Итоговый балл
1	Каманова	10	Гурьянов	10	10
2	Александров	10	Забихов	10	10
3	Александров	12	Марков	12	12
4	Овешков	4	Кирсанов	4	4
5	Бонин	7	Берисов	6	7
6	Гузев	3	Олегов	3	3
7	Постов	0	Липкина	0	0
8	Ш	0	Щакин	0	0
ИТОГО					46

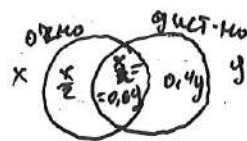
Код участника:

(заполняется организатором)

М11 494

№1

Обозначим за x - кол-во учащихся ожно
Обозначим за y - кол-во учащихся дист-но



По условию $0,5x$ учащихся учатся и ожно и дист-но, а значит ровно $x - 0,5x$ тех учатся только ожно. Также из условия ясно, что $0,6y$ занимаются и дист-но и ожно, а это значит, что $0,6y = 0,5x$ и $y - 0,6y = 0,4y$ занимается только дист-но.

Тогда всего учеников $0,5x + 0,5x + 0,4y = 0,5x + 0,6y + 0,4y$

($0,6y = 0,5x$ т.к. ученик либо ожно, либо дист, либо и там и там, а значит из условия нам дана пойма, какую часть от всех ожно и дист-но занимают люди, учащиеся ожно и дист-но одновременно, откуда $0,6y = 0,5x$)

$0,6y = 0,5x \Rightarrow x = 1,2y \Rightarrow$ всего учеников $0,5x + 0,6y + 0,4y = 1,6y \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Только ожно учеников $= 0,5x = 0,6y$

и ожно и дист-но учеников $= 0,5x = 0,6y$

Только дист-но учеников $= 0,4y$

всего учеников $= 1,6y$

Тогда только ожно от всех учеников $\frac{0,6y}{1,6y} = \frac{3}{8} = 37,5\%$

Ответ: 37,5% ④ 10

для удобства заменим A на a и B на b

$$\begin{cases} a + 5b \geq 9 \\ 3a + 4b \geq 11 \\ 5a + 3b \geq 11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b \geq -\frac{a}{5} + \frac{9}{5} & \text{I} \\ b \geq -\frac{3a}{4} + \frac{11}{4} & \text{II} \\ b \geq -\frac{5a}{3} + \frac{11}{3} & \text{III} \end{cases}$$

задачу будем решать графически. на коорд. плоск. с Oa и Ov и центр $(0;0)$

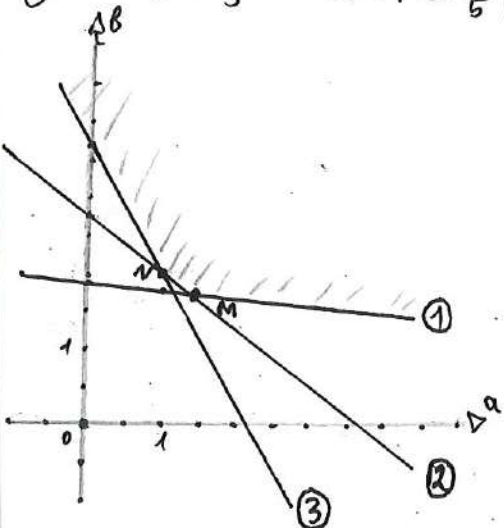
I неравенству соотв-ует полуплоскость, выше прямой $b = -\frac{a}{5} + \frac{9}{5}$ ①

II кер-у соотв. полуплоск. выше прямой $b = -\frac{3a}{4} + \frac{11}{4}$ ②

III кер-у соотв. полуплоск. выше прямой $b = -\frac{5a}{3} + \frac{11}{3}$ ③

реш-е системы это общая часть всех 3-ёх плоскостей

$$\begin{aligned} \text{① } b = -\frac{a}{5} + \frac{9}{5} \quad & a=0; b=\frac{9}{5} \quad a=1; b=\frac{8}{5} \\ \text{② } b = -\frac{3a}{4} + \frac{11}{4} \quad & a=0; b=\frac{11}{4} \quad a=1; b=2 \\ \text{③ } b = -\frac{5a}{3} + \frac{11}{3} \quad & a=0; b=\frac{11}{3} \quad a=1; b=2 \end{aligned}$$



общая часть, соответствующая всем 3-ём неравенствам I, II, III заштрихована и ограничена снизу 3-мя прямыми (маленький треугольник по центру НЕ подходит)

Потер найдем $\min a+b$

пусть $a+b = z \Rightarrow b = -a + z$, где это

множество парал-ных прямых, меняю-щих своё положение в завис от параметра z (самы прямые имеют вид $b = -a$ и движутся вверх/вниз в завис от z)

Тогда минимум $a+b$ будет как

только эта прямая «касается» нашей плоскости заштрих-ой, А касается она или в $T.N$ или в $T.M$

$T.N$ — пересек ② и ③

$$\begin{cases} b = -\frac{3a}{4} + \frac{11}{4} \\ b = -\frac{5a}{3} + \frac{11}{3} \end{cases} \Rightarrow a = \frac{1}{11}; b = \frac{2}{11} \Rightarrow a+b = z \Rightarrow z = \frac{1+2}{11} = \frac{3}{11}, a+b = 3$$

$T.M$ — пересек ① и ②

$$\begin{cases} b = -\frac{a}{5} + \frac{9}{5} \\ b = -\frac{3a}{4} + \frac{11}{4} \end{cases} \Rightarrow a = \frac{19}{11}; b = \frac{16}{11} \Rightarrow a+b = z \Rightarrow z = \frac{19}{11} + \frac{16}{11} = \frac{35}{11} \Rightarrow a+b = \frac{35}{11} > 3 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ минимальное $a+b$ достиг в $T.N$ и равно 3

Ответ: 3

+

Код участника:

(заполняется организатором)

ММ 494

$$p(n) = \frac{g^n}{g^n + g^{50}} \quad p(100-n) = \frac{g^{100-n}}{g^{100-n} + g^{50}}$$

$$p(n) + p(100-n) = \frac{g^n}{g^n + g^{50}} + \frac{g^{100-n}}{g^{100-n} + g^{50}} = \frac{g^n(g^{100-n} + g^{50}) + g^{100-n}(g^n + g^{50})}{(g^n + g^{50})(g^{100-n} + g^{50})} =$$

$$= \frac{g^{100} + g^{50+n} + g^{150-n} + g^{100}}{g^{100} + g^{50+n} + g^{150-n} + g^{100}} = 1$$

Тогда $(p(1) + p(99)) + (p(2) + p(98)) + \dots + (p(49) + p(51)) + p(50) =$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{=1} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{=1} \quad \dots \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{=1}$

49 пар

$$= 49 + p(50)$$

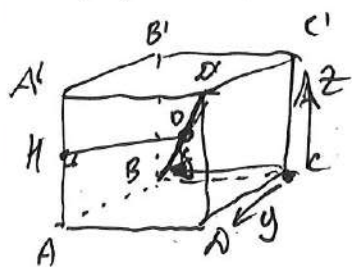
$$p(50) = \frac{g^{50}}{g^{50} + g^{50}} = \frac{1}{2}$$

$$49 + p(50) = 49 + \frac{1}{2} = 49,5$$

Ответ: 49,5 +

и
Т.к. сфера кас. ABD и AA' $\Rightarrow$ центр O лежит на бисектр. плоск. $ABC'D'$
аналогично и касаясь AA' и $A'B'$ $\Rightarrow$ бисектр. плоск. $A'B'C'D'$

Эти плоскости пересекаются по прямой BD' $\Rightarrow$
 $\Rightarrow$ на ней и лежит центр сферы $T.O$



введем сист. координат с центром $C(0;0;0)$

$Ox \parallel CB$; $Oy \parallel CD$; $CC' \parallel Oz$

$C(0;0;0)$ $B(1;0;0)$ $A(1;1;0)$ $A'(1;1;1)$ $D'(0;1;1)$ $D(0;1;0)$

центр O лежит на BD' $\Rightarrow O = B + t \cdot \overrightarrow{BD'}$

$\overrightarrow{BD'} = (0-1; 1-0; 1-0)$

координаты центра сферы

$$O = B + t \cdot \overrightarrow{BD'} = (1; 0; 0) + t(0-1; 1-0; 1-0) = (1-t; t; t) \Rightarrow |OC| = \sqrt{(1-t)^2 + t^2 + t^2} \quad (1)$$

проведем пер-р из $T.O$ — OH к AA'

$OH \perp AA'$, а $AA' \parallel Oz \Rightarrow$ по Ox и Oy координаты A совпадают с $TH \Rightarrow$

$$\Rightarrow H = (1; 1; t) \Rightarrow |OH| = \sqrt{(1-t-1)^2 + (t-1)^2 + 0^2} = \sqrt{t^2 + (1-t)^2} \quad (2)$$

и по усл. Т.к. O — центр сферы кас. $AA' \Rightarrow OH = OC$

$$\text{из } (1) \text{ и } (2) \Rightarrow (1-t)^2 + t^2 + t^2 = t^2 + (1-t)^2 \Rightarrow t^2 = 0 \Rightarrow t = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T.O = (1; 0; 0) \text{ а это координаты } T.B \Rightarrow R = BC = 1$$

Ответ: радиус равен 1

Код участника:

(заполняется организатором)

M11 494

$$\operatorname{arccctg} \frac{5x+3}{3x-5} + \operatorname{arccctg} \frac{x-1}{x+1} = x \quad \text{или} \quad \text{или } x \neq \frac{5}{3} \quad x \neq -1$$

$\operatorname{arccctg}(n) \in [0; \pi] \Rightarrow$ левая и правые части $\in [0; 3\pi]$

$$x \in [0; 2\pi]$$

возьмём ctg от обеих частей, по формуле:

$$\operatorname{ctg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta - 1}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta} \quad \alpha = \operatorname{arccctg} \frac{5x+3}{3x-5}$$

$$\beta = \operatorname{arccctg} \frac{x-1}{x+1}$$

$$\frac{\frac{5x+3}{3x-5} \cdot \frac{x-1}{x+1} - 1}{\frac{x-1}{x+1} + \frac{5x+3}{3x-5}} = \operatorname{ctg} x$$

$$\frac{(5x+3)(x-1) - (3x-5)(x+1)}{(x-1)(3x-5) + (x+1)(5x+3)} = \operatorname{ctg} x$$

$$\operatorname{ctg} x = \frac{2x^2+2}{8x^2+8} = \frac{1}{4}$$

$$x = \operatorname{arccctg} \left(\frac{1}{4} \right) + \pi n \quad n \in \mathbb{Z}$$

а т.к. $x \in [0; 2\pi]$ то подходит $x_1 = \operatorname{arccctg} \left(\frac{1}{4} \right)$

$$\text{и } x_2 = \operatorname{arccctg} \left(\frac{1}{4} \right) + \pi$$

но x_2 не годится, т.к. $\operatorname{arccctg} \frac{x_2-1}{x_2+1} < \frac{\pi}{2}$; $\operatorname{arccctg} \frac{5x_2+3}{3x_2-5} < \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow$ их сумма $< \pi$, но $x_2 = \operatorname{arccctg} \frac{1}{4} + \pi > \pi \Rightarrow$

$\Rightarrow$ исход равенство неверно.

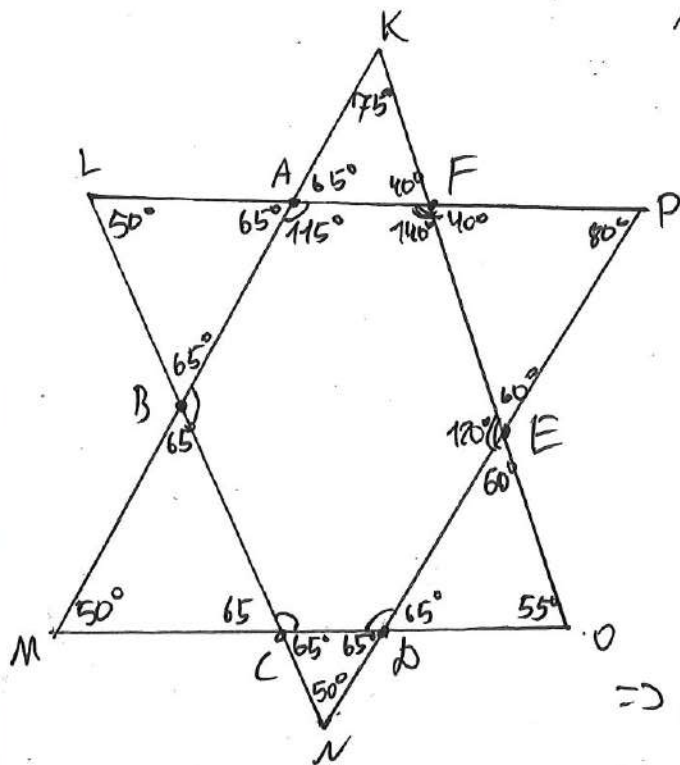
x_1 подходит, проверено подстановкой

$$\text{Ответ: } x = \operatorname{arccctg} \left(\frac{1}{4} \right)$$

±

потеряно
одно
решение
6 баллов

№6



$\angle LAB$ и $\angle BAF$ – смежные $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \angle LAB = 180^\circ - 115^\circ = 65^\circ$$

$\angle LAB = \angle KAF$ (верт. углы) $= 65^\circ$

аналогично отметим углы по 65°

вокруг точки B, C, D

аналогично отметим смежные

углы к углу $\angle FED = 120^\circ \Rightarrow$

$$\Rightarrow \angle FEP = \angle DEO = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$$

аналогично смежные углы к $\angle AFE$

$$\angle AFK = \angle EFP = 180^\circ - 140^\circ = 40^\circ$$

теперь рассмотрим $\triangle LAB$, причем $\angle LBA = \angle LAB = 65^\circ$

$$\Rightarrow \angle L = 180^\circ - 2 \cdot 65^\circ = 50^\circ$$

аналогично $\angle M = 50^\circ$ и $\angle N = 50^\circ$

$$\text{в } \triangle DOE \quad \angle O = 180^\circ - 65^\circ - 60^\circ = 55^\circ$$

$$\text{в } \triangle EFP \quad \angle P = 180^\circ - 40^\circ - 60^\circ = 80^\circ$$

$$\text{в } \triangle AKF \quad \angle K = 180^\circ - 65^\circ - 40^\circ = 75^\circ$$

Тогда в исход. $\triangle LMP$ $\angle L = 50^\circ$; $\angle M = 50^\circ$; $\angle P = 80^\circ$

а в другом исход. $\triangle MKO$ $\angle M = 50^\circ$; $\angle O = 55^\circ$; $\angle K = 75^\circ$

Ответ: в I треугольнике: $50^\circ, 50^\circ, 80^\circ$; в II треугольнике: $50^\circ, 55^\circ, 75^\circ$

№8 не

М11-486

Код участника
(заполняется организатором)



**Олимпиадная работа
заключительного этапа**

**«Всероссийская олимпиада школьников "Миссия
выполнима. Твоё призвание - финансист!" 2023-2024
г.»**

«(Математика 11 класс)»

Вариант № 2

«27 января 2024 г.»

Никакие другие записи на титульном листе делать не разрешается

Задание 1

Пусть a – количество людей, которые говорят на английском, но не говорят на французском; пусть c – количество людей, которые говорят на французском, но не говорят на английском; пусть b – количество людей, которые говорят и на английском, и на французском; пусть d – количество людей, которые говорят не на английском, ни на французском.

Тогда, составив уравнения по условию задачи, получим:

$$\begin{cases} \frac{c}{c+d} = 0,04 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{a}{a+d} = 0,2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = 0,04c + 0,04d \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 0,2a + 0,2d \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0,96c = 0,04d \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0,8a = 0,2d \end{cases}$$

$$\begin{cases} 24c = d \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4a = d \end{cases}$$

$$\Rightarrow 24c = 4a$$

$$6c = a$$

П.к. число людей, не говорящих по-французски можно выразить как $a+d$, а число людей, не говорящих по-английски можно выразить как $c+d$, то иско- мое в задаче отношение можно представить как:

$$\frac{a+d}{c+d} = \frac{6c+24c}{c+24c} = \frac{30c}{25c} = 1,2$$

Ответ: в 1,2 раза. (✗) 100.

Задание 2

$$\begin{cases} 3A+5B \leq 11 \\ 4A+3B \leq 10 \\ 7A+4B \leq 18 \end{cases}$$

$$4A+3B \leq 10 \Rightarrow 8A+6B \leq 20$$

$$8A+6B \leq 20 \text{ и } 3A+5B \leq 11 \Rightarrow (8A+6B) + (3A+5B) \leq 20+11 \Rightarrow 11A+11B \leq 31 \Rightarrow A+B \leq \frac{31}{11}$$

Значит, искомая сумма не превышает $\frac{31}{11}$. Покажем, что данная величина может быть достигнута. Пусть $A = \frac{17}{11}$ и $B = \frac{14}{11}$ (при таких значениях A и B величина $A+B$ равна $\frac{31}{11}$). Запишем исходную систему, подставив вместо A и B числа:

$$\begin{cases} 3 \cdot \frac{17}{11} + 5 \cdot \frac{14}{11} \leq 11 \\ 4 \cdot \frac{17}{11} + 3 \cdot \frac{14}{11} \leq 10 \\ 7 \cdot \frac{17}{11} + 4 \cdot \frac{14}{11} \leq 18 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4 \cdot \frac{17}{11} + 3 \cdot \frac{14}{11} \leq 10 \\ 7 \cdot \frac{17}{11} + 4 \cdot \frac{14}{11} \leq 18 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4 \cdot \frac{17}{11} + 3 \cdot \frac{14}{11} \leq 10 \\ 7 \cdot \frac{17}{11} + 4 \cdot \frac{14}{11} \leq 18 \end{cases}$$

105

Дополнительный бланк №1

Всероссийская олимпиада школьников «Миссия выполнима. Твое призвание – финансист!»

Код участника:

(заполняется организатором)

M11-486

Задание 2 (продолжение)

$$\begin{cases} \frac{51}{11} + \frac{70}{11} \leq 11 \\ \frac{68}{11} + \frac{42}{11} \leq 10 \\ \frac{119}{11} + \frac{56}{11} \leq 18 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{121}{11} \leq 11 \\ \frac{110}{11} \leq 10 \\ \frac{175}{11} \leq 18 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 11 \leq 11 \\ 10 \leq 10 \\ 15 \frac{10}{11} \leq 18 \end{cases}$$

Т.е. при $A = \frac{17}{11}$ и $B = \frac{14}{11}$, исходное условие выполняется, при этом $A+B = \frac{31}{11}$ и известно, что $A+B \leq \frac{31}{11}$.

Ответ: $\frac{31}{11}$

Задание 3

$$p(n) = \frac{(-3)^n}{3^n + 3^{17}}$$

Рассмотрим $p(a)$, где $a < 17$:

$$p(a) = \frac{(-3)^a}{3^a + 3^{17}} = (-1)^a \cdot \frac{3^a}{3^a + 3^{17}} = (-1)^a \cdot \frac{3^a}{3^a(1 + 3^{17-a})} = (-1)^a \cdot \frac{1}{1 + 3^{17-a}}$$

Рассмотрим теперь $p(b)$, где $b > 17$:

$$p(b) = \frac{(-3)^b}{3^b + 3^{17}} = (-1)^b \cdot \frac{3^b}{3^b + 3^{17}} = (-1)^b \cdot \frac{3^b}{3^{17}(3^{b-17} + 1)} = (-1)^b \cdot \frac{3^{b-17}}{3^{b-17} + 1}$$

Рассмотрим теперь сумму $p(c) + p(34-c)$, где $c < 17$:

$p(c) + p(34-c) =$ т.к. $c < 17$:

$$p(c) = (-1)^c \cdot \frac{1}{1 + 3^{17-c}}$$

$$c < 17 \Rightarrow 34-c > 17 \Rightarrow p(34-c) = (-1)^{34-c} \cdot \frac{3^{34-c-17}}{3^{34-c-17} + 1} = (-1)^{34-c} \cdot \frac{3^{17-c}}{3^{17-c} + 1} = (-1)^{34-c} \cdot \frac{3^{17-c}}{3^{17-c} + 1}$$

При этом, т.к. четность чисел c и $34-c$ одинакова, то $(-1)^c = (-1)^{34-c}$

$$\Rightarrow p(c) + p(34-c) = (-1)^c \cdot \frac{1}{1 + 3^{17-c}} + (-1)^c \cdot \frac{3^{17-c}}{3^{17-c} + 1} = (-1)^c \cdot \left(\frac{3^{17-c} + 1}{3^{17-c} + 1} \right) = (-1)^c$$

Рассмотрим полную сумму:

$$\begin{aligned} p(1) + p(2) + \dots + p(33) &= (p(1) + p(33)) + (p(2) + p(32)) + \dots + (p(16) + p(18)) + p(17) \\ &= (-1)^1 + (-1)^2 + \dots + (-1)^{16} + p(17) = -1 + 1 - 1 + \dots + 1 + p(17) = \\ &= p(17) = \frac{(-3)^{17}}{3^{17} + 3^{17}} = -\frac{3^{17}}{2 \cdot 3^{17}} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

МН-486

Код участника

Всероссийская олимпиада школьников «Миссия выполнима. Твое призвание – финансист!» 2023/2024 уч.г.

Бланк проверки работы

Математика 11 класс

№ задания	ФИО эксперта	Балл	ФИО эксперта	Балл	Итоговый балл
1	Кашоткина	10	Гурьенова	10	10
2	Поздних	10	Зитков	10	10
3	Иванова	12	Александрович	12	12
4	Савина	0	Матвеев	0	0
5	Васильева	12	Усупов	12	12
6	Григорьев	3	Олехов	3	3
7	Аликина	3	Семанян	3	3
8	Шелест	0	Усупов	0	0
ИТОГО					50.

Дополнительный бланк № 2

Всероссийская олимпиада школьников «Миссия выполнима. Твоё призвание – финансист!»

Код участника:

(заполняется организатором)

M11-486

Задание 3 (продолжение)

Значит, искомая сумма равна $-\frac{1}{2}$ +

Ответ: $-\frac{1}{2}$

Задание 5

$$\arctg \frac{2x-1}{x+2} + \arctg \frac{x+3}{3x-1} = x$$

$$\begin{cases} x \neq -2 \\ x \neq \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\text{П.к. } \arctg \alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow x \in (-\pi; \pi)$$

Возьмем тангенс из обеих частей уравнения:

$$\tg(\arctg \frac{2x-1}{x+2} + \arctg \frac{x+3}{3x-1}) = \tg x$$

$$\text{По формуле, } \tg(\alpha + \beta) = \frac{\tg \alpha + \tg \beta}{1 - \tg \alpha \cdot \tg \beta} :$$

$$\frac{\tg(\arctg \frac{2x-1}{x+2}) + \tg(\arctg \frac{x+3}{3x-1})}{1 - \tg(\arctg \frac{2x-1}{x+2}) \cdot \tg(\arctg \frac{x+3}{3x-1})} = \tg x$$

$$\frac{\frac{2x-1}{x+2} + \frac{x+3}{3x-1}}{1 - \frac{2x-1}{x+2} \cdot \frac{x+3}{3x-1}} = \tg x$$

$$\frac{(2x-1)(3x-1) + (x+3)(x+2)}{(x+2)(3x-1) - (2x-1)(x+3)} = \tg x$$

$$\frac{6x^2 - 3x - 2x + 1 + x^2 + 5x + 6}{3x^2 + 6x - x - 2 - (2x^2 + 6x - x - 3)} = \tg x$$

$$\frac{7x^2 + 7}{x^2 + 1} = \tg x$$

$$\Rightarrow \tg x = 7$$

$$x \in (-\pi; \pi) \Rightarrow x = \arctg 7 \text{ или } x = -\pi + \arctg 7$$

$$\text{Ответ: } \arctg 7; -\pi + \arctg 7$$

Задание 6

Заметим, что стороны шестиугольника ABCDEF образованы частями различных сторон исходных треугольников. Значит, м.к. ABCDEF-шестиугольник, но в образовании его сторон участвовали все 6 сторон двух исходных треугольников.

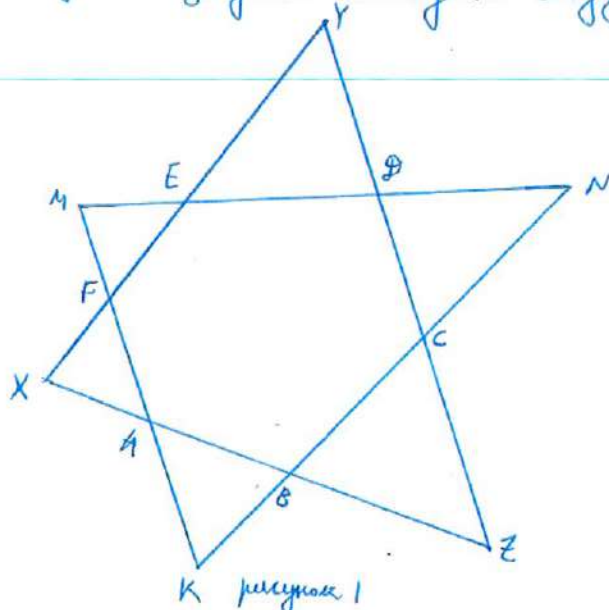
Код участника:

(заполняется организатором)

M11-486

Задание №6 (продолжение)

Значит, каждая сторона каждого из исходных треугольников проходит (но не лежит полностью) в другом исходном треугольнике. Значит рисунок к данной задаче выйдет следующим образом (схематично):



Пусть M, N, K и X, Y, Z – вершины исходных треугольников как показано на рисунке.

$$\angle BAK = \angle FAX = 180^\circ - \angle FAB = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ \text{ (как смежные углы)}$$

$$\angle ABK = \angle CBZ = 180^\circ - \angle ABC = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ \text{ (как смежные углы)}$$

$$\angle BCZ = \angle DCN = \angle BCD = 180^\circ - \angle BCD = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ \text{ (как смежные углы)}$$

$$\angle CDN = \angle EDY = 180^\circ - \angle CDE = 180^\circ - 130^\circ = 50^\circ \text{ (как смежные углы)}$$

Итак сумма углов треугольника равна 180° .

$$\angle AFN = \angle EFM = \angle AFE = 180^\circ - \angle AFE = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ \text{ (как смежные углы)}$$

Итак сумма углов треугольника равна 180° .

$$\angle X + \angle AFN + \angle FAX = 180^\circ \Rightarrow \angle X = 180^\circ - \angle AFN - \angle FAX = 180^\circ - 30^\circ - 80^\circ = 70^\circ$$

$$\angle K + \angle BAK + \angle ABK = 180^\circ \Rightarrow \angle K = 180^\circ - \angle BAK - \angle ABK = 180^\circ - 80^\circ - 80^\circ = 20^\circ$$

$$\angle Z + \angle CBZ + \angle BCZ = 180^\circ \Rightarrow \angle Z = 180^\circ - \angle CBZ - \angle BCZ = 180^\circ - 80^\circ - 80^\circ = 20^\circ$$

$$\angle N + \angle CDN + \angle NDC = 180^\circ \Rightarrow \angle N = 180^\circ - \angle CDN - \angle NDC = 180^\circ - 50^\circ - 80^\circ = 50^\circ$$

$$\angle M + \angle N + \angle K = 180^\circ \Rightarrow \angle M = 180^\circ - \angle N - \angle K = 180^\circ - 50^\circ - 20^\circ = 110^\circ$$

$$\angle X + \angle Y + \angle Z = 180^\circ \Rightarrow \angle Y = 180^\circ - \angle X - \angle Z = 180^\circ - 70^\circ - 20^\circ = 90^\circ$$

Значит, углы исходных треугольников равны $70^\circ, 90^\circ, 20^\circ$ и $110^\circ, 50^\circ, 20^\circ$.

Ответ: $70^\circ, 90^\circ, 20^\circ$ и $110^\circ, 50^\circ, 20^\circ$

1 вер. ршн - 3 б

Код участника:

(заполняется организатором)

M11-486

Задание 7

Пусть $f(x) = x^4 + bx^3 + x$ и $g(x) = ax + c$, при этом $g(x)$ — уравнение касательной к $f(x)$.

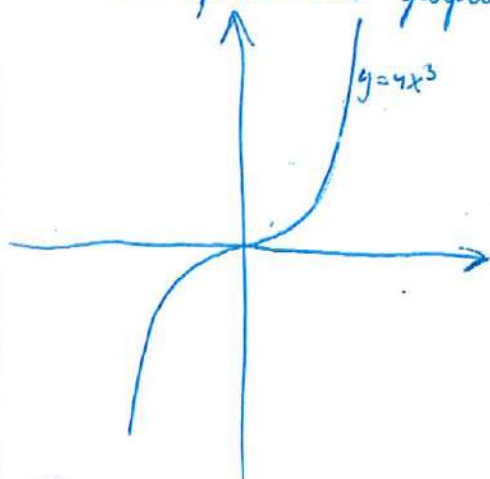
$$f'(x) = g'(x)$$

$$4x^3 + 2bx + 1 = a$$

$$4x^3 + 2$$

$$4x^3 = -2bx + a - 1$$

Заметим, что у данного уравнения ~~то~~ должно быть 2 корня. Рассмотрим его графически:



Нетрудно заметить, что $-2bx + a - 1$ должна касаться одной из ветвей кубической параболы и пересекать другую, иначе у этих графиков будет 2 точки пересечения (а будет 1 или 3 таких точки)

$$\Rightarrow (4x^3)' = (-2bx + a - 1)'$$

$$12x^2 = -2b$$

$$x^2 = -\frac{b}{6}$$

$-\frac{b}{6} \geq 0 \Rightarrow b \leq 0$ — значим, искомая прямая существует только при $b \leq 0$

$$x = -\frac{b}{6} \quad \text{или} \quad x = \frac{b}{6}$$

$$4x^3 = -2bx + a - 1$$

$$4 \frac{b^3}{216} = -\frac{b^2}{3} + a - 1$$

$$= 4 \frac{b^3}{216} = \frac{b^2}{3} + a - 1$$

$$a = 1 + \frac{b^3}{54} + \frac{b^2}{3}$$

$$a = 1 - \frac{b^3}{54} - \frac{b^2}{3}$$

Дополнительный бланк № 5

Всероссийская олимпиада школьников «Миссия выполнима. Твое призвание – финансист!»

Код участника:

(заполняется организатором)

М11-486

Задание 7 (продолжение)

Будем рассматривать только вырождение при $x = -\frac{b}{6}$ (т.к. на достаточно малой прямой $x = -\frac{b}{6}$ — это ордината точки касания)

$$f(-\frac{b}{6}) = g(-\frac{b}{6})$$

$$\frac{b^4}{1296} + \frac{b^3}{36} - \frac{b}{6} = (1 - \frac{b^3}{54} - \frac{b^2}{3}) \cdot (-\frac{b}{6}) + c$$

$$\frac{b^4}{1296} + \frac{b^3}{36} - \frac{b}{6} = -\frac{b}{6} + \frac{b^4}{324} + \frac{b^3}{18} + c$$

ЗБ.

$$c = \frac{b^4}{1296} - \frac{b^4}{324} + \frac{b^3}{36} - \frac{b^3}{18}$$

Т.е. прямая $g(x) = (1 - \frac{b^3}{54} - \frac{b^2}{3})x + (\frac{b^4}{1296} - \frac{b^4}{324} + \frac{b^3}{36} - \frac{b^3}{18})$ удовлетворяет условию при $b \leq 0$, а при $b > 0$ такой прямой нет.

Ответ: при $b \leq 0$, $(1 - \frac{b^3}{54} - \frac{b^2}{3})x + (\frac{b^4}{1296} - \frac{b^4}{324} + \frac{b^3}{36} - \frac{b^3}{18})$.

и нет

но нет

М11-833

Код участника
(заполняется организатором)



**Олимпиадная работа
заключительного этапа
«Всероссийская олимпиада школьников "Миссия
выполнима. Твоё призвание - финансист!" 2023-2024
г.»
«(Математика 11 класс)»**

Вариант № 1

«27 января 2024 г.»

Никакие другие записи на титульном листе делать не разрешается

М11-833

Код участника

Всероссийская олимпиада школьников «Миссия выполнима. Твое призвание – финансист!» 2023/2024 уч.г.

Бланк проверки работы

Математика 11 класс

№ задания	ФИО эксперта	Балл	ФИО эксперта	Балл	Итоговый балл
1	Васильева	10	Гурьев	10	10
2	Лавина С.В.	10	Морозов Р.М.	10	10
3	Марков	12	Чижов	12	12
4	Курсанова	0	Васильев	0	0
5	Зорисова	4	Кремль	12	12
6	Олегов	3	Гузев	3	3
7	Кашин	3	Степанов	3	3
8	И	0	Шушков	0	0
ИТОГО					50

№1.

Пусть x студентов занимается очно и дистанционно, тогда: x студентов занимается только очно $\Rightarrow \frac{x}{x+x} = \frac{1}{2} = 50\%$ $\frac{2}{3}x$ студентов занимаются только дистанционно $\Rightarrow \frac{x}{x+\frac{2}{3}x} = \frac{3}{5} = 60\%$ Тогда всего студентов $\frac{8}{3}x$, а доля обучающихся только очносоставляет $\frac{x}{\frac{8}{3}x} = \frac{3}{8} = 0,375 = 37,5\%$

Ответ: 0,375.

№8 ~~всё~~ +10№3. 1) Рассмотрим сумму $p(50-k) + p(50+k)$, где $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq 49$:

$$\frac{g^{50} \cdot g^k}{g^{50} \cdot g^k + g^{50}} + \frac{g^{50}}{g^k \cdot (g^{50} + \frac{g^{50}}{g^k})} = \frac{g^k}{g^k + 1} + \frac{1}{g^k + 1} = \frac{g^k + 1}{g^k + 1} = 1$$

№2) $p(1) + p(2) + \dots + p(99) = p(50-49) + p(50-48) + \dots + p(50) + \dots + p(50+49) =$

$$= (p(50-49) + p(50+49)) + \dots + (p(50-1) + p(50+1)) + p(50) =$$

$$= 49 + \frac{g^{50}}{g^{50} + g^{50}} = 49 + \frac{1}{2} = 49\frac{1}{2}$$

Ответ: $49\frac{1}{2}$ №5. ~~$\arctg \frac{1}{a} = \arctg a$~~ убедимся, что $x=1$ и $x=-\frac{3}{5}$ не подходят: $\arctg(-4) + \frac{\pi}{2} \neq 1$

$$\frac{\pi}{2} + \arctg(4) \neq -\frac{3}{5}$$

$$\arctg \frac{5x+3}{3x-5} + \arctg \frac{x-1}{x+1} = x \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \text{ctg } x = \text{ctg} \left(\arctg \frac{5x+3}{3x-5} + \arctg \frac{x-1}{x+1} \right) \\ 0 \leq x \leq 2\pi, \text{ т.к. } 0 \leq \arctg a \leq \pi \end{cases}$$

№5. (продолжение)

$$\operatorname{ctg}(\alpha + \beta) = \frac{\cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta}{\sin \alpha \cdot \cos \beta + \sin \beta \cdot \cos \alpha} = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta - 1}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta}$$

$$\operatorname{ctg}\left(\operatorname{arctg} \frac{5x+3}{3x-5} + \operatorname{arctg} \frac{x-1}{x+1}\right) = \frac{(5x+3)(x-1)}{(3x-5)(x+1)} - 1$$

$$= \frac{\frac{5x+3}{3x-5} + \frac{x-1}{x+1}}{\frac{5x+3}{3x-5} + \frac{x-1}{x+1}} =$$

$$= \frac{(5x+3)(x-1) - (3x-5)(x+1)}{(5x+3)(x+1) + (3x-5)(x-1)}$$

($x \neq -1$ и $x \neq \frac{5}{3}$, т.к. это обратило бы знаменатель дроби, присутствующей в исходном уравнении в ноль)

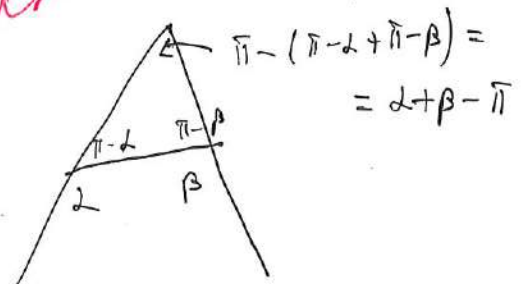
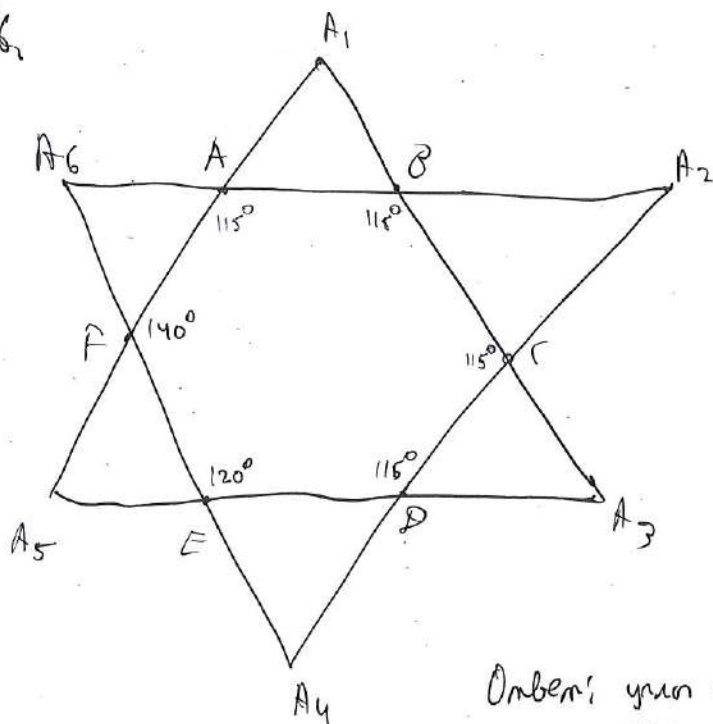
$$= \frac{2x^2 + 2}{8x^2 + 8} = \frac{1}{4} \Rightarrow \operatorname{ctg} x = \frac{1}{4}$$

$$\begin{cases} \operatorname{ctg} x = \frac{1}{4} \\ 0 \leq x < 2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \operatorname{arctg} 4 \\ x = \pi + \operatorname{arctg} 4 \end{cases}$$

12 баллов

Ответ: $\operatorname{arctg} 4$; $\pi + \operatorname{arctg} 4$.

№6



$$\Pi. \text{ о. } \angle A_1 = 230^\circ - 180^\circ = 50^\circ$$

$$\angle A_2 = \angle A_1 = \angle A_3$$

$$\angle A_4 = 235^\circ - 180^\circ = 55^\circ$$

$$\angle A_5 = 260^\circ - 180^\circ = 80^\circ$$

$$\angle A_6 = 255^\circ - 180^\circ = 75^\circ$$

Ответ: угол одного треугольника – 50° ; 50° ; 80°
 угол другого треугольника – 50° ; 55° ; 75°

35

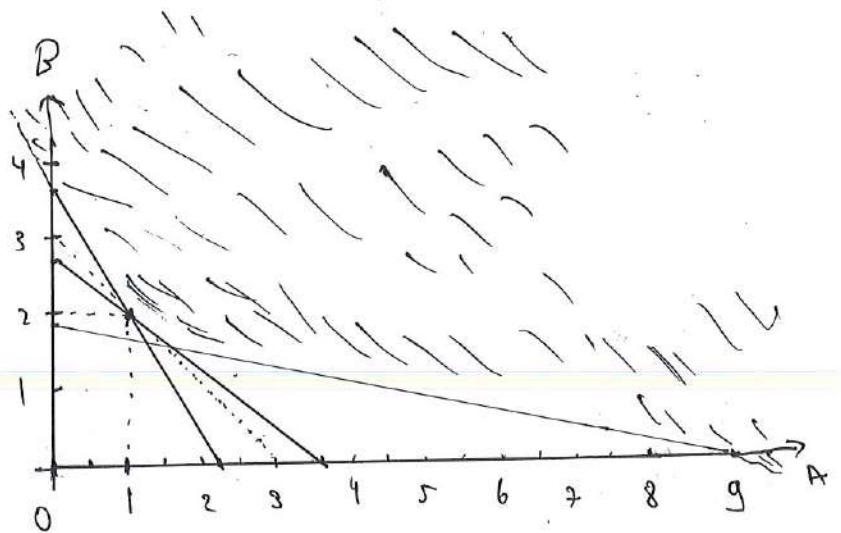
Код участника: **М11-833**

(заполняется организатором)

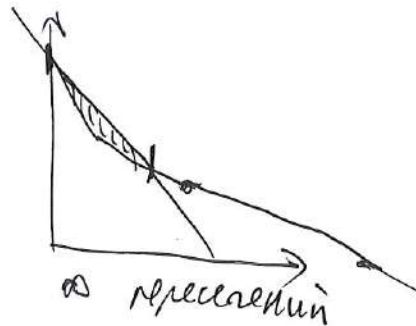
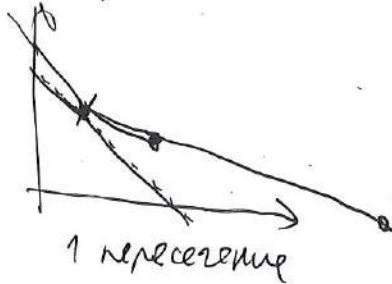
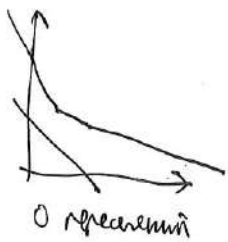
№ 2.

$$\begin{cases} A + 5B \geq 9 \\ 3A + 4B \geq 11 \\ 5A + 3B \geq 11 \end{cases}$$

$$\min_{A+B} \quad ?$$



Прямые $A+B=5$ отсекают от I четверти плоскости BOA равнобедренные прямоугольные треугольники. Необходимо найти такую прямую, что хотя бы одна точка на ней удовлетворяет системе и S минимален. Прямые $A+B=5$ пересекают область, удовлетворяющую системе либо 0 раз, либо 1 раз, либо ∞ раз.



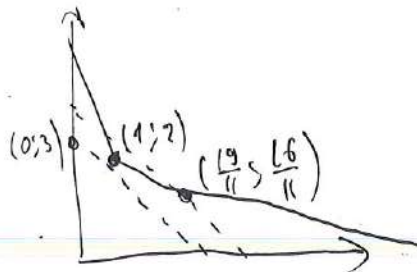
При этом если прямая пересекает область, удовлетворяющую системе ∞ раз, очевидно, что при дальнейшем сдвиге «вниз» (при увеличении S) решением будет ∞ до момента касания с «изломом», точкой пересечения двух прямых системы, наиболее близкой к началу координат, т.е. при одной точке пересечения прямой $A+B=5$ и системы S уменьшится S , т.е. там достигается минимум.

№2. (продолжение)

Найдем точки «излома» области, удовл. системе:

$$1) \frac{11}{4} - \frac{3}{4}A = \frac{11}{3} - \frac{15}{13}A \quad (\Rightarrow) \quad A=1, \quad B=2$$

$$2) \frac{11}{4} - \frac{3}{4}A = \frac{9}{5} - \frac{A}{5} \quad (\Rightarrow) \quad A = \frac{19}{11}; \quad B = \frac{16}{11}$$



$$P_1 \text{ в } (0,3) = \sqrt{5}$$

$$P_2 \text{ в } (0,3) = \frac{\sqrt{361 + 206}}{11} \approx \frac{\sqrt{617}}{11}$$

$$\sqrt{617} \approx 11 \sqrt{5}$$

$$617 \approx 5 \cdot 121 = 605$$

$P_1 < P_2 \Rightarrow$ при ~~максим~~ пересечении прямой $A+B=5$ точки (1,2)

достигается минимум $S \Rightarrow A+B=3$; $\min(A+B)=3$. 10

Ответ: 3.

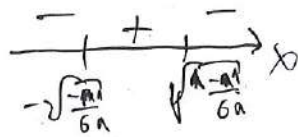
№7. $f(x) = ax^4 + x^2 + x$ касается $y = kx + \frac{1}{k}$ в двух точках; $a = ?$

касание в двух точках означает совпадение первых производных в двух точках

$4ax^3 + 2x + 1 = k$ должно иметь ровно два корня

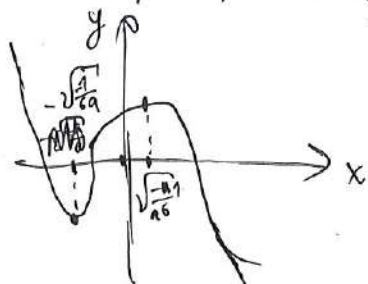
очевидно, что при $a \geq 0$ функция $4ax^3 + 2x + 1 - k$ монотонно возрастает как сумма монотонно возр. функций, $\Rightarrow a \geq 0$ не подходит.

Пусть $a < 0$, тогда $f''(x) = 12ax^2 + 2$ имеет два нуля



в каждом из которых меняет знак, т.е. функции $f'(x)$

возьмем примерно так:



уравнение $4ax^3 + 2x + 1 - k = 0$ имеет два корня $\Rightarrow$
 $\Rightarrow$ график должен касаться оси абсцисс в точке локального минимума или максимума.

№ 7. (продолжение)

$a = -b$; $b > 0$; $g(x) = 4ax^3 + 2x + 1 - k = 2x + 1 - 4bx^3 - k$

$$\begin{cases} g(-\sqrt{\frac{1}{6b}}) = 0 \\ g(\sqrt{\frac{1}{6b}}) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -2\sqrt{\frac{1}{6b}} + 1 + 4b \cdot \frac{1}{6b} \cdot \sqrt{\frac{1}{6b}} - k = 0 \\ 2\sqrt{\frac{1}{6b}} + 1 - 4b \cdot \frac{1}{6b} \cdot \sqrt{\frac{1}{6b}} - k = 0 \end{cases} \quad (*)$$

$$\begin{cases} k = 1 - \sqrt{\frac{4}{6b}} + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{6b}} \\ k = 1 + \sqrt{\frac{4}{6b}} - \frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{6b}} \end{cases} \quad \begin{cases} k = 1 - \sqrt{\frac{4}{6b}} \cdot \frac{1}{3} \\ k = 1 + \sqrt{\frac{4}{6b}} \cdot \frac{1}{3} \end{cases}$$

при этих k ур-е $-4bx^3 + 2x + 1 - k = 0$ имеет ровно 2 корня

① $-4bx^3 + 2x + \frac{1}{3}\sqrt{\frac{4}{6b}} = 0$ ($k=1-\frac{1}{3}\sqrt{\frac{4}{6b}}$) Исходное ур-е: $-bx^4 + x^2 + x = y$
 ур-е прямой: $y = kx + c$
 ② $-4bx^3 + 2x - \frac{1}{3}\sqrt{\frac{4}{6b}} = 0$ ($k=1+\frac{1}{3}\sqrt{\frac{4}{6b}}$)

При этом ур-е ① имеет корни $x = -\sqrt{\frac{1}{6b}}$, а ур-е ② $x = \sqrt{\frac{1}{6b}}$,
 в этих точках будет происходить одно из касаний.

Константу c можно найти, зная, что $-bx^4 + x^2 + x - kx - c = 0 = F(x)$

Пусть $k = 1 + \sqrt{\frac{4}{6b}} \cdot \frac{1}{3}$, тогда $-b \cdot \frac{1}{36b^2} + \frac{1}{6b} + \sqrt{\frac{1}{6b}} - (1 + \frac{1}{3}\sqrt{\frac{4}{6b}}) \cdot \sqrt{\frac{1}{6b}} = c$

Пусть $k = 1 - \frac{1}{3}\sqrt{\frac{4}{6b}}$, тогда $-b \cdot \frac{1}{36b^2} + \frac{1}{6b} - \sqrt{\frac{1}{6b}} + (1 - \frac{1}{3}\sqrt{\frac{4}{6b}}) \cdot \sqrt{\frac{1}{6b}} = c$

Ответ: на каждое значение $a < 0$ $\checkmark$ $\exists$ две прямые:

$y = x \cdot (1 + \frac{1}{3}\sqrt{\frac{4}{-6a}}) - \frac{1}{6a} + \sqrt{\frac{1}{6(-a)}} - (1 + \frac{1}{3}\sqrt{\frac{4}{-6a}}) \cdot \sqrt{\frac{1}{-6a}}$

$y = x \cdot (1 - \frac{1}{3}\sqrt{\frac{4}{-6a}}) + \frac{1}{6a} - \sqrt{\frac{1}{6(-a)}} + (1 - \frac{1}{3}\sqrt{\frac{4}{-6a}}) \cdot \sqrt{\frac{1}{-6a}}$

3

МН-827

Код участника
(заполняется организатором)



**Олимпиадная работа
заключительного этапа
«Всероссийская олимпиада школьников "Миссия
выполнима. Твоё призвание - финансист!" 2023-2024
г.»
«(Математика 11 класс)»**

Вариант № 2 (второй)

«27 января 2024 г.»

Никакие другие записи на титульном листе делать не разрешается

№1 Пусть: А - консейв тех, кто говорит по-английский, F - по-французски

A* - не говорят по-английски,
F* - не говорят по-французски.

Очевидно, все люди в консейве А либо также принадлежат F либо F*, аналогично для F*
Тогда условие можно переписать так:

$$\frac{F \cap A}{A} = 0,04 \quad \frac{A \cap F}{F} = 0,2, \quad \frac{F}{A} = ?$$

~~Из этого следует, что значит,~~ $\frac{F \cap A}{A} = 0,96$ (1)

$\frac{A \cap F}{F} = 0,8$ (2) (очевидно $A \cap F = F \cap A$ из-за коммутативности пересечения)

разделим (1) на (2): $\frac{F \cap A}{A} \cdot \frac{F}{A \cap F} = \frac{0,96}{0,8}$,

$$\frac{F}{A} = \frac{0,96}{0,8} = 1,2$$

Ответ. в 1,2 раза $\oplus$ 105.

✓2.
$$\begin{cases} 3A + 5B \leq 11, (1) \\ 4A + 3B \leq 10, (2) \\ 7A + 4B \leq 18, (3) \end{cases}$$

$$B = \frac{11 - 3A}{5}$$

$$B = \frac{10 - 4A}{3}$$

$$B = \frac{18 - 7A}{4}$$

Нарисуем неравенства

на координатной плоскости (а именно, линиями, создающими полуплоскости)

и множество закрашенных точек.

позволяет рассмотреть только первую четверть, так как.

~~$A + B \rightarrow \max$~~

Пусть $T = \max(A + B)$

~~$A + B = T$ — прямая~~

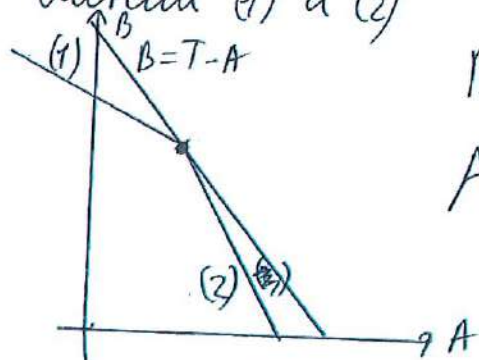
$A + B = T$, где T — параметр,

эта прямая имеет тем выше,

тем больше T , тогда найти

точку её пересечения с ~~подходящим~~ ^{каждой} множеством решений

Т.к. $K - T$ угла наклона у (2) меньше чем у (1), то подходящей точкой, будет точка пересечения линий (1) и (2)



$$B = \frac{11 - 3A}{5} = \frac{10 - 4A}{3} \Rightarrow A = \frac{17}{11} \Rightarrow B = \frac{14}{11}$$

$$A + B = \frac{17}{11} + \frac{14}{11} = \frac{31}{11}$$

Ответ. $\frac{31}{11}$.

10

$$p(h) = \frac{(-1)^n \cdot 3^n}{3^n + 3^{17}} = \frac{(-1)^n 3^n}{3^n(1 + 3^{17-n})} = \frac{(-1)^n}{1 + 3^{17-n}}$$

$$p(34-n) = p(34-n) = \frac{(-1)^{34-n}}{1 + 3^{n-17}} = (-1)^n \cdot 3^{n-17}$$

$$p(h) + p(34-n) = (-1)^n$$

$$p(h) = \frac{(-1)^n \cdot 3^n}{3^n + 3^{17}} = \frac{(-1)^n \cdot 3^n}{3^{17}(3^{n-17} + 1)} = \frac{(-1)^n \cdot 3^{n-17}}{3^{n-17} + 1}$$

$$p(h) + p(34-n) = (-1)^n \left\{ \frac{(-1)^n}{1 + 3^{17-n}} + \frac{(-1)^{34-n} \cdot 3^{n-17}}{3^{n-17} + 1} \right\}$$

$$= \frac{(-1)^n}{1 + 3^{17-n}} + \frac{(-1)^{34-n} \cdot 3^{n-17}}{3^{n-17} + 1} = \left| \begin{array}{l} n \equiv 34-n \pmod{2} \\ \text{значит} \\ (-1)^n = (-1)^{34-n} \end{array} \right| =$$

$$\Rightarrow (-1)^n \cdot 34 = \frac{(-1)^n + (-1)^n \cdot 3^{17-n}}{1 + 3^{17-n}} = \frac{(-1)^n(1 + 3^{17-n})}{1 + 3^{17-n}} = (-1)^n$$

То есть при сложении n -ого и $34-n$ -ого получается $(-1)^n$, для всех чисел от 1 до 16. Найдётся $18 \leq 34-n \leq 33$ Тогда $\sum_{n=1}^{16} (p(n) + p(34-n)) = 0$ (чётное кол-во слагаемых)

а сумма всех ~~всего~~ ряда равна $p(17) = \frac{-1}{1+1} = -\frac{1}{2}$.
всей последовательности

Ответ. $-\frac{1}{2}$. +

✓ 5

$$\arctg \frac{2x-1}{x+2} + \arctg \frac{x+3}{3x-1} = x, \quad | \operatorname{tg}()$$

По формуле суммы:

$$\frac{\frac{2x-1}{x+2} + \frac{x+3}{3x-1}}{1 - \frac{(2x-1)(x+3)}{(x+2)(3x-1)}} = \operatorname{tg}(x),$$

$$\frac{\frac{7x^2+7}{3x^2+5x-2}}{\frac{x^2+1}{3x^2+5x-2}} = \operatorname{tg} x,$$

$$\operatorname{tg} x = 7,$$

$$x = \arctg 7 + \pi n \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\text{из opp: } n \in \{-1; 0\}$$

$$x_1 = \arctg 7$$

$$x_2 = \arctg 7 - \pi$$

$$\sqrt{3} < 7$$

$$-\pi < \frac{\pi}{3} < \arctg 7 < \frac{\pi}{2} < \pi$$

$$-\pi < -\frac{2\pi}{3} < \arctg 7 - \pi < -\frac{\pi}{2} < \pi$$

Рез отбраковки корней получается.

Ответ. $\arctg 7 - \pi$; $\arctg 7$.Опр на x :т.к. $\arctg(u) \quad u \in \mathbb{R}, u \in \mathbb{R}$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \arctg(u) \leq \frac{\pi}{2}$$

Сумма двух $\arctg u + \arctg v$
не больше π и не
меньше $-\pi$

Значит

$$-\pi \leq x \leq \pi$$

$$x \neq -2$$

$$x \neq \frac{1}{3}$$

М11-824

Код участника

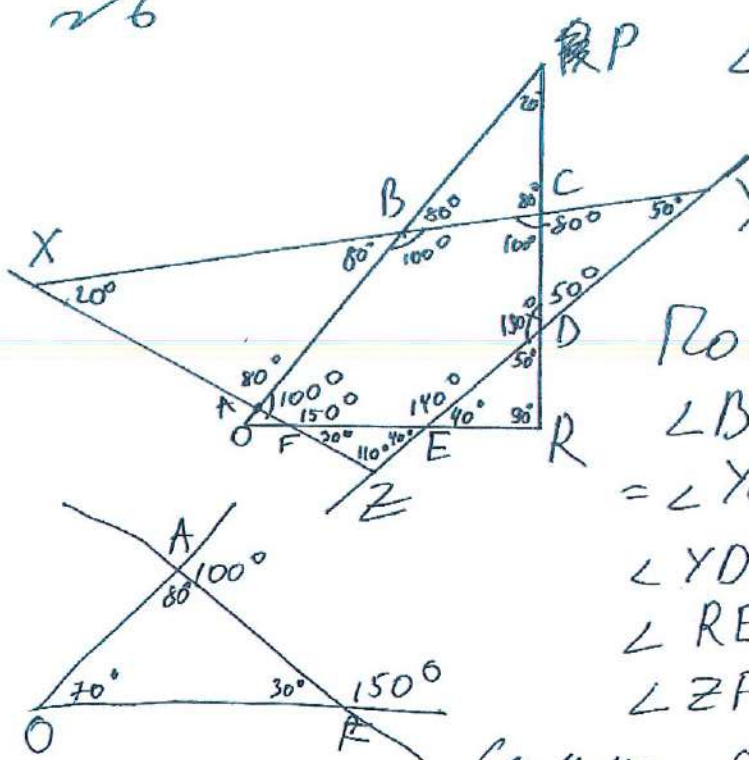
Всероссийская олимпиада школьников «Миссия выполнима. Твое призвание – финансист!» 2023/2024 уч.г.

Бланк проверки работы

Математика 11 класс

№ задания	ФИО эксперта	Балл	ФИО эксперта	Балл	Итоговый балл
1	Касьянов	10	Гурьянов	10	10
2	Тоздиз	10	Зитников	10	10
3	Александрович	12	Липачик	12	12
4	Дубинкин	0	Матюшков	0	0
5	Урозов	12	Липачик	12	12
6	Берзин	3	Липачик	3	3
7	Липачик	3	Степанян	3	3
8	Шеников	0	Жилищев	0	0
ИТОГО					50

✓6



$$\triangle XYZ \cap \triangle OPR = ABCDEF$$

$$\angle A = \angle B = \angle C = 100^\circ$$

$$\angle D = 130^\circ \quad \angle E = 140^\circ$$

$$\angle F = 150^\circ$$

По смежности:

$$\angle BAX = \angle XBA = \angle PBC = \angle PCB =$$

$$= \angle YCD = 80^\circ = \angle OAF$$

$$\angle YDC = \angle RDE = 50^\circ$$

$$\angle RED = 40^\circ = \angle ZEF$$

$$\angle ZFE = \angle OFA = 30^\circ$$

Сумма углов треугольника равна 180° ,

Тогда

$$\angle X = 20^\circ \quad \angle Y = 50^\circ \quad \angle Z = 110^\circ$$

$$\angle P = 20^\circ \quad \angle R = 90^\circ \quad \angle O = 70^\circ$$

Ответ. $\triangle XYZ$: $20^\circ; 50^\circ; 110^\circ$

$\triangle OPR$: $20^\circ; 90^\circ; 70^\circ$.

Рассмотрен только один случай!

38.



Код участника:

(заполняется организатором)

МН-827

28

① Очевидно, что если мы выпишем все последовательности в которых никакие из ~~элементов~~ ^(каждый из плохих элементов) множества $\{x; x; z\}$ не стоят рядом, вледующей, выписанной последовательности они будут стоять рядом.

② Пусть мы выписали не все последовательности, в которых никакие из элементов $\{x; x; z\}$ не стоят рядом, тогда следующей последовательностью можно записать другую такую (плохую)

③ Значит ответом на задачу будет вычитаться

кол-во плохих последовательностей.

4. Назовём $*$ элемент, который содержит несколько элементов, ^{последовательно} пусть $g(*)$ - кол-во элементов, которые $*$ содержит, $*$ может содержать только различные элементы $\{x; x; z\}$

Подсчитаем кол-во хороших последовательностей. Разберём по случаям. (В случае 2 и 3 рядом с $*$ не стоит 3-й элемент $\{x; x; z\}$ не входящий в $*$)

1) $g(*) = 3$, тогда способов $98!$

2) $g(*) = 2$ $*$ - первый ~~элемент~~ $*$ - первый элемент

Тогда способов $97 \cdot 97!$

аналогично, если $*$ - последний элемент. $97 \cdot 97!$

Тогда: $2 \cdot 97 \cdot 97!$

3) $g(*) = 2$, $*$ - не крайний элемент,

Тогда способов $\overbrace{96}^{97} | \overbrace{x}^{97} | \overbrace{97}^{96} = 97 \cdot 97 \cdot 96 \cdot 96! = 96 \cdot 97!$

4) $g(*) = 1$, такие последовательности либо плохие, либо мы их сосчитали.

Смотр. сл. бланк

Код участника:

(заполняется организатором)

М-827

✓ 8 продолжение

Однако, $\times$ тоже можно составлять несколькими способами.

Тогда именовое кол-во для каждого шута:

$$1) 6 \cdot 98!$$

$$2) 2C_3^2 \cdot 97 \cdot 97! = 6 \cdot 97 \cdot 97!$$

$$3) C_3^2 \cdot 97! \cdot 97! = 3 \cdot 96 \cdot 97!$$

Тогда кол-во таких последовательностей, равно (все кол-во).

$$100! - 6 \cdot 98! - 6 \cdot 97 \cdot 97! - 3 \cdot 96 \cdot 97! = 97!$$

$$\equiv 97! (968778) = 97! (969030) - 3 \cdot 97! \cdot 97!$$

Тогда введущей только будет последовательность, удовлетворяющая условию.

Ответ. $97! \cdot 968$,

$$97! (968778) + 1.$$

$$97! (969030) - 3 \cdot 97! \cdot 97! + 1.$$

$$97! (968778) + 1.$$

Необходимо найти и максимальное, а минимальное — нет.

(08)

Код участника:

(заполняется организатором)

МЧ-827

✓7

$$\begin{cases} f(x_1) - f(x_0) = f'(x_0)(x_1 - x_0) & (1) \\ f'(x_0) = f'(x_1) & (2) \end{cases}$$

$f'(x)$ должна иметь хотя бы 3 промежутка знакопеременности, тогда $f''(x)$ имеет 2 нуля

$$f'(x) = 12x^2 + 2b, \text{ тогда } \underline{2b < 0}$$

$f'(x)$ должна иметь хотя бы 3 промежутка, потому что иначе $f'(x)$ не будет иметь принимать значения дважды, ~~либо~~ или функция будет сначала убывать на одном отрезке и убавать на другом, таким образом система уравнений никогда не выполняется.

(35)

№ 4 - ок.

МН-560

Код участника
(заполняется организатором)



**Олимпиадная работа
заключительного этапа
«Всероссийская олимпиада школьников "Миссия
выполнима. Твоё призвание - финансист!" 2023-2024
г.»
«(Математика 11 класс)»**

Вариант № 1

«27 января 2024 г.»

Никакие другие записи на титульном листе делать не разрешается

н 1
обозначим ступеней облучения на облик
формам за b , ^{маленько} b за 1 , ^{маленько} d за d .
тогда

$$\begin{cases} 0,5(1+b) = b \\ 0,6(d+b) = b \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0,5 = 0,5b \\ 0,6d = 0,4b \end{cases}$$

$$\begin{cases} 21 = 2b \\ 3d = 2b \end{cases}$$

$$21 = 2b = 3d$$

$$\frac{1}{1+b+d} = \frac{3}{8}$$

Ответ: $\frac{3}{8} = 0,375$ + 10

н 2

оценим $A+B$:

$$\begin{cases} 3A + 4B \geq 11 \\ 5A + 3B \geq 11 \end{cases} \quad 1 \cdot 2$$

$$11A + 11B \geq 33$$

$$A+B \geq 3$$

найдем пример на 3

$$\begin{cases} 3A + 4B = 11 \\ 5A + 3B = 11 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9A + 12B = 33 \\ 20A + 12B = 44 \end{cases}$$

$$11A = 11$$

$$\begin{cases} A = 1 \\ B = 2 \end{cases}$$

подставим:

$$1 + 2 \cdot 5 \geq 9$$

$$3 + 4 \cdot 2 \geq 11$$

$$5 + 3 \cdot 2 \geq 11$$

$$11 \geq 9$$

$$11 \geq 11$$

$$11 \geq 11$$

Ответ: 3

для $n \leq 50$

$$\frac{9^n}{9^n + 9^{50}} = \frac{1}{1 + 9^{50-n}}$$

для $n > 50$

$$\frac{9^n}{9^n + 9^{50}} = \frac{9^{n-50}}{9^{n-50} + 1}$$

~~просуммируем~~ просуммируем пары $p(n) + p(100-n)$, где $n \leq 50$:

$$\frac{9^n}{9^n + 9^{50}} + \frac{9^{100-n}}{9^{100-n} + 9^{50}} = \frac{1}{1 + 9^{50-n}} + \frac{9^{50-n}}{9^{50-n} + 1} = \frac{9^{50-n} + 1}{9^{50-n} + 1} = 1$$

тогда пар 49, осталось лишь вычислить $p(50)$

$$\frac{9^{50}}{9^{50} + 9^{50}} = 0,5$$

$$1 \cdot 49 + 0,5 = 49,5$$

Ответ: 49,5

NS от

M11-560

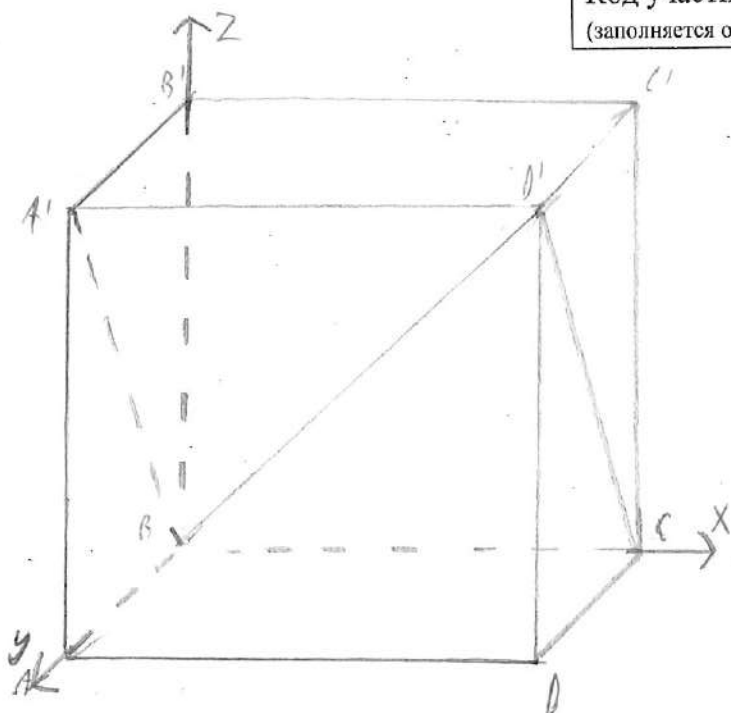
Код участника

Всероссийская олимпиада школьников «Миссия выполнима. Твое призвание – финансист!» 2023/2024 уч.г.

Бланк проверки работы

Математика 11 класс

№ задания	ФИО эксперта	Балл	ФИО эксперта	Балл	Итоговый балл
1	Васильев	10	Шмелева И.Г.	10	10
2	Гордеев	10	Захаров	10	10
3	Марков	12	Усачев	12	12
4	Курсанов	1	Всеслав	1	1
5	Борисов	0	Кремль	0	0
6	Тригубов	12	Алехов	12	12
7	Ковалев	5	Степанов	5	5
8	Ш	0	Щапов	0	0
ИТОГО					50

Код участника: 111-560
(заполняется организатором)

для того, чтобы сфера касалась AA' и AD ее центр должен лежать на биссекторной плоскости к $AA'B'$ и ADD' . т.к. у нас куб, центр лежит на ABD' аналогично для AA' и $A'B'$, центр лежит на $A'D'B$ точки B и D' принадлежат обеим плоскостям $\Rightarrow$ плоскости пересекаются по прямой BD' $\Rightarrow$ центр окружности лежит на BD'

Введем координаты как на рисунке. Все точки на BD' будут иметь координаты $(k; k; k)$, где $k \in \mathbb{R}$

$$C(1; 0; 0)$$

$$\text{расстояние от } BD' \text{ до } C = (k-1)^2 + k^2 + k^2$$

$$\text{расстояние от } BD' \text{ до } A'B' = k^2 + (k-1)^2$$

$$(k-1)^2 + k^2 + k^2 = k^2 + (k-1)^2$$

$$k^2 = 0$$

$$k = 0$$

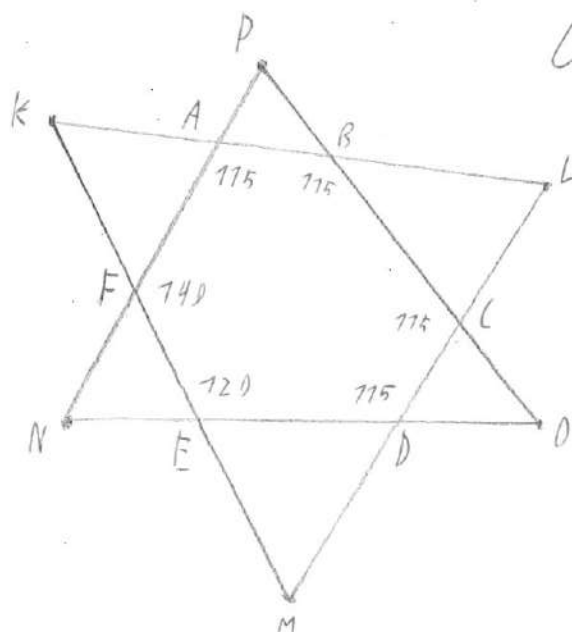
$$\text{тогда } r = (0-1)^2 + 0^2 + 0^2 = 1$$

$$\text{ответ: } 1$$

+1

n 6

Случай I



тогда сумма углов пятиугольника = $3 \cdot 180 = 540$

аналогично:

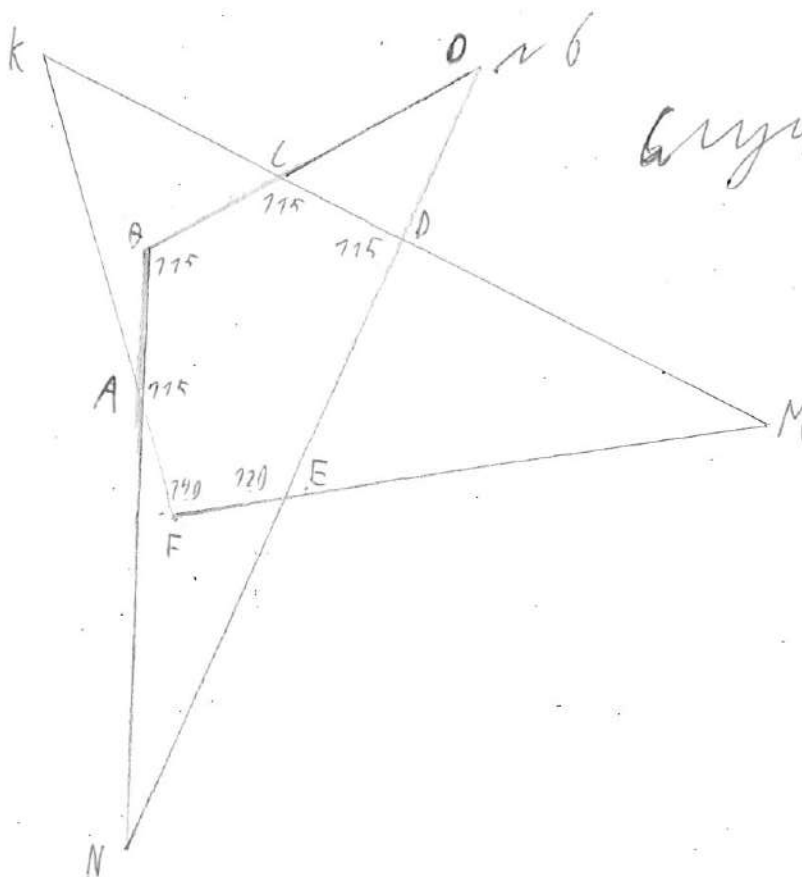
$$\angle P = 540 - \angle F - \angle E - \angle D - \angle C = 540 - 740 - 720 - 775.2 = 500$$

$$\angle L = 540^\circ - \angle D - \angle E - \angle F - \angle G - \angle H = 540^\circ - 113^\circ - 5^\circ - 72^\circ = 75^\circ$$

$$\angle M = 540 - \angle F - \angle A - \angle B - \angle C = 540 - 77.5 - 70 = 55^\circ$$

~~60° 50'~~ ~~50°~~

Код участника: **Н11-560**
(заполняется организатором)



Случай II

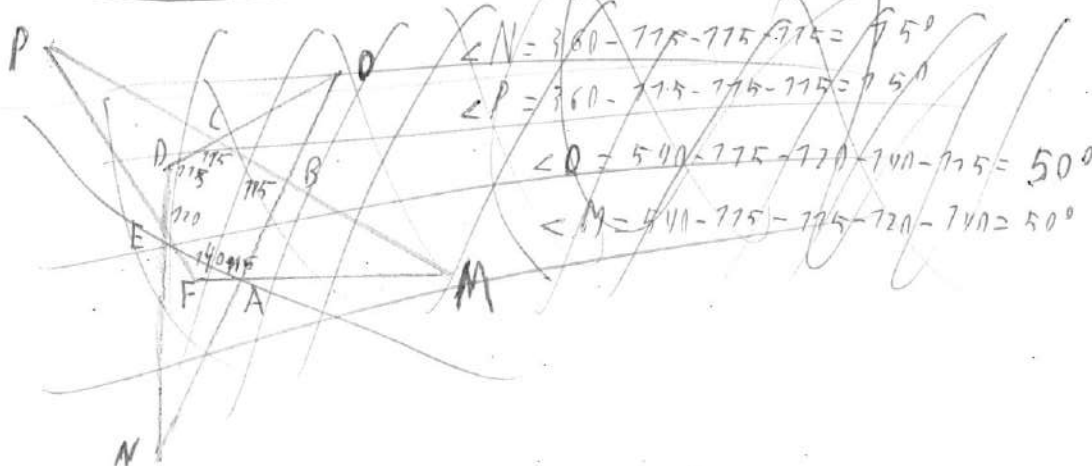
$$\angle N = 360^\circ - \angle B - \angle C - \angle D = 360^\circ - 77.5^\circ - 77.5^\circ - 77.5^\circ = 75^\circ$$

$$\angle K = 360^\circ - \angle F - \angle E - \angle D = 360^\circ - 74.0^\circ - 72.0^\circ - 77.5^\circ = 75^\circ, \text{ что невозможно.}$$

$$\angle O = 540^\circ - \angle F - \angle E - \angle A - \angle B = 540^\circ -$$

$$\angle M = 540^\circ - \angle F - \angle A$$

$$\angle N = 540^\circ - \angle F - \angle A - \angle B - \angle C = 540^\circ -$$



$$\angle N = 360^\circ - 77.5^\circ - 77.5^\circ - 77.5^\circ = 75^\circ$$

$$\angle P = 360^\circ - 77.5^\circ - 77.5^\circ - 77.5^\circ = 75^\circ$$

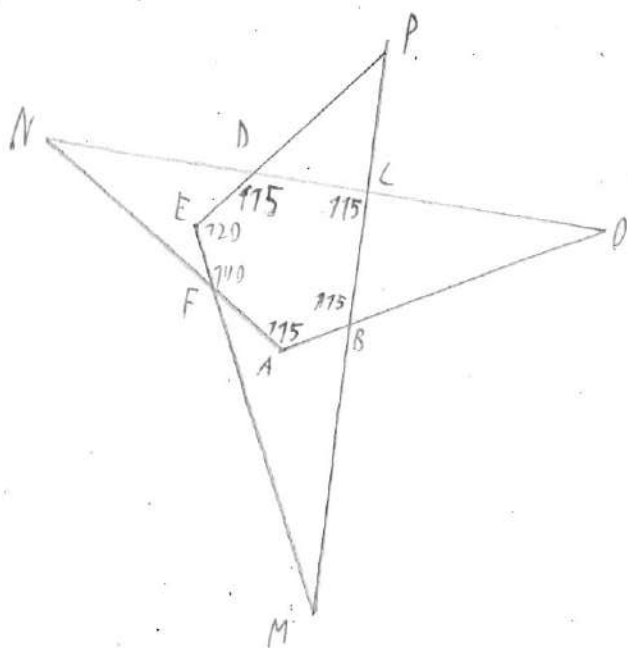
$$\angle O = 540^\circ - 77.5^\circ - 77.5^\circ - 74.0^\circ - 72.0^\circ = 50^\circ$$

$$\angle M = 540^\circ - 77.5^\circ - 77.5^\circ - 72.0^\circ - 74.0^\circ = 50^\circ$$

Код участника: 1411-560

(заполняется организатором)

Луганск III



$$\angle M = 360 - 720 - 775 - 775 = 70$$

$$\angle N = 260 - 77.5 - 77.5 - 77.5 = 15$$

$$\angle P = 540 - 720 - 749 - 775 - 775 = 50$$

$$\angle O = 540 - 775 - 720 - 740 - 775 = 50$$

Amberm. ~~ex~~ mbo

80 50 50
25 50 55

me

20 50 720

75 50 775

n 7

касательных к 2 точкам на графике не будет
если функция вогнутая.

$$f'(x) \geq 0 \text{ для любых } x \quad f''(x) \geq 0 \text{ для любых } x$$

тогда, для существования глобальной касательной
необходимо существование x , при котором:

$$f'(x) = 4ax^3 + 2x + 1$$

$$f''(x) = 12ax^2 + 2 < 0$$

$$12ax^2 < -2$$

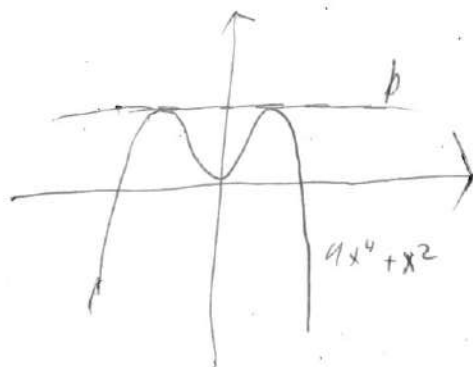
$$ax^2 < -\frac{1}{6}$$

$$a < 0$$

част. случай

рассмотрим прямую $x+b$, ~~кас~~ она касается графика
в 2х местах, то $ax^4 + x^2 + x = x+b$ имеет 2 решения.
должно иметь 2 решения

$$ax^4 + x^2 = b$$



из графиков функций видно, что
 $b = \text{максимальному значению } ax^4 + x^2$

$$(ax^4 + x^2)' = 4ax^3 + 2x = 0$$

$$4ax^3 + 2x = 0$$

$$x(2ax^2 + 1) = 0$$

$$x = 0 \text{ или } x = \pm \sqrt{-\frac{1}{2a}}$$

$$x = 0 \text{ или } x = \pm \sqrt{-\frac{1}{2a}}$$

$$x(7 + x\sqrt{-2a})(7 - x\sqrt{-2a})$$

$$x(x - \sqrt{-\frac{7}{2a}})(x + \sqrt{-\frac{7}{2a}}) = 0$$

Код участника: 111-560

(заполняется организатором)

тогда точки максимума

$$aX^4 + X^2 = \sqrt{-\frac{1}{2a}} \quad ; \quad -\sqrt{-\frac{1}{2a}}$$

~~из~~ из четности функции ^{ее} значения в этих точках будут одинаковы, так что возьмём положительную.

$$a \sqrt{-\frac{1}{2a}}^4 + \sqrt{-\frac{1}{2a}}^2 = a \cdot \frac{1}{4a^2} + \frac{1}{2a} = \frac{1}{4a} + \frac{1}{2a} = \frac{1+2}{4a} = \frac{3}{4a} = b$$

Ответ: $y = x - \frac{1}{4a}$

$$a < 0$$

Следует $k=1$
5 рассужд.

11:42 - 11:44

Мн-070

Код участника
(заполняется организатором)



[Handwritten signature]

**Олимпиадная работа
заключительного этапа
«Всероссийская олимпиада школьников "Миссия
выполнима. Твоё призвание - финансист!" 2023-2024
г.»
«(Математика 11 класс)»**

Вариант № 2

«27 января 2024 г.»

Никакие другие записи на титульном листе делать не разрешается

У11-040

Код участника

Всероссийская олимпиада школьников «Миссия выполнима. Твое призвание – финансист!» 2023/2024 уч.г.

Бланк проверки работы

Математика 11 класс

№ задания	ФИО эксперта	Балл	ФИО эксперта	Балл	Итоговый балл
1	Ананидзе	10	Гуреева	10	10
2	Валеева	10	Тоззиц	10	10
3	Кремь	0	Александрович	0	0
4	Гузев	0	Шариков	0	0
5	Кремь	0	Уридов	0	0
6	Олегов	2	Гузев	3	3
7	Алиханов	3	Беланян	3	3
8	Демидов	0	Цацулов	0	0
ИТОГО					26

Код участника: М₁₁ - 070
(заполняется организатором)

Задача № 2

Решим 1-ое и 2-ое неравенства

$$\begin{cases} 3A + 5B \leq 11 \\ 4A + 3B \leq 10 \end{cases} \cdot 2 \rightarrow + \begin{cases} 3A + 5B \leq 11 \\ 8A + 6B \leq 20 \end{cases} \rightarrow 11A + 11B \leq$$

↓

$$A + B \leq \frac{31}{11}$$

① При этом точное пересечение прямых $3x + 5y = 11$ и $4x + 3y = 10$ имеет координаты

$$x = \frac{17}{11}; \quad y = \frac{14}{11}, \quad \text{т.е. равенство достигается при } A = \frac{17}{11} \text{ и } B = \frac{14}{11}$$

② Данное значение A и B удовлетвор. 3-ей неравенству ($7A + 4B \leq 18$): $7 \cdot \frac{17}{11} + 4 \cdot \frac{14}{11} \leq 18$, по этому $A + B \leq \frac{31}{11}$, и наибольшее значение достигается при $A = \frac{17}{11}$, $B = \frac{14}{11}$

Ответ: $\frac{31}{11}$

Задача № 3

$$p(n) = \frac{(-3)^n}{3^n + 3^{12}}; \quad p(1) + p(2) + p(3) + \dots + p(13).$$

Будем складывать 1-ой с последним, 2-ой с предпоследним и т.д.

пусть $k \in [1; 16]$, где k - число

$$\begin{aligned} p(k) + p(34-k) &= \frac{-3^k}{3^k + 3^{12}} + \frac{-3^{34-k}}{3^{34-k} + 3^{12}} = \\ &= \frac{-1^k \cdot 3^k}{3^k + 3^{12}} + \frac{-1^{34-k} \cdot 3^{34-k}}{3^{34-k} + 3^{12}} = \\ &= \frac{-1}{1 + 3^{12-k}} + \frac{-1^{34-k} \cdot 3^{12-k}}{3^{12-k} + 1} = \frac{-1^k + (-1)^{34-k} \cdot 3^{12-k}}{1 + 3^{12-k}} = \\ &= 1 \end{aligned}$$

1) при четных k получим:

$$\frac{1 + 3^{12-k}}{1 + 3^{12-k}} = 1$$

2) при нечетн. k получим:

$$\frac{-1 - 3^{12-k}}{1 + 3^{12-k}} = -1$$



Код участника: М11-070
(заполняется организатором)

Всего таких пар -

$$16, \text{ из них } 8 \text{ даёт } 1 \text{ и } 8 \text{ даёт } -1 \text{ в сумме } 0,$$

$$\Rightarrow p(1) + p(2) + \dots + p(33) = (p(1) + p(33)) +$$

$$+ (p(2) + p(32)) + \dots + (p(16) + p(17)) + p(17) =$$

$$= -1 + 1 - \dots + 1 + p(17) = p(17)$$

$$p(17) = \frac{-3^{17}}{3^{17}} + 3^{17} - \frac{3^{17}}{3^{17}} + 3^{17} = -\frac{1}{2} = -0,5$$

Ответ: -0,5

Задача №1

Пусть а - много говорим. по-англ. и по-фр.

б - много говор. по-англ, но не по-фр.

с - много говор по-француз, но не по-а

д - много говор не по-англ, не по-фр.

Из условия: $\frac{c}{c+d} = 0,04$, $\frac{b}{b+d} = 0,2$,
по француз:

$$\begin{cases} \frac{c}{c+d} = \frac{1}{25} \\ \frac{b}{b+d} = \frac{1}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 25c = c+d \\ 5b = b+d \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} d = 24c \\ d = 4b \end{cases} \text{ Надо найти: } \frac{b+d}{c+d}$$

$$\frac{b+4b}{c+24c} = \frac{5b}{25c} = \frac{b}{5c} = \frac{b}{5c} = 1,2$$

Ответ: в 1,2 раза

+

Задача №5

Код участника: МН-020
(заполняется организатором)

$$\arctg \frac{2x-1}{x+2} + \arctg \frac{x+3}{3x-1} = x$$

Т.к. $\arctg x \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) \Rightarrow$ правая часть уравнения $x \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$, $x \neq -2$, $x \neq \frac{1}{3}$

Возьмём $\tg$ от обеих частей:

$$\tg \left(\arctg \left(\frac{2x-1}{x+2} \right) + \arctg \left(\frac{x+3}{3x-1} \right) \right) = \tg x$$

По формуле $\tg$ суммы, левая часть уравнения

$$\tg \left(\arctg \left(\frac{2x-1}{x+2} \right) + \arctg \left(\frac{x+3}{3x-1} \right) \right)$$

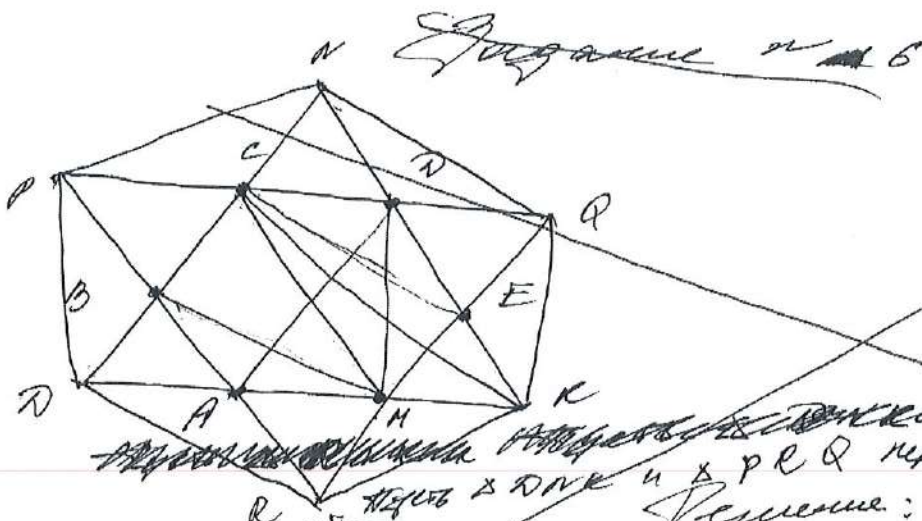
$$= 1 + \tg \left(\arctg \left(\frac{2x-1}{x+2} \right) \right) \cdot \tg \left(\arctg \left(\frac{x+3}{3x-1} \right) \right) =$$

$$= \frac{2x-1}{x+2} + \frac{x+3}{3x-1}$$

$$= \frac{1-2x-1}{x+2} \cdot \frac{x+3}{3x-1} = \frac{6x^2 - 3x - 2x + 1 + x^2 + 2x + x + 6}{3x^2 + 6x - x - 2 - 2x^2 - 6x + x + 3} =$$

$$= \frac{7x^2 + 7}{x^2 + 1} = 7, \text{ поэтому } \tg x = 7 \Rightarrow$$

$\Rightarrow x = \arctg 7 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$, с ур. означенный: Ответ: $x = \arctg 7$; $x = -\pi + \arctg 7$



Дано: $\angle FPD = \angle C = 1$
 $\angle D = 130^\circ$
 $\angle E = 140^\circ$
 $\angle F = 150^\circ$

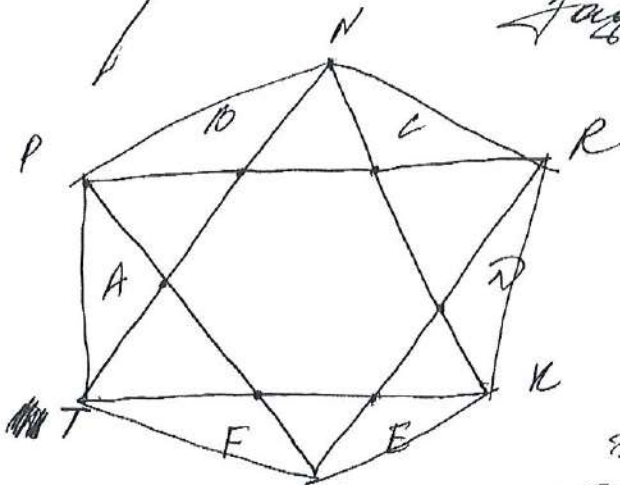
Найти: углы Δ -ки

Решение:
 Т.к. сумма углов Δ равна 180° ,
 тогда сумма углов $\Delta = 180$, тогда

Код участника: М₁₁ - 040
(заполняется организатором)

~~$\angle NPA = \angle MPB = 180^\circ$
 $\angle NPA = \angle MPB = 80^\circ$
 $\angle PAB = \angle PAM = 80^\circ$
 $\angle MCB = \angle RCD = 80^\circ$
 $\angle RDC = \angle KDE = 50^\circ$
 $\angle KED = \angle FEM = 40^\circ$
 $\angle QFE = \angle TFA = 30^\circ$~~

Задача 6



Дано: $\angle A = \angle B = \angle C =$
 $\angle D = 130^\circ$
 $\angle E = 140^\circ$
 $\angle F = 150^\circ$

Найти: сумму углов

Решение:

Пусть $\angle PAB$ и $\angle PRQ$ пере-

считаются по известным. Так как сумма углов в су-

$\angle PMA = \angle NAC = 80^\circ$

$\angle PAB = \angle DAM = 80^\circ$

$\angle NCM \quad \angle RCD = 80^\circ$

$\angle RDC = \angle KDE = 50^\circ$

$\angle KED = \angle QEF = 40^\circ$

$\angle QFE = \angle TFA = 30^\circ$, тогда $\angle P = 20^\circ$

$\angle N = 20^\circ$, $\angle R = 50^\circ$, $\angle K = 80^\circ$, $\angle Q = 110^\circ$

$\angle T = 70^\circ$, сумма углов $\triangle TNK = 20 + 70 + 80 = 180^\circ$

$\Rightarrow$ такой $\triangle$ существует

сумма углов $\triangle PRQ = 20 + 50 + 110 = 180^\circ$

$\Rightarrow$ такой $\triangle$ существует

Ответ: $20^\circ; 50^\circ; 110^\circ; 20^\circ; 70^\circ; 80^\circ$

73

Код участника: М - 040
(заполняется организатором)

Задача №8

Всего 100! перестановок

① Если x, y, z идут по порядку $\Rightarrow$
в вариации размещаем буквы x, y, z
37! перестановок остальных элементов,
здесь x, y, z ставим в ряд 3-мя способами
 $\Rightarrow 6 \cdot 37! \cdot 38$ — комбинация, x, y, z — вместе

② Если хотя бы 2 из 3-х x, y, z , тогда
пары xy, yx, xz, zx, yz, zy
это 37 комбинаций, если пара справа,
в 37-й позиции $6 \cdot 37 \cdot 2 \cdot 37!$ а если пара
не с краю, будет 37 позиций у пары.
рядом не 3-я буква, т.е. $37 \cdot 36$ и оставш.
перестановка $36! \Rightarrow 6 \cdot 37 \cdot 2 \cdot 37! + 6 \cdot 37 \cdot 37$
 $\times 36!$, работ из этого получаем одну из
хороших комбинаций, надо перебрать все
возможные и выбрать ещё одну $\Rightarrow$ необходимо
получить: $100! - 6 \cdot 37 \cdot 2 \cdot 37! - 6 \cdot 37! \cdot 36 \cdot 36!$
 $- 6 \cdot 37! \cdot 38 + 1$ верно 05 ⊖

Задача №7

Т.к. касат. общ., то если точки касат.
это x_1 и x_2 , то $f(x_1) + f'(x_1) \cdot (x - x_2) =$
 $= f(x_2) + f'(x_2) \cdot (x - x_1)$ при любых x / x_1
а значит и левая и правая части
равны, к при x — свободн. чл., при этом
 $f'(x) = 4x^3 + 26x + 1 \Rightarrow$

Код участника: М₁₁ - 070
(заполняется организатором)

$$\Rightarrow \begin{cases} ① & 4x_1^3 + 2bx_1 + 1 = 4x_2^3 + 2bx_2 + 1 \\ ② & x_1^4 + bx_1^2 + x_1 - (4x_1^3 + 2bx_1 + 1)x_1 = x_2^4 + bx_2^2 + x_2 - (4x_2^3 + 2bx_2 + 1)x_2 \end{cases}$$

1-го: $(x_1 - x_2)(4(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) + 2b) = 0$,
значит $b = -2(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2)$, т.к.
 $x_1 \neq x_2 \neq 0$

2-го: $3x_1^4 + bx_1^2 = 3x_2^4 + bx_2^2$,
или $(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)(3(x_1^2 + x_2^2) - b) = 0$
 $\Rightarrow$ т.к. $x_1 - x_2 \neq 0$, $x_1 = -x_2$ $b = -3 \cdot x_1^2 +$
Поэтому, выполнено $b = -3(x_1^2 + x_2^2)$

$= -2(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2)$ $x_1^2 - x_2^2 = 0$, $\Rightarrow x_1 = x_2$
 $\Rightarrow$ противоречие $\Rightarrow$ выполнено 1-ое, значит
то $b = -2x_1^2 \leq 0$. При $b = 0$, $x_1 = x_2 = 0$ —
не подходит, при $b < 0$, $x_1, x_2 = \pm \sqrt{\frac{-b}{2}}$,
т.к. $x_1 \neq x_2 \Rightarrow$ подходит Ответ: $b \leq 0$

№3(0)

№5(0)

№4(0)

35

МПГ 11-22

Код участника
(заполняется организатором)



**Олимпиадная работа
заключительного этапа
«РЕГИСТРАЦИЯ ТОЛЬКО для победителей и
призеров ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНОГО ЭТАПА 2022-2023
учебного года "Миссия выполнима. Твоё призвание -
финансист!"»
«(Математика 11 класс)»**

Вариант № 2

«27 января 2024 г.»

Никакие другие записи на титульном листе делать не разрешается

МПГ 11-22

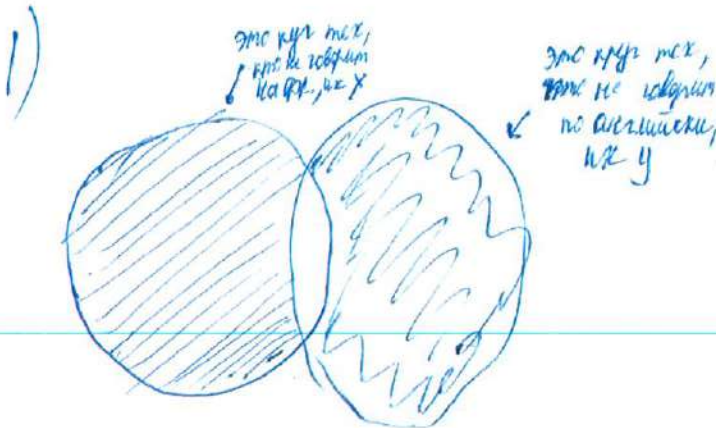
Код участника

Всероссийская олимпиада школьников «Миссия выполнима. Твое призвание – финансист!» 2023/2024 уч.г.

Бланк проверки работы

Математика 11 класс

№ задания	ФИО эксперта	Балл	ФИО эксперта	Балл	Итоговый балл
1	Анисимов Т.Т.	10	Васильев А.М.	10	10
2	Зачинов	10	Поздков	10	10
3	Борисова	12	Кремль	12	12
4	Магомедов Р.М.	0	Савина	0	0
5	Сизганов	0	Чернов	0	0
6	Григорьев	3	Колесов	3	3
7	Ластова- лова	14	Липа- кина	14	14
8	Шамнов	0	Федотов	0	0
ИТОГО					49



/// — это те, кто говорит по рус. но не по французски — их 0,2х по усл.

/// — это те, кто говорит по фр., но не по англ. — их 0,04у по усл.

тогда тех кто ~~у~~ на одном языке не говорит с другой стороны 0,96у, а другой * 0,8х

$$0,8x = 0,96y$$

$$\frac{x}{y} = \frac{0,96}{0,8} = \frac{6}{5}$$

x 10

Отв: в $\frac{6}{5}$ раз.

2) Обозначим $A+B \geq 20x$, тогда:

$$\begin{cases} 3x+2B \leq 11 \\ 3x+A \leq 10 \\ 4x+3A \leq 18 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x+2B \leq 11 \\ 6x+2A \leq 20 \\ 4x+3A \leq 18 \end{cases}$$

алгебра, получим $11x \leq 31 \Rightarrow x \leq \frac{31}{11}$

Возьмем $x = \frac{31}{11}$, тогда:

$$\frac{93}{11} + A \leq 10 \Rightarrow 11A \leq 17 \Rightarrow A \leq \frac{17}{11}$$

$$\frac{93}{11} + 2B \leq 11 \Rightarrow 22B \leq 28 \Rightarrow 11B \leq 14 \Rightarrow B \leq \frac{14}{11}$$

Смр 1

Заметим, что если взять $A = \frac{17}{11}$ и $B = \frac{14}{11}$, то $A+B = \frac{31}{11} = x$

первые два пер-ва
выполнены, доказана
это последнее равенство

$$\frac{124}{11} + \frac{51}{11} \leq 18$$

$$175 \leq 198$$

рабочая $\Rightarrow$ максимальное $A+B = \frac{31}{11}$

Отв: $\frac{31}{11}$

$$3) p(n) = \frac{(-3)^n}{3^{n+1}+1} = \frac{(-1)^n}{1+3^{17-n}}$$

посмотрим на сумму $p(a) + p(34-a)$

$$\frac{(-1)^a}{1+3^{17-a}} + \frac{(-1)^{34-a}}{1+3^{a-17}} = \frac{(-1)^a}{1+3^{17-a}} + \frac{(-1)^a}{1+3^{a-17}}$$

аи 34-а сумм. четное, тогда $(-1)^{34-a} = (-1)^a$

$$a \text{ — чёт}$$

$$\frac{1}{1+3^{a-17}} + \frac{1}{1+3^{17-a}} = \frac{1+3^{a-17} + 1+3^{17-a}}{1+3^{a-17} + 1+3^{17-a}} = 1$$

$$a \text{ — нечёт}$$

$$\frac{-1}{1+3^{a-17}} + \frac{-1}{1+3^{17-a}} = -\left(\frac{1}{1+3^{a-17}} + \frac{1}{1+3^{17-a}}\right) = -1$$

тогда разобьём нашу сумму на такую сумму пар

$$p(1) + p(33) + p(2) + p(32) + \dots + p(17) = -1 + 1 - 1 + 1 \dots - 1 + p(17) =$$

$$= p(17) = \frac{(-1)^{17}}{1+3^0} = -\frac{1}{2}$$

Отв: $-\frac{1}{2}$

12 Баллов

6) Задача некорректна, ведь в 6-м угольнике сумма углов равна 720, а в задаче она равна $4 \cdot 100 + 140 + 150 = 690$.

7) $f(x) = x^4 + bx^2 + x$

$f'(x) = 4x^3 + 2bx + 1$

140

Пусть у нас есть прямая, которая касается т.а. $f(x)$ в т. x_1 и x_0 , тогда запишем уравнение касательной в этих т.: $x_1 \neq x_0$

$y_k = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

$y_k = f'(x_1)(x - x_1) + f(x_1)$

т.к. это одна та же прямая то и угл. коэф. при x , и св. члены равны. тогда:

$f'(x_0) = f'(x_1)$

$f(x_0) + f(x_1) = 2x_1 f'(x_1) + f(x_1)$

$f'(x_0) = f'(x_1)$

$4x_0^3 + 2bx_0 + 1 = 4x_1^3 + 2bx_1 + 1$

$2x_0^3 + bx_0 = 2x_1^3 + bx_1$

$2(x_0^3 - x_1^3) = -b(x_0 - x_1) \quad x_0 \neq x_1$

$2(x_1^2 + x_0x_1 + x_0^2) = -b$

$-x_0 f'(x_0) + f(x_0) = x_1 f'(x_1) + f(x_1)$

$-x_0(4x_0^3 + 2bx_0 + 1) + x_0^4 + bx_0^2 + x_0 = -x_1(4x_1^3 + 2bx_1 + 1) + x_1^4 + bx_1^2 + x_1$

$-4x_0^4 - 2bx_0^2 - x_0 + b^2x_0^2 + x_0 = -4x_1^4 - 2bx_1^2 - x_1 + x_1^4 + bx_1^2 + x_1$

$-3x_0^4 - bx_0^2 = -3x_1^4 - bx_1^2$

$-3(x_0^2 - x_1^2)(x_0 + x_1) = b(x_0 - x_1)(x_0 + x_1) \quad x_0 \neq x_1$

$-3(x_0^2 - x_1^2)(x_0 + x_1) = b(x_0 + x_1)$

положим, что $x_0 + x_1 \neq 0$, тогда:

$$\begin{cases} 3(x_0^2 + x_1^2) = -b \\ 2(x_0^2 + x_1^2) = -b \end{cases} \Rightarrow 3(x_0^2 + x_1^2) = 2(x_0^2 + x_1^2) + 2x_0x_1$$

$$x_0^2 + x_1^2 - 2x_0x_1 = 0$$

$$(x_0 - x_1)^2 = 0$$

$$x_0 = x_1 \text{ — против.}$$



$$x_0 + x_1 = 0$$

$$x_1 = -x_0$$

$$2(x_1^2 + x_0^2 - x_1^2) = -b$$

$$2x_0^2 = -b$$

$$x_0^2 = -\frac{b}{2}$$

$$\Rightarrow b \in (-\infty; 0)$$

с не выйдет, ведь тогда $x_1 = 0 = x_0 = 0$
Реш. против.

пусть $x_1 > 0$

не учитывая общности решения, пусть $x_1 > 0$; а $x_0 < 0$

$$y_k = f(x)(x - x_1) + f(x_1) =$$

$$x_1 = \sqrt{-\frac{b}{2}} \quad x_0 = -\sqrt{-\frac{b}{2}}$$

$$= \left(\underbrace{4 \cdot \left(-\frac{b}{2}\right) \cdot \sqrt{-\frac{b}{2}}}_{=0} + 2b \sqrt{-\frac{b}{2}} + 1 \right) / \left(x - \sqrt{-\frac{b}{2}} \right) + \frac{b^2}{4} + b \cdot \left(-\frac{b}{2}\right) + \sqrt{-\frac{b}{2}} = x \cdot \sqrt{-\frac{b}{2}} + \frac{b^2}{4} - \frac{b^2}{2} + \sqrt{-\frac{b}{2}} =$$

$$= x - \frac{b^2}{4}$$

$$\text{Ans: } b \in (-\infty; 0); y = x - \frac{b^2}{4}$$

8) Давайте найдем кол-во расстановок, где в которых никакие из чисел X, Y, Z не стоят рядом с другими.

Посчитаем тогда, сколько у нас последовательностей, в которых хотя бы два числа стоят рядом (это кол-во безматриц за S)

$$S = 99 \cdot 98! \cdot 6 = 99! \cdot 6$$

↑ это количество мест, на которые я могу поставить два подряд стоящих числа.

Мы считаем все способы разместить как-то X, Y, Z (разные числа получаются)

Всего их 6 (разные перестановки)

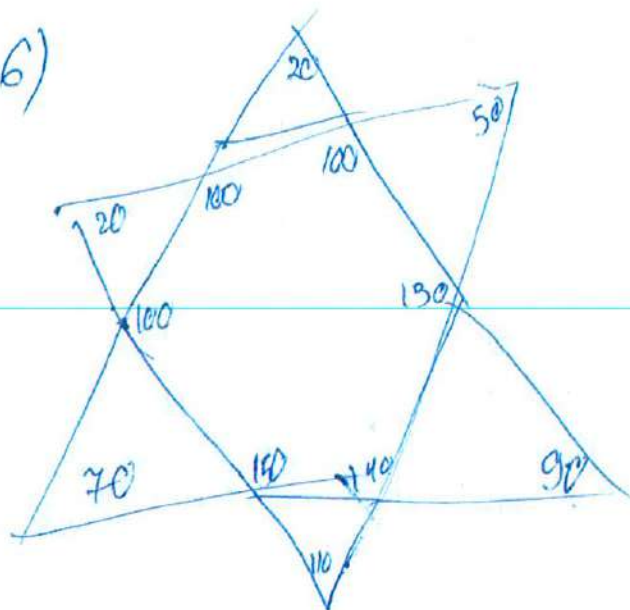
тогда искоемое число расстановок, в которых X, Y, Z не стоят рядом, равно $100! - 6 \cdot 99! = 94 \cdot 99!$

Ну тогда по принципу Дирихле нам хватит написать $94 \cdot 99! + 1$ посл., ведь какие бы X, Y, Z не были, по пр.

Дирихле найдется такая, где они стоят рядом.

А вот

6)



1 век рин
30.

Отв. 70; 20; 90 и 20; 50; 110

4 заг не решено
08.

стр. 6

М 11 - 263

Код участника
(заполняется организатором)



**Олимпиадная работа
заключительного этапа**

**«Всероссийская олимпиада школьников "Миссия
выполнима. Твоё призвание - финансист!" 2023-2024
г.»**

«(Математика 11 класс)»

Вариант № 2

«27 января 2024 г.»

Никакие другие записи на титульном листе делать не разрешается

М11-263

Код участника

Всероссийская олимпиада школьников «Миссия выполнима. Твое призвание – финансист!» 2023/2024 уч.г.

Бланк проверки работы

Математика 11 класс

№ задания	ФИО эксперта	Балл	ФИО эксперта	Балл	Итоговый балл
1	Васильев	2	Гурьева И.Э	2	2
2	Зайцев	10	Тодд	10	10
3	Марков	12	Терехов	12	12
4	Иванов	0	Медведев	0	0
5	Урозов	11	Бочков	11	11
6	Орехов	0	Берзин	0	0
7	Постова Лова	14	Липаш- на	14	14
8	Хеминг	0	Щакин	0	0
ИТОГО					49 б.

- 12) Умножим второе неравенство на 2 и сложим с первым.
 Получим $11A + 11B \leq 31$, Значит $A+B \leq \frac{31}{11}$. Заметим, что при $a = \frac{17}{11}$,
 $b = \frac{14}{11}$. Все при неравенства из условия выполняются $A+B = \frac{31}{11}$.
 Значит $\frac{31}{11}$ - наибольшее значение выражения $A+B$. 105

Ответ: $\frac{31}{11}$

- 13) Число людей, кто не говорит по английски, кто говорит по французски, кто говорит по итальянски = A . Число людей, кто не говорит по французски, кто говорит по английски = x . Кто не говорит на обоих языках = y . По условию:
 $0,4(A+x) = A$; $0,2(x+y) = x$. $A = \frac{1}{4}x$. Число не говорящих по французски и не говорящих по английски $\frac{x+y}{A+x} = \frac{\frac{1}{4}x + y}{\frac{1}{4}x + x} = \frac{1}{5} + \frac{y}{x}$
 $x = \frac{1}{4}y$.
 $\frac{6+24}{1+24} = \frac{30}{25} = \frac{6}{5}$. Ответ: в $\frac{1}{5}$ раз. + 2 балла 003.

14) $\arctg \frac{2x-1}{x+2} + \arctg \frac{x+3}{3x-1} = x$
 $\lg(\arctg \frac{2x-1}{x+2}) = \frac{2x-1}{x+2} = \lg 2$
 $\lg(\arctg \frac{x+3}{3x-1}) = \frac{x+3}{3x-1} = \lg 3$
 $\lg(2+3) = \frac{\lg 2 + \lg 3}{1 - \lg 2 \cdot \lg 3} = \frac{7 \cdot (x^2+1)}{x^2+1} = 7$

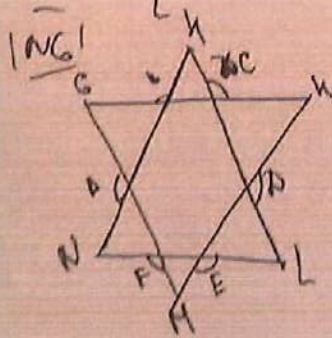
Ограничения: $\alpha, \beta \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ $\alpha + \beta \in [-\pi; +\pi]$

$$\lg(2+3) = 7 = \lg x \quad x = \arctg 7 + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

с ограничениями:

$$x = \{\arctg 7; \arctg 7 - \pi\}$$

Ответ: $x = \{\arctg 7; \arctg 7 - \pi\}$



сумма смежных углов = 180. Найдем по этому свойству углы:
 $\angle HBC = \angle GEA = \angle GAB = \angle NAF = \angle HCD = \angle KED = \angle KDC = \angle EDL =$
 $= 180 - 100 = 80$
 $\angle NFA = \angle ETM = 180 - 150 = 30$
 $\angle FEM = \angle DEL = 180 - 140 = 40$
 сумма $\angle$ треугольника = 180
 $\angle G = \angle H = \angle K = 180 - 80 - 80 = 20$
 $\angle N = 180 - 80 - 30 = 70$
 $\angle L = 180 - 80 - 40 = 60$
 $\angle H = 180 - 30 - 40 = 110$
 получаем в $\triangle HNL$ с углами: $20 + 70 + 60 = 150$
 и в $\triangle GKH$ с углами: $20 + 20 + 140 = 180$ 05.

Продолжите к №72

В доказательство этой задачи сумма углов этих $\Delta = 690$ вместо 720 поэтому в итоге мы не получили сумму 180 .

171 $F(x) = x^4 + bx^2 + x$

Рассмотрим функцию $y = kx + m$ В точке касания a^* $F(x) - kx - m = 0$

а имеет «единую» кратность (как корень уравнения)

Если прямая o — тангентой касания в $F(x)$ существует, то $F(x) - kx - m = 0$ имеет кратность ≥ 2

$$A_1(x - A_2)^2(x - A_3)$$

Условия:

 $A_1 \neq 0$ (т.к. не вертикальная) $C \neq D$ (т.к. кон-во касаний)

$$x^4 + bx^2 + (1-k)x - m = A_1(x - A_2)^2(x - A_3)^2$$

Коррелируем: получаем расщепление свобод

при x^4 : $A_1 = 1$

при x^3 : $(2 \cdot A_2^2 + 2 \cdot A_3^2) = 0 \rightarrow A_2 = -A_3$

при x^2 : $b = -2 \cdot A_2^2 \rightarrow A_2 = \sqrt{-\frac{b}{2}}$

при x^1 : $1 - k = 0 \rightarrow k = 1$

при x^0 : $m = -A_2^4 = -\frac{b^2}{4}$

$y = x - \frac{b}{4}$

и $b \geq 0$ по ограничению

№3 Рассмотрим: $p(k) + p(34-k) = \frac{(-3)^k}{3+k} + \frac{(-3)^{34-k}}{3+k} = \frac{(-1)^k \cdot 3^k}{3+k} + \frac{(-1)^{34-k} \cdot 3^{34-k}}{3+k} = \frac{(-1)^k \cdot 3^k}{3+k} + \frac{(-1)^{34-k} \cdot 3^{34-k}}{3+k}$

одинаковые знаменатели, т.к. их сумма четная

тогда пусть $S = p(1) + p(2) + \dots + p(33)$

тогда $2S = (p(1) + p(33)) + (p(2) + p(32)) + \dots + (p(33) + p(1)) = (-1) + (-1) + \dots + (-1) = -1$

$-1 + 1 - 1 + 1 + \dots + 1 - 1 = -1$

значит $S = -0.5$

ответ: -0.5

145

1919

3

Всероссийская организация акционеров «Мирная революция. Твое призвание — финансист!»	
Код участника	M 11-263
Самостоятельная организация	

№8 шк

М11-670

Код участника
(заполняется организатором)



Олимпиадная работа
заключительного этапа
«Всероссийская олимпиада школьников "Миссия
выполнима. Твоё призвание - финансист!" 2023-2024
г.»

«(Математика 11 класс)»

Вариант № 2

«27 января 2024 г.»

Никакие другие записи на титульном листе делать не разрешается

М11-670

Код участника

Всероссийская олимпиада школьников «Миссия выполнима. Твое призвание – финансист!» 2023/2024 уч.г.

Бланк проверки работы

Математика 11 класс

№ задания	ФИО эксперта	Балл	ФИО эксперта	Балл	Итоговый балл
1	Анисимова	10	Гурьянов	10	10
2	Гордеев	10	Зеленов	10	10
3	Иванова	12	Кривер	12	12
4	Овчинников	2	Балашиха	2	2
5	Уридов	12	Валеева	12	12
6	Орехов	3	Бродяков	3	3
7	Семанов	0	Александров	0	0
8	Григорьев	0	Щакин	0	0
ИТОГО					49

Код участника:

(заполняется организатором)

МН-670

 $\sqrt{1}$

K - на бонх ез.

L - на англ., не фр.

M - на фр., не англ.

N - не говорит ни на одном

По условию: $\frac{M}{M+N} = 4\%$ $\frac{L}{L+N} = 10\% \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{M}{M+N} = \frac{1}{25} \\ \frac{L}{L+N} = \frac{1}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 25M = M+N \\ 5L = L+N \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N = 24M \\ N = 4L \end{cases} \Rightarrow L = 6M$$

$$\frac{L+N}{N+M} = \frac{6M+24M}{24M+M} = \frac{30M}{25M} = 1,2$$

Ответ: в 1,2 раз.

+ (100)

$$\begin{cases} 3A + 5B \leq 11 & ① \\ 4A + 3B \leq 10 & ② \\ 7A + 4B \leq 18 & ③ \end{cases}$$

Рассмотрим ①-ое на 2

$$① + ② \Rightarrow 11A + 8B \leq 31 \Rightarrow A + B \leq \frac{31}{11}$$

Положим $A = x$, $B = y$. Найдем т. пересечения прямых $3x + 5y = 11$ и $4x + 3y = 10$;

$$y = \frac{11-3x}{5} \quad y = \frac{10-4x}{3} \Rightarrow \frac{11-3x}{5} = \frac{10-4x}{3} \Rightarrow 33-9x = 50-20x \Rightarrow 11x = 17 \Rightarrow x = \frac{17}{11}$$

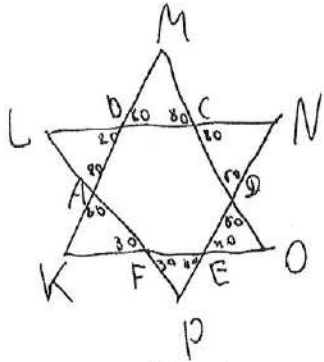
$$y = \frac{14}{11} \Rightarrow A = \frac{17}{11} \quad B = \frac{14}{11} - \text{удовлетв. } ③: \frac{7 \cdot 17}{11} + \frac{4 \cdot 14}{11} \leq 18$$

$$\frac{7 \cdot 17 + 4 \cdot 14}{11} \leq 18$$

$$\frac{161}{11} \leq 18 - \text{верно} \Rightarrow A+B \leq \frac{31}{11} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \max(A+B) = \frac{31}{11}, \text{ при } A = \frac{17}{11} \text{ и } B = \frac{14}{11}$$

Ответ: $\frac{31}{11}$



№6
 $\triangle KMO$ и $\triangle LNP$ пересекаются так, что
 $KM \cap LP = A$, $KM \cap LN = B$, $MO \cap LN = C$, $MO \cap NP = D$,
 $KO \cap NP = E$, $KO \cap LP = F$, образы шестиугольника
 $ABCDEF$

По т. о ^{сумме} $\angle$ и сумме $\angle$ в $\triangle$;

$$\angle LBA = \angle MBC = 20^\circ$$

$$\angle LAB = \angle KAF = 20^\circ$$

$$\angle MCB = \angle NCD = 20^\circ$$

$$\angle NDC = \angle ODE = 50^\circ$$

$$\angle OED = \angle FEP = 40^\circ$$

$$\angle PFE = \angle KFA = 30^\circ$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} \angle P &= 110^\circ \\ \angle L &= 20^\circ \\ \angle N &= 50^\circ \\ \angle K &= 70^\circ \\ \angle M &= 20^\circ \\ \angle O &= 90^\circ \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$20^\circ + 70^\circ + 80^\circ = 170^\circ$$

$$70^\circ + 20^\circ + 50^\circ = 140^\circ \Rightarrow \text{верно.}$$

- ответ.

35

Пусть центр шара (x_0, y_0, z_0) R - рад. ~~на~~ сфера.

Уравнение шара: $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = R^2$

Точка B лежит на шаре $\Rightarrow (1-x_0)^2 + y_0^2 + z_0^2 = R^2$

$$\begin{cases} x_0^2 + z_0^2 = R^2 & \text{① - касание в } AD \\ x_0^2 + y_0^2 = R^2 & \text{② - касание в } AA' \\ y_0^2 + (1-z_0)^2 = R^2 & \text{③ - касание в } A'B' \end{cases}$$

$$\text{①-②} \Rightarrow z_0^2 - y_0^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} z_0 = y_0 \\ z_0 = -y_0 \end{cases}$$

$$\text{③-②} \Rightarrow (1-z_0)^2 = x_0^2 \Rightarrow \begin{cases} 1-z_0 = x_0 \\ 1-z_0 = -x_0 \end{cases}$$

$$\text{и сир. } \begin{cases} 1-x_0 = z_0 \\ y_0 = z_0 \\ 1-x_0 = z_0 \\ y_0 = -z_0 \end{cases}$$

$$z_0^2 + z_0^2 + z_0^2 = R^2$$

$$R = -\sqrt{3} z_0$$

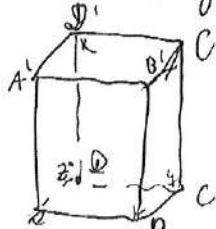
$$(1-x_0)^2 + y_0^2 = x_0^2 \Rightarrow \sqrt{2} z_0 = \pm (1-z_0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{2} z_0 = 1 - z_0 \\ \sqrt{2} z_0 = z_0 - 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z_0 = \sqrt{2} - 1 \\ z_0 = -\sqrt{2} - 1 \end{cases} \Rightarrow R^2 = 3z_0^2 \Rightarrow R = \sqrt{3}(\sqrt{2}-1)$$

ответ

Отм. центр задан только не знал. радиуса, а значит и только



Код участника:

(заполняется организатором)

М11-670

№5

$$\operatorname{arctg} \frac{2x-1}{x+2} + \operatorname{arctg} \frac{x+3}{3x-1} = x$$

$\operatorname{arctg}(t) \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$, следовательно правая часть данного уравнения — $x \in (-\pi; \pi)$, а также $x \neq -2$ и $x \neq \frac{1}{3}$ (знамен. не может равн. 0).

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(\frac{2x-1}{x+2}) + \operatorname{arctg}(\frac{x+3}{3x-1})) = \operatorname{tg}(x)$$

Рассмотрим левую часть уравнения: $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(\frac{2x-1}{x+2}) + \operatorname{arctg}(\frac{x+3}{3x-1})) =$

$$= \frac{\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(\frac{2x-1}{x+2})) + \operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(\frac{x+3}{3x-1}))}{1 - \operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(\frac{2x-1}{x+2})) \cdot \operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(\frac{x+3}{3x-1}))} = \frac{\frac{2x-1}{x+2} + \frac{x+3}{3x-1}}{1 - (\frac{2x-1}{x+2} \cdot \frac{x+3}{3x-1})} = \frac{(2x-1)(3x-1) + (x+3)(x+2)}{(x+2)(3x-1) - (2x-1)(x+3)} =$$

$$= \frac{(2x-1)(3x-1) + (x+3)(x+2)}{(x+2)(3x-1) - (2x-1)(x+3)} = \frac{6x^2 - 5x + 1 + x^2 + 5x + 6}{3x^2 + 5x - 2 - 2x^2 - 5x + 3} = \frac{7x^2 + 7}{x^2 + 1}.$$

т.к. $x^2 + 1 > 0$, то можно

сократить $\Rightarrow \frac{7(x^2+1)}{x^2+1} = 7$. Отсюда имеем:

$$\operatorname{tg}(x) = 7$$

$$x = \operatorname{arctg} 7 - \pi \cdot n, n \in \mathbb{Z}. \text{ (группа } \mathbb{O} \oplus \mathbb{Z} \text{ получаем;}$$

$$x_1 = \operatorname{arctg} 7$$

$$x_2 = -\pi + \operatorname{arctg} 7$$

← Ответ

$$p(n) = \frac{(-3)^n}{3^n + 3^{12}}$$

№3

Пусть $n \in [1; 16], n \in \mathbb{Z} \Rightarrow p(n) + p(34-n) =$

$$p(1) + p(2) + p(3) + \dots + p(33) = \frac{(-3)^n}{3^n + 3^{12}} + \frac{(-3)^{34-n}}{3^{34-n} + 3^{12}} = \frac{(-1)^n \cdot 3^n}{3^n + 3^{12}} + \frac{(-1)^{34-n} \cdot 3^{34-n}}{3^{34-n} + 3^{12}} = \frac{(-1)^n}{1 + 3^{12-n}} + \frac{(-1)^{34-n} \cdot 3^{12-n}}{3^{12-n} + 1} = \frac{(-1)^n + (-1)^{34-n} \cdot 3^{12-n}}{1 + 3^{12-n}}$$

Значит, при чет. n получаем: $\frac{1 + 3^{12-n}}{1 + 3^{12-n}} = 1$

При нечет. n получ.: $\frac{-1 - 3^{12-n}}{1 + 3^{12-n}} = -1$

Всего таких пар 16. 8 из них дают 1 и также 8 из них дают -1, в сум. не получаем 0. Тогда $p(1) + p(2) + p(3) + \dots + p(33) =$

$$= (p(1) + p(33)) + (p(2) + p(32)) + \dots + (p(16) + p(18)) + p(17) = -1 + (-1) + \dots + 1 + p(17) = p(17) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p(17) = \frac{(-3)^{17}}{3^{17} + 3^{12}} = -\frac{1}{2}$$

Ответ: $-\frac{1}{2}$.

(42)

Код участника:

(заполняется организатором)

МН - 670

Всего $100!$ перест.

№8

Если x, y, z идут по порядку, то тогда есть 6 вариантов ^{на} последовательности. $\Rightarrow$ есть $97!$ перестановок остальных элементов. Цифры x, y, z стоят в ряд 98 способ. $\Rightarrow 6 \cdot 97! \cdot 98$ - комбинаций, то x, y, z идут по порядку.

2) Цифры: если рядом стоят из 3 чисел x, y, z , тогда будут пары xy, yz, zx, zy, xz, zx и рядом не стоит 3 число - 97 комбинаций. Исходя из $6 \cdot 97 \cdot 2 \cdot 97!$ (если пара скрывается). Если пара не скрывается, это 97 комбинаций для пары, рядом не стоит 3 число $\Rightarrow 97 \cdot 96$ и $96!$ перест. ост. элементов $\Rightarrow$

$$\Rightarrow 6 \cdot 97 \cdot 2 \cdot 97! + 6 \cdot 97 \cdot 97 \cdot 96 \cdot 96! \quad \text{тогда} \quad (100! - 6 \cdot 97 \cdot 2 \cdot 97! - 6 \cdot 97 \cdot 97 \cdot 96 \cdot 96! -$$

$$- 6 \cdot 97! \cdot 98 + 1) \quad \text{— ответ.}$$

неверно

08



№7 нет

МН-816
Код участника
(заполняется организатором)



**Олимпиадная работа
заключительного этапа
«Всероссийская олимпиада школьников "Миссия
выполнима. Твоё призвание - финансист!" 2023-2024
г.»
«(Математика 11 класс)»**

Вариант № 2

«27 января 2024 г.»

Никакие другие записи на титульном листе делать не разрешается

M 11-816

Код участника

Всероссийская олимпиада школьников «Миссия выполнима. Твое призвание – финансист!» 2023/2024 уч.г.

Бланк проверки работы

Математика 11 класс

№ задания	ФИО эксперта	Балл	ФИО эксперта	Балл	Итоговый балл
1	Анеликова	10	Гурьенков	10	10
2	Тордеева	10	Зайцев	10	10
3	Александрович	12	Велания	12	12
4	Шарин	0	Магомедов	0	0
5	Уфодов	0	Велания	0	0
6	Олегов	3	Гунзев	3	3
7	Аликина	14	Велания	14	14
8	Гелечев	0	Усачев	0	0
ИТОГО					49

Задача 1

X – люди, говорящие только на английском

Y – люди, говорящие только на французском

S – люди, которые не говорят ни на одном языке

Люди, не говорящие по-английски: $Y+S \Rightarrow \frac{Y}{Y+S} = 0,04 \Rightarrow 0,96Y = 0,04S$

Люди, не говорящие по-французски: $X+S$

$$\frac{24Y}{24Y+S} = 0,04$$

$$\frac{X}{X+S} = 0,2$$

$$0,8X = 0,2S$$

$$X = \frac{1}{4}S$$

$$\frac{X+S}{Y+S} = \frac{\frac{1}{4}S+S}{\frac{25}{24}S} = \frac{5 \cdot 24}{4 \cdot 25} = \frac{6}{5} = 1,2$$

+ (105)

Ответ: 6 1,2

Задача 2

$$\begin{cases} 3A+5B \leq 11 \\ 2(4A+3B) \leq 2 \cdot 10 \end{cases}$$

$$11A+11B \leq 31$$

$$A+B \leq \frac{31}{11} = 2\frac{9}{11}$$

Пример для $A+B = 2\frac{9}{11}$: $A = \frac{17}{11} = 1\frac{6}{11}$, $B = \frac{14}{11} = 1\frac{3}{11} \Rightarrow A+B = 2\frac{9}{11}$

$$\begin{cases} 3A+5B \leq 11 \Rightarrow \frac{3 \cdot 17}{11} + \frac{5 \cdot 14}{11} = 11 \quad \text{система пер-ва верна} \\ 4A+3B \leq 10 \Rightarrow \frac{4 \cdot 17}{11} + \frac{3 \cdot 14}{11} = 10 \quad \text{верна} \end{cases}$$

$$7A+4B \leq 18 \Rightarrow \frac{7 \cdot 17}{11} + \frac{4 \cdot 14}{11} = \frac{119+56}{11} = \frac{175}{11} < \frac{176}{11} = 16 < 18 \quad \text{верна}$$

Ответ: $2\frac{9}{11}$

Задача 3

$$p(n) + p(34-n) = \frac{(-3)^n}{3^n + 3^{17}} + \frac{(-3)^{34-n}}{3^{34-n} + 3^{17}} = (-1)^n \left(\frac{1}{1+3^{17-n}} + \frac{3^{17-n}}{3^{17-n}+1} \right) = (-1)^n$$

Разобьем на пары $p(n)$ и $p(34-n)$, и $p(17)$:

$$\underbrace{(-1)^1 + (-1)^2 + (-1)^3 + \dots + (-1)^{16}}_0 + \underbrace{(-1)^{17}}_{-1} + \frac{-3^{17}}{3^{17}+3^{17}} = 8 \cdot 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

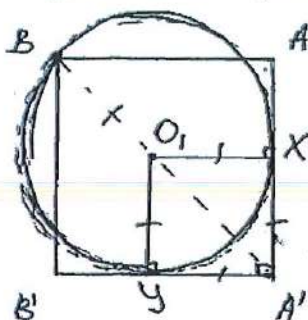
$$(-1)^{2k-1} + (-1)^{2k} = -1 + 1 = 0$$

Ответ: -0,5

+

Задача 4

Плоскость $(ABV'A')$:



$O_1Y \perp A'V'$
 $O_1X \perp AA'$
 $A'X$ и $A'Y$ – касательные $\Rightarrow A'X = A'Y$ и O_1 лежит на биссектрисе $\angle AA'V' \Rightarrow O_1$ лежит на диагонали $A'B$

$O_1X = O_1Y = O_1B$ как радиусы

$O_1X \perp AA'$

$\angle AA'V' = 90^\circ$ (т.к. $ABV'A'$ – квадрат)

$O_1Y \perp V'A'$
 $\angle V'A'X = 90^\circ$ } $\Rightarrow O_1Y \parallel XA'$

$\Rightarrow O_1XA'Y$ – параллелограмм } $\Rightarrow O_1XA'Y$ – прямоугольник
 $\angle XA'Y = 90^\circ$

O_1A' – диагональ и биссектриса $\angle V'A'X$ } $\Rightarrow$

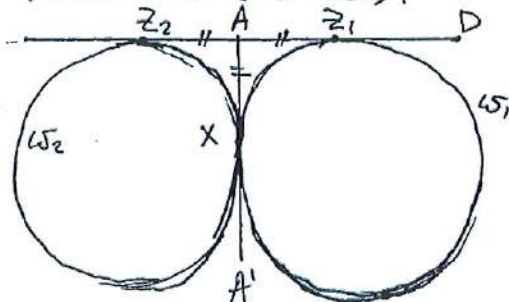
$\Rightarrow O_1XA'Y$ – квадрат $\Rightarrow O_1X = XA' = A'Y = YO_1 = x$

по т. Пифагора $\triangle O_1XA'$: $O_1X^2 + XA'^2 = O_1A'^2 = 2x^2 \Rightarrow O_1A' = x\sqrt{2}$

$A'B = O_1A' + BO_1 = x + x\sqrt{2} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}{2-1} = 2-\sqrt{2}$

|| по т. Пифагора, т.к. $AB = AA' = 1$
 $\sqrt{2}$

Плоскость $(A'ADD')$:



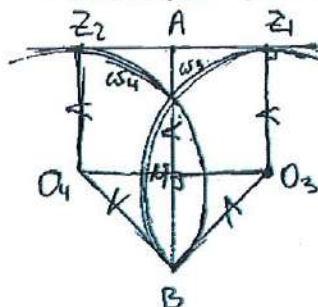
AX, AZ_1, AZ_2 – касательные $\Rightarrow$

$\Rightarrow AX = AZ_1 = AZ_2$

$AX = AA' - XA' = 1 - (2-\sqrt{2}) = \sqrt{2} - 1$

ω_1 и ω_2 – равные окружности, варианты сечения сферы

Плоскость $(BADC)$



ω_3 и ω_4 – равные окружности, варианты сечения сферы $\Rightarrow$ все сим-но отн-но AB

будем показывать только для Z_1 и ω_3

$M: O_3M \perp AB, M \in AB \Rightarrow AZ_1 \parallel O_3M$

$AZ_1 \perp AB$

$Z_1O_3 \perp AZ_1$ } $\Rightarrow AM \parallel Z_1O_3$

$\angle BAZ_1 = 90^\circ$

$\Rightarrow AZ_1 = MO_3$

$AM = Z_1O_3 = y$

Задание 4 (продолжение)

по т. Пифагора $\triangle MO_3B$: $MO_3^2 + MB^2 = BO_3^2$

$$(\sqrt{2}-1)^2 + (1-y)^2 = y^2$$

$$2+1-2\sqrt{2}+1+y^2-2y=y^2$$

$$2y = 4-2\sqrt{2}$$

$$y = 2-\sqrt{2}$$

O – центр сферы

 O_3B – проекция OB на (BADC) $OO_3 \perp (BADC)$
 $\left. \begin{array}{l} OO_3 \perp (BADC) \\ A'A \perp (BADC) \end{array} \right\} \Rightarrow OO_3 \parallel A'A \Rightarrow OO_3AA_1 \text{ – плоскость}$
 X – т. касания $OX \perp AA_1 \Rightarrow AO_3OX$ – параллелограмм

$$\Rightarrow OO_3 = AX = \sqrt{2}-1$$

по т. Пифагора $\triangle BO_3O$: $BO_3^2 + O_3O^2 = OB^2 = R^2$

$$R^2 = (2-\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2}-1)^2 = 2(\sqrt{2}-1)^2 + (\sqrt{2}-1)^2 = 3 \cdot (\sqrt{2}-1)^2$$

$$R = \sqrt{3} \cdot (\sqrt{2}-1) = \sqrt{6}-\sqrt{3}$$

Ответ: $\sqrt{6}-\sqrt{3}$

Задание 7

$$f(x) = x^4 + bx^2 + x$$

 $g(x)$ – касательная $\Rightarrow g(x) = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$

$$f'(x) = 4x^3 + 2bx + 1$$

$$g(x) = (4x_0^3 + 2bx_0 + 1)x + (x_0^4 + bx_0^2 + x_0 - 4x_0^4 - 2bx_0^2 - x_0)$$

$$g(x) = (4x_0^3 + 2bx_0 + 1)x + (-3x_0^4 - bx_0^2)$$

Пряма касается 2 точек графика $\Rightarrow$ 2 касательные к x_1 и x_2 совпадают

$$g_1(x) = (4x_1^3 + 2bx_1 + 1)x + (-3x_1^4 - bx_1^2)$$

$$g_2(x) = (4x_2^3 + 2bx_2 + 1)x + (-3x_2^4 - bx_2^2)$$

если прямые совпадают, то совпадают все их коэффициенты. $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4x_1^3 + 2bx_1 + 1 = 4x_2^3 + 2bx_2 + 1 & (1) \\ -3x_1^4 - bx_1^2 = -3x_2^4 - bx_2^2 & (2) \end{cases} \quad x_1 \neq x_2$$

(1)

$$2x_1^3 - 2x_2^3 + bx_1 - bx_2 = 0$$

$$(x_1 - x_2)(2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2) + b(x_1 - x_2) = 0$$

$$(x_1 - x_2)(2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + b) = 0$$

Задача 7 (продолжение)

$$\begin{cases} x_1 = x_2 \text{ ①} \\ 2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + b = 0 \text{ ②} \end{cases} \Rightarrow \text{должно всегда выполняться}$$

(2)

$$3x_1^4 - 3x_2^4 + bx_1^2 - bx_2^2 = 0$$

$$3(x_1^2 - x_2^2)(x_1^2 + x_2^2) + b(x_1^2 - x_2^2) = 0$$

$$(x_1^2 - x_2^2)(3x_1^2 + 3x_2^2 + b) = 0$$

$$\begin{cases} x_1 = x_2 \text{ ①} \\ x_1 = -x_2 \text{ ③} \\ 3x_1^2 + 3x_2^2 + b = 0 \text{ ②} \end{cases}$$

① $x_1 = -x_2$ $x_1 \neq x_2 \Rightarrow x_1 \neq 0, x_2 \neq 0$

Подставим в (*): $2x_1^2 - 2x_2^2 + 2x_2^2 + b = 0$

$$b = -2x_2^2 \Rightarrow -2x_2^2 \leq 0 \Rightarrow b \leq 0$$

гм $b < 0$: $x_2 = \sqrt{-\frac{b}{2}}$ ~~$x_1 = \sqrt{-\frac{b}{2}}$~~ $x_1 = -\sqrt{-\frac{b}{2}}$

$$g(x) = \left(4 \cdot \sqrt{-\frac{b}{2}}^3 + 2 \cdot b \cdot \sqrt{-\frac{b}{2}} + 1\right)x + \left(-3 \cdot \sqrt{-\frac{b}{2}}^4 - b \cdot \sqrt{-\frac{b}{2}}^2\right)$$

$$g(x) = \left(4 \cdot \left(-\frac{b}{2}\right) \cdot \sqrt{-\frac{b}{2}} + 2b \cdot \sqrt{-\frac{b}{2}} + 1\right)x + \left(-3 \cdot \left(-\frac{b}{2}\right)^2 - b \cdot \left(-\frac{b}{2}\right)\right)$$

$$g(x) = x - \frac{3}{4}b^2 + \frac{b^2}{2} = x - \frac{b^2}{4}$$

② $\begin{cases} 3x_1^2 + 3x_2^2 + b = 0 \\ 2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + b = 0 \end{cases}$

$$x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 = 0$$

$$(x_1 - x_2)^2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 \text{ ④}$$

Ответ: $b \in (-\infty; 0)$ $g(x) = x - \frac{b^2}{4}$

Задача 8

Посчитаем N -кол-во последовательностей, не удовлетворяющих условию, тогда по принципу Биреске если вычислить $N+1$, то найдётся с нулевым условием, а при N и меньше могут попасться все не удовлетворяющие условию.

Есть пары: $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8$

Посчитаем последовательности, в которых они есть: объединим их в 1 элемент.

хотя бы 1 раз

1451

Задача 8 (продолжение)

Элементов 99 (98a; и 1 пара), таких последовательностей:
: 99!

Для каждой пары: $6 \cdot 99!$

Но есть последовательности, которые посчитаны 2, т.к.
в них 2 подходящие пары, то есть есть 1 из троек:

$x_1y_1z_1, x_1z_1y_1, y_1x_1z_1, y_1z_1x_1, z_1x_1y_1, z_1y_1x_1$

Таких последовательностей: 98 элементов (97a; и 1 тройка)
98!

Всего: $6 \cdot 98!$

По формуле включения и исключения: Всего любых последовательностей 100!

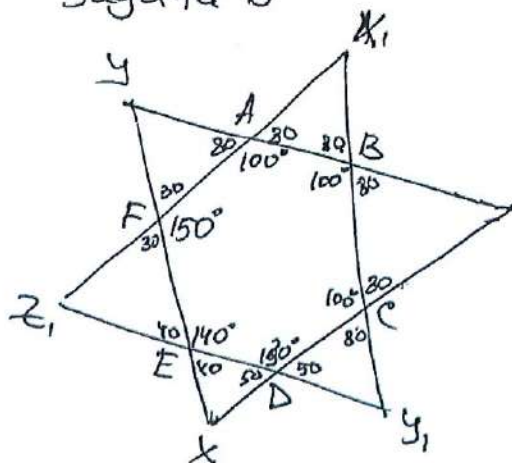
$$N = 100! - 6 \cdot 99! + 6 \cdot 98! = 98! (99 \cdot 100 - 6 \cdot 99 + 6) =$$

$$= 98! (9900 - 6 \cdot 93) = 98! \cdot 9312$$

Ответ: $98! \cdot 9312 + 1$

неверно (-) 00

Задача 6



$$\angle X_1AB = \angle Y_1AF = \angle ABX_1 = \angle CBZ = \angle BCZ =$$

$$= \angle Y_1CD = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$$

симметричность

$$\angle CDY_1 = \angle EDX = 180^\circ - 130^\circ = 50^\circ$$

$$\angle XED = \angle Z_1EF = 180^\circ - 140^\circ = 40^\circ$$

$$\angle Z_1FE = \angle YFA = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$$

по сумме $\angle \Delta$:

$$\angle X_1 = 180^\circ - \angle X_1AB - \angle X_1BA = 20^\circ$$

$$\angle Y_1 = 180^\circ - \angle Y_1CD - \angle Y_1DC =$$

$$= 180^\circ - 80^\circ - 50^\circ = 50^\circ$$

$$\angle Z_1 = 180^\circ - \angle Z_1FE - \angle Z_1EF = 180^\circ - 30^\circ - 40^\circ = 110^\circ$$

$$\angle X = 180^\circ - \angle XED - \angle EDX = 180^\circ - 40^\circ - 50^\circ = 90^\circ$$

$$\angle Y = 180^\circ - \angle YFA - \angle YAF = 180^\circ - 30^\circ - 80^\circ = 70^\circ$$

$$\angle Z = 180^\circ - \angle ZBC - \angle ZCB = 180^\circ - 20^\circ - 80^\circ = 80^\circ$$

Ответ: $20^\circ, 50^\circ, 110^\circ$ и $90^\circ, 70^\circ, 80^\circ$.

73

M11-325

Код участника
(заполняется организатором)



**Олимпиадная работа
заключительного этапа
«Всероссийская олимпиада школьников "Миссия
выполнима. Твоё призвание - финансист!" 2023-2024
г.»
«(Математика 11 класс)»**

Вариант № 2

«27 января 2024 г.»

Никакие другие записи на титульном листе делать не разрешается

МН-325

Код участника

Всероссийская олимпиада школьников «Миссия выполнима. Твое призвание – финансист!» 2023/2024 уч.г.

Бланк проверки работы

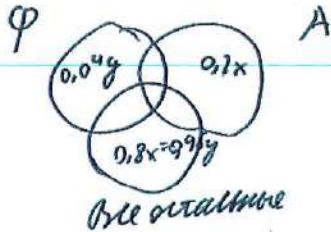
Математика 11 класс

№ задания	ФИО эксперта	Балл	ФИО эксперта	Балл	Итоговый балл
1	Иванова	10	Гурьев	10	10
2	Зеленов	10	Туркина	10	10
3	Марков	12	Александрович	12	12
4	Овчинников	2	Башинов	2	2
5	Уфимов	12	Васильев	12	12
6	Олегов	3	Степанов	3	3
7	Конков	0	Степанов	0	0
8	Шамкин	0	Теминцев	0	0
ИТОГО					49

№1

x людей не говорят по французски
 y людей не говорят по английски

$$\frac{x}{y} = ?$$



Реш. По условию $0,2x$ — говорят на Английском,
 $0,04y$ — говорят на Фр. $\Rightarrow$

$\Rightarrow x - 0,2x = 0,8x \leftarrow$ людей, которые не
 говорят ни на Английском, ни на Французском.

$y - 0,04y = 0,96y \leftarrow$ людей, которые не говорят
 ни на Английском ни на Французском

Тогда их можно приравнять: $0,8x = 0,96y \Leftrightarrow \frac{x}{y} = \frac{0,96}{0,8} =$

$$= \frac{96}{80} = \frac{12}{10} = 1,2$$

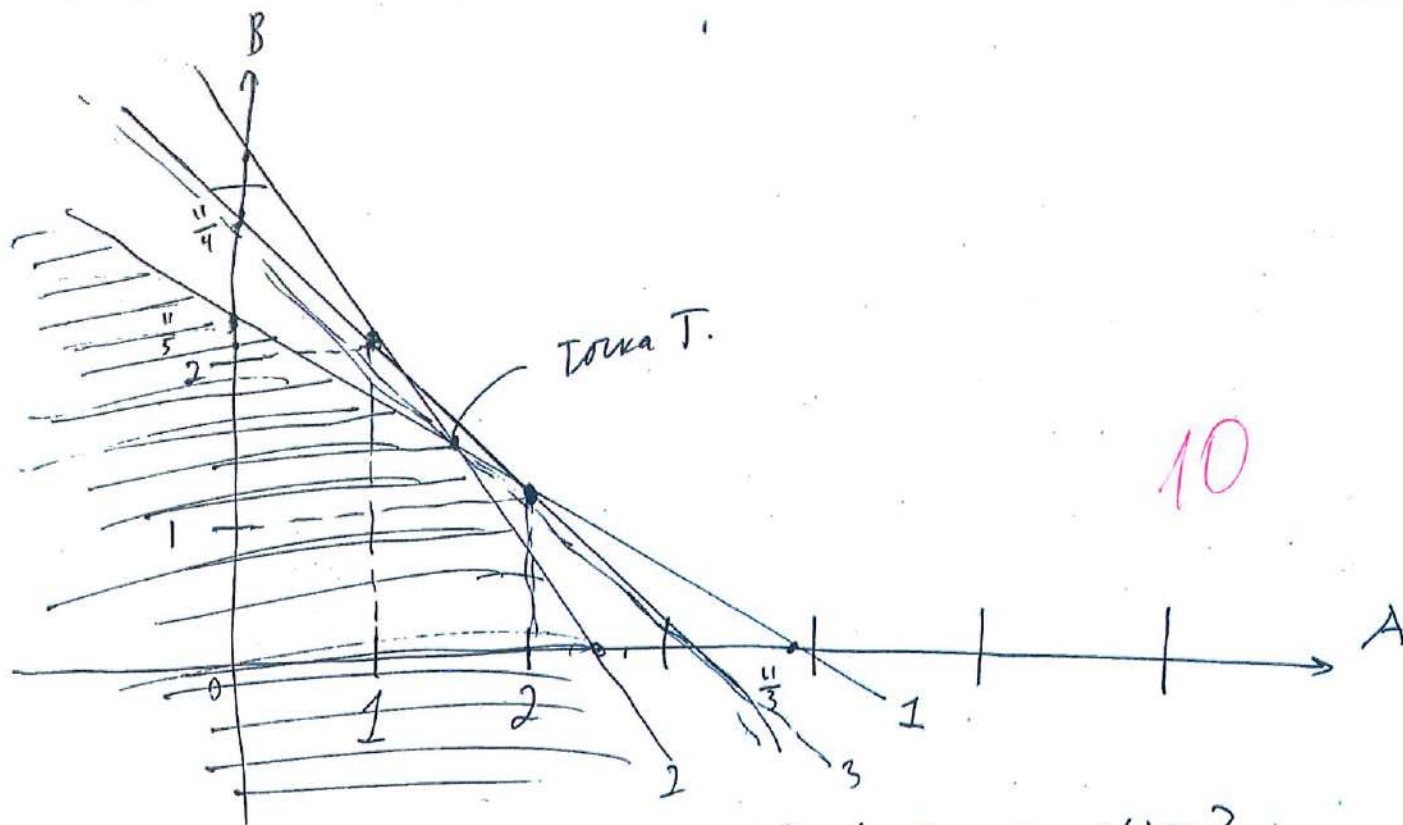
Ответ: в 1,2 раза больше.

+ (100)

$$\max(A+B) = ?$$

$$\begin{cases} 3A + 5B \leq 11 \\ 4A + 3B \leq 10 \\ 7A + 4B \leq 18 \end{cases}$$

построим график зависимости B от A :



$$1 \begin{cases} B \leq \frac{11}{5} - \frac{3}{5}A \\ B \leq \frac{10}{3} - \frac{4}{3}A \\ B \leq \frac{18}{4} - \frac{7}{4}A \end{cases}$$

$$\boxed{A+B=t \Leftrightarrow B=t-A} \quad \max(t)=?$$

$$1) \frac{3}{5}A = \frac{11}{5} \Rightarrow A = \frac{11}{3}$$

B	1	$\frac{11}{5}$
A	3	0
Σ		

$$2) \begin{array}{c|c|c|c} B & 2 & \frac{10}{3} & 0 \\ \hline A & 1 & 0 & 2,5 \end{array} \quad \frac{4}{3}A = \frac{10}{3} \Rightarrow A = \frac{5}{2}$$

3)

B	1	4,5	$\frac{11}{4}$
A	2	0	1

Данная в условии система задаёт на графике заштрихованную область. Тогда прямая $B = t - A$ должна иметь хотя бы одну точку, принадлежащую заштрихованной области. Из графика нетрудно видеть, что при t принимает максимальное значение тогда и только тогда, когда прямая $B = t - A$ проходит через точку T .

Вычислим координаты точки Т (пересечение прямых 2 и 1):

$$\begin{cases} B = \frac{10}{3} - \frac{4}{3}A \\ B = \frac{4}{5} - \frac{3}{5}A \end{cases} \Rightarrow \frac{10}{3} - \frac{4}{3}A = \frac{4}{5} - \frac{3}{5}A \quad (=) \\ \Leftrightarrow A \left(\frac{4}{3} - \frac{3}{5} \right) = \frac{10}{3} - \frac{4}{5} \quad \Leftrightarrow A \cdot \frac{11}{15} = \frac{17}{15} \Rightarrow A = \frac{17}{11} \Rightarrow B = \frac{10}{3} - \frac{4}{3} \cdot \frac{17}{11} = \frac{110 - 68}{33} = \frac{42}{33} = \frac{14}{11}$$

$$B = t - A: \quad \frac{14}{11} + \frac{17}{11} = t \Leftrightarrow t = \frac{31}{11}$$

Ответ: $\frac{31}{11}$

$$p(n) = \frac{(-3)^n}{3^n + 3^{17}}$$

✓3

$$p(1) + p(2) + p(3) + \dots + p(33) = ?$$

$$p(k) = \frac{(-3)^k}{3^k + 3^{17}}$$

34 - чётно:

$$p(k) = \frac{-1 \cdot 3^k}{3^k + 3^{17}} = \frac{-1}{1 + 3^{17-k}}$$

(34 - k) - нечётное
число.

$$p(34-k) = \frac{-1 + 3^{34-k}}{3^{34-k} + 3^{17}} = \frac{-1 \cdot 3^{17-k}}{3^{17-k} + 1}$$

$$p(k) + p(34-k) = \frac{-1}{1 + 3^{17-k}} + \frac{-1 \cdot 3^{17-k}}{3^{17-k} + 1} = \frac{-1(1 + 3^{17-k})}{3^{17-k} + 1} =$$

$$= -1$$

Код участника:

(заполняется организатором)

M11-325

} k-йго:

$$p(k) = \frac{3^k}{3^k + 3^{17-k}} = \frac{1}{1 + 3^{17-k}}$$

34-k-йго числ.

$$p(34-k) = \frac{3^{34-k}}{3^{34-k} + 3^{17}} = \frac{3^{17-k}}{1 + 3^{17-k}}$$

$$p(k) + p(34-k) = \frac{1 + 3^{17-k}}{1 + 3^{17-k}} = 1$$

Тогда сгруппировав аналогичные слагаемые следующим образом:

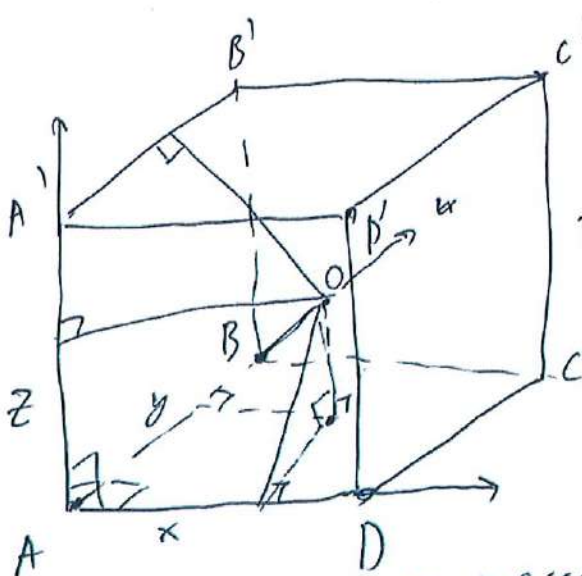
$$\underbrace{p(1) + p(34)}_{=1} + \underbrace{p(2) + p(33)}_{=1} + \dots + p(17)$$

слагаемые

Тогда все слагаемые сократятся, кроме

$p(17)$, т.к.
пар с таким же
числом такое же
число, как и пар
с нечетным.

$$p(17) = \frac{3^{-3}}{3^{-3} + 3^{-3}} = -\frac{1}{2}$$

Ответ: $-\frac{1}{2}$.

Введем
O — центр сферы точкой O.
Тогда расстояния до точек A, D, A', B' и точки B от точки O равны.
Точка A — центр координат,
тогда B имеет координаты (x; y; z).

$$\begin{aligned} \text{Тогда расстояние до прямой } AD &= \sqrt{z^2 + y^2} \\ \text{расстояние до } AA' &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \text{расстояние до } A'B' &= \sqrt{(1-z)^2 + x^2} \\ \text{расстояние до } B &= \sqrt{x^2 + (1-y)^2 + z^2} \end{aligned}$$

(радиусы сферы)

$$\sqrt{z^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(1-z)^2 + x^2} = \sqrt{x^2 + (1-y)^2 + z^2}$$

из первого равенства: $\sqrt{z^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + y^2} \Leftrightarrow z^2 + y^2 = x^2 + y^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z^2 = x^2 \Leftrightarrow z = x$ (почему стороны не могут быть отрицательными)

из второго равенства: $y^2 = (1-z)^2$

из третьего: $(1-z)^2 = (1-y)^2 + z^2$

$$\Leftrightarrow y = \frac{1+z^2}{2} \Leftrightarrow \left(\frac{1+z^2}{2}\right)^2 = (1-z)^2 \Leftrightarrow \left(1-z - \frac{1+z^2}{2}\right) \left(1-z + \frac{1+z^2}{2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1-2z-z^2=0 \Rightarrow z=\sqrt{2}-1 \Rightarrow y=\frac{1+(\sqrt{2}-1)^2}{2} = \frac{1+2+1-2\sqrt{2}}{2} = 2-\sqrt{2} \\ z^2+z^2-1=0 - \text{нет рен.} \end{cases} \Rightarrow z=\sqrt{2}$$

$$z = x = \sqrt{2} - 1;$$

Тогда радиус окружности = $\sqrt{x^2 + y^2} =$

$$= \sqrt{(\sqrt{2}-1)^2 + (2-\sqrt{2})^2} = \sqrt{(\sqrt{2}-1)^2 + 2(\sqrt{2}-1)^2} =$$

$$= \sqrt{3} \cdot (\sqrt{2}-1) = \sqrt{6} - \sqrt{3}$$

↑
ответ.

$$\operatorname{arctg} \frac{2x-1}{x+2} + \operatorname{arctg} \frac{x+3}{3x-1} = x \quad \text{N5.}$$

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{x+2} &= a, \operatorname{tg} a = \frac{2x-1}{x+2} \\ \operatorname{arctg} \frac{x+3}{3x-1} &= b \end{aligned} \right\} \Rightarrow a+b=x$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg}(a+b) = \operatorname{tg} x \Rightarrow \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b} = \operatorname{tg} x;$$

$$\left\{ \begin{aligned} \operatorname{tg} a &= \frac{2x-1}{x+2} \\ \operatorname{tg} b &= \frac{x+3}{3x-1} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \operatorname{tg} x = \frac{\frac{2x-1}{x+2} + \frac{x+3}{3x-1}}{1 - \frac{(2x-1)(x+3)}{(x+2)(3x-1)}} = 7$$

$$= \frac{(2x-1)(3x-1) + (x+3)(x+2)}{(x+2)(3x-1) - (2x-1)(x+3)} = \frac{6x^2 + 5x + 1}{x^2 + 1} = 7$$

$$\Rightarrow x = \operatorname{arctg} 7 + \pi k, \text{ но } -\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} 7 < \frac{\pi}{2}, \text{ т.к. } \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \operatorname{arctg} 7. \quad \frac{\pi}{4} < \operatorname{arctg} 7 < \frac{\pi}{2} \Rightarrow -\sqrt{2} + \operatorname{arctg} 7 < -\sqrt{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \operatorname{arctg} 7 - \sqrt{2} - \text{подходит.}$$

Ответ: $\operatorname{arctg} 7$

$$\left\{ \begin{aligned} \operatorname{arctg} 7 - 2\pi < -\sqrt{2}, \text{ т.к. } \operatorname{arctg} 7 < \sqrt{2} \\ \operatorname{arctg} 7 + \sqrt{2} > \sqrt{2}, \text{ т.к. } \operatorname{arctg} 7 > 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ других значений нет.

$$\text{ответ: } \begin{cases} x = \operatorname{arctg} 7 \\ x = \operatorname{arctg} 7 - \sqrt{2} \end{cases}$$

Код участника:

(заполняется организатором)

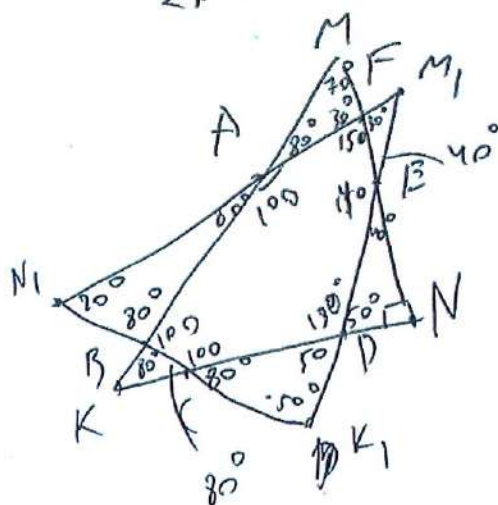
M11-325

$$\angle A = \angle B = \angle C = 100^\circ$$

$$\angle E = 140^\circ$$

$$\angle F = 150^\circ$$

$$\angle D = 130^\circ$$



№ 6.

Треугольник?

Треугольники называются MNK и M₁M₁K₁

$$\angle FAM = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$$

$$\angle AFM = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ \Rightarrow$$

$$\angle M = 180^\circ - 80^\circ - 30^\circ = 70^\circ$$

$$\angle DEN = 180^\circ - 140^\circ = 40^\circ$$

$$\angle NDE = 180^\circ - 130^\circ = 50^\circ$$

$$\angle N = 180^\circ - 50^\circ - 40^\circ = 90^\circ$$

$$\angle KBC = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ \Rightarrow$$

$$\angle KCB = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ \Rightarrow$$

$$\angle K = 180^\circ - 80^\circ - 80^\circ = 20^\circ$$

$$\angle K_1CD = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ \Rightarrow \angle K_1 = 180^\circ - 80^\circ - 50^\circ = 50^\circ$$

$$\angle CDK_1 = 180^\circ - 130^\circ = 50^\circ$$

$$\angle N_1BA = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ \Rightarrow \angle N_1 = 180^\circ - 80^\circ - 80^\circ = 20^\circ$$

$$\angle N_1AB = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$$

$$\angle FEM_1 = 180^\circ - 140^\circ = 40^\circ$$

$$\angle EFM_1 = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ \Rightarrow$$

$$\angle M_1 = 180^\circ - 40^\circ - 30^\circ = 110^\circ$$

Ответ: $90^\circ; 70^\circ; 20^\circ \leftarrow \triangle MNK$

$110^\circ; 20^\circ; 50^\circ \leftarrow \triangle M_1M_1K_1$

35

17 лет 0

18 лет

МН-322

Код участника
(заполняется организатором)



**Олимпиадная работа
заключительного этапа
«Всероссийская олимпиада школьников "Миссия
выполнима. Твоё призвание - финансист!" 2023-2024
г.»
«(Математика 11 класс)»**

Вариант № 2

«27 января 2024 г.»

Никакие другие записи на титульном листе делать не разрешается

ММ-322.

Код участника

Всероссийская олимпиада школьников «Миссия выполнима. Твое призвание – финансист!» 2023/2024 уч.г.

Бланк проверки работы

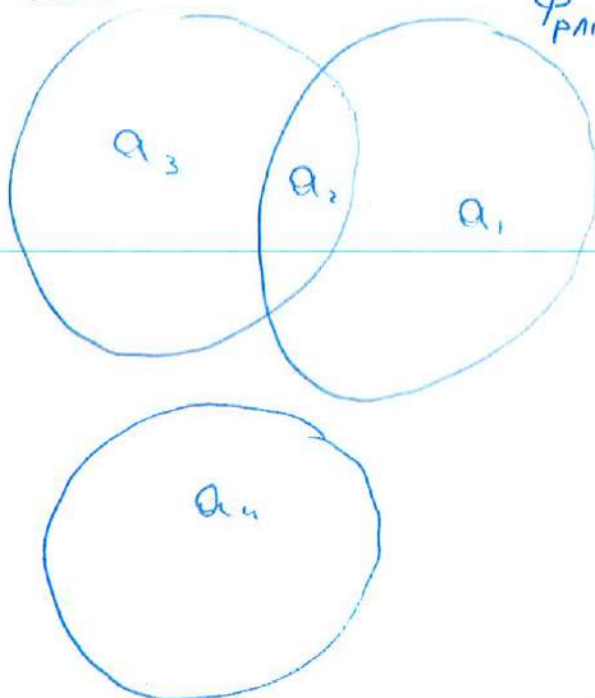
Математика 11 класс

№ задания	ФИО эксперта	Балл	ФИО эксперта	Балл	Итоговый балл
1	Васильков	10	Гурьянов	10	10
2	Засина	10	Поздиль	10	10
3	Маркова	12	Александрович	12	12
4	Васильков	0	Богачев	0	0
5	Чернов	0	Васильков	0	0
6	Олегов	3	Степанов	3	3
7	Кокнов	14	Степанов	14	14
8	Кеминин	0	Щакин	0	0
ИТОГО					49

Задача №1

Англ.

Франц.



Пусть: a_1 – кол-во людей, говорящих только на французском языке

a_3 – кол-во людей, говорящих только на английском языке

a_2 – кол-во людей, говорящих и на французском и на английском языке

a_4 – кол-во людей не говорящих ни на английском, ни на французском языках

Тогда $a_3 + a_4$ – кол-во людей не говорящих по-французски
 $a_1 + a_4$ – кол-во людей не говорящих по-английски.

Запишем два уравнения:

$$(1) \quad \frac{a_1}{a_1 + a_4} = \frac{4}{100} \Rightarrow 100a_1 = 4a_1 + 4a_4 \Rightarrow 96a_1 = 4a_4 \Rightarrow a_1 = \frac{a_4}{24}$$

$$(2) \quad \frac{a_3}{a_3 + a_4} = \frac{20}{100} \Rightarrow 5a_3 = a_3 + a_4 \Rightarrow 4a_3 = a_4 \Rightarrow a_3 = \frac{a_4}{4}$$

$$\begin{aligned} \frac{a_3 + a_4}{a_1 + a_4} &= \frac{\frac{a_4}{4} + a_4}{\frac{a_4}{24} + a_4} = \frac{\frac{5a_4}{4}}{\frac{25a_4}{24}} = \\ &= \frac{5 \cdot \frac{a_4}{4} \cdot 24}{4 \cdot 25a_4} = \frac{6}{5} = \frac{12}{10} = 1,2 \end{aligned}$$

Ответ: в 1,2 раз + 100.

Задание 13.

$$p(n) = \frac{(-3)^n}{3^n + 3^{17}} = \left(\frac{3^n + 3^{17}}{(-3)^n} \right)^{-1} = \left(\frac{3^n}{(-3)^n} + \frac{3^{17}}{(-3)^n} \right)^{-1} =$$

$$= \left((-1)^n + \frac{3^{17}}{(-3)^n} \right)^{-1} = \frac{1}{(-1)^n + \frac{3^{17}}{(-3)^n}}$$

Тогда $p(34-n) = \frac{1}{(-1)^{34-n} + \frac{3^{17}}{(-3)^{34-n}}}$, $n \leq 33$

1) Пусть n – нечетно, тогда $34-n$ – четно, значит

$$p(34-n) = -\frac{1}{1 + \frac{3^{17}}{3^{34-n}}} = -\frac{1}{1 + \frac{1}{3^{17-n}}} = -\frac{3^{17-n}}{3^{17-n} + 1}$$

$$p(n) = \frac{1}{(-1)^n + \frac{3^{17}}{(-3)^n}} = -\frac{1}{1 + 3^{17-n}}, \text{ тогда}$$

$$p(n) + p(34-n) = \frac{-3^{17-n}}{3^{17-n} + 1} + \frac{-1}{1 + 3^{17-n}} =$$

$$= \frac{-(3^{17-n} + 1)}{3^{17-n} + 1} = -1$$

2) Пусть n – четно, тогда $34-n$ – четно, значит

$$p(34-n) = \frac{1}{1 + \frac{3^{17}}{3^{34-n}}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{3^{17-n}}} = \frac{3^{17-n}}{1 + 3^{17-n}}$$

$$p(n) = \frac{1}{(-1)^n + \frac{3^{17}}{(-3)^n}} = \frac{1}{1 + \frac{3^{17}}{3^n}} = \frac{1}{1 + 3^{17-n}}, \text{ тогда}$$

$$p(n) + p(34-n) = \frac{3^{17-n}}{1 + 3^{17-n}} + \frac{1}{1 + 3^{17-n}} = \frac{3^{17-n} + 1}{1 + 3^{17-n}} =$$

$$= 1$$

Тогда $p(11) + p(33) = p(3) + p(31) = p(5)$

Тогда $p(11) + p(2) + \dots + p(33) =$
 $= (p(11) + p(33)) + (p(2) + p(32)) + \dots + (p(16) + p(18)) +$
 $+ p(17) = \cancel{-1+1} + \cancel{-1+1} + \dots + (-1+1) - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 -$
 $- 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 + p(17) = 0 + p(17) = 0 + \frac{(-3)^{17}}{3^{17} + 3^{17}} =$
 $= 0 + \frac{-3^{17}}{2 \cdot 3^{17}} = 0 - \frac{3^{17}}{2 \cdot 3^{17}} = -\frac{1}{2}$

Ответ: $-\frac{1}{2}$.

Задача №2.

$$\begin{cases} 3A + 5B \leq 11 \\ 4A + 3B \leq 10 \\ 7A + 4B \leq 18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1) & 3A + 5B \leq 11 \\ (2) & 8A + 6B \leq 20 \\ (3) & 7A + 4B \leq 18 \end{cases}$$

Если выполняется исходная система, то должно выполняться следующее неравенство:

$$(1) + (2): 3A + 5B + 8A + 6B \leq 31 \Rightarrow 11A + 11B \leq 31 \Rightarrow A + B \leq \frac{31}{11}$$

следовательно $A+B$ не больше $\frac{31}{11}$. Теперь докажем, что существуют такие A и B , что $A+B = \frac{31}{11}$ и исходная система из неравенств при таких A и B выполняется:

Пусть $A = \frac{17}{11}$, $B = \frac{14}{11}$, тогда $3A + 5B = \frac{3 \cdot 17}{11} + \frac{5 \cdot 14}{11} =$
 $= \frac{51 + 70}{11} = \frac{121}{11} = 11 \Rightarrow 3A + 5B \leq 11$ - выполняется

$$4A + 3B = \frac{4 \cdot 17}{11} + \frac{3 \cdot 14}{11} = \frac{68 + 42}{11} = \frac{110}{11} = 10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4A + 3B \leq 10 - \text{выполняется}$$

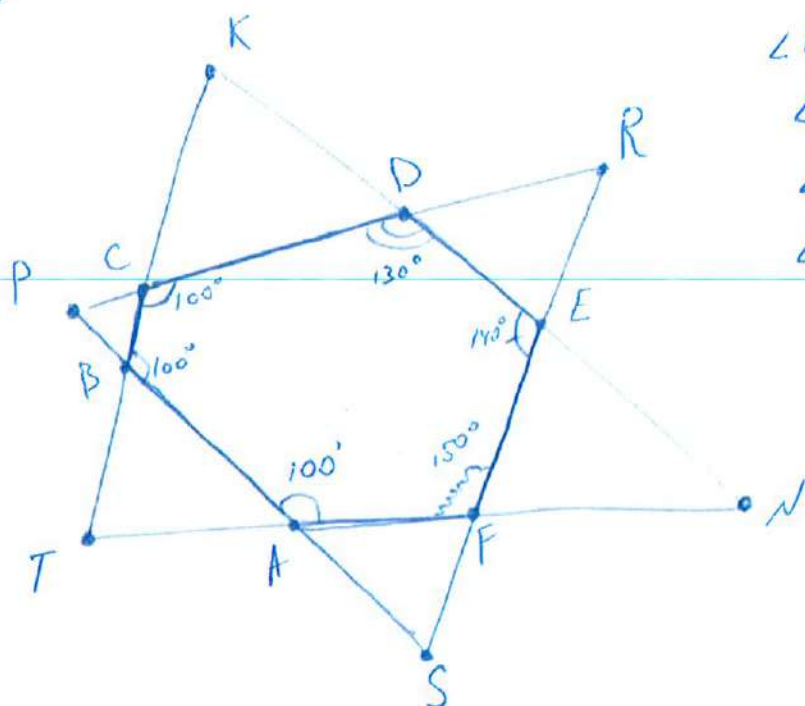
$$7A + 4B = 7 \cdot \frac{17}{11} + 4 \cdot \frac{14}{11} = \frac{119 + 56}{11} = \frac{175}{11} < 18 \Rightarrow$$

$\Rightarrow 7A + 4B \leq 18$ - выполняется. Следовательно, существуют A и B , при которых $A+B = \frac{31}{11}$ и выполняется исходная система неравенств.

Значит наибольшее значение $A+B$ равно $\frac{31}{11}$.

Ответ: Наибольшее значение $A+B$ равно $\frac{31}{11}$.

Задача №6.



$$\begin{aligned}\angle A = \angle B = \angle C &= 100^\circ \\ \angle E &= 140^\circ \\ \angle F &= 150^\circ \\ \angle D &= 130^\circ\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\angle PCB &= 180 - \angle C = 180 - 100 = 80^\circ \\ \Rightarrow \angle BPC &= 180 - \angle PCB - \angle PBC = 180 - 80 - 80 = 180 - 160 = 20^\circ \\ \angle EDR &= 180 - \angle D = 180 - 130 = 50^\circ \\ \angle RED &= 180 - \angle E = 180 - 140 = 40^\circ \\ \angle DRE &= 180 - \angle EDR - \angle RED = 180 - 50 - 40 = 180 - 90 = 90^\circ \\ \angle ASF &= 180 - \angle SAF - \angle SFA = 180 - (180 - \angle A) - (180 - \angle F) = \\ &= 180 - 80 - 30 = 70^\circ = 180 - \angle BPC - \angle DRE = \\ &= 180 - 20 - 90 = 70^\circ \Rightarrow \angle ASF = 70^\circ\end{aligned}$$

Угол первого треугольника PRS равные: $70^\circ; 90^\circ; 20^\circ$

$$\begin{aligned}\angle ATB &= 180 - \angle TAB - \angle TBA = 180 - (180 - \angle A) - (180 - \angle B) = \\ &= 180 - 80 - 80 = 20^\circ\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\angle FNE &= 180 - \angle NFE - \angle NEF = 180 - (180 - \angle E) - (180 - \angle F) = \\ &= 180 - 40 - 30 = 110^\circ\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\angle CKD &= 180 - \angle DCK - \angle CDK = 180 - (180 - \angle C) - (180 - \angle D) = \\ &= 180 - 80 - 50 = 50^\circ = 180 - \angle BTA - \angle ENF = \\ &= 180 - 20 - 110 = 50^\circ\end{aligned}$$

Углы второго треугольника TKN равны: $20^\circ; 110^\circ; 50^\circ$
 Ответ: углы первого треугольника: $70^\circ; 50^\circ; 20^\circ$
 углы второго треугольника: $20^\circ; 110^\circ; 50^\circ$ 73

Задача 7

$$f(x) = x^4 + bx^2 + x$$

$$f'(x) = 4x^3 + 2xb + 1$$

$f'(x_0)$ – коэф. касательной
к графику $f(x)$ в точке x_0

Тогда

$f(x_1) = f(x_2)$, при $x_1 \neq x_2$. Пусть $f'(x_1) = f'(x_2) = k$
 Зопишем уравнение касательной к графику $f(x)$:

$$y_{кас1} = f'(x_1)(x - x_1) + f(x_1)$$

$$y_{кас2} = f'(x_2)(x - x_2) + f(x_2)$$

$$y_{кас1} = y_{кас2} \Rightarrow k(x - x_1) + x_1^4 + bx_1^2 + x_1 = k(x - x_2) + x_2^4 + bx_2^2 + x_2$$

$$kx - kx_1 + x_1^4 + bx_1^2 + x_1 = kx - kx_2 + x_2^4 + bx_2^2 + x_2$$

$$x_1 - x_2 - k(x_1 - x_2) + (x_1^4 - x_2^4) + b(x_1^2 - x_2^2) = 0 \quad | \text{т.к. } x_1 \neq x_2, \text{ то}$$

$$x_1 - x_2 \neq 0 \Rightarrow \text{разделим уравнение на } (x_1 - x_2)$$

$$1 - k + (x_1^3 + x_1^2x_2 + x_2^2x_1 + x_2^3) + b(x_1 + x_2) = 0$$

$$1 - k + (x_1^3 + x_2^3) + x_1x_2(x_1 + x_2) + b(x_1 + x_2) = 0$$

$$(x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 + x_1x_2 + b) = k - 1 \quad | : 2$$

$$2(x_1 + x_2)(x_1^2 + x_2^2 + b) = 2k - 2$$

$$\text{т.к. } k = f'(x_1) = f'(x_2), \text{ то}$$

$$2k = f'(x_1) - f'(x_2) = 4x_1^3 + 2x_1b + 1 - 4x_2^3 - 2x_2b + 1$$

$$2(x_1 + x_2)(x_1^2 + x_2^2 + b) = 4x_1^3 + 2x_1b + 4x_2^3 + 2x_2b + 2 - 2$$

$$2(x_1 + x_2)(x_1^2 + x_2^2 + b) = 4(x_1^3 + x_2^3) + 2b(x_1 + x_2)$$

$$2(x_1 + x_2)(x_1^2 + x_2^2 + b) = 4(x_1^3 + x_2^3) + 2b(x_1 + x_2)$$

$$2(x_1 + x_2)(x_1^2 + x_2^2 + b) = 4(x_1^3 + x_2^3) + 2b(x_1 + x_2)$$

$$(x_1 + x_2)(x_1^2 + x_2^2 + b) - (x_1 + x_2)(2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + b) = 0$$

$$(x_1 + x_2)(-x_1^2 - 2x_1x_2 - x_2^2) = 0$$

$$(x_1 + x_2)(x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2) = 0$$

$$(x_1 + x_2)(x_1 + x_2)^2 = 0$$

$$(x_1 + x_2)^3 = 0 \Rightarrow x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = -x_2$$

$$\Rightarrow x_1 = -x_2, \text{ при } x_1 \neq 0, \text{ т.к. при } x_1 = 0$$

$$x_1 \text{ равняется } x_2$$

$$f'(x_1) = f'(x_2)$$

$$4x_1^3 + 2x_1b + 1 = 4x_2^3 + 2x_2b + 1$$

$$4x_1^3 + 2x_1b = 4x_2^3 + 2x_2b, \text{ подставим вместо } x_2 \text{ } (-x_1)$$

$$4x_1^3 + 2x_1b + 4x_1^3 + 2x_1b = 0$$

$$8x_1^3 + 4x_1b = 0$$

$$\text{разделим на } 4x_1, \text{ т.к. } x_1 \neq 0$$

$$2x_1^2 + b = 0$$

$$2x_1^2 = -b$$

Код участника: М 11- 322
(заполняется организатором)

$$\begin{cases} x_1 = \sqrt{\frac{-b}{2}} \\ x_2 = -\sqrt{\frac{-b}{2}} \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = \sqrt{\frac{-b}{2}} \\ x_2 = -\sqrt{\frac{-b}{2}} \end{cases}$$

Два этих случая не отличаются
по сути будем считать, что $x_1 = \sqrt{\frac{-b}{2}}$
 $x_2 = -\sqrt{\frac{-b}{2}}$

$$k = f(x_1) = 4 \cdot \left(\sqrt{\frac{-b}{2}}\right)^3 + 2 \cdot b \cdot \sqrt{\frac{-b}{2}} + 1 =$$

$$= 4 \cdot \left(\frac{b}{2}\right) \cdot \sqrt{\frac{-b}{2}} + 2 \cdot b \cdot \sqrt{\frac{-b}{2}} + 1 =$$

$$= 2b \sqrt{\frac{-b}{2}} + 2 \cdot b \sqrt{\frac{-b}{2}} + 1 = 0 + 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k = 1$$

$$y_{кас1} = 1(x - x_1) + f(x_1) = x - \sqrt{\frac{-b}{2}} + \frac{b^2}{4} + b \cdot \left(\frac{-b}{2}\right) \cdot$$

$$+ \sqrt{\frac{-b}{2}} \Rightarrow x + \frac{b^2}{4} - \frac{b^2}{2} = x - \frac{b^2}{4}$$

$$y_{кас2} = (x + \sqrt{\frac{-b}{2}}) + \frac{b^2}{4} + b \cdot \left(\frac{-b}{2}\right) \cdot -\sqrt{\frac{-b}{2}}$$

$$y_{кас1} = y$$

148

№ 8 вер

М-1-440

Код участника
(заполняется организатором)

1314 - 1816
1401 - 14505



**Олимпиадная работа
заключительного этапа
«Всероссийская олимпиада школьников "Миссия
выполнима. Твоё призвание - финансист!" 2023-2024
г.»
«(Математика 11 класс)»**

Вариант № 2

«27 января 2024 г.»

Никакие другие записи на титульном листе делать не разрешается

№2.

$$\begin{cases} 3A + 5B \leq 77 \\ 4A + 3B \leq 70 \\ 7A + 4B \leq 78 \end{cases}$$

1) Сложим ~~1~~ 1-ое и 2-ое неравенство, при этом 2-ое неравенство умножим на два. $\Rightarrow$
~~27~~ $\Rightarrow$ ~~11A + 17B \leq 37~~ $11A + 17B \leq 37$

2) Поделим полученное неравенство на 11 $\Rightarrow$
 $2) A + B \leq \frac{37}{11}$ 105

3) Пусть $A = x$; $B = y$, тогда получим 2 уравнения: ~~27~~
 $3x + 5y = 77$ и $4x + 3y = 70$, следовательно точка пересечения этих 2-х прямых имеет координаты: $x = \frac{27}{11}$ и $y = \frac{24}{11} \Rightarrow$ ~~при~~ $B = \frac{24}{11}$; $A = \frac{27}{11}$
 равенство достигается.

4) Подставим эти значения A и B в 3-е неравенство, чтобы убедиться, что они удовлетворяют и ему: $7 \cdot \frac{27}{11} + 4 \cdot \frac{24}{11} \leq 78 \Rightarrow A + B \leq \frac{37}{11}$; самое максимальное значение достигается при $A = \frac{27}{11}$; $B = \frac{24}{11}$
 $\Rightarrow$ ~~при~~ ~~максимальное~~ максимальное значение $A + B = \frac{37}{11}$

Ответ: $\frac{37}{11}$.

№3.

$$\arctg \frac{2x-7}{x+2} + \arctg \frac{x+3}{3x-7} = x$$

1) Правая часть уравнения $x \in [-\pi; \pi]$, потому что $\arctg y \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$, при этом $x \neq -2$; $x \neq \frac{7}{3}$

2) Если взять тангенс от обеих частей уравнения, то мы получим: $\operatorname{tg}(\arctg \frac{2x-7}{x+2} + \arctg \frac{x+3}{3x-7}) = \operatorname{tg} x \Rightarrow$
 $\Rightarrow$ при разложении по формуле тангенса суммы, получим: $\frac{\frac{2x-7}{x+2} + \frac{x+3}{3x-7}}{1 - \frac{2x-7}{x+2} \cdot \frac{x+3}{3x-7}} = \frac{1 - \operatorname{tg}(\arctg \frac{2x-7}{x+2}) \cdot \operatorname{tg}(\arctg \frac{x+3}{3x-7})}{3x^2 + 5x - 2 - 2x^2 - 5x + 3} = \frac{7x^2 + 7}{x^2 + 7} = 7$

№5.

3) Из пункта 2 следует, что $\forall x(x \neq 7) \Rightarrow$
 $\Rightarrow x = \arctg 7 + \pi k; k \in \mathbb{Z}$

4) После того, как мы ушли от ограничения,
 получаем, что $x = \arctg 7$ и $x = \arctg 7 - \pi$.

№3.
 $p(n) = \frac{(-3)^n}{3^n + 3^{27}}$; $p(1) + p(2) + \dots + p(33) = ?$

1) Пусть $y \in [1; 26]$, при этом y – целое число.

2) Давайте складывать первый член с последним, второй член с предпоследним и т.д.:

$$\begin{aligned} 3) p(y) + p(34-y) &= \frac{(-3)^y}{3^y + 3^{27}} + \frac{(-3)^{34-y}}{3^{34-y} + 3^{27}} = \frac{(-1)^y}{3^y + 3^{27}} + \frac{(-1)^{34-y}}{3^{34-y} + 3^{27}} \\ &= \frac{3^y \cdot (-1)^y}{3^y(1 + 3^{27-y})} + \frac{3^{34-y} \cdot (-1)^{34-y}}{3^{34-y}(1 + 3^{27-y})} = \frac{(-1)^y}{1 + 3^{27-y}} + \frac{(-1)^{34-y}}{1 + 3^{27-y}} = \\ &= \frac{(-1)^y + (-1)^{34-y}}{1 + 3^{27-y}} \end{aligned}$$

4) Если использовать четные y , то $\frac{1 + 3^{27-y}}{1 + 3^{27-y}} = 1$, но
 если использовать нечетные y , то $\frac{-1 - 3^{27-y}}{1 + 3^{27-y}} = -1$

5) Всего таких пар получится 26, при этом
 половина из них дает 1, а вторая половина
 дает -1 $\Rightarrow$ при сложении мы получаем 0

6). Пусть $p(1) + p(2) + \dots + p(33) = (p(1) + p(33)) + (p(2) + p(32)) +$
 $+ (p(3) + p(31)) + \dots + (p(16) + p(18)) + p(17) =$
 $0 + \dots + 0 + p(17) \Rightarrow$ нужно найти $p(17)$:

$$p(17) = \frac{(-3)^{17}}{3^{17} + 3^{27}} = \frac{(-1)^{17} \cdot 3^{17}}{2 \cdot 3^{27}} = -\frac{1}{2} = -0,5$$

Ответ: -0,5.

+

№1.

1) Обозначим разные группы людей:
 x – говорят на английском и на французском
 y – говорят только по-английски; t – говорят только по-французски; g – не ~~хотят~~ говорят ни по-английски, ни по-французски.

2) Исходя из условия: $\frac{t}{t+g} = \frac{1}{25} = \frac{1}{25}$; $\frac{y}{y+g} = \frac{2}{70} = \frac{1}{35} \Rightarrow$
 $\Rightarrow \begin{cases} \frac{t}{t+g} = \frac{1}{25} \\ \frac{y}{y+g} = \frac{1}{35} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 24t = g \\ 34y = g \end{cases} \Rightarrow 4y = 24t \Rightarrow y = 6t.$

3) $\frac{y+g}{t+g} = \frac{y+4y}{t+24t} = \frac{5y}{25t} = \frac{y}{5t} = \frac{6t}{5t} = 1,2$

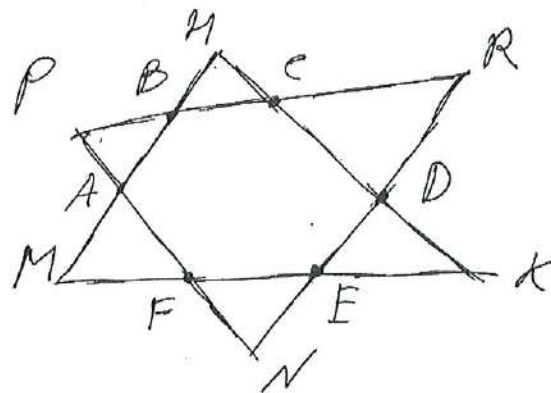
Ответ: в 1,2 раза. ~~№6~~ №6.

1) Пусть $\triangle MHK$ и $\triangle PRN$ пересекаются по MN шестиграннику так, что: $PN \cap MH$ в т. А; $PR \cap$ ~~МК~~ в т. В; $PR \cap HK$ в т. С; $MK \cap RN$ в т. D; $MK \cap RN$ в т. E; $MK \cap$ ~~Н~~ в т. F.

2) Т.к. сумма углов треугольника и сумма смежных углов равны 180° , то:

- $\angle PBA = \angle HBC = 80^\circ$
- $\angle PAB = \angle MAF = 80^\circ$
- $\angle HCB = \angle RCD = 80^\circ$
- $\angle RDC = \angle KDE = 50^\circ$
- $\angle KED = \angle NEF = 40^\circ$
- $\angle NFE = \angle MFA = 30^\circ$

3) Следовательно, $\angle P = 20^\circ$; $\angle H = 20^\circ$; $\angle R = 50^\circ$; $\angle K = 90^\circ$; $\angle N = 110^\circ$; $\angle M = 70^\circ$.



№3

М 11-770

Код участника

Всероссийская олимпиада школьников «Миссия выполнима. Твое призвание – финансист!» 2023/2024 уч.г.

Бланк проверки работы

Математика 11 класс

№ задания	ФИО эксперта	Балл	ФИО эксперта	Балл	Итоговый балл
1	Касьянов	10	Гурьев	10	10
2	Торжкова	10	Запорож	10	10
3	Маркова	12	Александрович	12	12
4	Овсянников	2	Иванова	2	2
5	Курдов	0	Васильева	0	0
6	Олехов	3	Трундаев	3	3
7	Алиашев	0	Степанян	0	0
8	Келишев	0	Щенков	0	0
ИТОГО					37

Код участника: ММ-440
(заполняется организатором)

4) Чтобы треугольник существовал, необходимо, чтобы у него сумма углов была равна $180^\circ \Rightarrow$
 $\Rightarrow$ Сделаем проверку:

4.1) ~~20° + 70° + 90° = 180°~~ — сумма углов $\Delta MHK \Rightarrow \Delta MHK$ — существует

4.2) $20^\circ + 50^\circ + 110^\circ = 180^\circ$ — сумма углов $\Delta PRN \Rightarrow \Delta PRN$ — существует.

Ответ: $20^\circ, 70^\circ, 90^\circ; 20^\circ, 50^\circ, 110^\circ$

НЧ.

1) Будем оси координат задавать так: A_1
 в т. А — начало координат, ось Ox — продолжение ~~оси~~
 ось Oy — идет по ребру AD ; ось Oz — по ребру AA'

2) Будем считать шар с координатами $x=0; y=0; z=0$
 R — радиус $\Rightarrow$ уравнение шара: $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = R^2$

3) т.к. т. В лежит на шаре, то $(1-x_0)^2 + (y_0)^2 + (z_0)^2 = R^2$

4) 4.1) касание с $AD \Rightarrow (x_0)^2 + (z_0)^2 = R^2$

4.2) касание с $AA' \Rightarrow (x_0)^2 + (y_0)^2 = R^2$

4.3) касание с $A'B' \Rightarrow (y_0)^2 + (1-z_0)^2 = R^2$

5) При вычитании 2-ого уравнения из 1-ого:

$$(z_0)^2 = (y_0)^2 \Rightarrow \begin{cases} z_0 = y_0 \\ z_0 = -y_0 \end{cases}$$

6) При вычитании 2-ого уравнения из 3-его:

$$(1-z_0)^2 = (x_0)^2 \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 1-z_0 \\ -x_0 = 1-z_0 \end{cases}$$

N4.

7) Рассмотрим возможные случаи:

I случай

$$\begin{cases} 1-x_0=z_0 \\ y_0=z_0 \end{cases}$$

II случай.

$$\begin{cases} 1-x_0=z_0 \\ y_0=-z_0 \end{cases}$$

7.1) Подставим в уравнение, при котором Т.В. лежит на шаре $\Rightarrow 3(z_0)^2 = R^2 \Rightarrow R = \pm z_0 \cdot \sqrt{3}$.

~~7.2) При радиусе шаров из уравнения~~

7.2) Из уравнения касания с АД получаем, что:

$$(1-x_0)^2 + (y_0)^2 = (x_0)^2$$

$$2(z_0)^2 = (1-z_0)^2$$

$$z_0 \sqrt{2} = \pm (1-z_0)$$

7.3). Составим совокупность:

$$\begin{cases} z_0 \sqrt{2} = 1-z_0 \\ z_0 \sqrt{2} = z_0-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_0 = \sqrt{2}-1 \\ z_0 = -(\sqrt{2}+1) \end{cases}$$

Из выше сказанного следует, что $R^2 = 3 \cdot (z_0)^2 =$
 $= 3 \sqrt{3} (\sqrt{2} \pm 1)$.

8) ~~Всё~~ Другие случаи будут давать те же значения радиуса, так как будут меняться ~~только~~ местами знаки у координат и знаки неравенства.

Ответ: $R = \sqrt{3} (\sqrt{2} \pm 1)$.

№ 8 нет
N4 нет