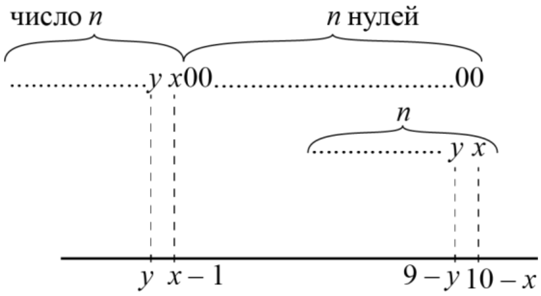
10 класс

Вариант 1

Задание 1 (10 баллов). Докажите, что для любого натурального n существует натуральное число, которое больше своей суммы цифр в $\underbrace{11 \ldots 11}_{n}$ раз.

Решение: Условию удовлетворяет число $n(10^n - 1)$.

У числа $n(10^n - 1)$ сумма цифр равна $9n$. Убедиться в этом можно, рассмотрев десятичную запись числа $n(10^n - 1)$, получающуюся в результате вычитания $n \cdot 10^n$ и n.



(Если n оканчивается на k нулей, то будем рассматривать вместо него число $n \cdot 10^{-k}$, очевидно, что сумма цифр не поменяется. Заметим , что $10^n > n$. Если последняя цифра числа n равна x, то у $n(10^n - 1)$ последняя цифра будет 10-x, если предпоследняя цифра y, то у $n(10^n - 1)$ предпоследняя цифра будет 9-y и т.д. А в начале числа $n(10^n - 1)$ будут идти цифры числа n (см. рис). Далее легко видеть, что сумма цифр $n(10^n - 1)$ будет равна $9n$.)

Критерии	**Оценка**	**Баллы**
Задача решена полностью.	$+$	10
Решение задачи, содержит верную общую схему решения, в котором отсутствуют некоторые части обоснования	$\pm$	7
Приведено число $n(10^n - 1)$ без доказательства	$+/2$	5
Решение в целом неверное или незаконченное, но содержит определенное содержательное продвижение в верном направлении.	$\mp$	2
Задача не решена, содержательных продвижений нет.	$-$	0
Задача не решалась.	0	0

Задание 2 (10 баллов). Решите уравнение: $2021x^3 + 2022x^2 + 2022x + 674 = 0$.

Ответ: $x = -\frac{\sqrt[3]{674}}{\sqrt[3]{1347}+\sqrt[3]{674}}$

Решение: Данное уравнение равносильно уравнению $1347x^3 + 674(x+1)^3 = 0$, из которого и находится единственный действительный корень.

Критерии	Оценка	Баллы
Задача решена полностью.	$+$	10
Решение задачи, содержит верную общую схему решения, но в результате описки или арифметической ошибки получен неверный ответ.	$\pm$	7
Решение содержит значительное продвижение в верном направлении. Получено уравнение $1347x^3 + 674(x+1)^3 = 0$, но не решено.	$+/2$	5
Решение в целом неверное или незаконченное, но содержит определенное содержательное продвижение в верном направлении.	$\mp$	2
Задача не решена, содержательных продвижений нет.	$-$	0
Задача не решалась.	0	0

Задание 3 (12 баллов). Два прямоугольника *ABCD* и *AEFG* имеют общую вершину *A* и расположены на плоскости так, что точки *B, E, D* и *G* лежат на одной прямой (в указанном порядке). Пусть прямые *BC* и *GF* пересекаются в точке *T*, а прямые *CD* и *EF* – в точке *H*. Докажите, что точки *A, H* и *T* лежат на одной прямой.

Решение. Пусть прямые *CD* и *FG* пересекаются в точке *M*, а прямые *BC* и *EF* – в точке *N*. Четырехугольники *DHEA* и *FHCT* вписанные (у каждого из них два противоположных угла равны 90^0), следовательно, $\angle FTC=180^0-\angle FHC=\angle DAE$ и $\angle DAH=\angle DEH$. Так как $\angle DMG=90^0-\ \angle FTC=90^0-\angle DAE=\angle DAG$, то четырехугольник *ADGM* также вписанный. Поэтому $\angle DAM=\angle FGE$, значит, $\angle MAH=\angle DAM+\angle DAH=\angle FGE+\angle DEH=90^0$.

Аналогично, $\angle NAH=90^0$, следовательно, точки *M, A* и *N* лежат на одной прямой. Тогда *H* – ортоцентр треугольника *TMN*, а точки *T, H* и *A* лежат на его высоте.

Критерии	Оценка	Баллы
Задача решена полностью.	$+$	12
Решение задачи, содержит верную общую схему решения, в котором отсутствуют некоторые обоснования	$\pm$	8
Решение содержит значительное продвижение в верном направлении.	$+/2$	6
Решение в целом неверное или незаконченное, но содержит определенное содержательное продвижение в верном направлении.	$\mp$	2

Задача не решена, содержательных продвижений нет.	−	0
Задача не решалась.	0	0

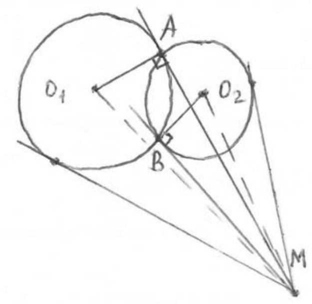
Задание 4 (12 баллов). Пусть m и n – натуральные числа. Докажите, что число $5^n + 5^m$ можно представить в виде суммы двух точных квадратов тогда и только тогда, когда число $n - m$ чётное.

Решение. Если m и n оба четны, то $m = 2k$, $n = 2l$ и $5^{2k} + 5^{2l} = (5^k)^2 + (5^l)^2$. Если m и n оба нечетны, то $m = 2k + 1$, $n = 2l + 1$ и $5^{2k+1} + 5^{2l+1} = (5^k + 2 \cdot 5^l)^2 + (5^l - 2 \cdot 5^k)^2$. Если m и n имеют разную четность, то $5^n + 5^m = 5^{2k+1} + 5^{2l} \equiv 6\ (mod\ 8)$. Но остатки точных квадратов по модулю 8 могут принимать лишь значения 0, 1 и 4 и остаток их суммы по модулю 8 не может быть равен 6.

Критерии	Оценка	Баллы
Задача решена полностью.	+	12
Решение задачи, содержит верную общую схему решения, в котором отсутствуют некоторые обоснования	±	8
Решение содержит значительное продвижение в верном направлении. Верно разобран только случай, когда m и n имеют разную четность.	+ / 2	6
Решение в целом неверное или незаконченное, но содержит определенное содержательное продвижение в верном направлении. За каждый из верно разобранных случаев, когда m и n оба четные или оба нечетные по 2 балла.	∓	2
Задача не решена, содержательных продвижений нет. Разобраны конкретные частные случаи числовых значений n и m.	−	0
Задача не решалась.	0	0

Задание 5 (12 баллов). Две окружности $C_1(O_1)$ и $C_2(O_2)$ с различными радиусами пересекаются в точках A и B. Касательная из точки A к C_1 пересекает касательную из точки B к C_2 в точке M. Докажите, что окружности из точки M видны под одинаковыми углами. (Говорят, что окружность видна из точки вне ее под углом α, если касательные, проведенные из этой точки к окружности, образуют угол α).

Решение.



Достаточно доказать, что $2\angle O_1MA=2\angle O_2MB$, что равносильно $\frac{O_1A}{AM}=\frac{O_2B}{BM}$ (см. рис), $AB=2O_1A\cdot\sin\frac{1}{2}\overset{\frown}{AB}=2O_1A\cdot\sin\angle BAM$ вне зависимости от того, какая из дуг AB выбирается – большая или меньшая. Аналогично, $AB=2O_2B\cdot\sin\angle ABM$, следовательно, $\frac{O_1A}{\sin\angle ABM}=\frac{O_2B}{\sin\angle BAM}$. По теореме синусов из треугольника ABM $\frac{MA}{\sin\angle ABM}=\frac{MB}{\sin\angle BAM}$. Из двух последних равенств вытекает доказываемое равенство.

Критерии	Оценка	Баллы
Задача решена полностью.	+	12
Решение задачи, содержит верную общую схему решения, в котором отсутствуют некоторые обоснования	±	8
Решение содержит значительное продвижение в верном направлении.	+ / 2	6
Решение в целом неверное или незаконченное, но содержит определенное содержательное продвижение в верном направлении.	∓	2
Задача не решена, содержательных продвижений нет.	−	0
Задача не решалась.	0	0

Задание 6 (14 баллов). Пусть x_k - положительный корень уравнения $x^k-x-1=0$. Докажите, что

$$x_{25}<\frac{x_{20}+x_{30}}{2}$$

Решение. $x_k^k=x_k+1>1$, так как $x_k>0$, следовательно, $x_k>1$ и $x_k^k=x_k+1>2$, т.е. $x_k>\sqrt[k]{2}$. Поэтому $\frac{x_{20}+x_{30}}{2}\geq\sqrt{x_{20}x_{30}}>\sqrt{\sqrt[20]{2}\sqrt[30]{2}}=\sqrt[24]{2}$, а $x_{25}^{25}=x_{25}+1<2x_{25}$, то есть $x_{25}^{24}<2$, $x_{25}<\sqrt[24]{2}$. Значит, $x_{25}<\sqrt[24]{2}<\frac{x_{20}+x_{30}}{2}$.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача решена полностью.	+	14
Решение задачи, содержит верную общую схему решения, в котором отсутствуют некоторые обоснования.	±	10
Решение содержит значительное продвижение в верном направлении.	+/2	7

Решение в целом неверное или незаконченное, но содержит определенное содержательное продвижение в верном направлении.	∓	3
Задача не решена, содержательных продвижений нет.	−	0
Задача не решалась.	0	0

Задание 7 (14 баллов). В комнате стоят два ящика. В первом лежат n белых и m черных шаров, во втором – достаточно много черных. Из первого ящика наугад вынимают два шара. Если они одного цвета, то черный шар из второго ящика перекладывают в первый, если шары разного цвета, то белый шар возвращают в первый ящик. Так поступают до тех пор, пока в первом ящике не останется один шар. С какой вероятностью он будет белым?

Ответ: если n нечетно, то 1, а если n четно, то 0.

Решение. Четность числа шаров белого цвета в первом ящике не меняется, следовательно, последний шар будет белым тогда и только тогда, когда n нечетно.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача решена полностью.	+	14
Решение задачи, содержит верную общую схему решения, в котором отсутствуют некоторые обоснования.	±	10
Решение содержит значительное продвижение в верном направлении.	+/2	7
Решение в целом неверное или незаконченное, но содержит определенное содержательное продвижение в верном направлении.	∓	3
Задача не решена, содержательных продвижений нет. Верный ответ без обоснования.	−	0
Задача не решалась.	0	0

Задание 8 (16 баллов). Клетки шахматной доски 12×12 раскрашены в 72 цвета так, что в каждый цвет покрашены ровно две клетки. Докажите, что на этой доске можно расставить 12 ладей так, чтобы они стояли на клетках разного цвета и никакие две из них не били друг друга. Две ладьи бьют друг друга, если они стоят в одной горизонтали или в одной вертикали доски.

Решение. На доске $m \times m$ можно расставить m небьющих друг друга ладей $m!$ способами (на первой горизонтали – m способов, на второй – (m-1), …, на последней – единственным способом). Пусть доказываемое утверждение неверно. Тогда, если доска раскрашена так, как в условии, то для всякой расстановки не бьющих друг друга ладей какие-то две стоят на клетках одного цвета. Следовательно, число $(2n)!$ (где n=6) таких расстановок не больше, чем $2n^2(2n-2)!$, так как пару ладей можно расставить на клетках одного цвета не более, чем $\frac{(2n)^2}{2} = 2n^2$ способами, а остальные $(2n-2)$ ладьи - $(2n-2)!$ способами. Итак, $(2n)! \leq 2n^2(2n-2)!$, откуда $2n-1 \leq n$, т.е. $n \leq 1$, что противоречит условию.

Содержание критерия	**Оценка**	**Баллы**
Задача решена полностью.	+	16
Решение задачи, содержит верную общую схему решения, в котором отсутствуют некоторые обоснования.	±	12
Решение содержит значительное продвижение в верном направлении.	+/2	8
Решение в целом неверное или незаконченное, но содержит определенное содержательное продвижение в верном направлении.	∓	4
Задача не решена, содержательных продвижений нет. Верный ответ без обоснования.	−	0
Задача не решалась.	0	0