11 класс Вариант 1

Задание 1(10). В фирме работало 150 сотрудников, в том числе 73 женщины. Затем произошло объединение с другой фирмой, где женщины составляли 40%. В результате доля женщин среди сотрудников стала равна p%. Найдите все возможные целые значения p.

Решение. В фирме, с которой произошло объединение, отношение числа женщин к числу мужчин равнялось $40:60=2:3$. Поэтому можно полагать, что там было $2n$ женщин и $3n$ мужчин, где n – некоторое натуральное число. В результате объединения получилась фирма, среди $150+5n$ сотрудников которой, ровно $73+2n$ женщин. Поскольку $p=\frac{73+2n}{150+5n}\cdot 100=\frac{7300+200n}{150+5n}=\frac{1460+40n}{30+n}=40+\frac{260}{30+n}$, то число $30+n$ делит 260 и может быть равным 260, 130, 65 или 52. Соответствующие значения p равны 41, 42, 44 и 45.

Ответ: 41, 42, 44, 45.

Критерии	Оценка	Баллы
Задача решена полностью.	+	10
Задача решалась по верному плану, но перебор проведён не до конца: не доказано, что других значений p нет.	±	7
Составлены верные соотношения, связывающие p и n но дальше продвижений нет.	+ / 2	3
Решение в целом не верное, но содержит все или часть искомых значений p (и не содержит других).	∓	2, если все 1, если не все

Задание 2(10). Через каждую пару противоположных рёбер куба проведена плоскость. На сколько частей эти плоскости разбивают куб?

Решение. Каждая такая плоскость проходит через пару параллельных диагоналей противоположных граней куба. Поэтому каждая грань разбита на 4, а вся поверхность куба – на $4\cdot 6=24$ треугольника, каждые два из которых отделены друг от друга хотя бы одной из проведённых плоскостей. А поскольку все проведённые плоскости пересекаются в центре куба, то каждая часть содержит в качестве одной из своих граней один из этих 24 треугольников. Следовательно, число частей разбиения также равно 24.

Ответ: 24.

Критерии	Оценка	Баллы
Задача решена полностью.	+	10
Есть значительное продвижение в доказательстве ответа, но есть и пробелы в рассуждении.	±	8
Есть попытка доказательства и/или только правильный чертёж.	+ / 2	4
Приведён верный ответ без каких-либо обоснований.	∓	1

Задание 3(12). Найдите значение дробей $A\frac{\sin(\alpha+\beta+\gamma)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma}$ и $B\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma}{\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}\gamma}$, если числа α,β и γ таковы, что $A=3B$.

Решение. Так как $\sin(\alpha+\beta+\gamma)=\sin(\alpha+\beta)\cos\gamma+\cos(\alpha+\beta)\sin\gamma=$ $=\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma+\cos\alpha\sin\beta\cos\gamma-\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$, то $A=\operatorname{ctg}\beta\operatorname{ctg}\gamma+\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\gamma+\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta-1=$ $=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}+\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\gamma}+\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}-1=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma}{\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}\gamma}-1=B-1.$ Из равенств $A=B-1$ и $A=3B$ находим $A=\frac{-3}{2}$, $B=\frac{-1}{2}$.

Ответ: $A=\frac{-3}{2}$, $B=\frac{-1}{2}$.

Критерии	Оценка	Баллы
Задача решена полностью.	+	12
Ответ получен только для частного случая (например, когда $\alpha=\beta=\frac{\pi}{4}$).	∓	4

Задание 4(12). A',B' и C' – проекции вершины S правильной треугольной пирамиды $SABC$ на биссекторные плоскости двугранных углов при рёбрах BC, AC и AB. Найдите тангенс каждого из этих углов, если объём пирамиды $SA'B'C'$ в 10 раз меньше объёма пирамиды $SABC$.

Решение. Точки S_1,S_2 и S_3 симметричные S относительно биссекторных плоскостей, лежат в плоскости ABC. А поскольку тройка этих биссекторных плоскостей переходит в себя при повороте на 60° вокруг оси пирамиды, то этим свойством обладает и тройка точек S_1,S_2,S_3. Следовательно, треугольник $S_1S_2S_3$ –правильный, и его центр, который мы обозначим через O, совпадает с центром треугольника ABC.

Заметим, далее, что пирамида $SS_1S_2S_3$ – образ пирамиды $SA'B'C'$ при гомотетии с центром S и коэффициентом 2. С учётом условия задачи это означает, что отношение объёмов пирамид $SABC$ и $SS_1S_2S_3$ равно $10:2^3 = 10:8 = 5:4.$ А поскольку у этих пирамид общая высота SO, то и отношение площади треугольника ABC к площади треугольника $S_1S_2S_3$ равно 5:4. В качестве следствия получается равенство $OA:OS_1 = \sqrt{5}:2$, которое будет нами использовано.

Обозначив величину двугранного ребра при ребре BC через φ, точкой, симметричной S относительно соответствующей биссекторной плоскости будем считать S_1. Тогда $\varphi = \angle SPA = \angle SPS_1$, где P – середина ребра BC; треугольник SPS_1 равнобедренный $(SP = PS_1)$, откуда $\angle SS_1P = \dfrac{180^\circ - \varphi}{2}$, $OS_1 = SO\operatorname{ctg}\angle SS_1P = SO\operatorname{tg}\dfrac{\varphi}{2}$. А поскольку $OA = 2\cdot OP = 2\cdot SO\operatorname{ctg}\varphi$, то $\dfrac{\sqrt{5}}{2} = \dfrac{OA}{OS_1} = \dfrac{2\operatorname{ctg}\varphi}{\operatorname{tg}\dfrac{\varphi}{2}}$ и $\operatorname{tg}\dfrac{\varphi}{2}\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{4}{\sqrt{5}}$. При $0^\circ < \varphi < 90^\circ$ левая часть последнего равенства равна $\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi} - 1$, что позволяет найти $\operatorname{tg}\varphi = \sqrt{\dfrac{16+8\sqrt{5}}{5}}$.

Ответ: $\sqrt{\dfrac{16+8\sqrt{5}}{5}}$.

Критерии	Оценка	Баллы
Задача решена полностью.	+	12
Задача в основном решена, но в ответе указано значение другой тригонометрической функции угла φ.	+.	11
Ход решения верный, но на заключительных его этапах допущены вычислительные ошибки.	±	8
Намечен верный план решения, но нет нужных соотношений для угла φ.	∓	3

Задание 5(12). Последовательность (a_n) определена условиями $a_1 = 0{,}01$ и $(n+2)a_n = na_{n+1}$ для $n = 1, 2, \ldots, 99.$ Найдите сумму $a_1 + a_2 + \ldots + a_{100}$.

Решение. Последовательно сложив равенства $3a_1 = a_2$, $4a_2 = 2a_3$, $5a_3 = 3a_4, \ldots, 101a_{99} = 99a_{100}$, приведя замет подобные члены и сократив на 3, получим $a_1 + a_2 + \ldots + a_{99} = 33a_{100}$. Поэтому искомая сумма $S = 34a_{100}$. А поскольку $a_{100} = \dfrac{101}{99}a_{99} = \dfrac{101}{99}\cdot\dfrac{100}{98}a_{98} = \ldots = \dfrac{101\cdot100\cdot\ldots\cdot4\cdot3}{99\cdot98\cdot\ldots\cdot2\cdot1}a_1 = \dfrac{101\cdot100}{2}a_1 = 50{,}5,$ то $S = 34\cdot50{,}5 = 1717.$

Ответ: 1717.

Критерии	Оценка	Баллы
Задача решена полностью.	+	12
Задача не решена, но есть доказательство одного из двух нужных равенств ($S = 34a_{100}$ или $a_{100} = \dfrac{101\cdot100}{2}a_1$).	∓	3

Задание 6(14). На сторонах BC, CA и AB неравнобедренного треугольника ABC выбраны точки L, M и N соответственно. Биссектриса угла ABC и серединный перпендикуляр к отрезку NL пересекаются в точке P. Известно, что $\angle ABC = 135^\circ$, $AN = NM = ML = LC = 1.$ Найдите длину отрезка MP.

Решение. Так как из условий $AN = NM$ и $ML = LC$ следуют равенства $\angle AMN = \angle BAC$ и $\angle CML = \angle BCA$ соответственно, то $\angle LMN = 180^\circ - \angle AMN - \angle CML = 180^\circ - \angle BAC - \angle BCA = \angle ABC.$ Заметим, далее, что точка P лежит на описанной окружности треугольника NBL (и делит пополам дугу NL, не содержащую B). Поэтому $\angle LPN = 180^\circ - \angle ABC = 180^\circ - \angle LMN$ с учётом того, что P и M лежат в одной полуплоскости относительно прямой LN, заключаем, что P – ортоцентр треугольника LMN.

Рассмотрим теперь треугольник LPM. Используя равенства $\angle LMN = 135^\circ$, $\angle LPN = 45^\circ$ и равнобедренность треугольника LPN, нетрудно найти углы $\angle PLM = 45^\circ$ и $\angle LPM = 22^\circ30'$. Применив теорему синусов, получим $\dfrac{MP}{\sin 45^\circ} = \dfrac{ML}{\sin 22^\circ30'}$, откуда $MP = 2\cos 22^\circ30' = 2\sqrt{\dfrac{1+\cos 45^\circ}{2}} = \sqrt{2+\sqrt{2}}.$

Ответ: $\sqrt{2+\sqrt{2}}$.

Критерии	Оценка	Баллы
Задача решена полностью.	$+$	14
При правильном ходе решения допущены ошибки на заключительном этапе вычислений.	$\pm$	10
Доказано, что P – ортоцентр треугольника LMN, но дальнейших продвижений нет.	$\mp$	4
Свойства точки P не доказаны, но использованы верно.	$\mp$	4

Задание 7(14). Число $a>0$ таково, что неравенства $2\le a^n\le 4$ выполняются ровно при пяти натуральных значениях n. При скольких натуральных значениях n могут выполняться неравенства $4\le a^n\le 8$?

Решение. Ясно, что $a>1$. Полагая $\log_a 2=\alpha$, неравенства $2\le a^n\le 4$ перепишем в виде $\alpha\le n\le 2\alpha$, а неравенства $4\le a^n\le 8$ – в виде $2\alpha\le n\le 3\alpha$. Согласно условию, для некоторого натурального числа m выполнены неравенства $m-1<\alpha\le m<m+4\le 2\alpha<m+5$. Из них следует, что $2m-2<2\alpha\le 2m<2m+3<3\alpha<2m+5$; таким образом, неравенствам $2\alpha\le n\le 3\alpha$ обязательно удовлетворяет четвёрка чисел $\{2m;2m+1;2m+2;2m+3\}$ и, возможно, одно или оба числа пары $\{2m-1;2m+4\}$.

Приведём три соответствующих примера. При $\alpha=4,6$ имеем $m=5$ и $2m-1<2\alpha<3\alpha<2m+4$; при $\alpha=5,2$ число m равно 6 и выполняются неравенства $2\alpha<2m-1<3\alpha<2m+4$; наконец, если $\alpha=5,4$, то $m=6$ и $2\alpha<2m-1<2m+4<3\alpha$.

Ответ: четыре, пять или шесть.

Критерии	Оценка	Баллы
Задача решена полностью.	$+$	14
Получен ответ «от четырёх до шести», но не показано, что эти три возможности реализуются.	$\pm$	9
Приведены все три соответствующих примера, но одна из границ (верхняя или нижняя) не доказана.	$+/2$	6
Приведены только соответствующие примеры.	$\mp$	3

Задание 8(16). В стране 20 городов, некоторые из которых соединены авиалиниями. Беспосадочный перелёт из *А* в *Б* назовём централизующим, если из *Б* можно в большее, чем из *А*, число городов долететь без пересадки. Какое наибольшее число городов может насчитывать авиамаршрут, все перелёты на котором централизующие?

Решение. Через $|A|$, где A – произвольный город, обозначим число городов, соединённых беспосадочными авиалиниями с A. Будем рассматривать авиамаршрут, который проходит последовательно через города $A_1,A_2,\ldots,A_m$, и все перелёты на котором централизующие. Ясно, что тогда $1\le|A_1|<|A_2|<\ldots<|A_m|$

Равенство $m=19$ невозможно, поскольку имело бы своими следствиями взаимоисключающие равенства $|A_{19}|=19$ и $|A_1|=1$.

Допустим, что $m=18$ и $|A_{18}|=19$. Тогда $|A_1|=2,|A_2|=3,\ldots,|A_{17}|=18$, то есть город A_{17} соединён либо с A_1, либо с A_2. Но A_1 соединён с A_2 и A_{18}, а A_2 – с A_1,A_3 и A_{18}.

Наконец, предположим, что $m=18$ и $|A_{18}|=18$. Тогда $|A_1|=1$, A_1 соединён с A_2; $|A_2|=2$, A_2 соединён с A_1 и A_3. Получается, что город A_{18} не соединён ни с A_1, ни с A_2, а тогда равенство $|A_{18}|=18$ невозможно.

Итак, $m\le 17$. Приведём пример системы авиалиний, для которой все перелёты на маршруте, проходящем последовательно через города $A_1,A_2,\ldots,A_{17}$, централизующие. Пусть города A_i и A_j соединены, если выполнено хотя бы одно из следующих трёх условий:

1) $i+1=j$;
2) $i+j\ge 20$, причём $11\le j\le 17$;
3) $j=10$, $j\in\{19;20\}$.

Ответ: 17.

Критерии	Оценка	Баллы
Задача решена полностью.	$+$	16
Приведён пример, но не доказана оценка	$+/2$	8
Доказана оценка, но нет верного примера.	$\mp$	4