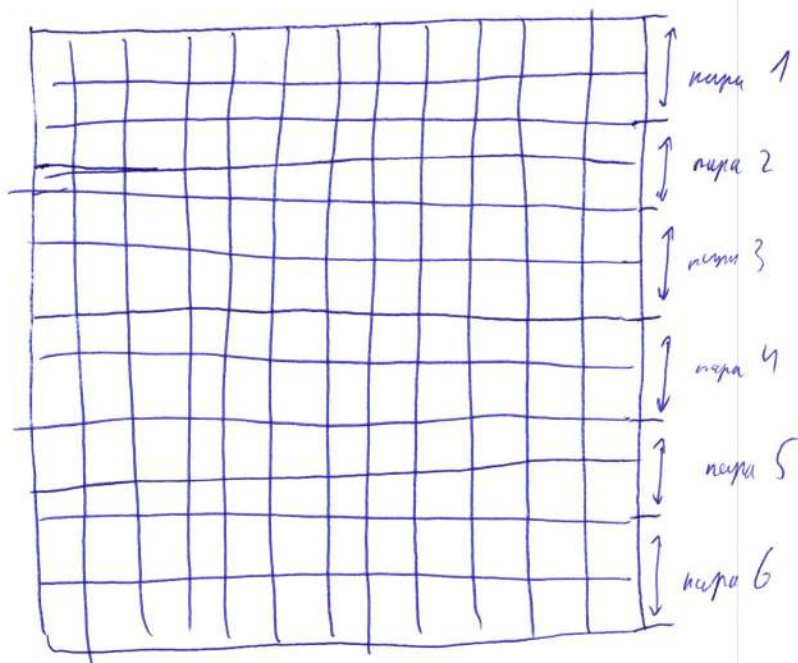


Код участника:

M9-020

(заполняется организатором)

Пусть такого столбца много не найдётся. В таком случае сумма чисел в каждом столбце ≤ 8 . Разделим доску на 6 пар строчек таким образом: Найдем пример, в котором Таблица имеет 6 строчек.



Сумма чисел в каждой из этих пар ≥ 16 по условию, значит, сумма чисел во всей таблице $> 16 \cdot 6 = 96$.

По предположению, в каждом столбце сумма чисел ≤ 8 , поэтому сумма чисел во всей таблице $\leq 8 \cdot 12 = 96$.

Но сумма не может одновременно быть > 96 и ≤ 96 . Противоречие. Значит, такого примера не существует и найдётся столбец, в котором сумма чисел ≥ 8 .

Ответ: да, обязательно

№ 2.

Да, существуют. Например, числа 989999999999 и 990000000000.

Сумма чисел первого = 18, суммы этих цифр равны $98 = 2 \cdot 4^2$ и

$18 = 2 \cdot 3^2$ соответственно

Ответ: да, существуют.

53

Пусть мы можем выбрать при этом ~~так~~ a, b и c такие, что $a \neq b$,
 $b \neq c$,
 $a \neq c$ и:

$$\begin{cases} a+b \equiv 0 \\ b+c \equiv 0 \\ c+a \equiv 0 \end{cases}$$

Сложив эти 3 сравнения, получаем:

$$2a+2b+2c \equiv 0$$

$$2(a+b+c) \equiv 0 \quad (\text{можно поделить обе стороны на 2, т.к. 11 делится просто на 2})$$

$$a+b+c \equiv 0$$

$$\begin{cases} a+b \equiv 0 \\ a+b+c \equiv 0 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} \parallel \\ \downarrow \\ c \equiv 0 \end{matrix}$$

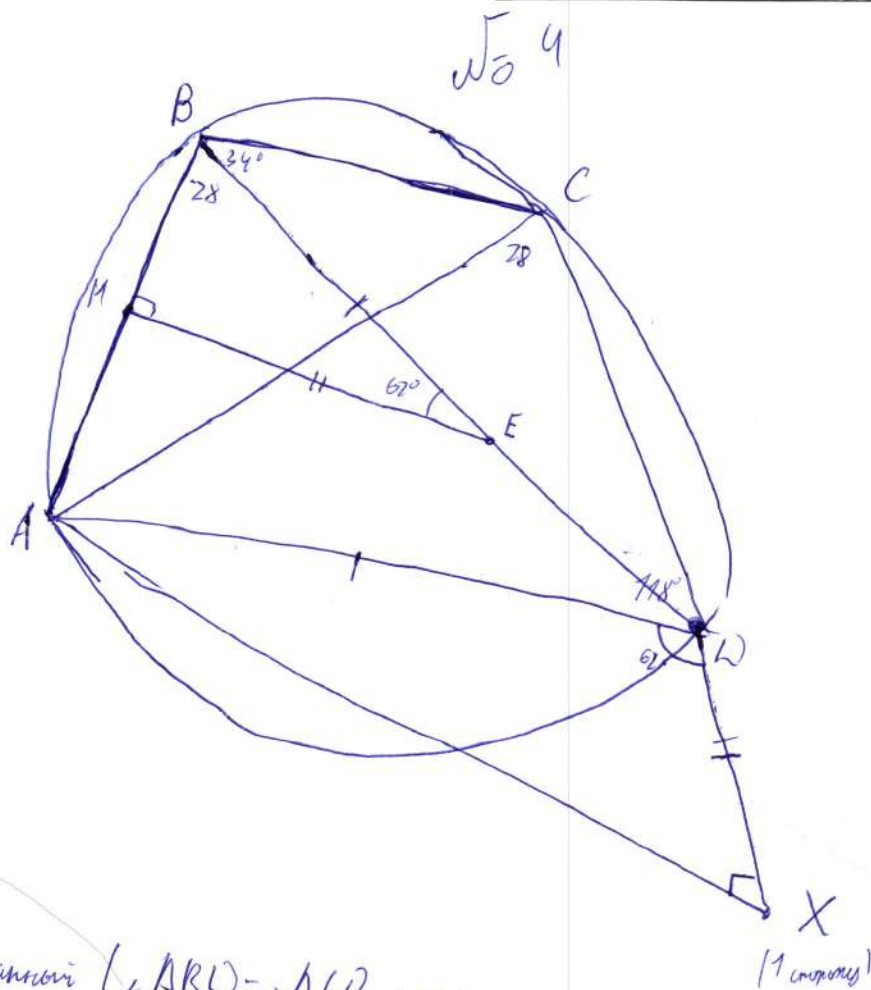
$$\begin{cases} b+c \equiv 0 \\ a+b+c \equiv 0 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} \parallel \\ \downarrow \\ a \equiv 0 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} a+c \equiv 0 \\ a+b+c \equiv 0 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} \parallel \\ \downarrow \\ b \equiv 0 \end{matrix}$$

И.е. каждое из чисел a, b и c должно делиться на 11. Также очевидно, что
 наиболее разное a, b и c , каждое из которых $\neq 11$, когда делится на 11, можно
 выбрать). И.е. ответ - кол-во способов выбрать 3 различных числа от 1 до 1000,
 $\div 11$. Наименьшее число в этом диапазоне, $\div 11$, это $11 = 11 \cdot 1$, а наибольшее, $\div 11$,
 $= 90 = 11 \cdot 90$. Значит, в этом диапазоне 90 чисел, $\div 11$ (от $11 \cdot 1$ до $11 \cdot 90$),
 а кол-во способов выбрать 3 из них $= C_{90}^3 = \frac{90 \cdot 89 \cdot 88}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 30 \cdot 89 \cdot 44 = 117480$
 Ответ: 117480 способов



Дано:

$ABCD$ - вписанный
4-угольник

$$\angle ABD = \angle ACD = 28^\circ$$

$$\angle CBD = 34^\circ$$

$$m. E \in BD$$

$$BE = AL$$

$$EH \perp AB$$

$$m. H \in AB$$

Докажем:

$$AC > EH + CD$$

Докажем:

$ABCD$ вписанный ($\angle ABD = \angle ACD$, углы, опирающиеся на одну дугу, равны)

$$\angle CDA = 180^\circ - \angle CBA \text{ (св-во вписанного 4-угольника)} = 180^\circ - 28^\circ - 34^\circ = 118^\circ$$

Продлим CL за $m. D$ на длину EH до $m. X$. Тогда $\angle ADX = 180^\circ - \angle CDA = 62^\circ$
(св-во смежных углов)

$$\angle BEH = 180^\circ - \angle HBE - \angle BHE = 62^\circ \text{ (из св-ва углов в } \triangle BHE \text{)}$$

$\triangle BEH = \triangle ADX$ по 2 сторонам и углу между ними, т.к.:

$$1) AD = BE$$

$$2) EH = DX$$

$$3) \angle BEH = \angle ADX$$

$$\angle BHE = \angle AXD = 90^\circ$$

$\angle AXC$ - наибольший угол в $\triangle AXC$ (сумма ~~двух~~ ^{двух} смежных углов в $\triangle ACX > 90^\circ$)

AC - наиб. сторона $\triangle ACX$

$$AC > CX$$

$$AC > CD + DX$$

$$AC > CD + EH$$

№ 7.

Построим граф знакомств (вершины – люди, рёбра ставятся между 2 людьми

~~тогда~~ тогда и только тогда, когда они знакомы).

Пусть изначально все вершины чёрные.

Рассмотрим произвольную вершину X . Выберем любые 43 вершины, среди которых есть вершина X . Среди этих 43 вершин найдётся хотя бы одна, между которой и вершиной X проведено ребро. Покрасим вершину, между которой и вершиной X есть ребро, в красный цвет. Теперь рассмотрим другие 43 вершины, среди которых есть X , но нет красных. Найдём вершину, между которой и X проведено ребро, и покрасим её в красный. ~~Продолжим~~ ^{Продолжим} таким образом, пока есть хотя бы 42 чёрные вершины.

не считая X – ~~большую~~ ^{находим} рассматриваем 43 чёрные вершины, одна из которых X , ~~найдётся~~ ^{найдётся} ~~между~~ ^{из этих 43 вершин} ~~между~~ ^{между} которой и X есть ребро (такое есть по условию), покрасим эту вершину в красный. Когда останется менее 42 чёрных вершин, не считая X , красных будет ~~хотя бы~~ ^{хотя бы} 41 (т.к. менее всех 43 вершины, из них не более 41 чёрные (не считая X), и $X \rightarrow$ красная? $83 - 41 - 1 = 41$). Получается, т.е. красные вершины – друзья X , у каждого человека хотя бы 41 друг.

Допустим, наоборот – пусть есть ~~у~~ ^у вершины A и B ~~такие~~ ^{такие} у которых нет общих знакомых и которые не знакомы. Тогда у вершины A степень 0, у друзей A степень 1, у друзей друзей A степень 2, а у B степень ≥ 3 . По доказанному вершин степени 1 (друзей A) ≥ 41 .

Рассмотрим 43 вершины: A , любые 41 друзей A и B . По предположению A не дружит с B и ни одна из друзей A не дружит с B . Но тогда у B нет друзей среди этих 43 человек, что противоречит условию. Значит, либо A и B знакомы, либо у них есть общий друг, что и требовалось доказать.

№ 8

Раскрасим все корзинки в пять цветов: красный, желтый, зелёный, белый, чёрный, чередуя цвета (т.е. корзинки раскрашены так: красный, желтый, зелёный, белый, чёрный, красный, желтый, зелёный, белый, чёрный[†]...).

Если ~~в каждой из корзинок~~ рассмотрим одну и ту же конфету в корзинках одного цвета (где все цвета корзинок). Если Пупс в корзинках красного, желтого, зелёного, ~~красного и бел~~ белого и чёрного цвета суммарно a, b, c, d и e конфет соответственно. Если какой-то из чисел $a, b, c, d, e > 400$, то всего конфет > 2000 , а по условию их $= 2000$. Противоречие. Тогда хотя бы одно из чисел a, b, c, d, e (не учитывая абсурдного решения, нулевых) ≤ 400 . Значит, в чёрных корзинках не более 500 конфет.

Справедливо для Пети:

Возьмём все конфеты из модных и корзинок, среди которых нет чёрных. Тогда следующим ходом Вася будет вынужден брать из чёрной корзины.

Теперь возьмём конфеты из обычных корзинок, соединит с чёрной, из которой взял Вася. Среди этих и корзинок не будет ^{т.е. все "модные" корзинки сразу подберу} чёрных и следующим ходом

Вася будет вынужден взять из чёрной корзины. Представим деление так: и

(Брала конфеты из ~~и~~ а корзинок рядом с ней, из которой брала Вася и

вспомогательная его брать чёрную корзину). Тогда к концу игры у него ~~будет~~ ^{будет}

взят все чёрные корзинки и только они, а всего в чёрных корзинках

не более 400 конфет. Значит, Пете возьмёт ~~и~~ ^а всего не более 1600 конфет.

Вася возьмёт не более 400 конфет.

Код участника:

(заполняется организатором)

M9020

Ю.Ч.

$$\begin{aligned} ab &= 1 \\ b &= 1-a \\ -b &= a-1 \end{aligned}$$

$$1+a > 0 \text{ (т.к. } a \text{ положительный)}$$

$$b > 0 \quad 1+b > 0 \text{ (т.к. } b \text{ положительное)}$$

$$1-a > 0$$

⇓

$$2+a > 0 \quad 2-a > 0$$

$$(1+a)(2-a) > 0 \text{ (используем 2 числ., } \neq 0, \text{ } b \text{ положительное)}$$

$$a-a^2 = a(1-a) = -ab$$

$$a \text{ и } b > 0, \text{ поэтому } ab < 0$$

$$a-a^2 = a(1-a) = ab$$

$$a \text{ и } b > 0, \text{ поэтому } ab > 0, a-a^2 > 0$$

$$a-a^2$$

$$\frac{a-a^2}{(1+a)(2-a)} > 0 \text{ (и числитель, и знаменатель } > 0)$$

$$\frac{6a-6a^2}{(1+a)(2-a)} > 0$$

$$\frac{2+a-a^2-2+5a-5a^2}{(1+a)(2-a)} > 0 \text{ (т.к. } 2+a-a^2-2+5a-5a^2 = 6a-6a^2)$$

$$a \neq a-a$$

$$\frac{-2+5a-5a^2}{(1+a)(2-a)} + \frac{2+a-a^2}{(1+a)(2-a)} > 0$$

$$\frac{-2+5a-5a^2}{(1+a)(2-a)}$$

$$\frac{2+a-a^2}{(1+a)(2-a)} - \frac{2-5a+5a^2}{(1+a)(2-a)} > 0$$

$$1 - \frac{2-5a+5a^2}{(1+a)(2-a)} > 0$$

$$\frac{2-5a+5a^2}{(1+a)(2-a)} < 1$$

$$\frac{a^2+a^3+2-4a+2a^2-a+2a^2-a^3}{(1+a)(2-a)} < 1 \text{ (т.к. } a^2+a^3+2-4a+2a^2-a+2a^2-a^3 = 2-5a+5a^2)$$

$$\frac{a^2+a^3+(1-2a+a^2)(2-a)}{(1+a)(2-a)} < 1$$

$$\frac{a^2+a^3+(1-a)^2(2-a)}{(1+a)(2-a)} < 1$$

Мисс. Ю.Ч.

Код участника:

(заполняется организатором)

119-020

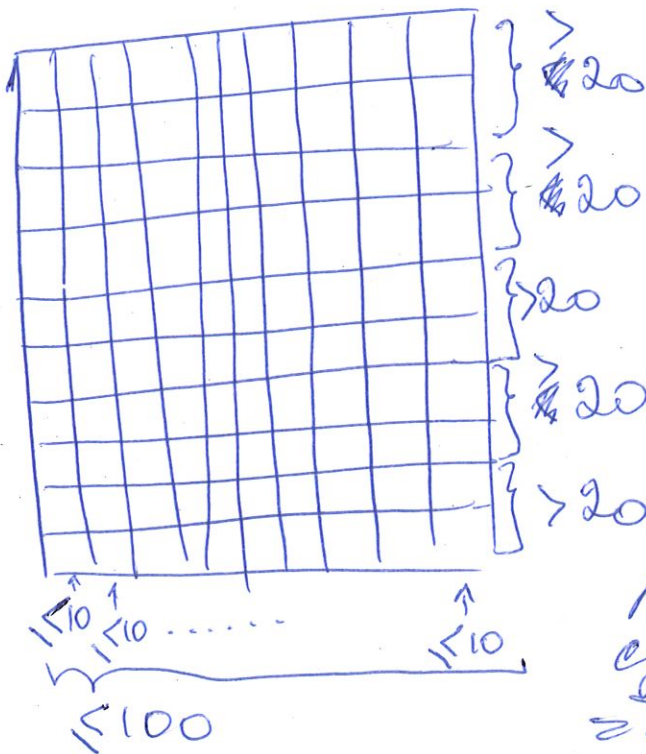
$$\frac{a^2(\cancel{a} + 1 + a) + (1-a)^2(2-a)}{(1+a)(2-a)} < 1$$

$$\frac{\cancel{a^2}}{2-a} + \frac{(1-a)^2}{1+a} < 1$$

$$\frac{a^2}{1+b} + \frac{b^2}{1+a} < 1, \text{ что и требовалось доказать } (b = 1-a, 1+b = 2-a)$$

Михаил 5¹⁴

№



Предположим
противное. Что
сумма чисел в
любой строке ≤ 10 .
Тогда сумма чисел
во всей таблице
 $S \leq 10 \cdot 10 = 100$.
С другой стороны,
каждая строка по
крайней мере имеет
в каждой из них, по усл,
сумма чисел > 20 .
 $\Rightarrow$ сумма чисел во всей
таблице $S > 20 \cdot 5 = 100$.

Г.е. неверно:

$$\begin{cases} S \leq 100 \\ S > 100 \end{cases}$$

Противоречие $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ обязательно найдётся
строка, в которой сумма чисел > 10 .
№3 (1)

Заменяем все выписанные числа на
их остатки по mod 7.
Посчитаем, сколько ~~остатков~~ остатков по mod 7
каждого остатка по mod 7.

остаток по mod 7	кол-во
0	41 41
1	42
2	42
3	42
4	41
5	41

№12)	
ост. по mod 7	ком-во
6	71

(т.е. можно разбить числа от 1 до 500 на группы по 7 последоват. чисел. Разлагаясь в каждой группе получается все ост. по mod 7 1 раз.

$$500 = 71 \cdot 7 + 3$$

получается 71 группа и еще 3 числа:

$$\begin{array}{ccc} 500, 499, 498 & & \\ 7 \mid & 7 \mid & 7 \mid \\ 3 & 2 & 1 \end{array}$$

~~Решение~~

Решение вопроса 3 числа, по mod 7 дающиеся следующие остатки: a, b, c

Тогда по условию: $a+b \equiv 0 \pmod{7} \Rightarrow b \equiv 7-a \quad (1)$

$$b+c \equiv 0 \pmod{7} \Rightarrow c-a \equiv 0 \quad (2)$$

$$a+c \equiv 0 \pmod{7} \Rightarrow c \equiv -a \quad (3)$$

из (2): $c \equiv a$

из (3): $c \equiv -a$

$$\Rightarrow 2a \equiv 0 \pmod{7}, \text{ так } (7; 2) = 1$$

$$c \equiv 0 \pmod{7} \Rightarrow a \equiv 0 \pmod{7} \Rightarrow b \equiv 0 \pmod{7}$$

Т.е. вопросенное нами 3 числа все делится на 7. Остатков $\equiv 0$ равняется 71, как мы выяснили ранее

$\Rightarrow$ число способов выбрать из 71 объектов 3: (без учета порядка), $C_{71}^3 = 71 \cdot 70 \cdot 69$

$$= 71 \cdot 35 \cdot 23 = 32655$$

Ответ: 32655

NL4

$a, b > 0$

$$Out\ 6 = 1$$

$$\text{QED!} \quad \frac{a}{a+b^2} + \frac{b}{a^2+b} > 1$$

mk $a, b > 0$ и $a+b=1$, но $0 < a < 1$

$$0 \leq b \leq r \quad |z\rangle$$

~~$\sqrt{2} \frac{a+b}{a^2+b^2} \cdot \frac{a+b}{a+b} \cdot \frac{a+b}{a+b} \cdot \frac{a+b}{a+b}$~~

$$\begin{array}{l} \Rightarrow a+b^2 < a+b \Rightarrow \frac{a}{a+b^2} > \frac{a}{a+b} \\ a^2+b < a+b \Rightarrow \frac{b}{a^2+b} > \frac{b}{a+b} \end{array} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{a}{a+b^2} + \frac{b}{a^2+b} > \frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b} = \frac{a+b}{a+b} = 1$$

જી $\frac{a}{a+b^2} + \frac{b}{a^2+b} \geq 1$ અમર

аналогично с q

W3.2

Onkemi ga.

~~Всего в документе~~

Архивер:

число 1000. Система
успех $z = p = p^3$

и следовательно число 1000 . Сумма $z = p = p^3$

№6 (1)

Назовем

↓. Пусть окружность, описанную около

$\triangle ABD$ — ω_1 , а вписанную в $ABDE$ — ω_2

р/ч ω_1 !

Пусть $\angle BAD = \alpha$

$$\angle BAD = \angle BED = \frac{\angle BDE}{2} = \alpha =$$

$$= \angle DAE = \angle EBD = \frac{\angle DEB}{2}$$

↓

$\triangle EDB$ р/б.

Так в $ABDE$ можно вписать окр. ω_2 , то центр ω_2 находится в т. перес.

бисс. углов. $ABDE$.

Тк по условию AD — есть бисс. $\angle BAE$ (по усл), то AD — бисс. $\angle ABE$ (также центр ω_2 — т. D , ~~$\angle BED =$~~ что невозможно, тк ω_2 вписана в $ABDE$)

$$\Rightarrow \angle BDA = \angle ADE = \frac{\angle BDE}{2}$$

$$\text{т. } \angle BDE = 180 - 2\alpha \text{ (} \triangle BDE \text{ — вписан в } \omega_1 \text{)}$$

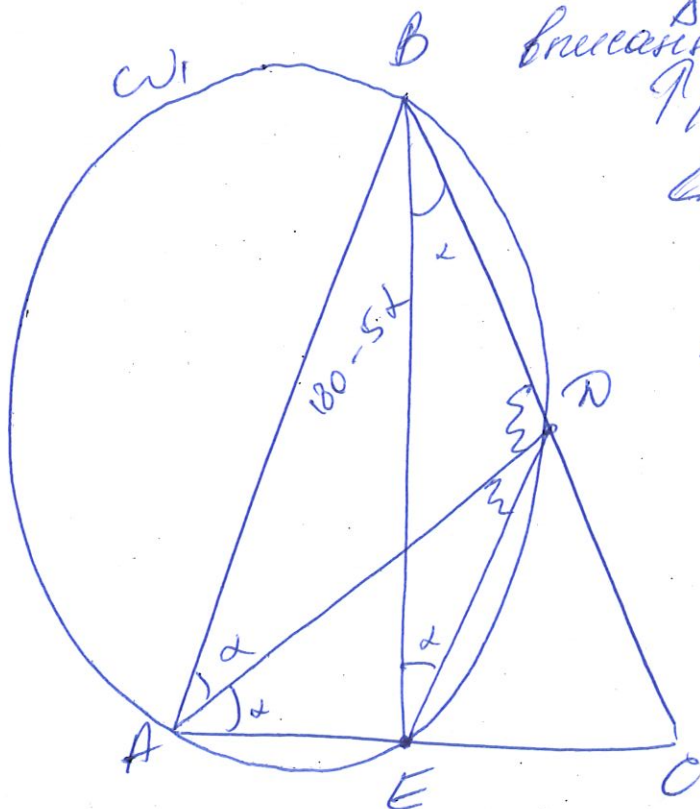
$$\angle ABC = 180 - 4\alpha \text{ (по усл. углов р/б } \triangle ABC \text{)}$$

$$\Rightarrow \angle ABE = 180 - 5\alpha$$

$$\angle ABE = \angle ADE = \frac{\angle EAD}{2} = 180 - 5\alpha = \frac{\angle BDE}{2} = 90 - \alpha$$

$$\text{Итак: } 180 - 5\alpha = 90 - \alpha$$

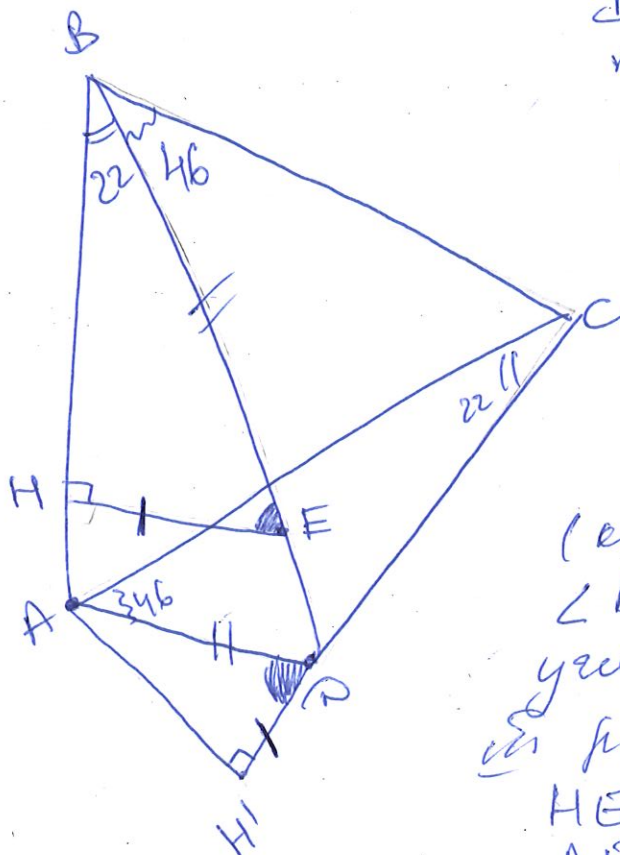
$$90 = 4\alpha \Rightarrow 2\alpha = 45$$



Итак $\angle BAD = \angle BDA = 2\alpha = 45^\circ$ ($\triangle ABC$ равнобедренный)
 $\angle ABC = 180 - 4\alpha = 90^\circ$

Ответ: 45; 90; 45.

НБ.



Так $\angle ABD = \angle ACD (= 22^\circ)$
 по угу, то $ABCD$ – вписанный.

$\Rightarrow \angle DBC = \angle DAC = 46^\circ$

и отложим на продолжении отрезка CD за т. D точку H' : $H'D = HE$

$\angle AHD = 46 + 22 = 68^\circ$

(как внешн. у $\triangle ADC$)

$\angle BEH = 90 - 22 = 68^\circ$ (сумма углов $\triangle BHE$)

и в $\triangle BEH$ и $\triangle AHD$:

$HE = H'D$ (по построению)

$BE = AD$ (по угу)

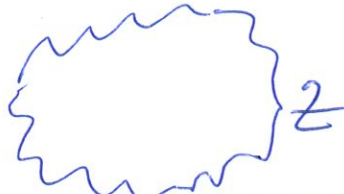
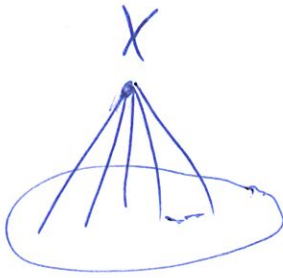
$\angle BEH = \angle AHD = 68^\circ$

$\Rightarrow \triangle BEH \cong \triangle AHD \Rightarrow \angle AH'D = 90^\circ$

т.к. гипотенуза в прямоугольном $\triangle$ больше любого из катетов (т.к. меньше гипотенузы боковой функции)
 $AC > H'D + DC$

$AC > HE + CD$

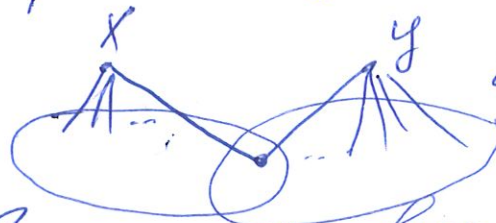
что и требовалось доказать



1. Переведем задачу на язык графов. Пусть вершины — вершины, а ребро проводится между двумя вершинами если соответствует условию задачи.

2. Предположим, что X и Y не являются соседями. Тогда между X и Y нет ребра.

3. Возвращаемся к картинке сверху. Введем эти две вершины X и Y и все вершины, с которыми они соединены. По нашему предположению эти две вершины (соед. с X и соед. с Y) не пересекаются (т.е. никакая вершина не соединена с X и Y одновременно). Тогда X и Y будут соседями.



← несовместно

Назовем Z — множество всех оставшихся вершин. Пусть $|X| = x_0$, $|Y| = y_0$, $|Z| = z_0$. Заметим, что $|Y| + |Z| + 1 \leq 50$ вершина Y .

Действительно, иные, если $1y_1 + 1z_1 + 1 \geq 51$
 можно образовать группу из 52 человек!
~~1) Все вершины из мин-ва y + всего $1y_1 + 1z_1 + 1$
 вершины y + 1 шт.
 Все вершины из мин-ва z + всего $1z_1 + 1z_2 + 1$
 вершины z + 1 шт.
 Все вершины и правда 52, y
 Вдобавок 51 вершину y $y \cup z \cup 1y_1$
 $(y_0 + z_0 + 1 \geq 51)$ и образуем 52-ую:
 вершину x . Но тогда вершина x
 не соединена ни с какой вершиной
 (так все вершины, с которыми она
 соединена находятся в неадаптивной мин-ве x)~~

↓
полагая противоречие с условиями
и с тем, что в обратном 51 участника не
знают $\Rightarrow y_0 + z_0 + 1 \leq 50$.

Ассимптотическое $k_0 + z_0 + t \leq 50$

Рассуждение:

$$(y_0 + z_0 + 1) + (x_0 + z_0 + 1) \leq 100$$

$$x_0 + y_0 + z_0 + 2 + z_0 \leq 100$$

количество всех вершин в графе $\approx 10^4$ узлов

$$\Rightarrow 10t + z_0 \leq 100$$

$\Rightarrow 101 + z_0 \leq 100$
 $z_0 \leq -1$ но $z_0 \in \mathbb{N}$. Противоречие
 $\Rightarrow$ любые два графика не имеют общего знакомого члн.

Код участника: Н9-093

(заполняется организатором)

Н8 (1)

I Покажем, что можно выбрать 10 корзинок так, чтобы между двумя соседними движимыми соседними было 9 других корзин и чтобы сумма стоимостей десяти корзинок ≤ 150 .
 (соседние стоимостные корзинки — это те стоимостные корзинки, у которых есть другие стоимостные корзинки).

А именно: пусть в стоимостном ряду корзин в десяти стоимостных корзинках

 A_1 — двиг. A_2
 A_1
 A_{10}
 A_2
 A_3
 $A_1, \dots, A_{10}$
 $A_1 + \dots + A_{10} \leq 150$

II Если это верно, то задача решена, так пусть тогда

Петя ~~не~~ выбирает группу из 9 корзин и/или каких-то A_i и A_{i+1} (или и/или A_{10} и A_{11})

Тогда Вася всегда будет выбирать A_i или A_{i+1} (или же: A_1 или A_{10}) —

— т.е. какую-то A . $\Rightarrow$ сделав 10 ходов Петя уже не сможет ходить, а сумма стоимостей в корзинках Васе не превзойдет $A_1 + \dots + A_{10} \leq 150$.

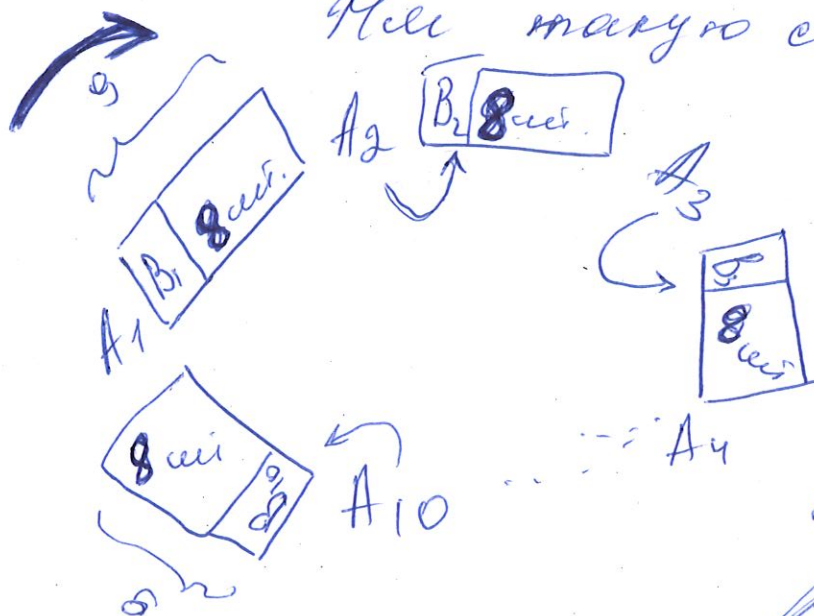
$\Rightarrow$ сумма стоимостей у Пети $\geq 1500 - 150 = 1350$. ~~тогда~~ — То нам нужно было.

Осталось доказать, что при любой начальной расстановке всегда такой набор $A_1, \dots, A_{10}$ существует.

III Предположим обратное: Пусть
о свободный набор H_1 , -- Ато. из то корзин,
для любого набора из то корзины таких,
что для ~~любого~~^{соседней} двудольного раскраски
равно в корзинах (т.е. пусть мы выбрали
вершины X и Y , тогда все обязательно
выполняется следующее:

и/г X и Y - других, неконтейнерных корзин)
верно следующее: $A_1 + \dots + A_{10} \geq 150$,
где A_i - кол-во контейнеров в i -ой корзине.

Нел такую ситуацию,


$$A_1 + \dots + A_{10} = 150$$

Совместим нашу
конфигурацию
из A с A_i по следующей
по часовой стрелке,
где возмем новую
набор, где ~~$A_i = A_i$~~
 ~~$A_i = A_i$~~ (прошлого,
до повтора)
перешли
до повтора

стремке (В), см. календарю). Для
нового набора В условии ее предположение
сохраняется: $V_1 + \dots + V_{10} \approx 150$. Сделаем
эту операцию 9 раз и получим 10 разных
наборов, сумма чисел в каждом ≈ 150 .
Но с другой стороны сумма всех этих 10-и
наборов — то есть сумма всех чисел по кругу

Бланк ответа

Всероссийская олимпиада школьников «Миссия выполнима. Твоё призвание – финансист!»

Код участника: 49-093

(заполняется организатором)

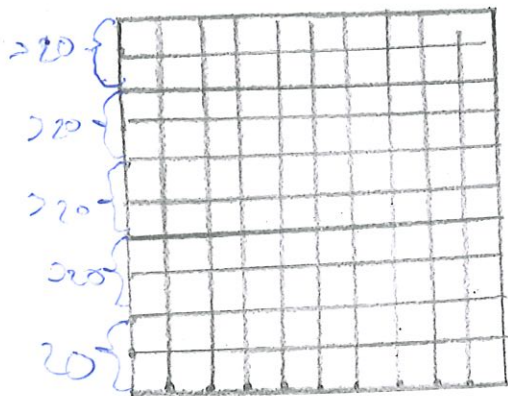
полагается $N8(3)$
~~1500~~ $1500 > 1500$
 $1500 > 1500$

Противоречие. $\Rightarrow$ такой набор

$A_1, \dots, A_{10}$ существует. ($A_1 + \dots + A_{10} \leq 150$)
 и $\exists i$ A_i и A_{i+1} ≥ 1 целые; $\text{цел. } A_i \text{ и } A_{i+1} \text{ больше}$.

27.

III. и в которых два строкам сумма цифр
 больше 20, то всего их $20 \cdot 5 = 100$



Если в каждой строке сумма цифр меньше 10,
 то и сумма цифр во всей таблице меньше
 $10 \cdot 10 = 100$, противоречие.
 Поэтому в какой-то строке сумма цифр
 больше 10

Ответ: обязательно

Код участника: *М9-083*
(заполняется организатором)*н 2*

Пример числа состоящего из
трех:

999 - сумма $27 = 3^3$

1000 - сумма $1 = 1^3$

Ответ: да

н 3

Рассмотрим 3 попарных пар условия
 Мера: $a; b; c$.

условие $a \equiv x \pmod{7}$

но тогда в данном случае справедливо
 $c - x \equiv 0 \pmod{7}$, тогда $a + b \equiv 0 \pmod{7}$

теперь рассмотрим с

тогда $a + c \equiv 0 \pmod{7} \Rightarrow c \equiv -x \pmod{7}$

но тогда $b + c \equiv -2x \pmod{7}$

но по условию $b + c \equiv 0 \pmod{7} \Rightarrow$

$\Rightarrow -2x \equiv 0 \pmod{7} \Rightarrow x \equiv 0 \pmod{7}$

но тогда $a; b; c$ все делится на 7

всего таких чисел на 7 от 1 до 500

равно $\left\lfloor \frac{500}{7} \right\rfloor = 71$

тогда количество способов выбрать 3 числа
 из 71, равно $C_{71}^3 = 57155$

Ответ: 57155

~4

Запомним, что числа положительные
и не могут быть больше 1

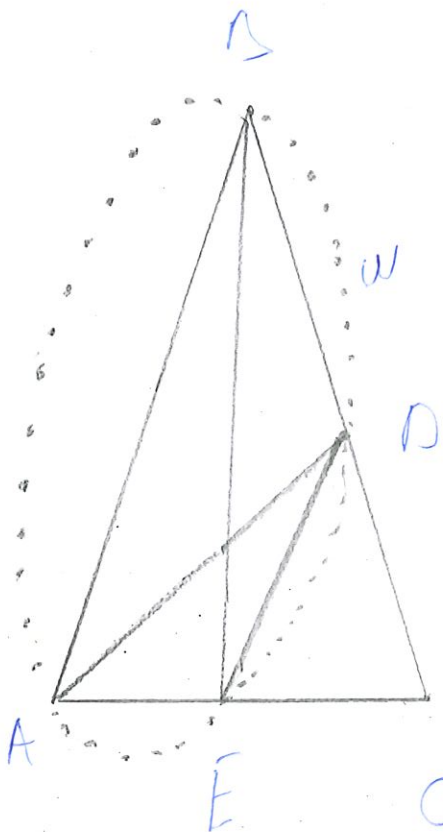
$$a \in (0; 1)$$

$$b \in (0; 1)$$

если число лежит в отрезке от 0 до 1,
то $a > a^2$ и $b > b^2$

когда $a^2 + b < a + b$ и $a + b^2 < a + b$
увеличим знаменатели тем самым
уменьшив сумму дробей.

$$\frac{a}{a+b^2} + \frac{b}{a^2+b} > \frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b} = \frac{a+b}{a+b} = 1, 2 \text{ м.з.}$$

Код участника: 109-080
(заполняется организатором)

~ 6.

Решение:

Пусть $\angle C = \angle A = 2\alpha \Rightarrow$ $\Rightarrow$ тогда $\angle BAD = \angle DAC = \alpha$ (п.к. AD – биссектриса $\angle BAC$)п.к. T.E $\in$ окружности ш, тоАНДЕ – описанный $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} 2) \angle BDE &= 180^\circ - \angle BAC = \\ &= 180^\circ - 2\alpha \end{aligned}$$

$$\angle CDE = 180^\circ - \angle BDE \text{ (как смежные)}$$

$$\angle CDE = 2\alpha$$

$$\triangle CDE: \angle ECD = \angle EDC = 2\alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \triangle CDE \text{ - } \triangle \text{ (б)} \Rightarrow EC = ED$$

$$\angle DBE = \angle DAE = \alpha \text{ (п.к. они опираются на одну дугу)}$$

$$\angle BAD = \angle BED = \alpha \text{ (п.к. они опираются на одну дугу)}$$

предположим на след. шаг

~ 6 (предположение)

$$\angle BED = \angle DFE = \alpha \Rightarrow \triangle BDE - \text{р/б} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow BD = DE$$

$$BD = DE = EC$$

н.к. в $ABDE$ можно выписать окружность $\Rightarrow$

$$\Rightarrow AB + DE = BD + AE$$

но н.к. $DE = DB$, но $AB = AE \Rightarrow$

$$\Rightarrow \triangle ABE - \text{р/б} \Rightarrow \angle AEB = \angle ABE = \frac{180^\circ - 2\alpha}{2} = 90^\circ - \alpha$$

$$\angle ABC = \angle ABE + \angle EBC = 90^\circ - \alpha + \alpha = 90^\circ \Rightarrow \angle A = \angle C = \frac{180^\circ - 90^\circ}{2} = 45^\circ$$

Ответ: $\angle A = \angle C = 45^\circ$; $\angle B = 90^\circ$

~ 7.

Рассмотрим произвольного человека A
 среди 52 человек у него есть хотя
 бы 1 друг.

Будем делать следующую операцию:

возьмем ~~любого~~ 52 человека среди них
 есть хотя бы 1 знакомый A , выберем

одного знакомого A и возьмем группу

участника не состоящую в этой 52 людей

После операции будем $101 - 52 = 49$ (пока

не закончатся новые участники)

После каждой операции мы убираем

1 знакомого а знакомый у A

хотя бы $49 + 1 = 50$ (т.к. ~~50~~ в коллекции

группы из 52 человек у него тоже есть знако-

мый которого мы не убираем)

продолжение на след. стр.

17. /продолжение/

П.а. мы рассмотрим производный,
но у каждого есть знакомство как минимум
50 знакомых

Рассмотрим производным знакомств

В и С:

если они ~~знакомы~~ знакомы между
собой (то этого решения)

Если они не знакомы между собой:

то у В есть 50 знакомых из оставшихся
99 человек (т.е. ~~В~~ не знаком с С)

и у С тоже есть 50 знакомых из
99 человек.

По примеру друзей у них есть
общий знакомый, 2-м.г.

~ 8

Пожалуйста за перфо:

рассеяно когда Ваши Графы 9 по 9
Используя починки с соседями мой кармашек
кармашек, который забрал Вася.
кармашек в который забрал Вася

М. е.

кармашек

кармашек

до 3-го

забрал Вася

кармашек, который
Лена вставляет
в 3-й кармашек
до 3-го

Лена всегда может найти сделку со
своими вторыми кармашками по последнему
м.к. Вася может взять кармашек со своей
стороны с уже забранным м.к.

О [] О
Ваш кармашек
кармашек перед кармашком
Ваш

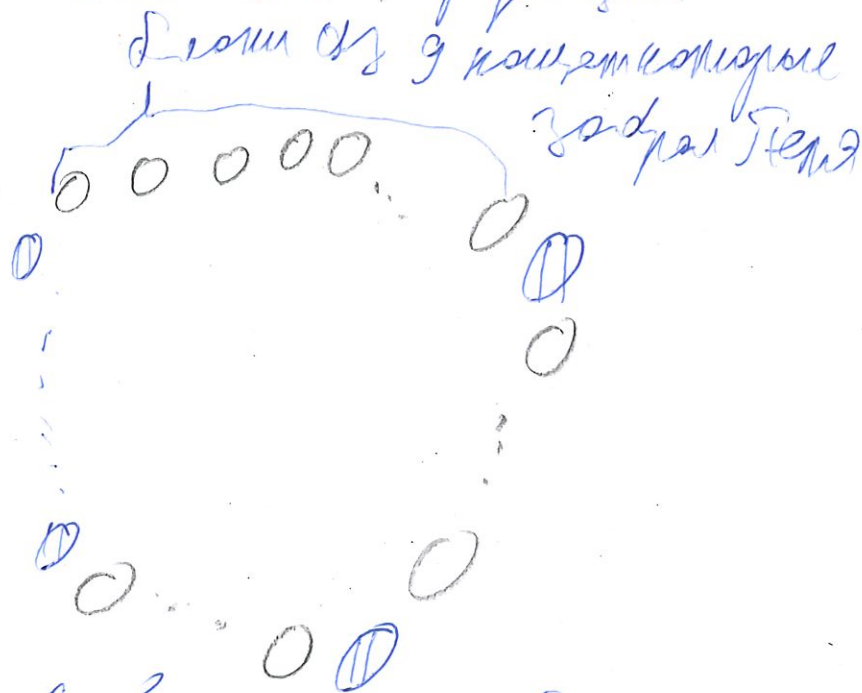
Он может взять
кармашек со своей
стороны с уже
забранным

предложение на ст. ст.

п. 8 (продолжение)

Теперь рассмотрим числа из 12

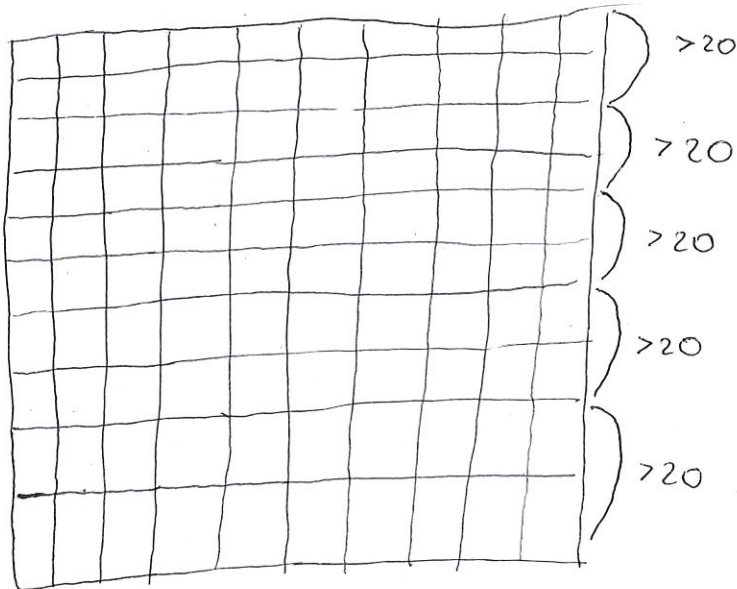
(Мы уже помним как будет выглядеть
классовая конструкция)



т.е. повторяются блок из 9 конструкторных
и одной конструкторной (всего)

Пронумеруем все задания от 1 до 100
завершим в зависимости какой секции
будет иметь номер "левой" задачи,
с которой начал задирать Реня в 1 раз
по модулю 10 будет зависеть результат.
Возьмем секцию X по мод 10 (которые
зачел Реня будет окончательным результатом)

N1



Сумма ^{всех} по строкам $> 20 \cdot 5 = 100$

Предположим, что утверждение „Найдётся столбец, в котором сумма чисел больше 10“ – неверное. Тогда у нас сумма чисел в каждом столбце ≤ 10 .

Сумма ^{всех} по столбцам $\leq 10 \cdot 10 = 100$

Выходит, что суммы по строкам и ~~по~~ по столбцам не совпадают (одно > 100 , другое ≤ 100). А они должны совпадать,

т.к. мы складываем одни и те же 100 действ. чисел $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ противоречие $\Rightarrow$ наше предположение неверно $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ ^{всегда} найдётся столбец, в котором сумма чисел больше 10.

Ответ: обязательно

N2

Натуральные числа 999 и 1000. Они являются последовательными.

Сумма цифр $999 = 27 = 3^3$

Сумма цифр $1000 = 1 = 1^3$

$\rightarrow$ существуют

Ответ: да, существуют.

N3

Если у нас в тройке ^{чисел} есть число, которое $\not\equiv 0 \pmod{7}$, то назовём его первым и пусть первое $\equiv x \pmod{7}$, где x – nat. число, которое < 7 .

Чтобы (первое $\neq$ второе) $\pmod{7}$, нужно второму $\equiv (7-x) \pmod{7}$, т.е. если первое $\equiv 1 \pmod{7}$, то второе $\equiv 6 \pmod{7}$; если первое $\equiv 2 \pmod{7}$, то второе $\equiv 5 \pmod{7}$ и т.д.

Теперь чтобы (первое + третье) $\pmod{7}$, нужно третьему $\equiv (7-x) \pmod{7}$

А чтобы (второе + третье) $\pmod{7}$, нужно третьему $\equiv x \pmod{7}$

$7-x = x \Rightarrow x = 3,5$ Но x может быть только натуральным $\Rightarrow$ противоречие $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ у нас не может быть числа, которое $\neq 0 \pmod{7} \Rightarrow$ нам подойдет в тройку только те числа, которые кратны 7.

Сумма любых двух чисел, кратных 7, будет делиться на 7 без остатка.

Чисел, кратных 7, у нас $497 : 7 = 71$ (497 – наибольшее число ≤ 500 , которое делится на 7).

Нам нужно выбрать тройку ^{чисел} из 71 числа без повторений. Таких вариантов

$$C_{71}^3 = \frac{71!}{68! \cdot 3!} = \frac{71 \cdot 70 \cdot 69}{6} = 57155$$

Ответ: 57155.

$$\begin{aligned} \frac{a}{a+b^2} + \frac{b}{a^2+b} &= \frac{a(a^2+b) + b(a+b^2)}{(a+b^2)(a^2+b)} = \frac{a^3 + ab + ab + b^3}{a^3 + a^2b^2 + ab + b^3} = \\ &= \frac{(a^3 + ab + b^3) + ab}{(a^3 + ab + b^3) + a^2b^2} \end{aligned}$$

Т.к. у нас a и b – положительные, то все слагаемые и в числителе, и в знаменателе > 0 . Остается сравнить ab и a^2b^2 :

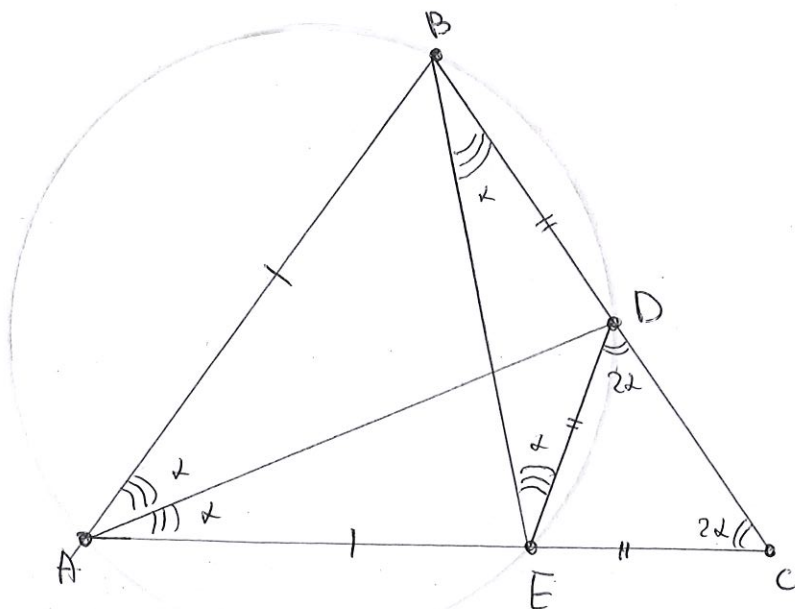
~~Т.к.~~ $a+b=1$ и $a, b \neq 0$ (т.к. положительные) $\Rightarrow a < 1$ и $b < 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow a^2 < a$ и $b^2 < b \Rightarrow a^2b^2 < ab$

Выводит, что у $\frac{a^3 + ab + b^3 + ab}{a^3 + ab + b^3 + a^2b^2}$ числитель и знаменатель положительные и

числитель $>$ знаменателю $\Rightarrow \frac{a^3 + ab + b^3 + ab}{a^3 + ab + b^3 + a^2b^2} > 1 \Leftrightarrow \frac{a}{a+b^2} + \frac{b}{a^2+b} > 1$ и.т.д.

N 6



1. Пусть $\angle BAD = x$, тогда $\angle BAC = 2x$ (т.к. AD - бисс.)
2. $\triangle ABC$ - р/д ($AB = BC$) $\Rightarrow \angle BAC = \angle BCA = 2x$ (углы при основании)
3. $\angle BAD = \angle DAE = x$ | $\Rightarrow \overset{\frown}{BD} = \overset{\frown}{DE}$ (т.к. впис. углы равны) $\Rightarrow BD = ED$
т. A, B, D, E на окружности
4. ABDE впис в окр. (по условию) $\Rightarrow \angle BAE + \angle BDE = 180^\circ$ (по св. впис. 4хугольника) $\Rightarrow$
 $\Rightarrow \angle BDE = 180^\circ - \angle BAE = 180^\circ - 2x$
5. $\angle BDE$ и $\angle EDC$ - смежные $\Rightarrow \angle EDC = 180^\circ - \angle BDE = 2x$
6. $\angle EDC = \angle ECD = 2x \Rightarrow \triangle EDC$ - р/д $\Rightarrow DE = EC$ (доказанные стороны)
7. $\angle EBD$ и $\angle BED$ - впис. | $\Rightarrow \angle EBD = \angle BED \Rightarrow \triangle BDE$ - р/д $\Rightarrow BD = ED$ (доказано ст.)
 $\overset{\frown}{BD} = \overset{\frown}{BD}$ (по доказ.)
8. $\triangle BDE$ - р/д с основанием BE $\Rightarrow \angle BED = \frac{180^\circ - \angle BDE}{2} = \frac{2x}{2} = x$
9. в ABDE можно вписать окружность (по усл.) $\Rightarrow AB + ED = BD + AE$
 $AB + \overset{\frown}{ED} = BD + AE$
 $AB = AE \Rightarrow \triangle ABE$ - р/д с основанием AE
 $\Rightarrow \angle AEB = \frac{180^\circ - \angle BAE}{2} = \frac{180^\circ - 2x}{2} = 90^\circ - x$

10. $\angle DEC = 180^\circ - \angle AEB - \angle BED = 180^\circ - 90^\circ + 2 - 2 = 90^\circ$

11. ~~Решение~~ $\triangle EDC$ - p/s (по доказ.) $\Rightarrow 2\alpha = \angle ECD = \frac{180^\circ - 90^\circ}{2} = 45^\circ =$

$= \angle BCA$

12. $\angle BAC = \angle BCA = 45^\circ$

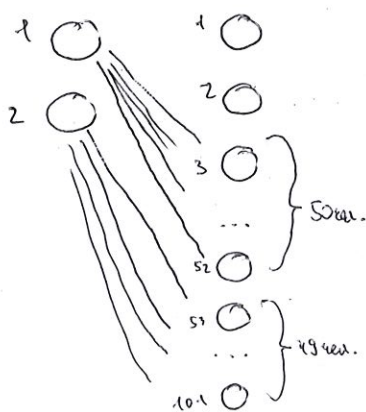
13. $\angle ABC = 180^\circ - \angle BAC - \angle BCA = 180^\circ - 45^\circ - 2 = 90^\circ$

Ответ: $\angle ABC = 90^\circ$, $\angle BAC = 45^\circ$, $\angle BCA = 45^\circ$.

N7

У каждого человека должно быть хотя бы 50 знакомых, потому что, кроме него, на совет приходит еще 51 человек из 100 остальных. Если у него будет 49 или менее знакомых, то будет 51 или более незнакомых. А если у него хотя бы 51 ~~не~~ знакомый, то может произойти ситуация, что придет на совет он и 51 незнакомый — это противоречит условию задачи.

Рассмотрим человека $N1$ и $N2$, которые не дружат и не имеют общего знакомого.



~~Человек~~ Человек $N1$ не может быть знаком с собой и со вторым. Пусть он знаком с $N3 - N52$ (50 человек).

Теперь рассмотрим человека $N2$ он не может быть знаком с собой и $N1$, а также с $N3 - N52$ (т.к. с ними уже ~~был~~ знаком $N1$). Выходит, что он может быть знаком только с $N53 - N101$. Это 49 человек — противоречие (т.к. мы уже доказали, что должно быть хотя бы 50 знакомых). Получается, что ему нужно либо быть знакомым с знакомым первого, либо быть знакомым с самим первым. Таким образом, у ^{людей} ~~людей~~ всегда будет ~~быть~~ общий знакомый, либо они знакомы между собой (иначе одному из них не хватит людей до 50 знакомых)

и.т.д.

N 8

Заметим, что Вася берёт конфеты именно рядом с пустой корзинкой.

Поэтому после первого хода Пети у Васи будет всего ~~две корзинки~~ две корзинки, откуда он может взять конфеты.

Всего будет сделано $100 : (9 + 1) = 10$ ходов каждым.

Пете надо будет не дать взять Васе более $1500 - 1350 = 150$ конфет за 10 ходов $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ в среднем — не более 15 конфет за ход.

В корзинках у нас также в среднем $1500 / 100 = 15$ конфет.

Поэтому основная задача Пети — это "подскакивать" Васе корзинки

с ~~маленьким~~ количеством конфет не более среднего.



Если у нас будет во всех корзинках по 15 конфет, то Петя ~~всегда~~ заберёт 1350 конфет независимо от своей игры.

Если будет разное кол-во конфет в корзинках, то первым ходом надо будет подставить Пете 2 корзинки с маленьким кол-вом конфет как на Рис. Далее по такой же схеме.

Код участника:

(заполняется организатором)

МГ-080

Задание
№ 4

$$a > 0 \text{ и } b > 0, a + b = 1$$

$$\frac{a^2}{1+b} + \frac{b^2}{1+a} \stackrel{?}{<} 1 \quad | \cdot (1+b)(1+a), \quad \begin{array}{l} 1+b > 0, \text{ т.к. } b > 0, \text{ то} \\ \text{если } 1+b \neq 0 \\ 1+a > 0, \text{ т.к. } a > 0, \\ \text{то если } 1+a \neq 0 \end{array}$$

$$a^2(1+a) + b^2(1+b) \stackrel{?}{<} (1+b)(1+a)$$

$$a^2 + a^3 + b^2 + b^3 \stackrel{?}{<} 1 + a + b + ab$$

$$a^2 + b^2 + (a+b)(a^2 - ab + b^2) \stackrel{?}{<} 1 + ab + a + b$$

т.к. $a + b = 1$, подставим и получим:

$$a^2 + b^2 + a^2 - ab + b^2 \stackrel{?}{<} 2 + ab$$

$$2a^2 - 2ab + 2b^2 \stackrel{?}{<} 2 \quad | :2$$

$$a^2 + b^2 - ab < 1$$

Рассмотрим $a + b = 1$, т.к. $1 > 0$ и $a + b > 0$ и $a > 0$ и $b > 0$

$$(a+b)^2 = 1^2$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = 1$$

$$a^2 + b^2 = 1 - 2ab$$

Подставим:

$$1 - 2ab - ab \stackrel{?}{<} 1$$

$$-3ab < 0 \quad - \text{верно, т.к. } a > 0 \text{ и } b > 0 \Rightarrow -3ab < 0 \Rightarrow$$

Значит $\frac{a^2}{1+b} + \frac{b^2}{1+a} < 1$ - Верно.

ч. т. д.

Задание № 1

Пронумеруем все строки снизу вверх от 1 до 12 и рассмотрим 6 пар строк: 1-ую и 2-ую; 3-ю и 4-ую; 5-ую и 6-ую; 7-ую и 8-ую; 9-ую и 10-ую; 11-ую и 12-ую. Т.к. в каждой паре сумма чисел > 16 , то сумма всех чисел в таблице больше 16,6, то есть больше 36.

Допустим нет столбцов, в которых сумма чисел больше 8, то есть во всех двенадцати столбцах сумма чисел ^{или равна} меньше 8, тогда сумма чисел во всей таблице ^{или равна} меньше 8 · 12, то есть ^{или равна} меньше 36 - ?!

Значит обязательно найдётся столбец, где в котором сумма чисел больше 8. противоречие,
 Ответ: обязательно найдётся.

Код участника:

(заполняется организатором)

119-080

Задача №2

П.к. числа последовательные, то они дают разные остатки по mod 3 и суммы их цифр тоже. Увеличив квадрат по mod 3 даёт остаток или 0 или 2, т.к. квадрат натурального числа даёт остаток 0 или 1 по mod 3, то есть нам нужно, чтобы два последовательных числа давали по mod 3 ост. 0 и 0, ост. 0 и 2, ост. 2 и 2, но

П.к. они последовательные, то не могут давать одинаковые остатки, знаем единственный вариант, что если одно из них даёт ост. 2, а следующее ост. 0, соответственно сумма цифр одно 2, а другое даёт ост. 2, а другое 0, но тогда их суммы разнятся чётностью, а значит не могут быть одновременно чётными, а $2n^2$ - чётно $\Rightarrow$ не существуют.

Ответ: не существуют.

Код участника:

(заполняется организатором)

М 9-080

Задача №3

Пусть наши 3 числа a, b и c , тогда:

$$\left. \begin{array}{l} a+b \equiv 0 \\ b+c \equiv 0 \\ a+c \equiv 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a+b \equiv a+c \Rightarrow b \equiv c \\ b+c \equiv a+c \Rightarrow b \equiv a \end{array} \right\} \Rightarrow a \equiv b \equiv c$$

Значит, нам нужно брать такие числа, что остатки по модулю 11 были равны друг другу и при этом сумма этих остатков равна 11 (0) по модулю 11. Т.к. 11 не простое 3, то мы должны брать три числа, которые кратны 11, то есть равны ост. 0 по модулю 11 и при этом различны.

Т.к. числа от 1 до 1000 кратные 11, то 11, 22, 33, 44, ..., 990, то их всего $\frac{990}{11} = 90$, то есть чисел кратных 11 всего 90. Значит, 1-ое число мы можем выбрать любое из 90, 2-ое любое из 89, 3-е любое из 88 и т.д. нам не важно какое из них 1-ое, 2-ое, 3-е, то кол-во способов выбрать при разном числе так, чтобы сумма любых двух из них делилась на 11 равно $\frac{90 \cdot 89 \cdot 88}{3!} = \frac{90 \cdot 89 \cdot 88}{6} = 114480$.

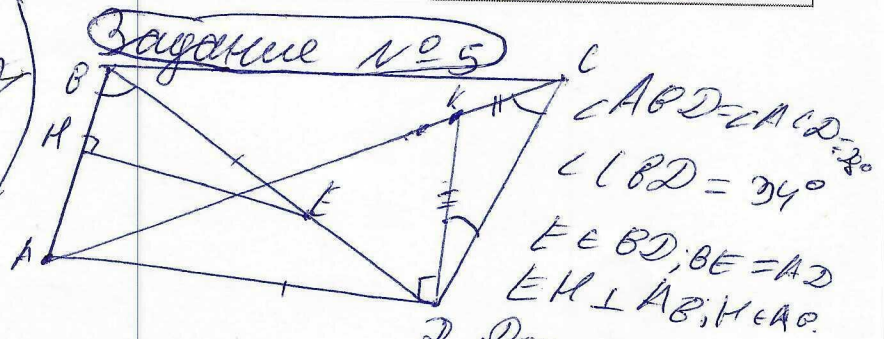
Ответ: 114 480 способов.

Код участника:

(заполняется организатором)

119-080

Задача №5

Доказать:
 $AC > EH + CD$ 1) П.к. $\angle ABD = \angle ECH = 28^\circ$ и т.к.sin при уменьшении угла от 45° до 90° , стремится к 0, тот.к. $\sin 30^\circ = 0,5 \Rightarrow \sin 28^\circ < 0,5 \Rightarrow \frac{1}{2} BE > EH \Rightarrow$ т.к. $BE = AD \Rightarrow \frac{1}{2} AD > EH$ 2) $\angle B = \angle CBD + \angle ABD = 28^\circ + 34^\circ = 62^\circ$ П.к. $\angle ABD = \angle ACD \Rightarrow$ по признаку вписанногочетырёхугольника (если углы образованные диагоналями и боковыми сторонами равны, то четырёхугольник вписанный) $\Rightarrow$
ABCD - вписанный четырёхугольник $\Rightarrow \angle D = 180^\circ - \angle B = 180^\circ - 62^\circ = 118^\circ$.3) Отметим на AC такую точку K, что $\angle ADK = 90^\circ$, тогда $\angle CDK = 118^\circ$, $\angle ADK = 90^\circ$, $\angle ADC = 118^\circ - 90^\circ = 28^\circ$ и т.к. $\angle ACD = 28^\circ \Rightarrow$
 $(\angle K = \angle D) \Rightarrow \angle CDK = \angle ADC \Rightarrow CK = DK$ и т.к. по кат.-в. $\Rightarrow CD < CK + DK$,
то $CD < 2CK \Rightarrow CK > \frac{CD}{2}$, т.к. PK - диаметрв $\odot ADK \Rightarrow PK > AD \Rightarrow AK + CK > AD \Rightarrow$ $\frac{1}{2} PK > EH$ и т.к. $CK > \frac{CD}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} AK + CK > EH + \frac{CD}{2} \cdot 2 \Rightarrow$ $AK + 2CK > 2EH + CD \Rightarrow AC + CK > 2EH + CD$ и т.к.
 $CK > \frac{CD}{2}$ и т.к. $CD > AD$ (т.к. $\angle CAD = 34^\circ$ из вписанности четырёх-
угольника, а $\angle ACD = 28^\circ$), то значит

Код участника:

(заполняется организатором)

М9-080

$$CK > \frac{CD}{2} \quad \text{и} \quad CD > 2EH$$

$$2CK > CD \Rightarrow 2CK > 2EH$$

$$CK > EH \Rightarrow$$

$$AC + CK > 2EH + CD \quad \text{и т.к.} \quad CK > EH, \quad \text{то}$$

$$AC > EH + CD$$

и.т.д.

Задача №8

Пусть Петя (возмозно) перевернет корзины (не важно (какой) и если 1-ые корзин заберёт конкретные из 4 подрав идущих корзинок, тогда Вася заберёт конкретные из второй из корзинок идущих, если ~~идёт~~ против часовой от этих корзинок, то (Вася) Петя берёт свои ног тоже против часовой и берёт следующие 4 корзины, если по часовой Вася берёт, но и Петя тоже. Таким образом за раз Вася и Петя опустошают 5 корзинок, значит и Петя опустошает 4 из них, значит он ~~опустошит~~ опустошит 160 корзинок. Допустим в этих 160 корзинах не было 1600 конфет, что означает, что хотя бы в одной из них было ^{по крайней мере} 16 конфет и хотя бы в одной из тех, которые заберёт Вася было больше 10 конфет. Тогда ^{Петя} Вася может начать собирать как раз с той корзины, в которой больше конфет, собирая снова так получилось, что он не собрал 1600 конфет, но это значит что

Код участника:

(заполняется организатором)

И 9-080

~~Вот мы снова~~ поехали он собрал все конкурсы, которые собрал Валя в прошлом году, и как он получил ^{min} 401 конкурс, и если Валя снова собрал 401 конкурс, то переведем Петю в 1-й ход так, чтобы он собрал все Ваши конкурсы за последние случаи, таким образом это точно получится сделать, т.к. если рассмотреть каждую пятёрку ходов, то т.к. Валя собрал 1000 конкурсов из них и Петя 1-й не перейдя, то убрав на свой 1-й Петя не может так собрать все конкурсы Васи и допустить сбыва так зрела, Петя всё равно не собрал 1600 конкурсов, то теперь сбыва ещё на свой он и собрал, т.к. с каждым сбыва он получает ^{min} 400 гарантированных конкурсов собрав Валя 80 этого, то после 4-го сбыва он минимум собрал 1600 конкурсов, таким образом, а Петя гарантированно может забрать хотя бы 1600 конкурсов.

Задача № 4

Пусть те, кто приходят на секретное собрание будут учредителями, в котором и 3 вершины. Рассмотрим случай, когда в графе 22 ребра соединены только 2 вершины и никакие другие, и ² ребра соединены.

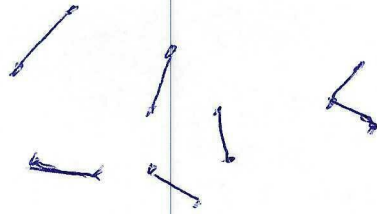
Код участника:

(заполняется организатором)

119-080

в вершинке;

фрагмент графа:



Тогда если на собрание придут те же люди, но только один из них поменяется, причём не придёт тот, с кем у конкурсной соед. 2 другие вершинки, тогда автоматически он не будет обсуждаться и если произойдёт что-то таких собраний, то уже из человека будут или знакомки или иметь общего знакомого, аналогично если мы проводим то что собрания для конкурсной другой пары, то у нас все будут или знакомки или иметь общего знакомого. Если у нашего клуба больше знакомых, то есть общих людей, то можно точно так же провести то что собрания для каждой двойки или тройки и они будут знакомки или иметь общего знакомого, даже если у нас клуб выглядит как-то так.



то мы всё равно точно проводим собрания для каждой тройки ^{двойки} ~~разной~~ ^{разной} пар и получая новый. Допустим получим так, что кто-то (какой-то) не знаком и не имеет общего знакомого, но тогда т.к. конкурсной или знакомой во всем или имеет общего знакомого, то ~~то~~ ^{то} и при этом тот кто не знаком именно (этот), должен быть знаком с другими, но не с этими. А т.к. тогда получим так, что он будет иметь общего знакомого с теми с кем не имеет.

Код участника:

(заполняется организатором)

М 9 - 080

$$\text{т.к. } \angle FCA = \angle CAF \Rightarrow \angle CFM = 90^\circ - \angle CAF$$

$$\text{т.к. } \angle FCA \approx \angle FCB \Rightarrow \angle FCB \approx 90^\circ - \angle CAF$$

$$\angle CBF \approx 90^\circ - \angle CAF \Rightarrow \angle CFM = \angle CBF$$

$$\angle BFG = \angle CAF \text{ и т.д.}$$

т.к. $\angle CFM = \angle CAF$, т.к. углы при пересечении
 двух прямых $\Rightarrow \angle CAF = \angle CBA \Rightarrow$

$$\text{т.к. } \angle CAF + \angle CBA = 90^\circ \Rightarrow \angle CAF = \angle CBA = 45^\circ$$

Ответ: 45°

Пусть: $a_{i,j}$ - число в i -й строке и j -м столбце.

$S_i = \sum_{j=1}^{12} a_{i,j}$ - сумма чисел в i -й строке.

$C_j = \sum_{i=1}^{12} a_{i,j}$ - сумма чисел в j -м столбце.

Дано: $S_i + S_k > 16$, для любых строк i и k .
 $\rightarrow C_j > 8$

Предположим, что для всех столбцов j , $C_j \leq 8$

Тогда сумма всех чисел в таблице:

$$\sum_{i=1}^{12} S_i = \sum_{j=1}^{12} C_j \leq 12 \cdot 8 = 96$$

Сумма всех пар строк:

$$\sum_{1 \leq i < k \leq 12} (S_i + S_k) = 11 \sum_{i=1}^{12} S_i$$

Получим так $S_i + S_k > 16$ и всего пар строк $\binom{12}{2} = 66$,
 поэтому:

$$11 \sum_{i=1}^{12} S_i > 66 \cdot 16 = 1056 \Rightarrow \sum_{i=1}^{12} S_i > \frac{1056}{11} = 96$$

Получаем противоречие:

$\sum_{i=1}^{12} S_i \leq 96$ и $\sum_{i=1}^{12} S_i > 96 \Rightarrow$ Наше предположение неверно, значит существует хотя бы один столбец j , для которого $C_j > 8$

Ответ: Всегда найдётся столбец, в котором сумма чисел больше 8.

Код участника:

(заполняется организатором)

МГ-121

№4

$$\frac{a^2}{1+b} + \frac{b^2}{1+a} < 1 \quad \text{Умножим на } a+b, \text{ тогда} \\ \text{(пределяем знаменатели):}$$

$$\frac{a^2}{2b+a} + \frac{b^2}{2a+b} < a+b$$

$$\frac{a^2}{2b+a} - a + \frac{b^2}{2a+b} - b < 0$$

$$\frac{a^2 - 2ab - a^2}{2b+a} + \frac{b^2 - 2ab - b^2}{2a+b} < 0 \quad \text{Сократим:}$$

$$\frac{-2ab}{2b+a} + \frac{-2ab}{2a+b} < 0 \quad \text{мы видим, что левая} \\ \text{часть меньше } < 0, \text{ т.е.}$$

Ответ: Я доказал, что $\frac{a^2}{1+b} + \frac{b^2}{1+a} < 1$.

№3

Каждое число n от 1 до 1000 можно представить в виде: $n = 11k + r$ $r \in \{0, 1, 2, \dots, 10\}$

Для трёх чисел a, b, c с остатками r_a, r_b, r_c

$$\begin{aligned} a+b &\equiv 0 \pmod{11} \Rightarrow r_a + r_b \equiv 0 \pmod{11} \\ a+c &\equiv 0 \pmod{11} \Rightarrow r_a + r_c \equiv 0 \pmod{11} \\ b+c &\equiv 0 \pmod{11} \Rightarrow r_b + r_c \equiv 0 \pmod{11} \end{aligned} \quad \Bigg| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r_a = r_b = r_c \quad r_a + r_b = 2r_a \equiv 0 \pmod{11} \Rightarrow 2r_a \equiv 0 \pmod{11}$$

$\Rightarrow r_a \equiv 0 \pmod{11} \Rightarrow$ Единственный возможный остаток — это когда все три числа имеют остаток 0 при делении на 11.

$$\text{Количество чисел} = \left\lfloor \frac{1000}{11} \right\rfloor = 90$$

$$\text{Количество троек: } C(90, 3) = \frac{90 \cdot 89 \cdot 88}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 117480$$

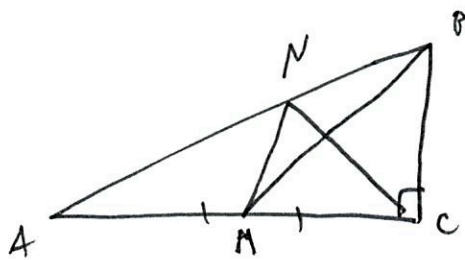
Ответ: Существует 117480 троек.

Код участника:

(заполняется организатором)

149-121

№ 6



Дано: $\angle BAC = \alpha$ $\alpha + \beta = 90^\circ$
 $\angle ABC = \beta$ $AM = MC$

Искать: острый $\angle AOC$

Решение:

Угол отражения от стороны AB, угол падения равен углу отражения.

Когда шар попадает в точку M, он отразится симметрично линии CM. Значит, $\angle$ между направлением движения шара и AC равен α .

Из 1) N - в точку C. Значит $\angle$ направления после удара с нормалью равен α .

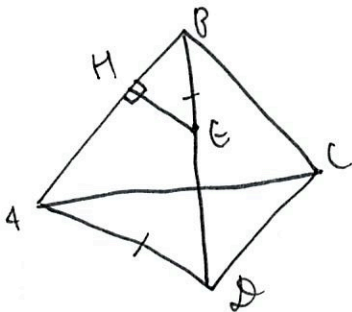
Чтобы удовлетворить закону света и условию задачи, углы должны быть равными $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \alpha + \beta = 90^\circ$$

$$\alpha = \beta = 45^\circ$$

Ответ: $\alpha = \beta = 45^\circ$

№ 5



Дано: $\angle ADE = \angle ACD = 28^\circ$
 $\angle CBD = 34^\circ$
 $BE = AD$ EH - выс.

Дано-то:

$$AC > EH + CD$$

Дано-то:

$$1) \angle BDE = \angle BAE \Rightarrow \triangle ADE \sim \triangle ADB \text{ (по 2c)} \Rightarrow$$

$$2) \angle EDB = \angle DBA \text{ м.к. } \angle ADB = 180^\circ -$$

$$\Rightarrow \frac{EH}{AD} = \cos(\angle ADB) - (\angle ADB + \angle CBD) =$$

$$= 180^\circ - (28 + 34) = 118^\circ, \text{ то}$$

$$\cos(\angle ADB) = \cos(62^\circ) \Rightarrow EH = AD \cdot \cos(62^\circ)$$

Код участника:

(заполняется организатором)

119-121

Тема ¹⁸должна максимизировать количество взятых конфет, минимизируя возможность Васьи.

Тема может сделать до $\frac{200}{4} = 50$ заказов, однако может мешать Васьи.

Тема должна стараться оставлять парзюки как, чтобы ост. парзючки (соедине) были запарены.

Если Тема берёт 4 парзючки за заказ, и всего 1000 конфет, то в среднем на 1 пар. – 10 конфет.

Вася сможет забрать конфет $\frac{100}{5} = 40$ заказов $\Rightarrow$
 $\Rightarrow 40 \cdot 10 = 400$ конфет; Все остальные 1600 конфет со 100% вероятностью заберёт Тема. К.М.В.

12
 x и $x+1$ – два посл. числа
 Если в конце числа не цифра 9, то сумма цифр увелич. на 1. Если K заканчивается на 1 или две 9, то происходит "перенос"

Пусть: $x = 2m^2$ $x+1 = 2n^2$, тогда разность = 1.
 мы имеем: $2m^2 = 2n^2 = \text{разность цифр}$

$m^2 = n^2 = \frac{\text{р.с.у.}}{2}$
 Разность цифр может быть 1 или $<$, то:
 $m^2 = n^2 = \frac{1}{2}$ или $m^2 = n^2 = \frac{0}{2} = 0$

Если $m = n$, то с.у. x и $x+1$ должна быть одинаковой, однако при переходе идёт либо +1, либо -1 таким образом невозможно, чтобы сумма цифр двух последовательных чисел была равна

Код участника:

(заполняется организатором)

M9-121

$\triangle ABC$ по теореме Пифагора:
 $\angle ACB = 90^\circ \Rightarrow AC^2 = AB^2 + BC^2$, но мы знаем $AB = BE$,
 поэтому:

$$AC^2 = BE^2 + BC^2$$

Тогда ставим:

$$AC^2 > (BE \cdot \cos(62^\circ))^2 + BC^2$$

поскольку $\cos(62^\circ) < 1$, то $(BE \cdot \cos(62^\circ))^2 < BE^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Значит, $AC^2 > BE^2 + BC^2$, этого будет достаточно

$$\Rightarrow AC > BE + BC$$

Рассмотрим подмножество из 4 вершин.

Пусть $N(A)$ - множество знакомых A

$N(B)$ - множество знакомых B .

Утверждаем: $N(A) \cap N(B) = \emptyset$

$$A \in N(B) \text{ и } B \in N(A)$$

Рассмотрим:

$$|N(A)| + |N(B)| + 2 \leq 83,$$

отсюда:

$$|N(A)| + |N(B)| \geq 41$$

В любом подмножестве из 4 вершин, каждая вершина должна быть соединена с одной другой.

Если A и B не имеют общего знакомого, то в подмножестве, включающем A ,

и их знакомого, A и B не будут соединены с другими вершинами, что противоречит условию. Наше предположение неверно, значит любые два участника либо знакомы, либо имеют общего знакомого.

№1.

Пусть $S_1, S_2, \dots, S_{12}$ — суммы чисел в строках, тогда сумма всех чисел (S):

$$S = (S_1 + S_2) \cdot 16 + (S_3 + S_4) \cdot 16 + (S_5 + S_6) \cdot 16 + (S_7 + S_8) \cdot 16 + (S_9 + S_{10}) \cdot 16 + (S_{11} + S_{12}) \cdot 16 > 6 \cdot 16 = 96$$

Пусть во всех столбцах сумма чисел не больше 8, тогда сумма всех чисел (S):

$$S \leq 12 \cdot 8 = 96 \Rightarrow 96 < S < 96 \Rightarrow S > 96 —$$

противоречие $\Rightarrow$ обязательно найдется столбец, в котором сумма чисел больше 8

№2.

Пример:

$$1) \underbrace{7 \dots 7}_{64} \mid \underbrace{9 \dots 9}_7, \text{ сумма цифр } (S_1):$$

$$S_1 = 7 \cdot 64 + 1 \cdot 7 \cdot 9 = 512 = 2 \cdot 16^2$$

$$2) \underbrace{7 \dots 7}_{64} \mid 2 \underbrace{0 \dots 0}_7, \text{ сумма цифр } (S_2):$$

$$S_2 = 7 \cdot 64 + 2 = 450 = 2 \cdot 15^2$$

№3.

Пусть мы выбрали a, b, c , тогда:

$$\left. \begin{array}{l} a+b : 11 \\ b+c : 11 \\ a+c : 11 \end{array} \right\} \Rightarrow 2(a+b+c) : 11, \text{ т.к. } 11 \nmid 2, \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a+b+c : 11, \text{ т.к. } a+b : 11 \Rightarrow c : 11, \text{ т.к. } b+c : 11 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b : 11, \text{ т.к. } a+b : 11 \Rightarrow a : 11 \Rightarrow \text{ все выбранные}$$

$$\text{числа} : 11$$

итог 1 из 5

Всего чисел : 11 на данной промежутке $-90 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ способов выбрать из них 3 числа :

$$C_{90}^3 = \frac{90!}{87! \cdot 3!} = \frac{90 \cdot 89 \cdot 88}{3 \cdot 2} = 117480$$

Ответ: 117480 способов

N4.

Дл. к. $a, b > 0 \Rightarrow a, b < 1 \Rightarrow a^2 < 1, b^2 < 1$

$$\frac{a+k}{b+k} - \frac{a}{b} = \frac{ab+bk-ab-ak}{(b+k)b} = \frac{k(b-a)}{(b+k)b} > 0 \Rightarrow \frac{a+k}{b+k} > \frac{a}{b}$$

$b > a; a, b, k > 0$

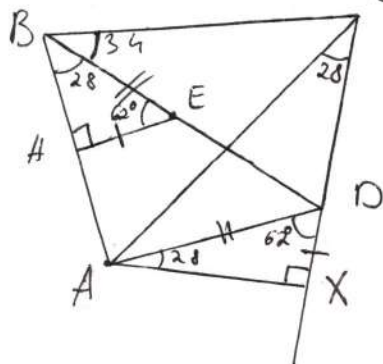
делаем тоже самое с нашим гробиком:

$$\frac{a^2}{1+b} = \frac{a^2}{a+b+b} < \frac{a^2+a}{2a+2b}$$

$$\frac{b^2}{1+a} = \frac{b^2}{a+b+a} < \frac{b^2+b}{2a+2b}$$

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{1+b} + \frac{b^2}{1+a} &< \frac{a^2+b^2+a+b}{2(a+b)} = \frac{(a+b)^2 - 2ab + (a+b)}{2(a+b)} = \\ &= \frac{1 - 2ab + 1}{2} = \frac{2 - 2ab}{2} = 1 - ab < 1, \text{ т.к. } a, b > 0 \Rightarrow ab > 0 \end{aligned}$$

N5.



С ABCD – вписанный, т.к.

$\angle ABD = \angle ACD$ и они опираются на один отрезок.

Д.к. $AX \perp CD; X \in CD$ (прямой)

$$\angle ADX = 28^\circ + 34^\circ = 62^\circ; \angle DAX = 180 - 90 - 62 = 28^\circ$$

$$\angle BEH = 180 - 90 - 28 = 62^\circ$$

$\triangle BEH \cong \triangle ADX$ (по 2 углам и стороне между ними) $\Rightarrow$

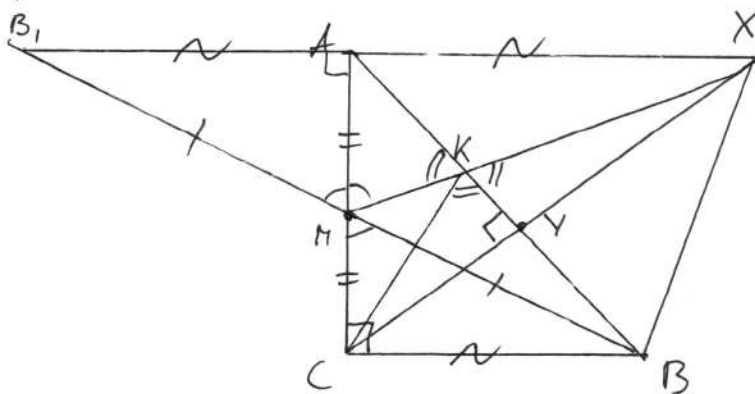
$$\Rightarrow DX = HE$$

Рассмотрим $\triangle ACX$:

AC – гипотенуза $\Rightarrow AC > CX$

$AC > CX \Rightarrow CD + DX = \cancel{CD} + HE$

№ 6.



$\angle BMC = \angle KMA$

$\angle MKA = \angle CKB$, т.к. шар
отмечает по тем же углам, что
и трилиней

Д.Д.Д.

Удвоим BM за точку M ,

$BM = B_1M$

$\angle BMC = \angle B_1MA$ (вертикальные) $\Rightarrow \angle B_1MA = \angle AMK$

B_1ABC – параллелограмм (по признаку) $\Rightarrow \angle ACB = \angle CAB_1$ (накрест
лежащие) $\Rightarrow \angle CAB_1 = 90^\circ$; MA – биссектриса и высота $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ продолжим MK до пересечения с B_1A и
получим $\triangle$ (по признаку) $\Rightarrow \angle B_1MX$ – $\triangle$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow B_1A = AX \Rightarrow AX = \underbrace{BC = B_1A}_{\text{по св. паралл.}}; \text{ т.к. } \underbrace{AX \parallel BC}_{\text{по отв. паралл.}}$ и

$AX = BC$ и $\angle ACB = 90^\circ \Rightarrow AXBC$ – прямоугольник

$\angle AKM = \angle XKB$ (вертикальные) $\Rightarrow \angle XKB = \angle CKB$

Проведем CX ; $AB \cap CX = Y$; т.к. в прямоугольнике
диагонали делятся их точкой пересечения пополам $\Rightarrow$

$\Rightarrow CY = XY \Rightarrow KY$ – биссектриса и медиана $\Rightarrow$

$\Rightarrow KY$ – высота $\Rightarrow \angle KYC = 90^\circ \Rightarrow$

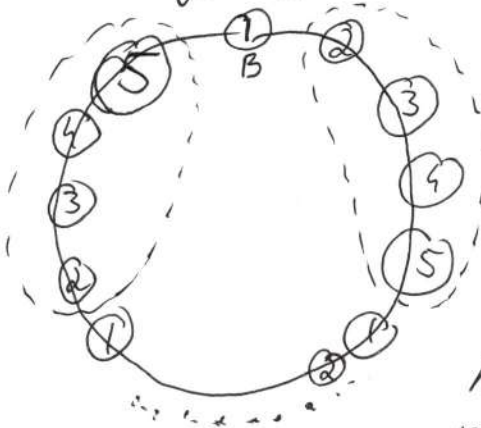
$AXBC$ – квадрат (по свойству: прямоугольник,
у которого диагонали пересекаются под углом 90°)

$\angle CAB = \angle CBA = 45^\circ$ ($BC = AC$, $\angle ACB = 90^\circ$)

Ответ: $\angle CAB = \angle CBA = 45^\circ$

№8

Раскрасили корзинки по порядку
в пять дв. цветов:



т.к. $200 : 5$, то
групп по 5 корзин
будет целым количеством,
т.е. круг замкнется,
как показано на
рисунке

Пусть Петя знает, кол-во конфет
в корзинах каждого цвета. Тогда Петя
должен выбрать цвет, у которого
в корзинах меньше кол-во конфет

Не учитывая общности рассуждений (т.к. круг
замкнут, т.е. для каждого цвета картинка
симметрична) пусть минимальное кол-во
конфет будет у 1 цвета, тогда у этого цвета
 ≤ 400 конфет, т.к. если больше 400, то
сумма будет больше 2000 конфет ($5 > 1; 4 > 1; 3 > 1; 2 > 1; \Rightarrow$
 $\Rightarrow 5 + 4 + 3 + 2 + 1 > 5 \cdot (1) > 5 \cdot 400 = 2000$). Петя нужно будет
брать группы из корзин цветов 2, 3, 4, 5 (показано
пунктиром), т.е. все корзинки 1 цвета (минимального)
будут у Васи, т.к. группы 2, 3, 4, 5 окружают
две корзинки 1 цвета* $\Rightarrow$ Значит Вася заберет
 ≤ 400 конфет $\Rightarrow$ Петя заберет ≥ 1600 конфет
* и Вася может брать конфеты из коробок, ч.т.д.
которые рядом с пустыми, (в это время 2 цвета)
т.е. будет брать коробки 1 цвета лист 4 из 5

17.

Пусть у любого человека меньше 41 знакомого $\Rightarrow$
 $\Rightarrow$ мы можем выбрать 43 участника, у одного
 из которых не будет ни одного знакомого (т.к.
 его знакомые не выбраны, т.к. их < 41) $\Rightarrow$
 $\Rightarrow$ у любого человека минимум 41 знакомый

Поставим в группу из 43 человек (собрание)
 одного человека (человека Y), его 41 знакомый и
 одного незнакомого (человека X). т.к.
 сказано, что у человека X хотя бы 1
 знакомый, то значит X знаком
 с знакомым человека Y, т.е. у человека
 X и человек Y имеют общего знакомого
 Аналогично предположим с остальными
 участниками. В итоге получим, что
 любые два либо знакомы, либо имеют
 общего знакомого

18. (продолжение) (стратегия)

Петя первым берет корзину 2, 3, 4, 5; затем
 Вася берет любую соседнюю корзину 1 цвета,
 затем Петя должен взять корзину 2, 3, 4, 5, граничащую
 с корзиной из которой взял Вася, чтобы
 у Васи не было выбора остаться только
 две коробки 1 цвета; Таким образом у Васи
 будут все корзины 1 цвета, (так как записка
 т.е. ≤ 400 конфет $\Rightarrow$ а у Пети ≥ 1600 конфет

Предположим, что нет $\Rightarrow$ сумма всех чисел $(S) \leq 100$
 При этом: всего способ выбрать две строки $C_{10}^2 =$
 $= \frac{10!}{8! \cdot 2!} = 45$, а сумма в нем (пусть S') $S' = 45 \cdot 2 =$
 $= 90$, при этом $S' = 90 \Rightarrow S' \leq 900$, но ранее мы
 выяснили, что $S' \geq 945$ — противоречие $\Rightarrow$ обяза-
 тельно найдется. Ответ: да.

N 2

Da, 999 ($9+9+9=27=3^3$) u 1000 ($1+0+0+0=1=1^3$).
 Ambem: 999 u 1000.

13

Означимое от ген. ма 7: $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Есть вероятности вхождения 3 числа, например 7,
которых 71 (в промежутке от 190 до 500), т.е. $C_{71}^3 = \frac{71!}{68! \cdot 3!} =$
 $= \frac{69 \cdot 70 \cdot 71}{6} = 57155$

2) Когда у всех остальных μ_i нулевая вар. мат, т.е. число с ост. при дел. на 7 $\neq 0$ будет соответствовать числу с ост. при дел. на 7 (т.е. с ост. 3 ~~или 6~~).

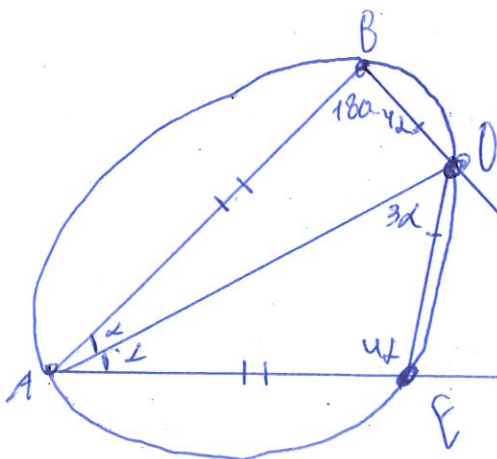
дроме с ост. ч и н.п.). Т.е. войдет так, что
мы берем число, а к нему еще два с остатком
в том же остатком, которое ^(при суммиров.) вместе не дадут
остаток 0. ~~И~~ так будет, если не взять
три числа кратных 7. Ответ: C_{71}^3 (57155).

14

$$\begin{cases} \frac{a}{a+b^2} + \frac{b}{a^2+b} \geq 1 \\ a+b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a}{a+b^2} + \frac{b}{a^2+b} \geq a+b \\ a+b=1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} a+b=1, \text{ при этом числа полож.} &\Rightarrow a < 1 \text{ и } b < 1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow a > a^2, b > b^2 \Rightarrow a+b^2 < a+b=1, a^2+b < a+b=1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{a}{a+b^2} > a, \frac{b}{a^2+b} > b \Rightarrow \frac{a}{a+b^2} + \frac{b}{a^2+b} > a+b=1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{a}{a+b^2} + \frac{b}{a^2+b} > 1. \blacksquare \end{aligned}$$

14



$$\text{Пусть } \angle A = \angle C = 2\alpha \Rightarrow \angle B = 180 - 4\alpha.$$

$$\begin{aligned} \angle BAD &= \angle DAE \Rightarrow \angle ABD = \angle DEB \Rightarrow BD = DE \\ ABDE - \text{впис.} &\Rightarrow BD \cdot AE = DE \cdot AB \Rightarrow AE = AB \Rightarrow \\ &\Rightarrow \angle AEF = \angle ABF \Rightarrow \angle BDA = \angle ADE \\ \angle BDA &= 180^\circ - \angle B - \angle BAD = 3\alpha \Rightarrow \angle ADE = 3\alpha \\ ABDE - \text{впис.} &\Rightarrow \angle AED = 4\alpha \Rightarrow \\ &\Rightarrow 4\alpha + 3\alpha + \alpha = 180^\circ \Rightarrow \alpha = \frac{45^\circ}{2} = 22.5^\circ \Rightarrow \\ &\Rightarrow \angle A = \angle C = 45^\circ, \angle B = 90^\circ. \text{ Ответ: } 90^\circ, 45^\circ, 45^\circ. \end{aligned}$$

17
~~Итого у участника не жаровы и не жаровы~~
~~бонус друзей.~~

Из условия следует, что каждый имеет хотя бы 50 значков, т.е. можно считать "основных" и "запасных", при этом условие должно соблюдаться. ~~Возьмем~~ Возьмем двух людей. Если у одного ≥ 51 зн., то очевидно, что есть другие значков, при этом если у одного по 50 значков, но будет, что либо у них есть другие значков, либо в эти 50 они в каком-то друг друга, т.е. по факту не считая их, будет из 99 человек $\Rightarrow$ два у. значков или имеют друг друга.

18
~~Если везде по 150 значков, то все очевидно. Если же~~
~~всего 150 значков, а всего 1300. Если нет, то сейчас~~
~~следующее замечание~~ Означим ^{количество} ~~количество~~ через 10 групп от группы, т.е.: $\{1, 11, 21, 31, \dots, 1491\}$, $\{2, 12, 22, 32, \dots, 1492\}$,
 $\{10, 20, 30, \dots, 1500\}$. В сумме ~~количество~~ ~~эти~~ эти 10 групп дают 1500, т.е. это почти сумма всех ~~количество~~

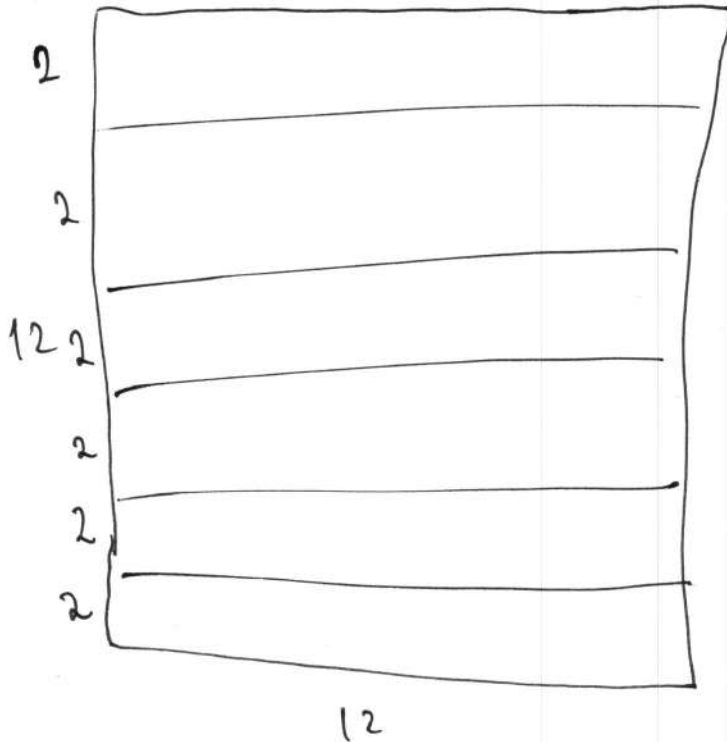
Код участника: М9-077

(заполняется организатором)

при этом возведем подмечен-во с маши. кол-вом
конкрет, очевидно, что $ax \leq 150$, и пусть Печя
берет опустошает те порзатки, ~~где~~ которые те
относ. к маши. логан-ву, тогда Вася надерит ≤ 150
конкрет, А Печя ≥ 1350 . ЧТД.

Лист 1 из 9

№1.



В таблице 12×12 пара строк, не пересекающихся друг с другом, встречаются 6 раз (то есть если назвать строки $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{12}$, то по 6 раз попарно различаются, то, что при использовании строк a_1 и a_2, a_3 и a_4, a_5 и a_6, a_7 и a_8, a_9 и a_{10}, a_{11} и a_{12} ни в одной из пар не встретятся повторяющиеся индексы с другой парой (в i -ой и k -ой паре не будут задействованы одинаковые строки).
 Так как в любой паре строк сумма чисел больше 16, то во всей таблице сумма чисел больше $6 \cdot 16 = 96$.

Погда если в каждой строке сумма чисел ≤ 8 , то сумма чисел во всех строках будет ≤ 96 , однако сумма всех чисел у нас $> 96 \Rightarrow$ найдётся строка, в которой сумма чисел будет больше 8.

Лист 2 из 9

Код участника:
(заполняется организатором)

119-123

Ответ: обязательно.

№2.

Чтобы доказать, что такие числа существуют, достаточно просто привести пример таких чисел.

Пусть наши числа x и $x+1$. Тогда количество девяток на конце числа x не менее 0. Обозначим это количество буквой y . Тогда при увеличении числа на 1, если на конце стоит ^{одна} 9, то последний разряд превратится в 0, а предпоследний увеличится на 1. Тогда сумма цифр изменится на $-9 \cdot 1 + 1 = -8$ (уменьшится на 8). Тогда для y 9 сумма уменьшится на $9y - 1 \Rightarrow$ выражение $2z^2 - 9y + 1 = 2n^2$, где ~~2z^2~~ $2z^2$ и $2n^2$ - сумма цифр искомого x и $x+1$.

Рассмотрим разницу между первыми удвоенными квадратами

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$2x^2$	2	8	18	32	50	72	98	128	162

Заметим, что $2 \cdot 7^2 - 2 \cdot 6^2 = 98 - 72 = 26$, что можно представить в виде $9 \cdot 3 - 1$, тогда наше искомого число x содержит в себе три девятки (если брать 7 и 6 как z и n). Тогда приведем пример x с

Лист 3 из 9

Код участника:
(заполняется организатором)

119-123

суммой трех 98 и тремя девятками на конце:

$$x = \underbrace{88888888}_8 7999 \quad (\text{сумма цифр } 8 \cdot 8 + 7 + 9 \cdot 3 = 98 = 2 \cdot 7^2)$$

$$\text{Тогда } x+1 = \underbrace{88888888}_9 000 \quad (\text{сумма цифр } 8 \cdot 9 = 72 = 2 \cdot 6^2)$$

Ответ: существуют.

№3.

Возьмём три числа — a, b, c . Пусть они попарно
пог. условие. Тогда $a+b:11, b+c:11, a+c:11$. Тогда
 $a+b+b+c+a+c:11 \Rightarrow 2(a+b+c):11 \Rightarrow a+b+c:11$, т.к. 2 и 11
взаимно просты. Так как $a+b+c:11$ и $a+b:11$, c тоже
кратно $11 \Rightarrow a$ кратно 11 и b кратно $11 \Rightarrow$ любая
парующая по условию группа состоит из трёх кратных
 11 чисел. От 1 до 1000 чисел кратных 11 $10 \cdot 9 = 90 \Rightarrow$
 $\Rightarrow$ количество способов выбрать три попарующих числа
равно $C_{90}^3 = \frac{90!}{87! \cdot 3!} = \frac{90 \cdot 89 \cdot 88}{6} = 30 \cdot 89 \cdot 44 = 117480$

Ответ: 117480 способов.

Лист 4 из 9

Код участника:

заполняется организатором)

M9-123

 $\sqrt{4}$.

$$a > 0 \text{ и } b > 0 \Rightarrow ab > 0 \Rightarrow -ab < 0 \Rightarrow -3ab < 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 - 3ab < 1 \Rightarrow (a+b)^2 - 3ab < 1 \Rightarrow a^2 + b^2 - ab < 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 - ab - 1 < 0 \Rightarrow 2a^2 + 2b^2 - 2ab - 2 < 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + a^2 - ab + b^2 - 2 - ab < 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + (a+b)(a^2 - ab + b^2) - 1 - a - b - ab < 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + a^3 + b^3 - (ab + a + b + 1) < 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + a^3 + b^3 - (1+a)(1+b) < 0$$

$$\text{Поскольку } a > 0 \text{ и } b > 0, \text{ то } (1+a)(1+b) > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{a^2 + b^2 + a^3 + b^3 - (1+a)(1+b)}{(1+a)(1+b)} < 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{a^2 + b^2 + a^3 + b^3}{(1+a)(1+b)} - 1 < 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{a^2 + a^3}{(1+a)(1+b)} + \frac{b^2 + b^3}{(1+a)(1+b)} < 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{a^2(1+a)}{(1+a)(1+b)} + \frac{b^2(1+b)}{(1+a)(1+b)} < 1 \Rightarrow$$

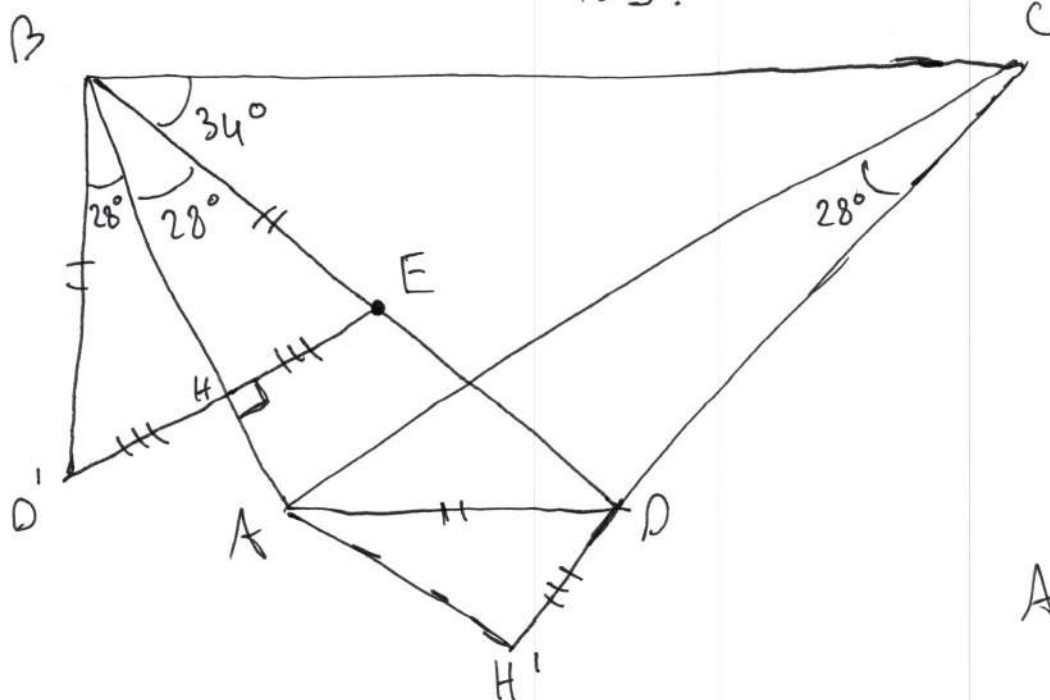
$$\Rightarrow \frac{a^2}{1+b} + \frac{b^2}{1+a} < 1 \Rightarrow \text{z.m.g.}$$

Лист 5 из 9

Код участника:
(заполняется организатором)

119-123

№5.



Дано:

$$\angle ABD = \angle ACD = 28^\circ$$

$$\angle CBD = 34^\circ$$

$$BE = AD$$

$$EH \perp AB$$

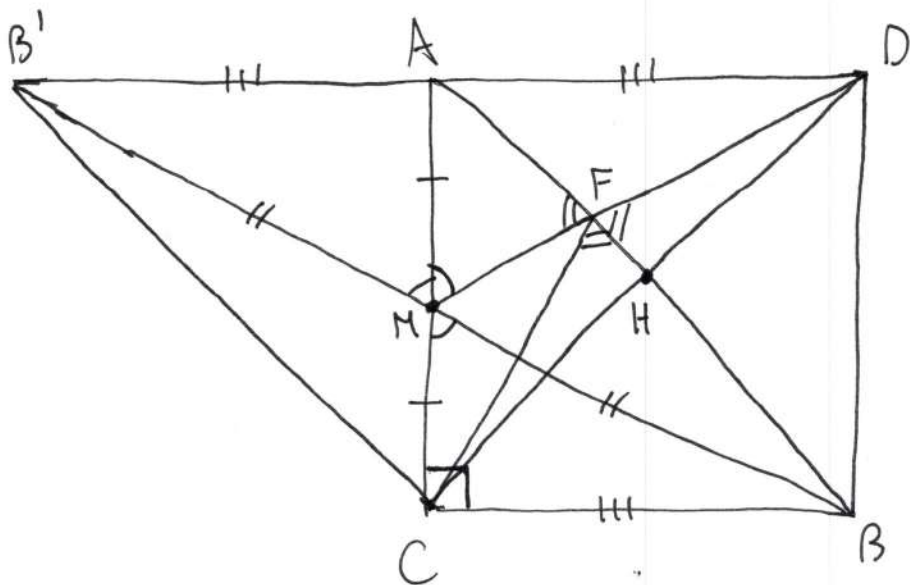
Доказать:

$$AC > EH + CD$$

- 1) Доп. построение: продолжим EH за точку H на EH ($EH = HD'$)
Доп. построение: продолжим CD за точку D на EH ($CH' = CD$)
- 2) $EH = HD'$, $\angle EHB = 90^\circ \Rightarrow$ в $\triangle D'BE$ BH медиана и высота $\Rightarrow \triangle D'BE$ – равнобедренный $\Rightarrow BH$ – биссектриса и $BD' = BE = AD$
 BH – биссектриса $\Rightarrow \angle EBH = \angle D'BH = 28^\circ$
- 3) $\angle HD'B = 180^\circ - \angle D'BH - \angle D'HB = 180^\circ - 28^\circ - 90^\circ = 62^\circ$
- 4) $\angle ABD = \angle ACD \Rightarrow ABCD$ – вписанный, т.к. равные углы ~~опираются~~ ~~на одну дугу~~ $\Rightarrow \angle ABC + \angle ADC = 180^\circ \Rightarrow$
 $\Rightarrow \angle ABD + \angle CBD + \angle ADC = 180^\circ \Rightarrow \angle ABD + \angle CBD + 180^\circ - \angle ADH' = 180^\circ$
 $\Rightarrow \angle ABD + \angle CBD = \angle ADH' \Rightarrow \angle ADH' = 28^\circ + 34^\circ = 62^\circ$
- 5) $BD' = AD$, $D'H = DH'$, $\angle HD'B = \angle ADH' \Rightarrow \triangle BD'H = \triangle ADH'$ по 1-му

признаку равенства треугольников $\Rightarrow \angle D'HB = \angle DH'A = 90^\circ \Rightarrow \triangle ACH'$ - прямоугольный $\Rightarrow AC$ - наибольшая сторона $\Rightarrow AC > CH' \Rightarrow AC > CD + DH' \Rightarrow AC > CD + EH \Rightarrow$
 $\Rightarrow$ з.т.г.

$\sqrt{6}$.



Dano:

Δ ABC -прямоугольный

М-середина АС

Haum:

 $\angle CAB, \angle ABC$

- 1) Угол падения равен углу отражения $\Rightarrow \angle BMC = \angle AMF$,
 $\angle AFM = \angle CFB$.
- 2) BM - медиана. Проведем BM за M на длину BM ($BM = MB'$).
Тогда $B'ABC$ - параллелограмм, т.к. диагонали пересекаются в точке, которая делит их пополам $\Rightarrow B'A \parallel BC$ и
и $B'A = BC$
- 3) Так как $B'A \parallel BC$, то $\angle BCA = \angle B'AC$ как накрест лежащие $\Rightarrow \angle B'AC = 90^\circ$

Лист 7 из 9

Код участника:

(заполняется организатором)

119-123

4) $\angle B'MA = \angle CMB$ как вертикальные и $\angle CMB = \angle AMF \Rightarrow$

$$\Rightarrow \angle B'MA = \angle AMF$$

5) Продлим MF до пересечения с $B'A$. Тогда $\triangle MB'D$ – равнобедренный, т.к. MA – высота и биссектриса в нем $\Rightarrow$

$$\Rightarrow MA \text{ – медиана} \Rightarrow B'A = AD \text{ и } B'A = CB \Rightarrow AD = CB \text{ и}$$

$$AD \parallel CB \Rightarrow CADB \text{ – параллелограмм. } \angle ACB = 90^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow CADB \text{ – прямоугольник}$$

6) $AH = HB$, $CH = HD$, т.к. H – точка пересечения AB и

CD

7) $\angle AFM = \angle DFH$ как вертикальные и $\angle CFB = \angle AFM \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle CFB = \angle DFH \Rightarrow$ в треугольнике CFD FH – биссектриса и медиана $\Rightarrow \triangle CFD$ – равнобедренный $\Rightarrow FH$ – высота $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \angle CHB = 90^\circ$$

8) $\angle CHB = 90^\circ \Rightarrow CH$ – высота $\triangle ACB$

CH – высота и $AH = HB \Rightarrow CH$ – медиана $\Rightarrow \triangle ACB$ – равнобедренный $\Rightarrow \angle CAB = \angle ABC = \frac{180^\circ - 90^\circ}{2} = 45^\circ$

Ответ: $45^\circ, 45^\circ$.

Лист 8 из 9

Код участника:

(заполняется организатором)

119-123

№7.

Рассмотрим человека А. Если он состоит в группе участников собрания, то А знаком минимум с одним человеком (пусть это будет множество людей В). Тогда составим группу участников с А, но без множества В. Тогда в данной ситуации появится ^{другое} множество знакомых с А – назовём его С. Когда проходит собрание, на нём присутствуют 43 из 83 человек $\Rightarrow$ 40 на собрании не присутствуют. Тогда если каждый раз составлять группу с А, но без множества знакомых, полученного с составлением предыдущей группы, мы получим, что со всеми теми, кто не присутствует на собрании, А знаком (то есть каждый из оставшихся 40 человек будет взаимодействовать в то или иное когда-то полученное множество знакомых). В таком случае А знаком с кем-то ещё из 43 человек $\Rightarrow$ всего А знаком минимум с 41 человеком $\Rightarrow$ каждый из 83 человек знаком минимум с 41 другим.

Лист 9 из 9

Код участника:

(заполняется организатором)

M9-123

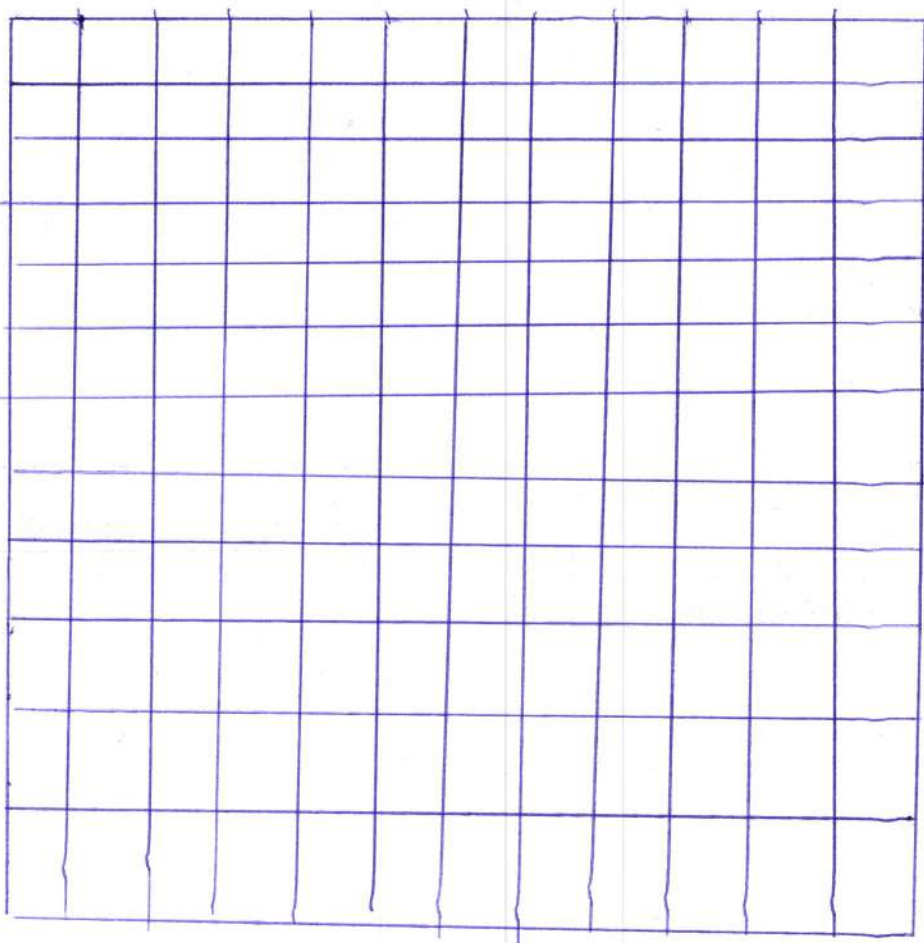
Тогда составим группу из A , его 41 знакомого и 1 незнакомого (если у A нет незнакомых, то A знаком со всеми остальными людьми. Тогда каждый с каждым знаком через A , то есть для любых двух людей, не являющихся A , A – общий знакомый). A не знаком с этим одним незнакомым (назовём его B), но B должен быть знаком с кем-то из 42 остальных $\Rightarrow B$ знаком минимум с одним знакомым $\Rightarrow$ ~~B знаком с A~~ A и B имеют общего знакомого. На месте A и B могут быть ~~любыми~~ абсолютно любые люди, ведь каждый из 83 имеет минимум 41 знакомого $\Rightarrow \Rightarrow$ любые два участника либо знакомы, либо имеют общего знакомого.

~~XXXX~~

Код участника:
(заполняется организатором)

M9-075

№1.



Допустим, что такого столбца не найдётся. Тогда, в любом столбце $S \leq 8$. Всего столбцов 12 $\Rightarrow$

$$\Rightarrow S_{\text{кв}} \leq 8 \cdot 12 \leq 96$$

Посмотрим на строки. Длина 1 и 2 строки > 16 .

$$\text{Длина } 3 \text{ и } 4 > 16$$

...

$$\text{Длина } 11 \text{ и } 12 > 16. \quad = 7$$

$$\Rightarrow S_{\text{ст}} > 16 \cdot 6 \geq 96. \Rightarrow S_{\text{ст}} \leq 96 \text{ и } S_{\text{ст}} > 96.$$

Невозможно $\Rightarrow$ допущение неверно $\Rightarrow$ столбец с $S > 8$ найдётся. Ч.т.д.

Код участника:
(заполняется организатором)

119-075

№4.

$$\begin{aligned}
 \frac{a^2}{1+b} + \frac{b^2}{1+a} &= \frac{a^2(1+a) + b^2(1+b)}{(1+a)(1+b)} = \frac{a^2 + a^3 + b^2 + b^3}{(1+a)(1+b)} = \\
 &= \frac{(a+b)^2 - 2ab + (a+b)(a^2 - ab + b^2)}{(1+a)(1+b)} = \frac{(a+b)(a^2 - ab + b^2 + a + b) - 2ab}{(1+a)(1+b)} = \\
 &= \frac{1(a^2 - ab + b^2 + 1) - 2ab}{(1+a)(1+b)} = \frac{a^2 + 2ab + b^2 + 1 - 5ab}{(1+a)(1+b)} = \\
 &= \frac{(a+b)^2 - 5ab + 1}{(1+a)(1+b)} = \frac{2 - 5ab}{(1+a)(1+b)} ; a+b=1 \Rightarrow b=1-a
 \end{aligned}$$

$$\frac{2 - 5a(1-a)}{(1+a)(2-a)} = \frac{2 - 5a + 5a^2}{2 - a + 2a^2} = \frac{5a^2 - 5a + 2}{-a^2 + a + 2} \stackrel{?}{<} 1$$

$$\frac{5a^2 - 5a + 2}{-a^2 + a + 2} - 1 \stackrel{?}{<} 0$$

$$\frac{5a^2 - 5a + 2 + a^2 - a - 2}{-a^2 + a + 2} \stackrel{?}{<} 0$$

$$\frac{6a^2 - 6a}{-a^2 + a + 2} \stackrel{?}{<} 0$$

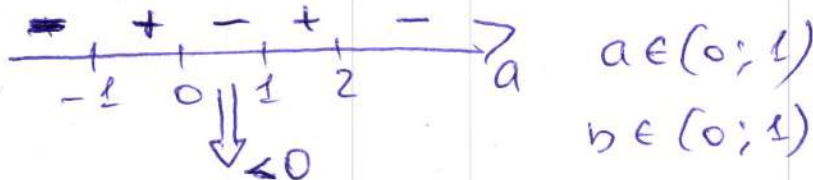
$$6 \cdot \frac{(a-1)a}{-a^2 + a + 2} \stackrel{?}{<} 0$$

Код участника:
(заполняется организатором)

119-075

 $\sqrt{4}$ (прог. 1)

$$\frac{(a-1)a}{-a^2+a+2} < 0 \Rightarrow \frac{(a-1)a}{(2-a)(a+1)} < 0$$



На промежутке $a \in (0; 1)$ (по условию a, b - полон),
выраж. ~~знаение~~ принимает отрицательные значения $\Rightarrow$ выраж < 0 , ЧТД.

 $\sqrt{2}$.

Да, существуют. Например:

$$\underbrace{98999\dots 9}_{55 \text{ девяток}}$$

$$\text{и } \underbrace{990\dots 0}_{55 \text{ нулей}}$$

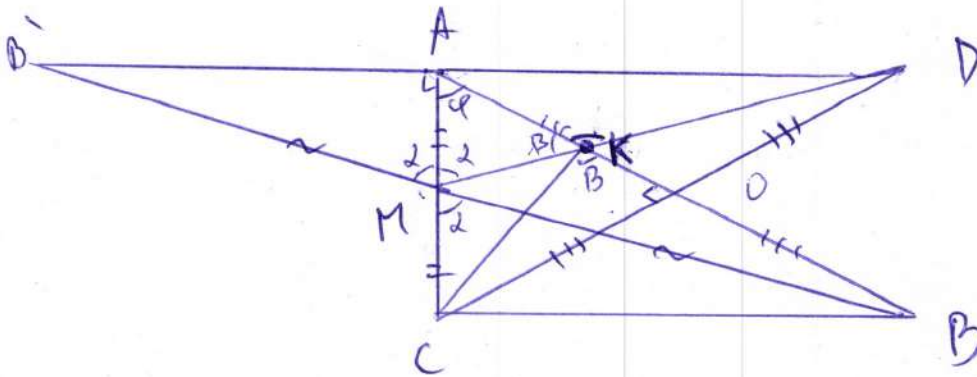
$$\underbrace{9899\dots 9}_{55} + 1 = \underbrace{990\dots 0}_{55}$$

Сумма цифр 1: $\underbrace{989\dots 9}_{55} = 9+8+9 \cdot 55 = 512$.
 $512 = 256 \cdot 2 = 16^2 \cdot 2$.

Сумма цифр 2: $\underbrace{990\dots 0}_{55} = 9+9 = 18$
 $18 = 9 \cdot 2 = 3^2 \cdot 2$.

мисс Зина

56.



Пусть M - с.р. AC , K - точка на гипотенузе.

Угол падения = углу отраж. $\Rightarrow \angle AMK = \angle BMC = \alpha$
 $\angle KAM = \angle KCB = \beta$

Удвоили медиану BM . $BM = MB'$

$BM = B'M$; $AM = MC \Rightarrow B'ABC$ - паралл. (диаг. пересекаются) $\Rightarrow$

$\Rightarrow B'A \parallel CB$; $MK \cap AB' = D$. $\angle B'MA = \angle MB'C = \alpha = \angle AMD \Rightarrow$

$\Rightarrow$ т.е. $\angle B'AM = \angle ACB = 90^\circ$ (накрест. лежащие); $\angle B'MA = \angle AMD$

$\Rightarrow MA$ - бисс. и выс. $\Delta B'MD \Rightarrow$ она и медиана. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \Delta B'MD$ - р/б $\Rightarrow B'M = MD = MB$. $\Rightarrow B'A = AD = CB \Rightarrow$

$\Rightarrow AD = BC$; $AD \parallel CB \Rightarrow$ т.е. $\angle ACB = 90^\circ$, $ADBC$ - ~~параллелограмм~~
 прямоуголь.

$\Rightarrow ED$ - диаг. $\Rightarrow AO = OD = CO = OB$.

$\angle OKD = \angle AKM$ (вертикальные) $= \beta = \angle CKO \Rightarrow$

$\Rightarrow KO$ - мед. и бисс. $\Delta CKD \Rightarrow CK = KD \Rightarrow KO \perp ED$.

$\angle CAB = \alpha = \angle ACO$ (ΔACO - р/б) $\Rightarrow \alpha + \alpha + 90^\circ = 180$

$\alpha = 45 \Rightarrow \angle ABC = 45^\circ = \angle CAB$.

Ответ: 45° ; 45° .

Мст 4 из 8

Код участника:
(заполняется организатором)

M9-075

ДЗ

Допустим мы выбрали 3 числа с остатками m, n, k при делении на 11. Там нам ~~еще~~ сумма любых

двух чисел кратна 11, то сумма их остатков либо равна 11 либо 0. (22 не может быть, т.к. $m, n, k \in [0; 10], \in \mathbb{N}$).

$$m+n=11 \text{ или } m+n=0$$

$$m+k=11 \text{ или } m+k=0$$

$$\textcircled{1} \quad m+n=11 \text{ и } m+k=11 \Rightarrow k=n$$

$$k+n=11 \text{ или } k+n=0$$

$$2k=11$$

$$k=6,5$$

$$\text{нельзя}$$

$$\textcircled{k=n=0=m.} \text{ подходит.}$$

$$\textcircled{2} \quad m+n=11 \text{ и } m+k=0 \Rightarrow m=k=0. \Rightarrow n=11 - \text{нельзя.}$$

$\Rightarrow$ делаем вывод, что $k=n=m=0 \Rightarrow$ все 3 числа должны быть :11. Всего от 1 до 1000 чисел :11 90 штук

из них надо выбрать 3. Тогда

$$C_{90}^3 = \frac{90!}{3! \cdot 87!} = \frac{90 \cdot 89 \cdot 88}{3!} = 117480$$

сп-об

выбрать 1-е 80

, 2-е 88, 3-е 88

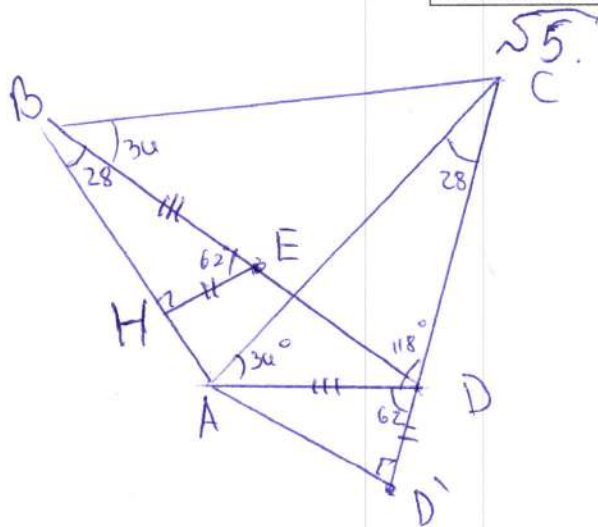
3! - повторения.

Ответ: 117480,

лист 5 из 8

Код участника:
(заполняется организатором)

M9-075



$\angle ABD = \angle ACD$ опираются на дугу $AD \Rightarrow$

$\Rightarrow$ четырехугольник $ABCD$ впис. $\Rightarrow \angle ABC + \angle ADC = 180^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle ADC = 180^\circ - 28^\circ - 34^\circ = 118^\circ \Rightarrow \angle CAD = 180^\circ - 118^\circ - 28^\circ = 34^\circ$

Пусть $D' \in CD$ и $DD' = EH \Rightarrow \angle ADD' = 180^\circ - 118^\circ = 62^\circ$

$\angle BEH = 30^\circ - 28^\circ = 62^\circ$

$AD = BE$ $\angle ADD' = \angle BEH$ $DD' = HE \Rightarrow \triangle ADD' = \triangle BEH$
(по I п.п.) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle AD'D = \angle BHE = 90^\circ$. AC — гипотенуза в $\triangle AD'C \Rightarrow$

$AC > D'C$

$AC > DD' + CD$

$AC > EH + CD$ — ч.т.в.

Код участника:
(заполняется организатором)

M9-075

57.

Выберем 1 человека. Крайне мало есть 82 человека.

82

①

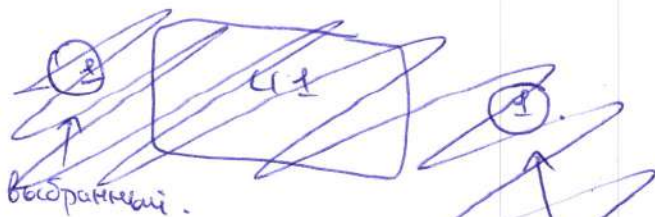


Этот человек знаком хотя бы с 1 человеком из собрания. Значит, он может быть знаком лишь с 41 из 82, т.к. если он не знаком с 42, то можно сделать собрание из него и этих 42, откуда он будет знаком с 1 из ост-ся 42 $\Rightarrow$ незнаком с 41, теперь уже можно составить собрание для новых знакомых, он всегда будет знаком с кем-то, т.к.

$1 + 41 = 42$, а для собрания надо 43 $\Rightarrow$ ещё 1 человек из тех, с кем выбранный уже знаком.

↓
не знаком

~~Составим собрание из выбранного человека и других 42.~~



~~допускаем, что у выбранного человека нет с ним общих знакомых и они сами не знакомы. Тогда этот человек не знаком~~

Если этот человек не знаком с тех 41 человеком, то он min знаком с $82 - 41 = 41$ человеком.

Заметим, что мы выбирали человека не учитывая общности $\Rightarrow$ у КАЖДОГО человека min 41 знакомый. | лист 7 из 8

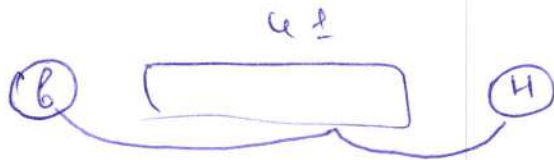
Код участника:

(заполняется организатором)

M9-075

57(прод.)

Составили группу из выбр. человека, ч.1 его знакомого
и человека с которым он не знаком,



Тогда неизвестный знаком либо с выбранным либо с

ч.1 из знакомых выбранного $\Rightarrow$ ч.т.д. (по условию, Н знаком
хотя бы с 1 из избранных)

~~Так~~ Если же у выбранного не ч.1 знаком. а больше, то,
очевидно ~~то~~ ничего не помешает. Можно будет
выбрать ЛЮБОГО человека, поставить его на место В,
~~не делая~~ влезть ч.1 его знаком. и вместо Н поставить
любого из знакомых ему и аналогично для-то, что
бы ~~каждый~~ ~~будет~~ ~~иметь~~ ~~общих~~ знакомых!

Код участника:
(заполняется организатором)

M9-053

N1.

Узнав, возможные суммы тисел в строках, как $x_1; x_2; x_3$ и т.д.
 Тогда, по условию, $x_1 + x_2 > 16; x_1 + x_3 > 16; x_1 + x_4 > 16$ и т.д.
 Из этих условий мы можем найти ограничение
 на сумму тисел во всех строках.
 Сложим все пер-ва, а затем поделим на 11:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + \dots + x_{12} > \frac{16 \cdot 66}{11}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + \dots + x_{12} > 96; \Sigma > 96$$

Узнав, мы получили, что общая сумма тисел во всех
 рядках (Σ) больше 96.

Предположим, что не найдется строка, в которой
 сумма тисел больше 8. Тогда, у нас пер-ва: $x_1 \leq 8; x_2 \leq 8;$
 $x_3 \leq 8 \dots x_{12} \leq 8$, где $x_1; x_2; x_3 \dots x_{12}$ — ~~суммы~~ суммы тисел в соот-
 ветствующим строкам.

Теперь из этих условий найдём ограничение на ~~общую сумму~~ общую
 сумму тисел во всех рядках:

$$\Sigma \leq 8 \cdot 12$$

$$\Sigma \leq 96, \text{ где } \Sigma - \text{сумма тисел во всех рядках.}$$

У нас получилось система пер-в:

$$\begin{cases} \Sigma > 96 \\ \Sigma \leq 96 \end{cases} - \text{противоречие}$$

Получается, есть строка $x_k > 8$, т.т.д.

Код участника:
(заполняется организатором)

119-053

N2.

Да, существуют.

$$n = \underbrace{888\dots 88}_{20} \underbrace{1999\dots 99}_9$$

$$n+1 = \underbrace{888\dots 88}_{20} \underbrace{2000\dots 00}_9$$

Докажем, что наш пример рабочий:

$$\text{Для } n: 8 \cdot 20 + 1 + 9 \cdot 9 = 242$$

$$242 = 2a^2$$

$$a = 11 - \text{верно}$$

$$\text{Для } n+1: 8 \cdot 20 + 2 = 162$$

$$162 = 2b^2$$

$$b = 9 - \text{верно}$$

Ответ: да, существуют

N3

Возьмём 3 числа: a, b, c ; $a+b \equiv 0$; $b+c \equiv 0$; $c+a \equiv 0$ Пусть $a \equiv k$ Тогда, из условия, $b \equiv 11-k$, $c \equiv 11-k$.Запишем их ~~в~~ сумму, заменив там числа b и c на их эквиваленты:

$$22 - 2k \equiv 0$$

$$22:11 \Rightarrow 2k:11 \Rightarrow k:11 \text{ (или } k=0)$$

Итак, мы доказали, что $a:11 \Rightarrow b:11$ и $c:11$.

Найдём как-то числа, кратные 11 и принадлежащие отрезку (1, 1000)

Лист 2 из 6

Код участника:
(заполняется организатором)

119-053

Каждому участнику дано $n = \lfloor \frac{1000}{11} \rfloor = 90$.

Теперь не составит труда найти все комбинации:

$$\frac{88 \cdot 89 \cdot 90}{6} = 118480$$

Ответ: 118480.

N4

По условию; $a+b=1 \rightarrow b=1-a$; $a \in (0;1)$; $b \in (0;1)$

$$\frac{a^2}{1+b} + \frac{b^2}{1+a} - 1 < 0$$

$$\frac{a^2}{1+b} + \frac{b^2}{1+a} - 1 = \frac{a^2(1+a) + b^2(1+b) - (1+b)(1+a)}{(1+b)(1+a)} =$$

$$= \frac{a^3 + b^3 + a^2 + b^2 - a - b - ab - 1}{(1+b)(1+a)} = \frac{(a+b)(a^2 - ab + b^2) + (a^2 + b^2 - a - b - ab - 1)}{(1+b)(1+a)}$$

$$= \frac{(a+b)(a^2 + b^2 + ab - ab) - 3ab - (a+b) - 1}{(1+b)(1+a)} = \frac{(a+b)(a^2 + b^2 + ab - 3ab) - 3ab - (a+b) - 1}{(1+b)(1+a)}$$

Преобразуем выражение, подставив $a+b=1$:

$$\frac{(a+b)(a^2 + b^2 + ab - 3ab) - 3ab - (a+b) - 1}{(1+b)(1+a)} = \frac{-6ab}{(1+b)(1+a)}$$

Теперь подставим вместо $b=1-a$:

$$\frac{-6ab}{(1+b)(1+a)} = \frac{6a^2 - 6a}{-a^2 + a + 2} < 0$$

Вспомогательное пер-во (помог. выражение слева — это исходное преобразованное выражение):

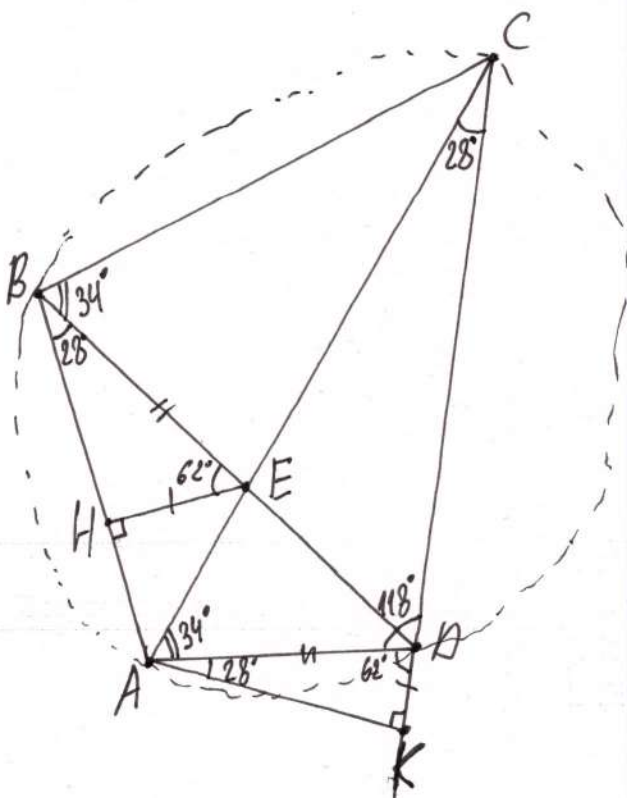
$$\frac{a^2 - a}{-a^2 + a + 2} < 0$$

При $a \in (0;1)$ выражение отриц., а и у нас по ум. $a \in (0;1)$; т.т.д.

Код участника:
(заполняется организатором)

119-053

N5



Дано:

ABCD - четырёх.
 $\angle ABD = \angle ACD = 28^\circ$
 $\angle CBD = 34^\circ$

 $E \in BD$ $BE = AD$ $EH \perp AB$

Доказать:

 $AC = EK + CD$

Решение:

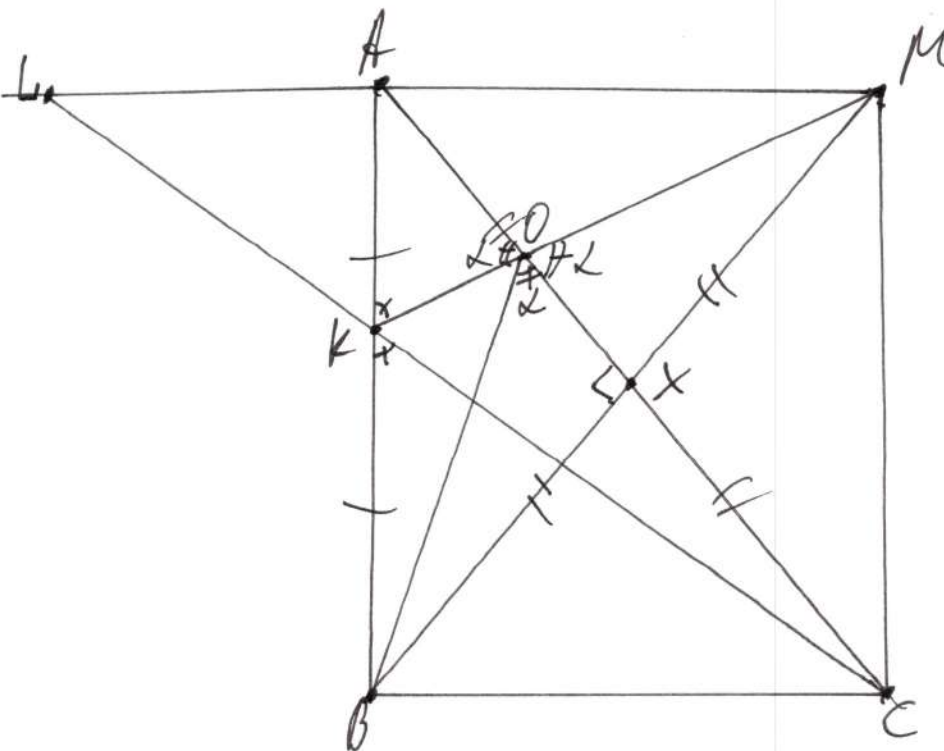
1) Доп. построение: $KD = KE$; $\angle AKD = 90^\circ$.2) $\angle ABD = \angle ACD$ (по условию) и эти углы опираются на один отрезок AD $\Rightarrow$ чет. ABCD - вписан. в окруж. (по приз.)3) ABCD - вписан. в окр. $\Rightarrow$ сумма противоположных углов равна 180 (по св-ву вписан. в окр. четырёх.)4) Из п.3: $\angle ABC + \angle ADC = 180 \Rightarrow \angle ADC = 118^\circ$ 5) $\angle ADK = 180 - \angle ADC$ (смеж. углы) $\Rightarrow \angle ADK = 62^\circ$; $\angle KAD = 28^\circ$ 6) $\angle BKE = 180 - \angle KBE - \angle BKE = 62^\circ$ 7) $\triangle BKE = \triangle AKD$ (по двум ст-м и углу между ними) $\Rightarrow$ ~~это 2) по пер-ву~~ 3) Напротив данного угла лежит боль-шая сторона $\Rightarrow CD + DK < AC$, а $DK = KE \Rightarrow AC > EK + CD$, т.е. д.

Код участника:

(заполняется организатором)

179-053

№6



Дано:
 $\triangle ABK$ - прям.
 CK - медиана.
 $\angle BAC$ - ?
 $\angle ACB$ - ?

Решение:

- 1) Дано построение: $CK \perp AM = L$; $\angle AMC = 90^\circ$.
- 2) $\angle BKC = \angle AKO$; $\angle AOK = \angle BOC$ (по св-ву окружности)
- 3) По построению, $ABCM$ - прямоугольник $\Rightarrow BX = XM = AX = XC$
(по св-ву т. пересечения диагоналей в прям.)
- 4) Обозначим $\angle AOK = \alpha$. Тогда, $\angle MOC = \angle AOK = \alpha$ (по св-ву верт. углов) и $\angle BOC = \angle AOK = \alpha$ (углы на одной прямой)
- 5) OX - медиана и выс. $\Rightarrow OX$ - высота $\Rightarrow \angle BXO = 90^\circ$
- 6) $\triangle AXB$ - равноб. ($AX = BX$) $\Rightarrow \angle BAX = \angle ABX = \frac{180 - 90}{2} = 45^\circ$
- 7) $\angle BAX = 45^\circ \Rightarrow \angle ACB = 45^\circ$

Ответ: $\angle BAC = \angle ACB = 45^\circ$

Лист 5 из 6

Код участника:

(заполняется организатором)

119-053

№7.

Найдём мин кол-во знакомых у одного человека. Пусть у нас была группа, состоящая в условие задачи. Тогда, у каждого человека есть хотя бы 1 знакомый (по условию). Обозначим этого человека за А. Пусть у него 1 знакомый (мин возможное кол-во). Тогда, заменив его знакомых на одного из оставшихся человек (83-43). Чтобы не было противоречия с условием, этот человек тоже должен быть знакомым человека А. Продолжая таким образом получим мин кол-во знакомых для человека А: $40+1=41$. И так для остальных людей аналогично. Нам, для наших, 280 мин кол-во знакомых у одного человека - 41.

Составим группу людей из следующих образцов: Возьмём одного человека (нашего А), 41 его знакомых и ещё одного другого. (Обозначим В) Так как, по условию, у каждого человека в группе мин 1 знакомый, то человек В будет иметь хотя бы 1 знакомого. И, этот знакомый является знакомым человека А. Т.е. человек А будет иметь и знакомых, и одного общего знакомого, т.к. А и В имеют одного общего знакомого, т.д.

Может группа человека А случайным образом, поэтому для остальных людей аналогично

№1

I Пусть $S_1, S_2, \dots, S_{12}$ суммы чисел в каждой строке, а $N_1, N_2, \dots, N_{12}$ (суммы чисел в столбцах).

П.к. сумма чисел в двух строках (столбцах) больше 16, то

$$K(\text{сумма чисел в таблице}) > 16 \cdot \frac{12}{2} = 16 \cdot 6 = 96 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow K > 96.$$

II Рассуждаем от противного: Пусть нет ни одного столбца, сумма чисел в котором больше 8 $\Rightarrow$

$$\Rightarrow K \leq 8 \cdot 12 = 96 \text{ (но из пункта I: } K > 96) \Rightarrow \text{получаем противоречие} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Обязательно найдётся такой столбец.

Ответ: обязательно.

№2.

Пример:

$$1) \text{ 1 число: } \underbrace{8 \dots 8}_{56} \underbrace{19 \dots 9}_7$$

$$\text{Сумма чисел в числе: } S_1 = 8 \cdot 56 + 1 + 9 \cdot 7 = 512 = 2 \cdot n_1^2, \text{ где}$$

$$n_1 = 16: 16^2 \cdot 2 = 512 - \text{верно.}$$

$$2) \text{ 2 число: } \underbrace{8 \dots 8}_{56} \underbrace{19 \dots 9}_7 + 1 = \underbrace{8 \dots 8}_{56} \underbrace{20 \dots 0}_7$$

$$\text{Сумма чисел в этом числе: } S_2 = 8 \cdot 56 + 2 + 0 \cdot 7 = 450 =$$

$$= 2 \cdot n_1^2, \text{ где } n_1 = 15: 15^2 \cdot 2 = 225 \cdot 2 = 450 - \text{верно.}$$

Ответ: существуют.

√3

Пусть мы выбрали числа a, b, c , тогда:

$$a+b : 11$$

$$b+c : 11 \Rightarrow 2 \cdot (a+b+c) : 11 \Rightarrow$$

$$a+c : 11$$

 $\Rightarrow a+b+c : 11$ (т.к. 11 не кратно 2), т.к. $a+b$ кратно 11 и $a+b+c$ кратно 11 $\Rightarrow c$ кратно 11.Поскольку $b+c : 11$ и $a+b+c : 11 \Rightarrow a : 11 \Rightarrow b : 11 \Rightarrow$
 $\Rightarrow$ Все три числа, которые мы выбираем делятся точно
кротны 11.Всего чисел, кратных 11 (от 1 до 1000): $1000 // 11 = 90$
(где $//$ - целочисленное деление).

Тогда способов выбрать 3 числа:

$$C_{90}^3 = \frac{90!}{(90-3)! \cdot 3!} = \frac{90 \cdot 89 \cdot 88}{3 \cdot 2} = 117480.$$

Ответ: 117480 способов.

√4

$$a+b=1 \quad (a, b > 0).$$

$$\frac{a^2}{1+b} + \frac{b^2}{1+a} = \frac{a^2}{a+b+b} + \frac{b^2}{a+a+b} = \frac{a^2}{2b+a} + \frac{b^2}{2a+b}$$

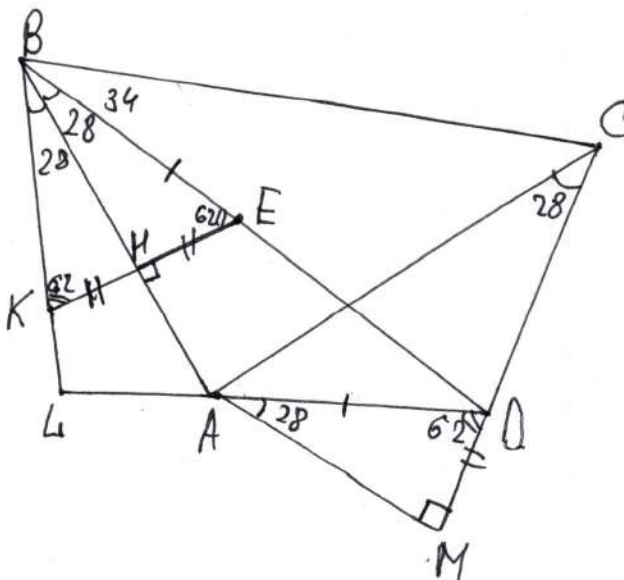
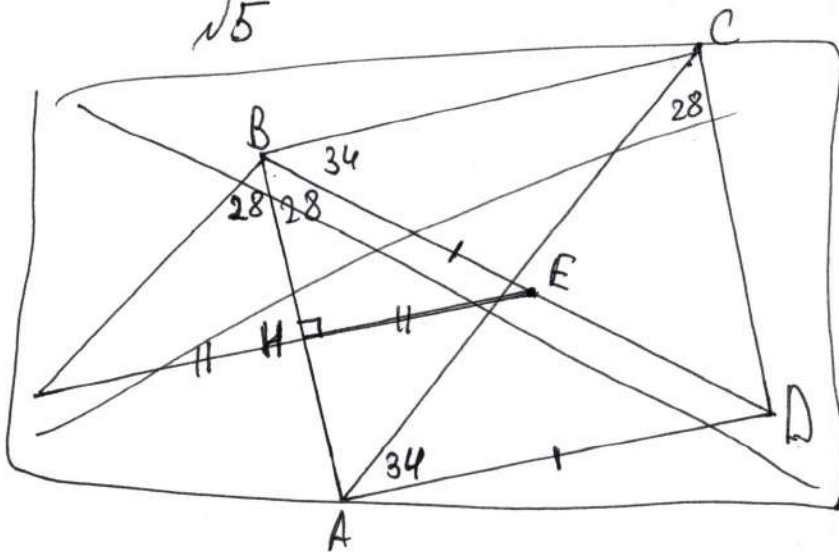
Поскольку $a+b=1$ и $a, b > 0 \Rightarrow 0 < a < 1$ и $0 < b < 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow a^2 < a \quad \text{и} \quad b^2 < b \Rightarrow \frac{a^2}{2b+a} < 1 \quad \text{и} \quad \frac{b^2}{2a+b} < 1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Можно добавлять к числителю и знаменателю дроби одно и то же число, тогда дробь увеличится (по свойствам) $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{1+b} + \frac{b^2}{1+a} &= \frac{a^2}{2b+a} + \frac{b^2}{2a+b} < \frac{a^2+a}{2b+2a} + \frac{b^2+b}{2a+2b} = \\ &= \frac{a(a^2+a+b+b^2)}{2a+2b} = \frac{(a+b)^2 - 2ab + (a+b)}{2 \cdot (a+b)} = \\ &= \frac{1 - 2ab + 1}{2 \cdot 1} = \frac{2 - 2ab}{2} = 1 - ab < 1 \text{ (п.к. } a, b > 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow ab > 0). \end{aligned}$$

$\sqrt{5}$



Дано: $\angle ABD = \angle ACD = 28^\circ$;
 $\angle CBD = 34^\circ$; $BE = AD$; $\angle EKB = 90^\circ$

Доказать: $AC > EK + CD$.

Доказательство:

Удвоим высоту $EK \Rightarrow BK$ – высота и медиана $\triangle KBE \Rightarrow$
 $\Rightarrow BK$ – высота, медиана, биссектриса $\triangle KBE \Rightarrow \triangle KBE$ – равнобе-
 режный (по признаку); $\angle BEK = 90^\circ - 28^\circ = 62^\circ$ (по сумме углов).

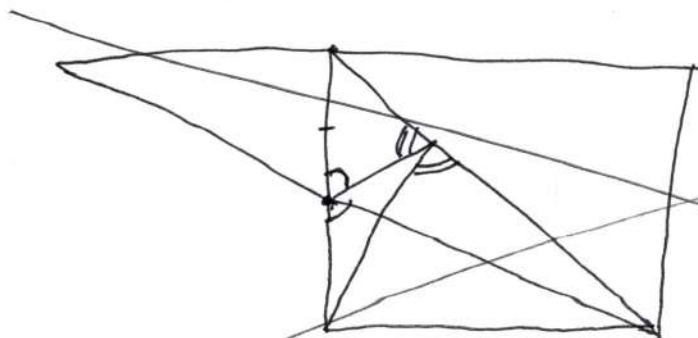
Продлим сторону CD за точку D на отрезок равный EK .
 $\angle ABD = \angle ACD = 28^\circ$ (по условию) и эти углы опираются на
 одну дугу $AD \Rightarrow ABCD$ – вписанный четырёхугольник (по признаку)
 $\Rightarrow \angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$ (по свойству)

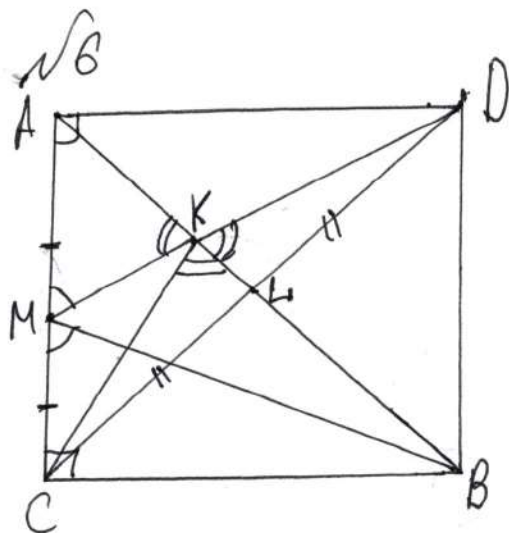
$$\Rightarrow \angle ADC = 180 - 28 - 34 = 118^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle ADM = 180^\circ - \angle ADC = 180 - 118 = 62^\circ;$$

$AD = BE$ (по условию), $DM = EK$ (по построению); $\angle ADM = \angle BEK$
 $\Rightarrow \triangle BEK = \triangle ADM$ (по признаку) $\Rightarrow \angle KBE = \angle BKE = \angle AMD = 90^\circ$ (по
 как соответственные элементы равных треугол.) $\Rightarrow \triangle ACM$ – прямоуголь-
 ный $\Rightarrow AC > CM$ и $AC > CD + DM \Rightarrow AC > CD + EK$ (т.к. $EK =$
 $= DM$), так как AC – гипотенуза прямоугольного тре. $\Rightarrow$
 самая длинная его сторона.

З.б.



~~Дано:~~Найти: $\angle CAB$ и $\angle CBA$.

Решение:

достроим прямоугольный $\triangle ABC$ до прямоугольника $ADBC$. $\angle AMD = \angle CMB$; $\angle AKM = \angle CKB$ (углы вертикальные). $\triangle AMD = \triangle CMB$ (по 2 признаку); точка $K \in MD \Rightarrow \angle AKM = \angle CKB = \angle CKD$ (по с-ву вертикальных углов); CD и AB диагоналями пересекаются в серединах $\Rightarrow CL = LD \Rightarrow \triangle CKD$ - равнобедренный (по признаку) $\Rightarrow KL$ - медиана, биссектриса, высота (по с-ву) $\Rightarrow AB \perp CL$ (по с-ву высоты) $\Rightarrow ACBD$ - квадрат (м.р. диагонали прямоугольника пересекаются под прямым углом) $\Rightarrow \angle CAB = \angle CBA = 45^\circ$ (по с-ву квадрата).

Ответ: 45° и 45° .

✓7
выберем 1 любого человека и назовем его «главным».
Пусть в одной группе будет на секретное собрание
принят главный человек и еще 42 человека. Главный зна-
ком хотя бы с одним из 42 людей. Тогда на след-
ующее собрание придет главный, пусть главный посто-
янно знаком с человеком X из этих 42.

Код участника: М9-017
(заполняется организатором)

Тогда на следующее собрание придёт главный, все кто был в прошлый раз кроме X и ещё людей, которого не было в прошлый раз. Главный снова знаком хотя бы с одним. Далее этого человека снова удаляем и добавляем нового и т.д.

Таким образом главный знаком хотя бы с $83 - 42 + 1 = 41$ человек. Аналогично можно сказать и про всех остальных людей в совете $\Rightarrow$ у каждого человека есть хотя бы 41 знакомый. Удаляем одного человека Y , его 41 знакомого (даже если их больше) и ещё одного человека Z , тогда остаётся $83 - 41 - 1 - 1 = 40$ людей, т.к.

Z имеет хотя бы 41 знакомого, то либо Z друг знаком с хотя бы одним из знакомых Y , тогда Z знаком с Y через общего знакомого, либо Z сам знаком с Y . Таким образом, либо либо два участника либо знакомы, либо имеют общего знакомого.