ФГОБУ ВО «Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации»
ФГАОУ ВО «Северо-Восточный федеральный университет им. М.К. Аммосова»

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМА.
ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ – ФИНАНСИСТ!»
ПО ПРЕДМЕТУ **МАТЕМАТИКА** 2018-2019 уч. года

Код участника

ОЧНЫЙ ЭТАП

11 класс

Задание 1 (10 баллов)

Найдите такую пару чисел (x, y), при которых выражение

$$x^2 + y^2 + 5 - xy - 2x - 2y$$

принимает наименьшее возможное значение.

Решение.

$$x^2 + y^2 + 5 - xy - 2x - 2y = \frac{1}{2}(2x^2 + 2y^2 + 10 - 2xy - 4x - 4y) =$$

$$= \frac{1}{2}\big((x^2 - 2xy + y^2) + (x^2 - 4x + 4) + (y^2 - 4y + 4) + 2\big) =$$

$$= \tfrac{1}{2}((x - y)^2 + (x - 2)^2 + (y - 2)^2 + 2) \leq 1.$$

Равенство достигается, если $x = y = 2$.

Ответ: $(2, 2)$

Содержание критерия	**Оценка**	**Баллы**
Задача решена полностью.	+	10
Решение задачи, содержит верную общую схему решения, в котором отсутствуют некоторые обоснования или в результате описки или арифметической ошибки найден неверный ответ.	±	7
Решение содержит значительное продвижение в верном направлении. При этом решение не завершено или при правильном ответе в нем отсутствуют важные обоснования.	+/2	5

Решение в целом неверное или незаконченное, но содержит определенное содержательное продвижение в верном направлении.	∓	2
Имеется верный ответ при рассмотрении частного случая.		
Задача не решена, содержательных продвижений нет.	−	0
Задача не решалась.	0	0

Задание 2 (10 баллов)

1 января 1019 года количество золотых монет у купца Ивана относилось к количеству золотых монет у купца Петра как 3:7. Каждый день 1019 года, начиная со 2 января, у одного из них количество золотых монет увеличивалось (у Ивана – ровно на 7 монет, у Петра – ровно на 3 монеты), а у второго оставалось неизменным. Укажите ближайшую дату, когда отношение количества монет у Ивана к количеству монет у Петра снова может стать 3:7?

Решение:

Пусть $3n$ и $7n$ – первоначальное количество монет у Ивана и Петра.

Через некоторое время количество монет у Ивана будет $3n + 7k$, а у Петра - $7n + 3m$.

При этом $7(3n + 7k) = 3(7n + 3m)$.

Следовательно, $49k = 9m$.

Нужно определить при какой наименьшей сумме $k + m$ это возможно.

Так как, m должно делиться на 49, а k – на 9, то наименьшая сумма $k + m$ равна 58.

Итак, отношение количества монет у Ивана к количеству монет у Петра снова может стать 3:7 только через 58 дней, то есть 28 февраля 1019 года.

Ответ: 28 февраля 1019 года.

Содержание критерия	**Оценка**	**Баллы**
Задача решена полностью.	+	10
Решение задачи, содержит верную общую схему решения, в котором отсутствуют некоторые обоснования или в результате описки или арифметической ошибки найден неверный ответ.	±	7
Рассмотрен частный случай, когда в начале количество монет равно 3 и 7. В остальном решение верное.	+/2	5

Решение в целом неверное или незаконченное, но содержит определенное содержательное продвижение в верном направлении	∓	2
Задача не решена, содержательных продвижений нет.	−	0
Задача не решалась.	0	0

Задание 3 (12 баллов)

Дана бесконечная последовательность $-1, 2, -3, 4, -5, 6, \dots, (-1)^n n \dots$. Между первым и вторым членом вписали одну единицу, между вторым и третьим членом две единицы, между третьим и четвертым членом три единицы и т.д. В итоге получили последовательность $-1, 1, 2, 1, 1, -3, 1, 1, 1, 4, 1, 1, 1, 1, -5 \dots$ Найдите сумму первых 2018 членов полученной последовательности.

Дана бесконечная последовательность $-1, 2, -3, 4, -5, 6, \dots, (-1)^n n \dots$. Между первым и вторым членом вписали одну единицу, между вторым и третьим членом две единицы, между третьим и четвертым членом три единицы и т.д. В итоге получили последовательность $-1, 1, 2, 1, 1, -3, 1, 1, 1, 4, 1, 1, 1, 1, -5 \dots$ Найдите сумму первых 2018 членов полученной последовательности.

<u>*Решение.*</u>

Запишем полученную последовательность следующим образом,

-1	1					
2	1	1				
-3	1	1	1			
4	1	1	1	1		
-5	1	1	1	1	1	
…	…	…	…	…	…	…
62	1	1	1	1	1	…
-63	1	1				

Прежде всего заметим, что у нас будет 63 строки, при этом последняя строка содержит только 2 единицы.

Действительно, в 62 строках $2 + 3 + \cdots 63 = \frac{2+63}{2} \cdot 62 = 2015$ чисел. Следующие числа - 63, 1, 1.

Сумма в нечетных строках, кроме последней равна 0.

Сумма чисел в четных строках равна удвоенному номеру соответствующей строки.

Таким образом, искомая сумма равна

$$2 \cdot (2 + 4 + \cdots + 62) - 63 + 2 \cdot 1 = 2 \cdot \frac{2+62}{2} \cdot 31 - 61 = 1923.$$

Ответ: 1923.

<table>
<tr><th>Содержание критерия</th><th>Оценка</th><th>Баллы</th></tr>
<tr><td>Задача решена полностью.</td><td>+</td><td>12</td></tr>
<tr><td>Решение задачи, содержит верную общую схему решения, в котором отсутствуют некоторые обоснования или в результате описки или арифметической ошибки найден неверный ответ.</td><td>±</td><td>8</td></tr>
<tr><td>Решение задачи, содержит верную общую схему решения. Ошибочно сделан вывод, что сумма чисел в четных строках равна номеру соответствующей строки.</td><td rowspan="2">+/2</td><td rowspan="2">6</td></tr>
<tr><td>Решение задачи, содержит верную общую схему решения. В результате неверных рассуждений неправильно найдено наибольшее по модулю число в рассматриваемой сумме. В остальном решение полное и доведено до ответа.</td></tr>
<tr><td>Решение в целом неверное или незаконченное, но содержит определенное содержательное продвижение в верном направлении</td><td>∓</td><td>2</td></tr>
<tr><td>Задача не решена, содержательных продвижений нет.</td><td>−</td><td>0</td></tr>
<tr><td>Задача не решалась.</td><td>0</td><td>0</td></tr>
</table>

Задание 4 (12 баллов)

Робот и сотрудники компании участвуют в викторине. Вероятность правильного ответа у робота равна 4/5, а вероятность правильного ответа у сотрудника равна 2/3, если отвечал мужчина, и равна 3/7, если отвечала женщина. Вероятность того, что ответ случайно выбранного сотрудника совпадет с ответом робота равна 1/2. Чему равно отношение количества мужчин в компании к количеству женщин?

Решение.

Обозначим через α вероятность того, что случайно выбранный сотрудник даст правильный ответ. Вероятность совпадения ответа сотрудника с ответом робота равна сумме вероятностей правильного ответа обоих и неправильного ответа обоих. По условию задачи получаем $4/5\alpha+(1-4/5)(1-\alpha)=1/2$, следовательно, $\alpha=1/2$. Обозначим через x и y соответственно количество мужчин и женщин в компании. Вероятность α правильного ответа случайно выбранного сотрудника компании равна сумме вероятности $\frac{x}{x+y}\frac{2}{3}$ того, что будет выбран мужчина и он ответит правильно, и вероятности $\frac{y}{x+y}\frac{3}{7}$ того, что будет выбрана женщина и она даст правильный ответ. Таким образом, $\frac{1}{2} = \frac{x}{x+y}\frac{2}{3} + \frac{y}{x+y}\frac{3}{7}$, или $7x = 3y$.

<u>Ответ:</u> *3/7*.

Содержание критерия	**Оценка**	**Баллы**
Задача решена полностью.	+	12
Решение задачи, содержит верную общую схему решения, в котором отсутствуют некоторые незначительные обоснования или в результате описки или арифметической ошибки найден неверный ответ.	±	8
Ответ верный. Не доказано, что вероятность того, что случайно выбранный сотрудник даст правильный ответ, равна ½.	+/2	6
Решение в целом неверное или незаконченное, но содержит определенное содержательное продвижение в верном направлении	∓	2
Задача не решена, содержательных продвижений нет.	−	0
Задача не решалась.	0	0

Задание 5. (12 баллов)

Пусть $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ – единичные векторы в пространстве. Докажите, что

$$\sqrt{1-\vec{a}\cdot\vec{b}} \le \sqrt{1-\vec{b}\cdot\vec{c}} + \sqrt{1-\vec{a}\cdot\vec{c}}.$$

<u>Решение.</u>

Заметим, что если $|\vec{x}|=|\vec{y}|=1$, то

$$|\vec{x}-\vec{y}|^2 = (\vec{x}-\vec{y})^2 = |\vec{x}|^2 + |\vec{y}|^2 - 2\vec{x}\cdot\vec{y} = 2(1-\vec{x}\cdot\vec{y}).$$

Тогда доказываемое неравенство равносильно такому

$$\left|\vec{a}-\vec{b}\right| \le |\vec{a}-\vec{c}| + \left|\vec{c}-\vec{b}\right|,$$

которое вытекает из неравенства треугольника $\left|\overrightarrow{u+v}\right| \le |\vec{u}| + |\vec{v}|$, где необходимо положить $\vec{u}=\vec{a}-\vec{c}, \vec{v}=\vec{c}-\vec{b}$.

Содержание критерия	**Оценка**	**Баллы**
Задача решена полностью.	+	12
Решение задачи, содержит значительное продвижение в правильном направлении.	+/2	6
Доказательство приведено для частного случая.	∓	2
Задача не решена, содержательных продвижений нет.	−	0

Задача не решалась.	0	0

Задание 6 (14 баллов)

Найдите все четверки натуральных чисел (k, l, m, n), которые удовлетворяют равенству $k! + l! = m! - n!$

<u>*Решение.*</u> Исходное уравнение можно переписать в виде $k! + l! + n! = m!$

Пусть k, l, m, n натуральные числа, удовлетворяющие исходному уравнению. Обозначим за M наибольшее из чисел k, l, n. Тогда

$$1 \le M < m \text{ и } mM! \le m(m-1)! = m! = k! + l! + n! \le 3M!$$

Следовательно, $mM! \le 3M!$, т.е. $m \le 3$.

При $m = 3$ получим $3! = 3M! = k! + l! + n!$, которое выполнено только при $k = l = n = M = 2$.

При $M = 2$ уравнение не имеет решений: $M! = 2 < 3 \le k! + l! + n!$

Аналогично, нет решений при $M = 1$.

<u>*Ответ:*</u> $(2, 2, 3, 2)$.

Содержание критерия	**Оценка**	**Баллы**
Задача решена полностью.	+	14
При верном ответе решение задачи, содержит верную общую схему решения, в котором отсутствуют некоторые незначительные обоснования.	±	10
Решение содержит верную общую схему решения. Нет полного обоснования равенства чисел k, l и n. Ответ верный.	+/2	7
Решение в целом неверное или незаконченное, но содержит определенное содержательное продвижение в верном направлении	∓	3
Ответ верный, но решение отсутствует или неверное.		
Задача не решена, содержательных продвижений нет.	−	0
Задача не решалась.	0	0

Задание 7 (14 баллов)

Дана такая числовая последовательность $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{\text{n}}, \dots$, что $x_0 = 8$ и $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n}$ для всех $n \geq 0$. Докажите, что $64 < x_{2019} < 64{,}1$.

<u>*Решение.*</u>

Для всех натуральных n выполнено $x_n^2 = 2 + x_{n-1}^2 + \frac{1}{x_{n-1}^2}$, и, таким образом,

$$x_{2019}^2 = 2 \cdot 2019 + x_0^2 + \sum_{k=0}^{2018} \frac{1}{x_k^2} > 4102 > 4096 = 64^2.$$

Так как все члены последовательности положительные, то $x_{2019} > 64$.

Аналогично доказывается, что $x_{100} > 16, x_{500} > 32, x_{1000} > 45, x_{1500} > 55$. Также очевидно, что последовательность возрастающая. Следовательно,

$$x_{2019}^2 = 4102 + \sum_{k=0}^{2018} \frac{1}{x_k^2} = \sum_{k=0}^{99} \frac{1}{x_k^2} + \sum_{k=100}^{499} \frac{1}{x_k^2} + \sum_{k=500}^{999} \frac{1}{x_k^2} + \sum_{k=1000}^{1499} \frac{1}{x_k^2} + \sum_{k=1500}^{2018} \frac{1}{x_k^2} <$$

$$< 4102 + 100 \cdot \frac{1}{64} + 400 \cdot \frac{1}{256} + 500 \cdot \frac{1}{1024} + 500 \cdot \frac{1}{2025} + 519 \cdot \frac{1}{3025} <$$

$$< 4102 + 2 + 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} < 4102 + 5 < 4108{,}81 = 64.1^2$$

Содержание критерия	**Оценка**	**Баллы**
Задача решена полностью.	+	14
Решение задачи, содержит верную общую схему решения, в котором отсутствуют некоторые незначительные обоснования. Доказано правая часть двойного неравенства.	±	10
Решение в целом неверное или незаконченное, но содержит определенное содержательное продвижение в верном направлении.	∓	3
Доказана только левая часть двойного неравенства.		
Задача не решена, содержательных продвижений нет.	–	0
Задача не решалась.	0	0

Задача 8 (16 баллов)

Диагонали AD, BE и CF выпуклого шестиугольника $ABCDEF$ пересекаются в точке O. Известно, что площади треугольников AOB, COD и EOF равны $4, 6$ и 9 соответственно. Какую наименьшую площадь может иметь данный шестиугольник?

<u>*Решение.*</u>

Заметим, что

$$S_{BOC} \cdot S_{DOE} \cdot S_{FOA} = \left(\frac{1}{2} BO \cdot CO \cdot \sin\beta\right) \cdot \left(\frac{1}{2} DO \cdot EO \cdot \sin\alpha\right) \cdot \left(\frac{1}{2} FO \cdot AO \cdot \sin\gamma\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{2} AO \cdot BO \cdot \sin\alpha\right) \cdot \left(\frac{1}{2} CO \cdot DO \cdot \sin\gamma\right) \cdot \left(\frac{1}{2} EO \cdot FO \cdot \sin\beta\right) =$$

$$= S_{AOB} \cdot S_{COD} \cdot S_{EOF} = 4 \cdot 6 \cdot 9 = 216.$$

Здесь $\angle AOB = \angle DOE = \alpha, \angle BOC = \angle EOF = \beta, \angle COD = \angle FOA = \gamma.$

Тогда

$$S_{ABCDEF} = 4 + 3 + 9 + S_{BOC} + S_{DOE} + S_{FOA} \geq 19 + 3\sqrt[3]{S_{BOC} \cdot S_{DOE} \cdot S_{FOA}} =$$

$$= 19 + 3\sqrt[3]{216} = 37.$$

Заметим, что такой шестиугольник существует:

$$AO = 2\sqrt{3}, BO = DO = \frac{8}{3}, CO = EO = 3\sqrt{3}, FO = 4, \alpha = \beta = \gamma = 60°.$$

Ответ: 37.

Содержание критерия	**Оценка**	**Баллы**
Задача решена полностью.	+	16
Решение задачи, содержит верную общую схему решения, в котором отсутствуют некоторые незначительные обоснования.	±	12
Верно доказано, что искомая площадь не может быть меньше 37, но не приведен пример четырехугольника, имеющего площадь 37.	+/2	8
Решение в целом неверное или незаконченное, но содержит определенное содержательное продвижение в верном направлении	∓	4
Задача не решена, содержательных продвижений нет.	−	0
Задача не решалась.	0	0