Олимпиада 10 класс
Второй вариант

1. (**10 баллов**) Назовём натуральное число счастливым, если все его натуральные делители можно разделить на две группы так, что сумма в одной группе была ровно в 7 раз больше, чем сумма в другой группе. Существует ли счастливое число, которое больше 3000?

2. (**10 баллов**) В неравнобедренном треугольнике ABC провели биссектрису BD. На луче BD отметили точку E так, что $CD = CE$. Докажите, что прямая, соединяющая середины отрезков DE и AC, содержит середину отрезка BC.

3. (**12 баллов**) Сколько существует 9-значных натуральных чисел, у которых сумма любых двух цифр является простым числом?

4. (**12 баллов**) Дима нарисовал две параболы: графики функций $y = -x^2 + 1$ и $y = x^2 + 4x - 3$. После этого он нарисовал общие касательные к параболам и отметил точки их касания (напоминаем, что общей касательной к параболе называется прямая, имеющая ровно по одной общей точке с каждой параболой). Докажите, что четыре отмеченные точки образуют вершины параллелограмма.

5. (**12 баллов**) В ряд выписаны 63 действительных числа. Известно, что каждое из чисел не меньше 7. Однако сумма любых двух чисел, между которыми находится ровно одно число, не превосходит 28. Какое наибольшее значение может принимать сумма всех 63 чисел?

6. (**14 баллов**) На отрезке $AD = 16$ отметили точки B и C так, что $AB = 4$ и $AC = 8$. Через точки B и C проведена окружность, а к ней касательные AM и AN и DL и DK. Отрезки MN и LK пересекают прямую AB в точках X и Y. Докажите, что длина отрезка XY не зависит от выбора окружности и найдите ее.

7. (**14 баллов**) Для действительных положительных $x_1, x_2, \ldots, x_{23}$ докажите, что

$$\frac{x_1}{x_{23}^2 + x_1^2 + x_2^2} + \frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} + \ldots + \frac{x_{23}}{x_{22}^2 + x_{23}^2 + x_1^2} < \frac{1}{x_1 + x_2} + \frac{1}{x_2 + x_3} + \ldots + \frac{1}{x_{23} + x_1}.$$

8. (**16 баллов**) В университете всего учатся 4000 студентов, некоторые из них подписывались друг на друга в социальной сети (если первый студент подписан на второго, то второй необязательно подписан на первого). Назовём группу из 5 студентов близкой, если для любой пары студентов А и Б среди них выполнено хотя бы одно из двух условий:

- А подписан на Б;
- Б подписан на А.

Известно, что среди любых 80 студентов найдётся близкая группа. Докажите, что в этом университете найдётся студент, у которого хотя бы 100 подписчиков или хотя бы 100 подписок.