Вариант 2

Задание 1(10). На предприятии доля мужчин среди работников составляла 48%. По сокращению штата было уволено 25 человек, в том числе 10 мужчин. После этого доля мужчин среди работников стала равна q%. Найдите все возможные целые значения q.

Решение. До сокращения штатов отношение числа мужчин к числу женщин равнялось $48:52=12:13$. Поэтому можно полагать, что было $12m$ мужчин и $13m$ женщин, где m – некоторое натуральное число. После сокращения осталось $12m-10$ мужчин среди $12m+13m-25=25(m-1)$ всех работников. Поскольку $q=\dfrac{12m-10}{25(m-1)}\cdot 100=\dfrac{48m-40}{m-1}=40+\dfrac{8}{m-1}$, то число $m-1$ делит 8, откуда $m\in\{2;3;5;9\}$ и, соответственно, $q\in\{56;52;50;49\}$.

Ответ: 49, 50, 52, 56.

Критерии	Оценка	Баллы
Задача решена полностью.	+	10
Задача решалась по верному плану, но перебор проведён не до конца: не доказано, что других значений q нет.	±	7
Составлены верные соотношения, связывающие q и m, но дальше продвижений нет.	+ / 2	3
Решение в целом не верное, но содержит все или часть искомых значений q (и не содержит других).	∓	2, если все 1, если не все

Задание 2(10). Через каждые три несмежные вершины куба проведена плоскость. На сколько частей эти плоскости разбивают куб?

Решение. Для куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ все 8 проведённых плоскостей делятся на две группы, первую из которых составляют плоскости граней тетраэдра AB_1CD_1, а вторую – плоскости граней тетраэдра A_1BC_1D. В каждой группе плоскости внутри куба не пересекаются.

Плоскостями первой группы куб разбивается на 5 тетраэдров – «центральный» (AB_1CD_1) и 4 «угловых». При этом «центральный» пересечён всеми 4 плоскостями второй группы и разбит, следовательно, на $1+4=5$ частей; каждый «угловой» тетраэдр пересечён 3 плоскостями второй групп и разбит на $1+3=4$ части. Всего, таким образом, имеем $5+4\cdot 4=21$ часть.

Ответ: 21.

Критерии	Оценка	Баллы
Задача решена полностью.	+	10
Есть значительное продвижение в доказательстве ответа, но есть и пробелы в рассуждении.	±	8
Есть некоторые верные утверждения или верный чертёж.	+ / 2	4
Приведён верный ответ без каких-либо обоснований.	∓	2

Задание 3(12). Найдите значения дробей $A=\dfrac{\cos(\alpha+\beta+\gamma)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma}$ и $B=\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\gamma}{\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\beta\cdot\operatorname{ctg}\gamma}$, если числа α,β и γ таковы, что $A=3B$.

Решение. Так как $\cos(\alpha+\beta+\gamma)=\cos(\alpha+\beta)\cos\gamma-\sin(\alpha+\beta)\sin\gamma=$
$=\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma-\sin\alpha\cos\beta\sin\gamma-\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma$, то $A=1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta-\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma$. При этом $B=\dfrac{1}{\operatorname{ctg}\beta\operatorname{ctg}\gamma}+\dfrac{1}{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\gamma}+\dfrac{1}{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta}=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\gamma+\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma=1-A$. Из равенства $B=1-A$ и $A=3B$ находим $A=\dfrac{3}{4}$, $B=\dfrac{1}{4}$.

Ответ: $A=\dfrac{3}{4}$, $B=\dfrac{1}{4}$.

Критерии	Оценка	Баллы
Задача решена полностью.	+	12
Ответ получен только для частного случая (например, когда $\alpha=\beta=\dfrac{\pi}{4}$).	∓	4

Задание 4(12). Косинус двугранного угла при каждом из рёбер AB, BC, CD и DA основания правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ равен 0,8. Точки K, L, M и N являются проекциями точки S на биссекторные плоскости при рёбрах основания. Найдите отношение объёма многогранника *SKLMN* к объёму пирамиды *SABCD*.

Решение. Точки K_1, L_1, M_1 и N_1, симметричные точке *S* относительно указанных биссекторных плоскостей, лежат в плоскости *ABCD*. А поскольку вся четвёрка биссекторных плоскостей переходит в себя при повороте на 90° вокруг оси пирамиды, то этим же свойством обладает и четвёрка (K_1, L_1, M_1, N_1). Можно считать, что эти точки образуют квадрат $K_1L_1M_1N_1$, центр *O* которого совпадает с центром квадрата *ABCD*.

Найдём отношение площадей этих квадратов. Пусть *P* – середина ребра *AB*, а точкой, симметричной *S* относительно соответствующей биссекторной плоскости, является K_1. Тогда $SP = PK_1$, $OP = 0{,}8 \cdot SP = 0{,}8 \cdot PK_1$, откуда $OK_1 = PK_1 - OP = \frac{1}{4} \cdot OP.$ Но площадь квадрата $K_1L_1M_1N_1$, в котором отрезок OK_1 – половина диагонали, равна $2(OK_1)^2$, тогда как площадь квадрата *ABCD*, сторона которого вдвое длиннее отрезка OP, равна $4 \cdot (OP)^2 = 64 \cdot (OK_1)^2$. Значит, отношение площадей равно $2:64 = 1:32.$

Поэтому объём пирамиды $SK_1L_1M_1N_1$ составляет $\frac{1}{32}$ объём пирамиды *SABCD*. Остаётся заметить, что многогранник *SKLMN*, будучи образом пирамиды $SK_1L_1M_1N_1$ при гомотетии с центром *S* и коэффициентом $\frac{1}{2}$, имеет объём, равный $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$ объёма пирамиды $SK_1L_1M_1N_1$. Перемножим $\frac{1}{32}$ и $\frac{1}{8}$, получим ответ.

Ответ: $\frac{1}{256}$.

Критерии	Оценка	Баллы
Задача решена полностью.	+	12
Ход решения и вычисления верны, но рассуждения содержат незначительные проблемы.	±	10
Намечен верный план решения, но не удалось получить все необходимые отношения длин и площадей.	∓	3

Задание 5(12). Последовательность (a_n) определена условиями $a_0 = a_1 = 1$ и $a_{n+2} = (n+3)a_{n+1} - (n+1)a_n$ для $n = 0, 1, 2, \ldots, 98.$ Найдите a_{100}.

Решение. Так как $a_{n+2} - (n+2)a_{n+1} = a_{n+1} - (n+1)a_n$ для любого $n \geq 0,$ то $a_{100} - 100a_{99} = a_{99} - 99a_{98} = a_{98} - 98a_{97} = \ldots = a_2 - 2a_1 = a_1 - a_0.$ В силу условия $a_0 = a_1 = 1$ все эти 100 разностей равны нулю. Значит, выполнены равенства $a_{100} = 100a_{99} = 100 \cdot 99a_{98} = 100 \cdot 99 \cdot 98a_{97} = 100 \cdot 99 \cdot 98 \cdot \ldots \cdot 2a_1 = 100!.$

Ответ: 100!.

Критерии	Оценка	Баллы
Задача решена полностью.	+	12
Ответ дан только на основе вычислений для небольших *n*.	∓	1

Задание 6(14). На сторонах *BC*, *CA* и *AB* остроугольного неравнобедренного треугольника *ABC* выбраны точки *L*, *M* и *N* соответственно. В треугольнике *LMN* проведена высота *MP*. Известно, что $AN = NM = ML = LC$ и что биссектриса угла *ABC* проходит через середину отрезка *MP*. Найдите величину угла *ABC*.

Решение. Обозначим искомую величину через *x*, а середину отрезка *MP* – через *Q*. Из условий $AN = NM$ и $ML = LC$ следуют равенства $\angle AMN = \angle BAC$ и $\angle CML = \angle BCA$ соответственно, поэтому $\angle LMN = 180^\circ - \angle AMN - \angle CML = 180^\circ - \angle BAC - \angle BCA = x.$ Заметим, далее, что из условия $NM = ML$ следует, что прямая *MP* – серединный перпендикуляр к отрезку *LN*; с учётом условия $\angle ABQ = \angle CBQ$ это означает, что *Q* – середина дуги *NL* описанной окружности треугольника *NBL*, причём дуга не содержит точку *B*. По $\angle LQN = 180^\circ - x = 180^\circ - \angle LMN$ и, ввиду того, что *Q* и *M* лежат в одной полуплоскости относительно прямой *LN*, заключаем, что *Q* – точка пересечения высот треугольника *LMN*.

Из равенств $LP = MP\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, $LP = QP\operatorname{tg}\frac{180^\circ - x}{2}$ и условия $MP = 2 \cdot QP$ получаем равенство $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = 2\operatorname{tg}\frac{180^\circ - x}{2}$, откуда $\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} = 2$ и $x = 2\operatorname{arctg}\sqrt{2}.$

Ответ: $2\operatorname{arctg}\sqrt{2}.$

Критерии	Оценка	Баллы
Задача решена полностью.	+	14
При правильном ходе решения допущены ошибки на заключительном этапе вычислений.	±	10
Доказано, что *Q* – точка пересечения высот треугольника *LMN*, но дальнейших продвижений нет.	∓	4
Свойства точки *Q* не доказаны, но использованы верно.	∓	4

Задание 7(14). Число $a>1$ таково, что неравенства $5<a^n<25$ выполняются ровно при четырёх натуральных значениях *n*. При скольких натуральных значениях *n* могут выполнятся неравенства $25<a^n<125$?

Решение. Полагая $\log_a 5=\alpha$, неравенства $5<a^n<25$ перепишем в виде $\alpha<n<2\alpha$, а неравенства $25<a^n<125$ – в виде $2\alpha<n<3\alpha$. Согласно условию, для некоторого натурального числа *m* выполнены неравенства $m-1<\alpha<m<m+3<2\alpha<2m+4$. Из них следует, что $2m-2<2\alpha<2m<2m+2<3\alpha<2m+4$; таким образом, неравенствам $2\alpha<n<3\alpha$ обязательно удовлетворяют числа $2m, 2m+1, 2m+2$ и, возможно, одно или оба числа пары $\{2m-1;2m+3\}$.

Приведём три соответствующих примера. При $\alpha=3,6$ имеем $m=4$ и $2m-1<2\alpha<3\alpha<2m+3$; при $\alpha=3,7$ число *m* также равно 4, но $2m-1<2\alpha<2m+3<3\alpha$; наконец, при $\alpha=4,4$ получается $m=5$ и $2\alpha<2m-1<2m+3<3\alpha$.

Ответ: три, четыре или пять.

Критерии	Оценка	Баллы
Задача решена полностью.	+	14
Получен ответ «от трёх до пяти», но не показано, что все эти возможности реализуются.	±	9
Приведены три соответствующих примера, но доказана только одна из границ числа решений.	+ / 2	6
Приведены только примеры для 3, 4, 5 решений.	∓	3

Задание 8(16). В турнире 20 шахматистов, каждый сыграл по одной партии с каждым из остальных. В итоге нашлась цепочка участников $A_1, A_2, \ldots, A_n$, где каждый, начиная с A_2, набрал на ½ очка больше, чем предыдущий. Каким наибольшим могло быть число *n*? (За выигрыш партии начисляется 1 очко, за ничью ½, за поражение 0.)

Решение. Через $|A|$, где *A* – произвольный участник, будем обозначать число очков, набранных *A*. Тогда, если $|A_1|=m$, то $|A_k|=m+\frac{k-1}{2}$ для $k=1,...,n$, а сумма $|A_1|+|A_2|+...+|A_n|$ равна $mn+\frac{(n-1)n}{4}$. Отметим также, что всего в турнире сыграно $\frac{20\cdot 19}{2}=190$ партий и, соответственно, разыграно 190 очков; поэтому $mn+\frac{(n-1)n}{4}=190-S$, где S – сумма очков, набранных 20-*n* участниками, не вошедшими в цепочку $A_1, A_2, ..., A_n$.

При $n=20$ это равенство приобретает вид $20m+95=190$, откуда $m=4,75$. Но число набранных шахматистом очков не может быть таким.

При $n=19$ получается равенство $19m+\frac{171}{2}=190-S$, откуда $m=\frac{11}{2}-\frac{S}{19}$. Покажем, что результаты турнирных партий могли быть такими, что некоторые 19 игроков $A_1, A_2, ..., A_{19}$ образовали цепочку с требуемым свойством. Пусть $S=0$ (то есть оставшийся, 20-й, шахматист проиграл все свои партии), а при $1\le i,\ j\le 19$ участник A_i выиграл у A_j в том и только в том случае, если выполнено неравенство $i\ge j+10$. Легко убедиться, что тогда $|A_k|=5+\frac{k}{2}$ для $k=1,2,...,19$.

Ответ: 19.

Критерии	Оценка	Баллы
Задача решена полностью.	+	16
Есть пример для $n=19$, а невозможность равенства $n=20$ не доказана.	+ / 2	8
Доказано, что $n\ne 20$, а пример для $n=19$ не приведён.	∓	4