ФГОБУ ВО «Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации»
ФГАОУ ВО «Северо-Восточный федеральный университет им. М.К. Аммосова»

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМА.
ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ – ФИНАНСИСТ!»
ПО ПРЕДМЕТУ **МАТЕМАТИКА** 2018-2019 уч. года

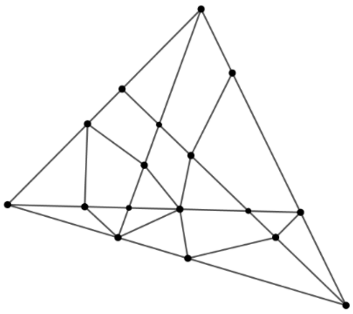
Код участника

ОЧНЫЙ ЭТАП

8-9 классы

Задание 1 (10 баллов)

Треугольник с периметром 40 был разбит отрезками, как показано на рисунке, на 11 треугольников, сумма периметров которых равна 147, и 6 четырехугольников, сумма периметров которых равна 63. Какова сумма длин отрезков, проведенных внутри треугольника?



Решение.

Сумма периметров всех треугольников и четырехугольников, на которые разбит исходный треугольник, равна периметру исходного треугольника плюс удвоенная сумма длин отрезков разбиения: $147 + 63 = 40 + 2x, \quad 2x = 170.$

Ответ: 85.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача решена полностью.	+	10
Решение задачи в целом верное. Составлено верное уравнение для нахождения искомой суммы длин, но в результате описки или арифметической ошибки получен неверный ответ.	±	7
Найдена основная идея решения. Уравнение для нахождения искомой суммы длин составлено неверно.	+/2	5
Решение в целом неверное или незаконченное, но содержит определенное содержательное продвижение в верном направлении	∓	2
Задача не решена, содержательных продвижений нет.	–	0
Задача не решалась.	0	0

Задание 2 (10 баллов)

На карточках написаны числа от 1 до 2019. Какое количество карточек нужно взять не глядя, чтобы среди написанных на них чисел гарантированно было число кратное 3 и число кратное 5?

Решение.

Среди чисел от 1 до 2019 ровно 673 числа делятся на 3, 403 числа делятся на 5 и 134 числа делятся на 15. Следовательно, среди заданных чисел $2019 - 673 - 403 + 134 = 1077$ чисел, которые не делятся ни на 3 ни на 5.

При этом 673 – 134 = 539 чисел делятся на 3, но не делятся на 5.

Если будут взяты 1077 + 539 = 1616 чисел, то среди них может не быть чисел, которые делятся на 5. А среди 1617 чисел всегда найдутся числа, которые делятся и 3 и на 5.

Ответ: 1617.

Содержание критерия	**Оценка**	**Баллы**
Задача решена полностью.	+	10
Решение задачи в целом верное, но в результате описки или арифметической ошибки получен неверный ответ.	±	7
Найдена основная идея решения. Неверно найдено количество чисел, которые не делятся ни на 3 ни на 5.	+/2	5
Верно найдено количество чисел, которые не делятся ни на 3 ни на 5. Решение не завершено или получен неверный ответ в результате неверного рассуждения.		
Решение в целом неверное или незаконченное, но содержит определенное содержательное продвижение в верном направлении	∓	2
Задача не решена, содержательных продвижений нет.	−	0
Задача не решалась.	0	0

Задание 3 (12 баллов)

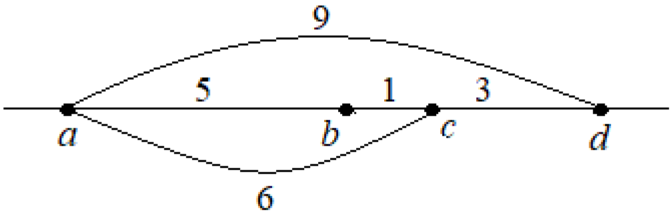
Сумма четырех целых чисел $a > b > c > d$ равна 44. Аня посчитала для всевозможных пар этих чисел их положительные разности и получила числа 1, 3, 4, 5, 6 и 9. Найдите числа $a,\ b,\ c$ и d.

Решение.

Максимальная разность равна $d - a = 9$.

Так как $d - a = (d - c) + (c - a) = (d - b) + (b - a) = 9$, то возможны два случая:

1) $(d - c) = 3$ и $(c - a) = 6$.

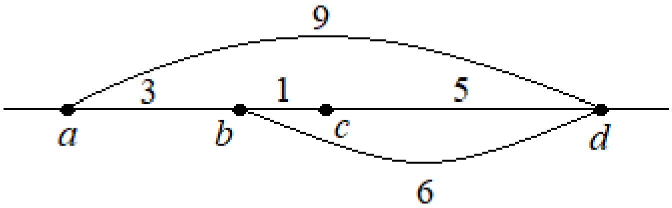


В этом случае получаем:

$$a + b + c + d = a + (a + 5) + (a + 6) + (a + 9) = 4a + 20 = 44$$

$$a = 6,\ b = 11,\ c = 12,\ d = 15.$$

2) $(d - b) = 6$ и $(b - a) = 3$.



В этом случае получаем:

$$a + b + c + d = a + (a + 3) + (a + 4) + (a + 9) = 4a + 16 = 44$$

$$a = 7,\ b = 10,\ c = 11,\ d = 16.$$

Ответ: $= 6,\ b = 11,\ c = 12,\ d = 15$ или $a = 7,\ b = 10,\ c = 11,\ d = 16$.

Содержание критерия	**Оценка**	**Баллы**
Задача решена полностью.	+	12
Решение задачи, содержит верную общую схему решения, в котором отсутствуют некоторые обоснования или имеются недочет/недочеты.	±	8
Верно найдена только одна четверка чисел.	+/2	6
Решение в целом неверное или незаконченное, но содержит определенное содержательное продвижение в верном направлении	∓	2
Задача не решена, содержательных продвижений нет.	–	0
Задача не решалась.	0	0

Задание 4 (12 баллов)

Целые числа a, b, c и d удовлетворяют неравенствам

$$a + b + c < 48,$$

$$b + c - d > 20,$$

$$a + c + d > 36.$$

Какое наименьшее значение может принимать число c?

Решение.

Из условия задачи следует, что

$$a + b + c \leq 47,$$

$$b + c - d \geq 21,$$

$$a + c + d \geq 37.$$

Складывая второе и третье неравенства, получим

$$(b + c - d) + (a + c + d) \geq 21 + 37 = 58 \Rightarrow$$

$$a + b + 2c \geq 58\,.$$

Вычитая из последнего неравенства первое, получим

$$(a + b + 2c) - (a + b + c) \geq 58 - 47 = 11 \Rightarrow$$

$$c \geq 11.$$

Таким образом, число c не может быть больше 11. С другой стороны, четверка чисел (26, 10, 11, 0) удовлетворяет исходным неравенствам.

Ответ: 11.

Содержание критерия	**Оценка**	**Баллы**
Задача решена полностью.	+	12
Решение задачи, содержит верную общую схему решения, в котором отсутствуют некоторые обоснования или имеются недочет/недочеты.	±	8
Найдена верная оценка для искомого числа. Не показано достижимость найденной оценки.	+/2	6

Решение в целом неверное или незаконченное, но содержит определенное содержательное продвижение в верном направлении	∓	2
Задача не решена, содержательных продвижений нет.	–	0
Задача не решалась.	0	0

Задание 5. (12 баллов)

Миша и Вася играли в некоторую игру. Победителю партии начисляется одно очко, а проигравшему – ноль очков, в случае ничьей оба игрока получают по одному очку. После каждой партии ребята записывали текущий счёт в таблицу. В конце он был 4:3 в пользу Миши. Сколько существует различных способов получить такой результат?

Решение:

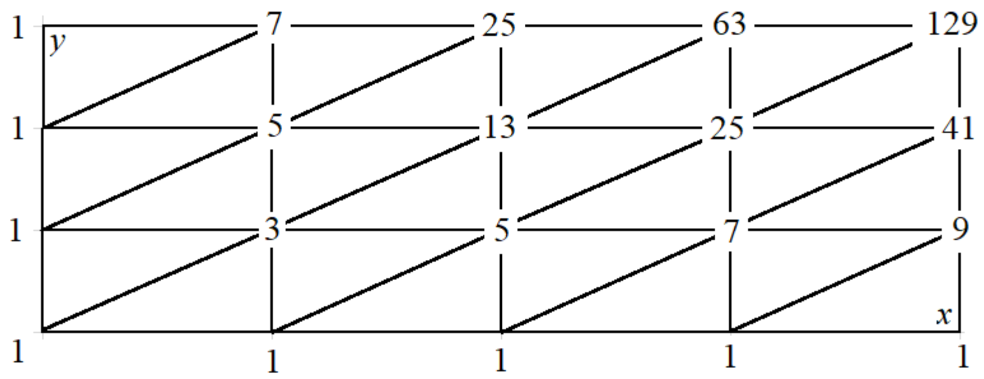
Рассмотрим координатную плоскость, где по оси *Ox* будем откладывать очки, набранные Мишей, а по оси *Oy* – набранные Васей.

Счет 0:0 соответствует началу координат. Движение вдоль одной из осей возможно только в одном случае – когда все партии выигрывает один из игроков.

Пусть N_{xy} – количество различных способов получить счет *x*:*y*.

Тогда $N_{xy} = N_{x(y-1)} + N_{(x-1)y}N_{(x-1)(y-1)}$.

Используя полученную формулу, можно найти N_{43}:



Ответ: 129.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача решена полностью.	+	12
Решение задачи, содержит верную общую схему решения, в котором отсутствуют некоторые обоснования или в результате описки или арифметической ошибки получен неверный ответ.	±	8

Решение задачи, содержит значительное продвижение в верном направлении. Решение не завершено или получен неверный ответ в результате неверного рассуждения.	+/2	6
Решение в целом неверное или незаконченное, но содержит определенное содержательное продвижение в верном направлении	∓	2
Задача не решена, содержательных продвижений нет.	−	0
Задача не решалась.	0	0

Задание 6 (14 баллов)

Среднее арифметическое $\frac{x+y}{2}$ и среднее геометрическое $\sqrt{xy}$ двух положительных целых чисел x и y являются двузначными числами. Одно из этих двузначных чисел получается из второго перестановкой цифр. Найдите разность $x - y$, если $x > y$.

Решение:

Пусть $\frac{x+y}{2} = \overline{ab}$, а $\sqrt{xy} = \overline{ba}$, тогда получаем

$$\begin{cases} \dfrac{x+y}{2} = 10a + b \\ \sqrt{xy} = 10b + a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 2(10a + b) \\ xy = (10b + a)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2xy + y^2 = 4(10a + b)^2 \\ 4xy = 4(10b + a)^2 \end{cases}$$

Вычитая из первого уравнения последней системы второе, получаем:

$$x^2 - 2xy + y^2 = 4(10a + b)^2 - 4(10b + a)^2 =$$

$$(x - y)^2 = 4((10a + b)^2 - (10b + a)^2) =$$

$$= 4(9a - 9b)\,(11a + 11b) = 6^2 \cdot 11 \cdot (a - b)(a + b).$$

Итак,

$$(x - y)^2 = 6^2 \cdot 11 \cdot (a - b)(a + b).$$

Следовательно, $(a - b)(a + b)$ делится на 11. Поскольку a и b являются цифрами, то

$$\begin{cases} a - b = 1 \\ a + b = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 6 \\ b = 5 \end{cases}.$$

Таким образом, получаем $(x - y)^2 = 6^2 \cdot 11^2$, а $x - y = 66$.

Ответ: 66.

Содержание критерия	**Оценка**	**Баллы**
Задача решена полностью.	+	14

Решение задачи, содержит верную общую схему решения. Показано, что искомое число делится на 11. Отсутствуют некоторые обоснования при верном ответе или в результате описки и арифметической ошибки получен неверный ответ.	±	10
Решение задачи, содержит значительное продвижение в верном направлении. Показано, что искомое число делится на 11. Решение не завершено или получен неверный ответ в результате неверного рассуждения.	+/2	7
Решение в целом неверное или незаконченное, но содержит определенное содержательное продвижение в верном направлении	∓	3
Задача не решена, содержательных продвижений нет.	−	0
Задача не решалась.	0	0

Задание 7 (14 баллов)

На белом клетчатом листе бумаги нарисовали прямоугольник со сторонами 20 и 19 клеток. В каждую клетку вписали натуральное число. Клетка красится в зелёный цвет, если среди соседних с ней по углу или стороне клеток не больше одной клетки с таким же или большим значением. Какое наибольшее число зелёных клеток могло получиться в таблице?

Решение.

Рассмотрим квадраты 2×2. В каждом из них в зеленый цвет может быть окрашено не более 2 клеток. Следовательно, в квадрате 20×18, который можно разбить на 90 квадратов 2×2 может быть не более 180 окрашенных клеток.

Таким образом, всего может быть окрашено не более 180 + 20 клеток.

Ниже представлен вариант, при котором этих зеленых клеток будет ровно 200.

2	3	…	21
1	1	…	1
2	3	…	21
1	1	…	1
2	3	…	21
…	…	…	…
…	…	…	…
1	1	1	1
2	3	…	21

Ответ: 200.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача решена полностью.	+	14
Доказано, что окрашено не более 200 клеток. Не приведен пример, когда может быть окрашено 200 клеток.	+/2	7
Решение в целом неверное или незаконченное, но содержит определенное содержательное продвижение в верном направлении	∓	3
Задача не решена, содержательных продвижений нет.	−	0
Задача не решалась.	0	0

Задача 8 (16 баллов)

Сколько существует чисел вида 5^n, где n — натуральное число, в десятичной записи которых найдутся 2019 подряд идущих нулей?

Решение.

Докажем, что для любого значения $k \in \mathbb{N}$ существует бесконечно много чисел $m \in \mathbb{N}$, удовлетворяющих условию $5^m \equiv 1 (mod\ 2^k)$. Действительно, среди чисел $5^0, 5^1, 5^2, \ldots, 5^{2^k}$ найдутся два числа 5^p и 5^q $(p > q)$, дающие при делении на 2^k одинаковые остатки. Тогда их разность $5^p - 5^q = 5^q(5^{p-q} - 1)$ делится на 2^k, а значит, число $5^{p-q} - 1$ и все числа вида $5^{r(p-q)} - 1, (r \in \mathbb{N})$ делятся на 2^k. Таким образом, для каждого значения $m = r(p-q)$, имеем $5^m \equiv 1 (mod\ 2^k)$, откуда $5^{m+k} \equiv 5^k (mod\ 10^k)$, т.е. последние k цифр числа 5^{m+k} образуют десятичную запись числа 5^k. Пусть число k удовлетворяет неравенству $2^k > 10^{2019}$. Тогда десятичная запись числа $5^k = \frac{10^k}{2^k} < 10^{k-2019}$ содержит не более $k - 2019$ цифр. Следовательно, среди последних k цифр числа 5^{m+k} ненулевыми могут быть только последние $k - 2019$ цифр, а остальные 2019 цифр, идущие подряд являются нулями.

Ответ: бесконечно много.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача решена полностью.	+	16
Решение задачи, содержит верную общую схему решения, в котором отсутствуют некоторые обоснования или имеются недочет/недочеты.	±	12
Решение в целом неверное или незаконченное, но содержит определенное содержательное продвижение в верном направлении	∓	4

Задача не решена, содержательных продвижений нет.	–	0
Задача не решалась.	0	0