Всероссийская олимпиада школьников
«Миссия выполнима. Твое призвание-финансист!»

ЗАКЛЮЧИТЕЬНЫЙ (ОЧНЫЙ) ЭТАП

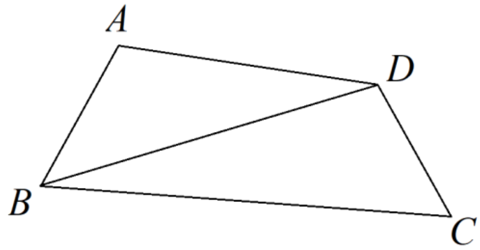
МАТЕМАТИКА

8 и 9 классы

Задание 1. (10 баллов)

Длины сторон *AB, BC, CD* и *DA* выпуклого четырехугольника *ABCD* равны соответственно 5, 17, 5 и 9. Найдите длину диагонали *DB*, если известно, что она является целым числом.

Решение.



По неравенству треугольника

$BD > BC - DC = 12$ и $BD < AB + AD = 14$,

следовательно, $12 < BD < 14$. Так как BD целое, то *BD* = 13.

Ответ: 13.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Полное решение.	+	10
Приведены основные оценки. Отсутствует необходимая строгость в получении ответа. Ответ верный.	±	7
Приведены основные оценки. Ответ неверный.	+/2	5
Ответ верный, но решение отсутствует или не содержит существенного продвижения.	∓	2
Решение не соответствует ни одному критерию, описанному выше.	−/0	0
Максимальный балл		10

Задание 2. (10 баллов)

Найдите знаменатель дроби $\frac{100!}{28^{20}}$ после ее сокращения до несократимой.

(Выражение 100! равно произведению первых 100 натуральных чисел: $100!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot ...\cdot 100$.).

<u>*Решение.*</u>

Можно заметить, что среди чисел от 1 до 100 ровно 14 чисел делятся на 7, ровно два делятся на 49, поэтому в разложении $1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot ...\cdot 100$ в произведение простых множителей число 7 войдет в степени 16. Среди чисел от 1 до 100 ровно 50 четных, поэтому в разложении $1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot ...\cdot 100$ в произведение простых множителей число 2 войдет в степени, не меньшей 50. Поэтому в дроби $\frac{100!}{28^{20}}=\frac{100!}{7^{20}\cdot 2^{40}}$ после сокращения в знаменателе останется лишь $7^4=2401$.

<u>*Ответ:*</u> 2401.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Полное решение.	+	10
Допущена незначительная вычислительная ошибка.	±	7
Найдена основная идея решения. Решение неполное. Ответ верный.	+/2	5
Найдена основная идея решения. Решение неполное. Ответ неверный.	∓	2
Решение не соответствует ни одному критерию, описанному выше.	−/0	0
Максимальный балл		10

Задание 3. (12 баллов)

Последовательность $a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$ такова, что $a_{2n}=\frac{1}{a_{2n-1}}$, а $a_{2n+1}=1-a_{2n}$.

Найдите a_1, если $a_{2018}=2$.

<u>*Решение.*</u>

Найдем несколько последних значений последовательности, учитывая, что $a_{2n-1}=\frac{1}{a_{2n}}$ и $a_{2n}=1-a_{2n+1}$:

$$a_{2018}=2;\ a_{2017}=0{,}5;\ a_{2016}=0{,}5;\ a_{2015}=2;\ a_{2014}=-1;\ a_{2013}=-1;\ a_{2012}=2;\ a_{2011}=0{,}5...$$

Таким образом, получили периодическую последовательность с периодом 6.

Следовательно, $a_1 = a_{1+336\cdot 6} = a_{2017} = 0,5$.

Ответ. 0,5

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Полное решение.	+	12
Найдена основная идея решения. Отсутствует необходимая строгость в получении ответа. Ответ верный.	±	9
Найдена основная идея решения. Отсутствует необходимая строгость в получении ответа и/или допущена вычислительная ошибка. Может быть получен неверный ответ.	+/2	6
Показана идея периодичности. Период не найден или найден неверно.	∓	2
Решение не соответствует ни одному критерию, описанному выше.	−/0	0
Максимальный балл		12

Задание 4. (12 баллов)

Турнир по стрельбе предполагает несколько серий по 10 выстрелов каждая. В одной серии Иван выбил 82 очка, в результате чего среднее количество очков, выбиваемых им за серию, увеличилось с 75 до 76 очков. Сколько очков должен выбить Иван в следующей серии выстрелов, чтобы среднее количество очков, выбитых за серию, стало равно 77?

Решение.

Пусть N – выбитые за n рассматриваемых серий, в последней из которых Иван выбил 82 очка. Тогда $N = 76n$ и $N - 82 = 75(n-1)$. Решая полученную систему находим n = 7 и N = 532.

Пусть для выполнения условия задачи Ивану необходимо выбить x очков. В этом случае получаем $77 \cdot 8 = 532 + x \quad \Rightarrow \quad x = 84$.

Ответ: 84.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Полное решение.	+	12
Приведены все основные логические шаги решения. Отсутствует строгое обоснование отдельных выводов. Ответ верный.	±	9
Обосновано приведены все основные логические шаги решения. В результате вычислительной ошибки или описки получен неверный ответ.		
Приведены все основные логические шаги решения. Верно составлена система уравнений. Решение системы содержит	+/2	6

ошибки или не доведено до конца.		
Найдена основная идея решения. Ответ отсутствует или неверный.	$\mp$	2
Ответ верный, решение отсутствует или не содержит существенного продвижения.		
Решение не соответствует ни одному критерию, описанному выше.	$-/0$	0
Максимальный балл		12

Задание 5. (12 баллов)

Уравнение $x^2+ax+b+1=0$ имеет два различных ненулевых целочисленных корня. Докажите, что число a^2+b^2 не является простым, если числа a и b целые?

Доказательство.

Пусть x, y – целочисленные корни данного уравнения. По теореме Виета $x+y=-a$ и $xy=b+1$, следовательно,

$$a^2+b^2=(x+y)^2+(xy-1)^2=x^2+2xy+y^2+x^2y^2-2xy+1=$$
$$=x^2+y^2+x^2y^2+1=(x^2+1)(y^2+1)$$

Поскольку x, y, то число a^2+b^2 разложили на два целых множителя, каждый из которых больше 1, поскольку x, y – положительные целые числа.

Таким образом, число a^2+b^2 составное.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Полное решение.	+	12
Найдена основная идея решения. Отсутствует необходимая строгость в доказательстве.	$\pm$	9
Решение в целом неверное или незаконченное, но содержит определенное продвижение в верном направлении.	$\mp$	2
Решение не соответствует ни одному критерию, описанному выше.	$-/0$	0
Максимальный балл		12

Задание 6. (14 баллов)

По регламенту шахматного турнира каждый участник должен сыграть с каждым один раз. После того как было сыграно ровно 99 партий, оказалось, что множество участников турнира можно разбить на две неравные по численности группы так, что все соперники, относящиеся к одной и той же группе, уже сыграли партии между собой. При этом были сыграны, но не более четырех, партии между соперниками, которые относятся к разным группам. Каково наибольшее возможное число участников этого шахматного турнира?

Решение.

Пусть число участников турника равено n, а число попавших в 1-ю группу равно k. Тогда число сыгранных партий равно:

$$\frac{k(k-1)}{2}+\frac{(n-k)((n-k)-1)}{2}+m=99, \text{ где } m \text{ - мало,} \Rightarrow$$

$$k^2-k+(n-k)^2-(n-k)+2m-198=0$$

$$k^2-k+k^2-2kn+n^2-n+k+2m-198=0$$

$$2k^2-2kn+(n^2-n+2m-198)=0$$

$$\frac{D}{4}=n^2-2(n^2-n+2m-198)=-n^2+2n-4m+396\geq 0$$

$$n^2-2n+(4m-396)\leq 0 \qquad (n-1)^2-(397-4m)\leq 0$$

$$n_{\max}=1+\sqrt{397-4m}\leq 20.$$

Если $n=20$, то:

$$2k^2-40k+(400-20+2m-198)=0$$

$$k^2-20k+91+m=0$$

$k=10,\ n-k=10,\ m=9$ - противоречие;

$k=11,\ n-k=9,\ m=8$ - противоречие;

$k=12,\ n-k=8,\ m=5$ - противоречие;

$k=13,\ n-k=7,\ m=0$ - противоречие;

при $k>13 \quad m<0$ - противоречие.

Если $n=19$, то:

$$2k^2-38k+(361-19+2m-198)=0$$

$$k^2-19k+(72+m)=0,$$

$k=10,\ n-k=9,\ m=18$ - противоречие;

$k=11,\ n-k=8,\ m=16$ - противоречие;

$k=12,\ n-k=7,\ m=12$ - противоречие;

$k=13,\ n-k=6,\ m=6$ - противоречие;

при $k>13 \quad m<0$ - противоречие.

Если $n=18$, то:

$$2k^2-36k+(324-18+2m-198)=0$$

$$k^2-18k+(54+m)=0,$$

$k=9,\ n-k=9,\ m=27$ - противоречие;

$k=10,\ n-k=8,\ m=26$ - противоречие;

$k=11,\ n-k=7,\ m=23$ - противоречие;

$k=12,\ n-k=6,\ m=18$ - противоречие;

$k=13,\ n-k=5,\ m=11$ - противоречие;

$k=14,\ n-k=4,\ m=2$ - это решение.

Итак, наибольшее возможное число участников равно 18, группы участников насчитывают 4 и 14 человек, количество «межгрупповых» партий равно 2.

Ответ: 18.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Полное решение.	+	14
Ответ верный. Приведены обоснованные верные оценки для наибольшего числа участников турнира. Отсутствует строгое обоснование приведенных оценок или ответа.	±	11
Ответ верный. Приведены обоснованные верные оценки для наибольшего числа участников турнира. Отсутствует строгое обоснование приведенных оценок и ответа.	+/2	7
Ответ верный. Приведены верные, но не обоснованные оценки для наибольшего числа участников турнира. Приведено строгое обоснование ответа по указанным оценкам.		
Ответ неверный или отсутствует. В решении приведены обоснованные оценки для оценки для наибольшего числа участников турнира или составлены верные соотношения, из которых они получаются.	∓	3
Решение не соответствует ни одному критерию, описанному выше.	−/0	0
Максимальный балл		14

Задание 7. (14 баллов)

В компании работает 168 человек. Среди любых четырех человек можно выбрать хотя бы одного, знакомого с остальными тремя. Каково минимальное возможное количество людей, которые знакомы со всеми?

Решение.

Если незнакомых людей нет, то количество людей, которые знакомы со всеми, равно 168. Пусть A и B не знакомы друг с другом, тогда все остальные люди знакомы между собой (если C не знаком с D, то в группе A, B, C, D никто не знаком с остальными тремя). Если A и B знакомы со всеми остальными, то 166 человек знакомы со всеми. Если же А не знаком также и с C, где $C \neq D$, то и A, и B, и C знакомы со всеми остальными 165 людьми (так как в любой группе A, B, C, D только D может быть знакомым с остальными тремя), которые к тому же знакомы между собой. Таким образом, минимальное количество людей, знакомых со всеми, равно 165.

Ответ. 165

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Полное решение.	+	14
Ответ верный. Приведены все основные логические шаги	±	11

решения. Отсутствует строгое обоснование отдельных выводов.		
Ответ верный. Решение отсутствует или неверное.	∓	3
Найдена основная идея решения. Ответ отсутствует или неверный.		
Решение не соответствует ни одному критерию, описанному выше.	−/0	0
Максимальный балл		14

Задание 8. (16 баллов)

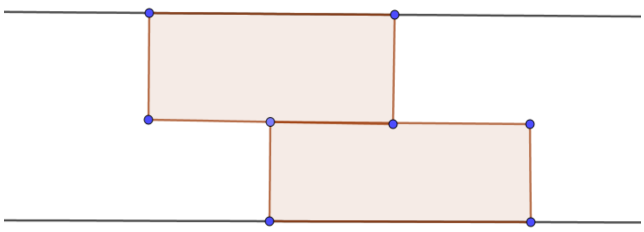
Вова играл старыми костяшками от домино, на которых стерлись все точки, так что они стали не отличимыми. Каждая костяшка представляет собой прямоугольник 2×1, а их число равно 24. Вова решил каждый день по-новому раскладывать костяшки в виде дорожки 2×12, так чтобы рисунок раскладки никогда не повторялся. Сколько дней Вова сможет так раскладывать костяшки, пока все возможные раскладки не будут исчерпаны, если в день он делает одну раскладку?

Решение.

Будем полагать, что дорожки расположены горизонтально, длинной стороной вдоль оси абсцисс. Костяшки в таких дорожках бывают двух видов: вертикальные (расположенные поперек дорожки) и горизонтальные, расположенные вдоль дорожки.

Каждая вертикальная костяшка как бы «перерезает дорожку» и делит ее на две части, справа и слева от себя.

Каждая горизонтальная костяшка обязательно имеет парную горизонтальную костяшку, вместе с которой она образует квадрат 2×2.



Действительно, если бы была пара горизонтальных костяшек, которые бы не образовывали квадрат (т.е. располагались так, как показано на рисунке), то обе части дорожки справа и слева от этой пары костяшек содержали бы нечетные количества костяшек и не могли бы быть покрыты костяшками.

Обозначим через $F(n)$ число возможных замощений костяшками размером 2×1 дорожки размером $2\times n$. Тогда, очевидно, $F(1)=1$, $F(2)=2$, $F(3)=3$.

Каждое замощение дорожки $2\times n$ имеет на правом своем конце или вертикальную костяшку (удалив которую можно получить замощение дорожки $2\times(n-1)$) или пару горизонтальных костяшек (удалив которые можно получить замощение дорожки $2\times(n-2)$). Это обстоятельство обосновывает формулу: $F(n)=F(n-1)+F(n-2)$, т.е. последовательность $F(n)$ является последовательностью Фибоначчи.

<u>Ответ:</u> $F(12)=233$.

Содержание критерия	**Оценка**	**Баллы**
Полное решение.	+	16
Ответ верный. Приведены все основные логические шаги решения. Отсутствует строгое обоснование отдельных выводов.	±	12
Приведены все основные логические шаги решения. Отсутствует строгое обоснование отдельных выводов. В результате вычислительной ошибки или описки может быть получен неверный ответ.	+/2	8
Решение в целом неверное или незаконченное, но содержит определенное продвижение в верном направлении. Ответ отсутствует.	∓	3
Решение не соответствует ни одному критерию, описанному выше.	−/0	0
Максимальный балл		16

Всероссийская олимпиада школьников
«Миссия выполнима. Твое призвание-финансист!»

ЗАКЛЮЧИТЕЬНЫЙ (ОЧНЫЙ) ЭТАП

МАТЕМАТИКА

10 класс

Задание 1. (10 баллов)

Пять различных по весу гирь, каждая из которых весит целое число килограмм, были взвешены всевозможными группами по три гири. В результате получили следующие веса (в килограммах) десяти взвешенных групп: 10, 14, 15, 16, 17, 17, 18, 21, 22, 24. Найдите веса этих пяти гирь.

Решение.

Пусть $a > b > c > d > e$ – веса данных гирь. Поскольку каждая гиря входит в шесть из десяти взвешенных троек, то сумма полученных весов равна $6(a+b+c+d+e)$, следовательно,

$$a+b+c+d+e = \frac{10+14+15+16+17+17+18+21+22+24}{6} = 29.$$

При этом

$$a+b+c = 24, c+d+e = 10 \Rightarrow a+b+2c+d+e = 34 \Rightarrow c = 34-29 = 5.$$

$$a+b+d = 22, c+d+e = 10 \Rightarrow a+b+c+2d+e = 32 \Rightarrow d = 32-29 = 3.$$

$$a+b+c = 24, b+d+e = 14 \Rightarrow a+2b+2c+d+e = 38 \Rightarrow b = 38-29 = 9.$$

Получаем

$$a+b = 19 \Rightarrow a = 10 \text{ и } d+e = 5 \Rightarrow e = 2$$

Ответ. 10, 9, 5, 3, 2.

Содержание критерия	**Оценка**	**Баллы**
Полное решение.	+	10
Приведены все основные логические шаги решения. В результате вычислительной ошибки или описки получен неверный ответ.	±	7
Отсутствует строгое обоснование отдельных выводов. В результате вычислительной ошибки или описки получен неверный ответ.	+/2	5

Ответ верный. Отсутствует строгое обоснование отдельных выводов. В частности, не показано что указанный ответ единственный.	+/2	5
Найдена основная идея решения. Ответ отсутствует или неверный.	∓	2
Ответ верный. Решение отсутствует или неверное.		
Решение не соответствует ни одному критерию, описанному выше.	−/0	0
Максимальный балл		10

Задание 2. (10 баллов)

Даны 2018 чисел $x_1, x_2, \ldots, x_{2018}$, каждое из которых равно либо $2-\sqrt{3}$ либо $2+\sqrt{3}$. Найдите наибольшее возможное значение суммы $x_1x_2 + x_3x_4 + x_5x_6 + \ldots + x_{2017}x_{2018}$, если известно, что она является целым числом.

Решение.

Заметим, что произведение $x_{2k-1}x_{2k}$ может принимать одно из трех значений:

$$(2-\sqrt{3})(2-\sqrt{3}) = 7-2\sqrt{3},$$

$$(2+\sqrt{3})(2+\sqrt{3}) = 7+2\sqrt{3},$$

или

$$(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3}) = 1.$$

Путь a раз в рассматриваемой сумме встречается число $2-\sqrt{3}, b$ раз – число $2+\sqrt{3}$. Тогда количество слагаемых равных 1 в этой сумме будет $1009-a-b$. В этом случае данная сумма равна

$$a(7-2\sqrt{3})+b(7+2\sqrt{3})+1009-a-b = 1009+6a+6b+7(b-a)\sqrt{3}.$$

Поскольку сумма целое число, то $a = b$, а сумма равна $1009+12a$.

Так как a может в условиях задачи может принимать значения от 0 до 504

($2a = a+b \le 1009 \Rightarrow a \le 504{,}5$), то максимальное значение рассматриваемой суммы равно $1009+12\cdot 504 = 7057$.

Ответ. 7057.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Полное решение.	+	10
Приведены все основные логические шаги решения. В результате вычислительной ошибки или описки получен неверный ответ.	±	7

Приведены основные логические шаги решения. Отсутствует строгое обоснование отдельных выводов. В частности, может быть не доказано, что указанный ответ соответствует максимальному значению. Ответ верный.	+/2	5
Найдена основная идея решения. Ответ отсутствует или неверный.	∓	2
Ответ верный. Решение отсутствует или неверное.		
Решение не соответствует ни одному критерию, описанному выше.	−/0	0
Максимальный балл		10

Задание 3. (12 баллов)

Найдите наименьшее значение функции $f(x)=|x|+|x+1|+K+|x+2022|$.

<u>Решение.</u>

Числовую ось можно разбить на 2024 подмножества:
$(-\infty;-2022), (-2022;-2021), (-2021;-2020), K, (-2;-1), (-1;0), (0;+\infty)$. На каждом из этих множеств функция является линейной и имеет вид $f(x)=k_i x+b_i$. Пусть k_i - угловой коэффициент на *i*-ом слева множестве ($k_1=-2023<0$ при $x\in(-\infty;-2022)$, $k_2=-2021<0$ при $x\in(-2022;-2021)$ …).

Заметим, что $k_1<k_2<...<k_{2024}=2022$. Следовательно, функция $f(x)$ сначала убывает, а потом возрастает. Так как $k_{1011}=-1$ при $x\in(-1012;-1011)$, а $k_{1012}=1$ при $x\in(-1011;-1010)$ то наименьшее значение функции достигается в точке $x=-1011$. Оно равно $y_{\max}=f(-1011)=2\cdot\dfrac{1011\cdot(1011+1)}{2}=1023132$.

<u>Ответ:</u> 1023132.

Содержание критерия	**Оценка**	**Баллы**
Полное решение.	+	12
Приведены все основные логические шаги решения. В результате вычислительной ошибки или описки получен неверный ответ.	±	9
Приведены основные логические шаги решения. Отсутствует строгое обоснование отдельных выводов. В частности, может быть не доказано, что указанный ответ соответствует минимальному значению. Ответ верный.	+/2	6
Найдена основная идея решения. Ответ отсутствует или неверный.	∓	2
Ответ верный. Решение отсутствует или неверное.		
Решение не соответствует ни одному критерию, описанному	−/0	0

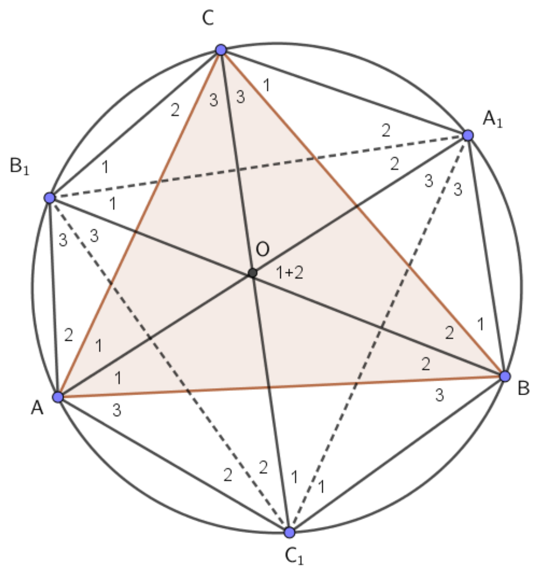
выше.		
Максимальный балл		12

Задание 4. (12 баллов)

Биссектрисы углов *A*, *B* и *C* треугольника ABC пересекаются с описанной около этого треугольника окружностью в точках A_1, B_1 и C_1, соответственно. Найдите расстояния между точкой A_1 и центром вписанной в треугольник ABC окружности, если известно, что $\angle A_1B_1C_1 = 50^{\circ}$, $\angle A_1C_1B_1 = 70^{\circ}$, $B_1C_1 = \sqrt{3}$.

Решение.

На рисунке одинаковыми числами помечены равные углы (это следует из того, что AA_1, BB_1, CC_1 – биссектрисы углов треугольника ABC, помеченный «1+2» угол около точки O (это центр вписанной окружности) равен $\angle OAB + \angle OBA = \angle 1 + \angle 2$ по теореме о внешнем угле треугольника. Следовательно, треугольник OBA_1 равнобедренный и $A_1B = A_1O$ --- искомый отрезок.



$\angle A_1B_1C_1 = 50^{\circ}$, $\angle A_1C_1B_1 = 70^{\circ}$, следовательно, $\angle B_1A_1C_1 = 60^{\circ}$. По теореме синусов $\dfrac{B_1C_1}{\sin\angle B_1A_1C_1} = 2R$, $\dfrac{\sqrt{3}}{\sin 60^{\circ}} = 2R$, $R = 1$. Далее, $\angle A = \angle A_1B_1C_1 + \angle A_1C_1B_1 - \angle B_1A_1C_1 = 60^{\circ}$, откуда $\angle 1 = 30^{\circ}$. Тогда $A_1O = A_1B = 2\cdot R\cdot \sin\angle 1 = 1$.

Ответ: 1.

Содержание критерия	**Оценка**	**Баллы**
Полное решение.	+	12
Представлены основные логические шаги решения. В решении отсутствуют некоторые обоснования или имеется вычислительная ошибка или описка.	±	9
Найдена идея решения, но оно не доведено до конца. При этом выполнена некоторая существенная часть задания.	+/2	6
Решение в целом неверное или незаконченное, но содержит определенное продвижение в верном направлении.	∓	2
Решение не соответствует ни одному критерию, описанному выше.	−/0	0

Максимальный балл	12

Задание 5. (12 баллов)

Докажите, что для любых действительных чисел a, b, c таких, что $0 < a, b, c < 1$, выполнено следующее неравенство $\sqrt{abc} + \sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)} < 1$.

Доказательство.

Сделаем замену: $a = \sin^2 x$, $b = \sin^2 y$, $c = \sin^2 z$, где $0 < x, y, z < \frac{\pi}{2}$.

Тогда неравенство перепишется в виде:

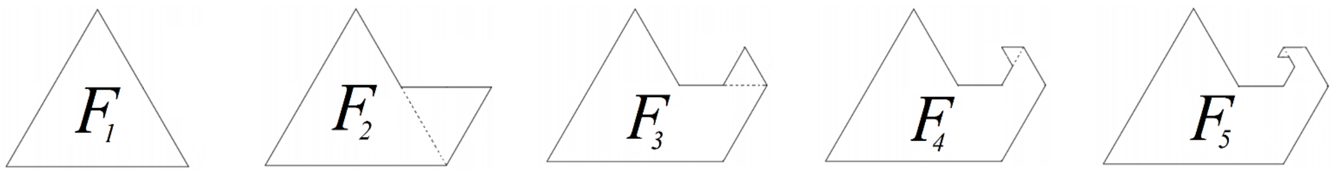
$$\sin x \sin y \sin z + \cos x \cos y \cos z < 1.$$

Но $\sin x \sin y \sin z + \cos x \cos y \cos z < \sin x \sin y + \cos x \cos y = \cos(x-y) \leq 1$.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Полное решение.	+	12
Представлены основные логические шаги решения. В решении отсутствуют некоторые обоснования.	±	9
Решение в целом неверное или незаконченное, но содержит определенное продвижение в верном направлении.	∓	2
Решение не соответствует ни одному критерию, описанному выше.	−/0	0
Максимальный балл		12

Задание 6. (14 баллов)

Дана бесконечная последовательность многоугольников F_1, F_2, F_3, F_4K Фигура F_1 – это равносторонний треугольник со стороной 1. Пятиугольник F_2 получается из треугольника F_1 построением на его стороне равностороннего треугольника со стороной $\frac{1}{2}$, как показано на рисунке. Семиугольник F_3 получается из пятиугольника F_2 построением на его стороне длины $\frac{1}{2}$ равностороннего треугольника со стороной $\frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$ и так далее. На каждом шаге строится треугольник, сторона которого в два раза меньше стороны треугольника, построенного на предыдущем шаге.



Докажите, что периметр каждой из рассматриваемых фигур не превышает 4.

Доказательство.

Заметим, что периметры данных фигур образуют следующую последовательность чисел:

$$p_1 = 3,$$

$$p_2 = 3 + \frac{1}{2},$$

$$p_3 = 3 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2},$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$

$$p_n = 3 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Таким образом, $p_n = 3 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} = 3 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \frac{1}{2^{n-1}}}{1 - \frac{1}{2}} = 3 + \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) = 4 - \frac{1}{2^{n-1}} < 4.$

Что и требовалось доказать.

Содержание критерия	**Оценка**	**Баллы**
Полное решение.	+	14
Представлены основные логические шаги решения. Представлена общая формула для периметров. В оценке для периметров отсутствуют некоторые обоснования или в решении имеется вычислительная ошибка или описка.	±	10
Найдена идея решения, но оно не доведено до конца. При этом выполнена некоторая существенная часть задания. Представлена общая формула для периметров. Оценка для периметров отсутствуют.	+/2	7
Периметр произвольной фигуры представлен в виде суммы. Общая формула отсутствует. Оценка для периметров отсутствуют.	∓	3
Решение не соответствует ни одному критерию, описанному выше.	−/0	0
Максимальный балл		14

Задание 7. (14 баллов)

Иван и Петр играют в следующую игру. Из кучки, которая содержит 2018 камней, они по очереди берут некоторое количество камней. Если перед ходом в кучке имеется N камней, то игрок может взять k камней, только если k является делителем числа N. Проигрывает тот игрок, который возьмет последний камень. Кто из игроков имеет выигрышную стратегию, если первым берет камни Иван?

Решение

Покажем, что Иван имеет выигрышную стратегию. Для того, чтобы выиграть Ивану достаточно каждым ходом брать один камень.

В этом случае после его хода количество камней будет нечетным. Поскольку делители нечетного числа являются нечетными числами, то Петр должен будет взять нечетное число камней.

Так как перед ходом Ивана число камней четно, а он берет один камень, то Иван никогда не возьмет последний камень. В тоже время число камней конечно и не позже чем через 2018 ходов камней не останется. Следовательно, последний камень возьмет Петр.

Содержание критерия	**Оценка**	**Баллы**
Полное решение.	+	16
Представлены основные логические шаги решения. В решении отсутствуют некоторые обоснования.	±	12
Найдена идея решения, но оно не доведено до конца. При этом выполнена некоторая существенная часть задания.	+/2	8
Решение в целом неверное или незаконченное, но содержит определенное продвижение в верном направлении.	∓	4
Решение не соответствует ни одному критерию, описанному выше.	−/0	0
Максимальный балл		16

Задание 8. (16 баллов)

Сколько решений в целых числах имеет уравнение $x_1^4 + x_2^4 + \dots + x_{14}^4 = 2031$.

Решение.

Заметим, что если число n четное, то n^4 делится на 16.

Если n нечетное, то число

$$n^4 - 1 = (n-1)(n+1)(n^2+1)$$

делится на 16.

Следовательно, остаток от деления на 16 левой части уравнения $x_1^4 + x_2^4 + \dots + x_{14}^4$ равен количеству нечетных чисел в наборе $x_1, x_2, \dots, x_{14}$, т.е. не превосходит 14. С другой стороны, 2031 имеет остаток 15 при делении 16, а значит равенство левой и правой частей невозможно.

Ответ: 0 (решений нет).

Содержание критерия	**Оценка**	**Баллы**
Полное решение.	+	16
Представлены основные логические шаги решения. В решении отсутствуют некоторые обоснования.	±	12
Найдена идея решения, но оно не доведено до конца. При этом выполнена некоторая существенная часть задания.	+/2	8
Решение в целом неверное или незаконченное, но содержит определенное продвижение в верном направлении. В частности, могут быть приведены оценки для x_1 , x_2 , …, x_{14} и выписан верный ответ.	∓	4
Решение не соответствует ни одному критерию, описанному выше.	−/0	0
Максимальный балл		16

Всероссийская олимпиада школьников
«Миссия выполнима. Твое призвание-финансист!»

ЗАКЛЮЧИТЕЬНЫЙ (ОЧНЫЙ) ЭТАП

МАТЕМАТИКА

11 класс

Задание 11.1. (10 баллов)

Даны последовательность чисел $x_1, x_2, \ldots$, такая, что $x_1 = 79$ и $x_n = \dfrac{n}{x_{n-1}}$ для всех $n > 1$. На сколько нулей оканчивается число равное произведению $x_1 x_2 \ldots x_{2018}$?

Решение.

Из условия задачи следует, что $x_n x_{n-1} = n$. Следовательно,

$$x_1 x_2 \ldots x_{2018} = (x_1 x_2)(x_3 x_4)\ldots(x_{2017} x_{2018}) = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2018 = 2^{1009} \cdot 1009!$$

В полученном произведении 201 число делится на 5, 40 чисел, которые делятся на 25, 8 чисел, которые делятся на 125 и 1 число, делящихся на 625.
Таким образом, в полученном произведении число 5 входит в степени 201 + 40 + 8 + 1= 250. При этом 2 входит в данное произведение в степени большей 250.
Остальные числа не оканчиваются 0 или 5 и являются четными, поэтому их произведение, также не оканчивается 0.
Следовательно, данное произведение оканчивается на 250 нулей.
Ответ. 250.

Содержание критерия	**Оценка**	**Баллы**
Полное решение.	+	10
Обосновано приведены все основные логические шаги решения. В результате вычислительной ошибки или описки получен неверный ответ.	+.	8
Приведены все основные логические шаги решения. Отсутствует строгое обоснование отдельных выводов. Ответ верный.	±	7
Обосновано приведены все основные логические шаги решения, в том числе показывается, что нужно учитывать делимость на степень 5. В результате неправильного учета отдельного случая делимости на степень 5 получен неверный ответ.		

Отсутствует строгое обоснование отдельных выводов. В результате вычислительной ошибки или описки может быть получен неверный ответ.	+/2	5
Отсутствует строгое обоснование отдельных выводов. Показывается, что нужно учитывать делимость на степень 5, но в результате ошибки получен неверный ответ.		
Ответ верный. Решение отсутствует или неверное.	∓	2
Найдена основная идея решения. Не учтены числа, которые делятся на 25, 125 и 625.		
Решение не соответствует ни одному критерию, описанному выше.	−/0	0
Максимальный балл		10

Задание 11.2. (10 баллов)

Найдите наименьшее значение функции $f(x)=|x|+2|x-1|+3|x-2|\ldots+11|x-10|$.

Решение.

Числовую ось можно разбить на 12 подмножеств:
$(-\infty;0),(0;1),(1;2),\ldots,(9;10),(10;+\infty)$. На каждом из этих множеств функция является линейной и имеет вид $f(x)=k_i x+b_i$. Пусть k_i - угловой коэффициент на i-ом слева множестве ($k_1=-1-2-\ldots-11=-66$ при $x\in(-\infty;0)$, $k_2=1-2-3-\ldots-11=-64$ при $x\in(-\infty;0)$ …)..

Заметим, что $k_1<k_2<...<k_{11}=66$. Следовательно, функция $f(x)$ сначала убывает, а потом возрастает. Так как $k_8=1+2+\ldots+7-8-9-10-11=-10$ при $x\in(6;7)$, а $k_9=1+2+\ldots+7+8-9-10-11=6$ при $x\in(7;8)$, то наименьшее значение функции достигается в точке $x=7$. Оно равно $f(7)=146$.

Ответ: 146.

Содержание критерия	**Оценка**	**Баллы**
Полное решение.	+	10
Обосновано приведены все основные шаги решения. В результате вычислительной ошибки или описки получен неверный ответ.	+.	8
Ответ верный. Приведены все основные логические шаги решения. Отсутствует строгое обоснование отдельных выводов.	±	7
Отсутствует строгое обоснование отдельных выводов. В результате вычислительной ошибки или описки получен неверный ответ.	+/2	5

Ответ верный. Решение отсутствует или неверное.	∓	2
Найдена основная идея решения. Ответ отсутствует или неверный.		
Решение не соответствует ни одному критерию, описанному выше.	−/0	0
Максимальный балл		10

Задание 11.3. (12 баллов)

Сколько различных корней имеет уравнение $f\left(f\left(f(x)\right)\right)=1$, если $f(x)=x-\dfrac{2}{x}$.

Решение.

Пусть $f(x)=k=x-\dfrac{2}{x}$, $f\left(f(x)\right)=f(k)=k-\dfrac{2}{k}$, $f\left(f\left(f(x)\right)\right)=f\left(f(k)\right)=f(k)-\dfrac{2}{f(k)}$.

Уравнение $f\left(f\left(f(x)\right)\right)=f(k)-\dfrac{2}{f(k)}=1 \Leftrightarrow f^2(k)-f(k)-2=0$ имеет два решения $f_1(k)=-1$ и $f_2(k)=2$.

Получаем $\left[\begin{array}{l} f(k)=k-\dfrac{2}{k}=-1 \\ f(k)=k-\dfrac{2}{k}=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k^2+k-2=0 \\ k^2-2k-2=0 \end{array}\right.$.

Совокупность, имеет четыре различных корня k_1,k_2,k_3,k_4.

Заметим, что уравнения $x-\dfrac{2}{x}=k \Leftrightarrow x^2-k_ix-2=0$ имеют два различных корня и эти уравнения с различными k_i не имеют общих корней.

(Школьники должны это строго доказать или найти в явном виде корни *x*).

Итак, исходное уравнение имеет 8 различных корней.

Ответ. 8.

Содержание критерия	**Оценка**	**Баллы**
Полное решение.	+	12
Ответ верный. Приведены все основные логические шаги решения. В решении присутствуют арифметические ошибки или описки, которые не повлияли на общий ход решения.	+.	10
Ответ верный. Приведены все основные логические шаги решения. Отсутствует строгое обоснование отдельных выводов.	±	9
Приведены все основные логические шаги решения. В результате неверного рассуждения получен неверный ответ.	+/2	6
Ответ верный. Приведены основные логические шаги решения.		

Отсутствует доказательство, что уравнения $x^2 - k_i x - 2 = 0$ при различных k_i не имеют общих корней.		
Ответ верный. Решение отсутствует или неверное.	$\mp$	2
Приведены некоторые шаги, отражающие общую идею решения. Ответ отсутствует или неверный.		
Решение не соответствует ни одному критерию, описанному выше.	$-/0$	0
Максимальный балл		12

Задание 11.4. (12 баллов)

Сотрудники фирмы делятся на трудяг и лентяев. В 2016 году средняя зарплата трудяг превышала в два раза среднюю зарплату лентяев. Повысив свою квалификацию, трудяги в 2017 году стали получать на 50% больше, а зарплата лентяев не изменилась. При этом часть лентяев уволили в конце 2016 года. Средняя зарплата всех сотрудников в 2017 году стала на 20% больше, чем была в 2016 году. Найдите сколько процентов от общего числа сотрудников составляли в 2017 году трудяги, если в 2016 году их было 10%.

Решение.

Пусть в 2016 году в фирме работало x трудяг, тогда численность лентяев составляла $9x$, а всего в фирме работало $10x$ человек. Пусть средняя заработная плата лентяя была равна s, тогда средний трудяга получал $2s$, а средняя зарплата по всей фирме равнялась $\frac{2sx + 9xs}{x + 9x} = \frac{11s}{10}$.

Пусть в 2017 году осталось y лентяев, тогда средняя зарплата по всей фирме (с учетом повышения зарплаты трудягам на 50%) стала такой: $\frac{3sx + ys}{x + y}$.

Таким образом, получаем уравнение:

$$\frac{3sx + ys}{x + y} = \frac{11s}{10} \cdot \frac{12}{10}$$

$$100(3sx + ys) = 132(x + y)$$

$$50(3sx + ys) = 66(x + y)$$

$$150x + 50y = 66x + 66y$$

$$84x = 16y$$

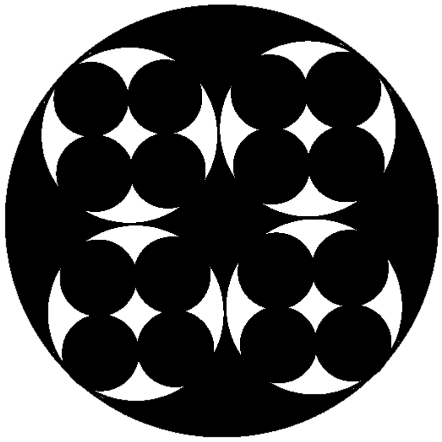
$$y = \frac{21}{4}x$$

В итоге: $\dfrac{x\cdot 100\%}{x+y}=\dfrac{x\cdot 100\%}{x+\dfrac{21}{4}x}=\dfrac{4\cdot 100\%}{4+21}=\dfrac{4\cdot 100\%}{25}=16\%.$

<u>*Ответ.*</u> 16%.

Содержание критерия	**Оценка**	**Баллы**
Полное решение.	+	12
Ответ верный. Приведены все основные логические шаги решения. В решении присутствуют арифметические ошибки или описки, которые не повлияли на общий ход решения.	+.	10
Ответ верный. Приведены все основные логические шаги решения. Отсутствует строгое обоснование отдельных выводов.	±	9
Найдена идея решения, но оно не доведено до конца или содержит ошибки. При этом выполнена существенная часть решения, в частности верно составлена система уравнений.	+/2	6
Решение в целом неверное или незаконченное, но содержит определенное продвижение в верном направлении. При этом соответствующая система уравнений составлена неверно.	∓	2
Найдена идея решения, но оно не доведено до конца или содержит ошибки. При этом выполнена существенная часть решения.	+/2	6
Решение в целом неверное или незаконченное, но содержит определенное продвижение в верном направлении	∓	2
Решение не соответствует ни одному критерию, описанному выше.	−/0	0
Максимальный балл		12

Задание 11.5. (12 баллов)



На первом шаге на листе бумаги была изображена единичная окружность и ограниченный ею круг закрашен черной краской. На каждом из последующих шагов для каждой из окружностей, изображенных на предыдущем шаге, рисуются четыре новые внутренне касающиеся ее окружности равных радиусов. Эти четыре окружности внешне касаются друг друга. Круги, ограниченные новыми окружностями, закрашиваются белой краской, если номер шага четное число, или черной краской, если номер шага нечетен. На рисунке изображен результат трех шагов. Описанный процесс продолжается до бесконечности. Найдите площадь белой области.

Решение.

Если на некотором шаге был изображен круг радиуса R, то на следующем шаге будут изображены окружности радиусов $\frac{R}{1+\sqrt{2}}$. Таким образом, площадь белой области есть сумма:

$$\underbrace{\frac{4\pi}{\left(1+\sqrt{2}\right)^2}}_{\text{4 белых круга второго шага}} - \underbrace{\frac{16\pi}{\left(1+\sqrt{2}\right)^4}}_{\text{16 черных кругов 3-го шага}} + \underbrace{\frac{64\pi}{\left(1+\sqrt{2}\right)^6}}_{\text{64 белых кругов 4-го шага}} - \frac{256\pi}{\left(1+\sqrt{2}\right)^8} + \frac{1024\pi}{\left(1+\sqrt{2}\right)^{10}} - \ldots$$

Это сумма бесконечной убывающей геометрической прогрессии с $b_1 = \frac{4\pi}{\left(1+\sqrt{2}\right)^2}$ и

$$q = -\frac{4}{\left(1+\sqrt{2}\right)^2}.\ S = \frac{b_1}{1-q} = \frac{\frac{4\pi}{\left(1+\sqrt{2}\right)^2}}{1+\frac{4}{\left(1+\sqrt{2}\right)^2}} = \frac{4\pi}{\left(1+\sqrt{2}\right)^2+4}.$$

Ответ: $S = \frac{4\pi}{\left(1+\sqrt{2}\right)^2+4}$.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Полное решение.	+	12
Ответ верный. Приведены все основные логические шаги решения. В решении присутствуют арифметические ошибки или описки, которые не повлияли на общий ход решения.	+.	10
Ответ верный. Приведены все основные логические шаги решения. Отсутствует строгое обоснование отдельных выводов.	±	9
Найдена идея решения, но оно не доведено до конца или содержит ошибки. При этом выполнена существенная часть решения.	+/2	6
Решение в целом неверное или незаконченное, но содержит определенное продвижение в верном направлении	∓	2
Решение не соответствует ни одному критерию, описанному выше.	−/0	0
Максимальный балл		12

Задание 11.6. (14 баллов)

Действительные числа a и b таковы, что $\left(a+\sqrt{1+a^2}\right)\left(b+\sqrt{1+b^2}\right)=1$. Найдите сумму $a + b$.

<u>*Решение.*</u>

$$b+\sqrt{1+b^2}=\frac{1}{a+\sqrt{1+a^2}}=-a+\sqrt{1+a^2}$$

$$a+\sqrt{1+a^2}=\frac{1}{b+\sqrt{1+b^2}}=-b+\sqrt{1+b^2}$$

Складывая полученные равенства, получаем

$$a+b+\sqrt{1+a^2}+\sqrt{1+b^2}=-a-b+\sqrt{1+a^2}+\sqrt{1+b^2} \quad \Rightarrow a+b=0.$$

<u>*Ответ.*</u> 0.

Содержание критерия	**Оценка**	**Баллы**
Полное решение.	+	14
Представлены все основные логические шаги решения. В решении отсутствуют некоторые обоснования. Ответ верный.	±	11
Найдена идея решения. Представлены основные логические шаги решения. Ответ неверный или отсутствует.	+/2	7
Ответ верный. Решение отсутствует или неверное.	∓	3
Решение не соответствует ни одному критерию, описанному выше.	−/0	0
Максимальный балл		14

Задание 11.7. (14 баллов)

Назовем положительное число a близким сверху положительному числу b, если a превосходит b, но не больше чем на 1%. Докажите, что если в треугольнике радианная мера одного из углов близка сверху к радианной мере другого угла, то найдутся две стороны этого треугольника такие, что длина одной из них близка сверху к длине другой.

<u>*Решение.*</u>

Пусть угол радианная мера угла α близка сверху радианной мере угла β, то есть

$$\beta<\alpha<1{,}01\beta.$$

Покажем, что длина стороны a близка сверху длине стороне b.

Поскольку напротив большего угла лежит большая сторона, достаточно доказать, что $a<1{,}01b$.

В силу убывания функции $y=\dfrac{\sin x}{x}$ (школьники должны доказать это) получаем

$$\frac{\sin\alpha}{\alpha}<\frac{\sin\beta}{\beta}.$$

Так как $\alpha<1{,}01\beta$, то $\dfrac{\sin\alpha}{1{,}01\beta}<\dfrac{\sin\beta}{\beta}\Rightarrow\sin\alpha<1{,}01\sin\beta$.

По теореме синусов $\dfrac{\sin\alpha}{a}=\dfrac{\sin\beta}{b}\Rightarrow\dfrac{1{,}01\sin\beta}{a}>\dfrac{\sin\beta}{b}\Rightarrow a<1{,}01b$, что и требовалось доказать.

Доказательство, что функция $y=\dfrac{\sin x}{x}$ убывает на отрезке $(0;\pi)$:

$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)'=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}<0.$$

Действительно, $(x\cos x-\sin x)'=\cos x-x\sin x-\cos x=-x\sin x<0$. Следовательно, функция $y=x\cos x-\sin x$ убывает на отрезке $(0;\pi)$ и $y(0)=0$. То есть $x\cos x-\sin x<0$ на отрезке $(0;\pi)$.

Содержание критерия	**Оценка**	**Баллы**
Полное решение.	+	14
Приведены все основные логические шаги решения. Отсутствует строгое обоснование отдельных выводов.	±	11
Найдена идея решения, но оно не доведено до конца или содержит ошибки. При этом выполнена существенная часть решения.	+/2	7
Решение в целом неверное или незаконченное, но содержит определенное продвижение в верном направлении	∓	4
Решение не соответствует ни одному критерию, описанному выше.	−/0	0
Максимальный балл		12

Задание 11.8. (16 баллов)

В алфавите языка альфов три буквы *А*, *Л* и *Ф*. Все слова этого языка можно построить, применяя последовательно следующие правила к любому слову из этого языка:

(1) поменять порядок букв в слове на противоположный

(2) заменить две последовательные буквы так: *ЛА* → *ФФ*, *АФ* → *ЛЛ*, *ФЛ* → *АА*, *ЛЛ* → *АФ*, *ФФ* → *ЛА* или *АА* → *ФЛ*.

Известно, что *ЛЛАФАЛАФФАЛАФФФАЛАФФФФАЛЛ* – это слово из языка альфов. Есть ли в языке альфов слово *ЛФАЛФАЛФАЛФАЛАФЛАФЛАФЛАФЛ*?

Решение.

Назовем «величиной» слова число $n - m$, где n и m – количество букв Л и А соответственно в данном слове. Заметим, что все допустимые операции сохраняют остаток «величины» слова по модулю 3. «Величина» известного слова *ЛЛАФАЛАФФАЛАФФФАЛАФФФФАЛЛ* равна $7 - 8 = -1$, а «величина» слова *ЛФАЛФАЛФАЛФАЛАФЛАФЛАФЛАФЛ* равна $9 - 8 = 1$, то есть такое слово не может встретиться в алфавите этого языка.

Содержание критерия	**Оценка**	**Баллы**
Полное решение.	+	16
Найдена идея решения. Решение не доведено до конца или содержит ошибки. При этом имеется существенное продвижение в верном направлении.	+/2	8
Решение в целом неверное или незаконченное, но содержит определенное продвижение в верном направлении.	∓	4
Решение не соответствует ни одному критерию, описанному выше.	−/0	0
Максимальный балл		16