ФГОБУ ВО «Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации»
ФГАОУ ВО «Северо-Восточный федеральный университет им. М.К. Аммосова»

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМА.
ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ – ФИНАНСИСТ!»
ПО ПРЕДМЕТУ **МАТЕМАТИКА** 2018-2019 уч. года

Код участника

ОЧНЫЙ ЭТАП

10 класс

Задание 1 (10 баллов)

Даны первые 2025 членов арифметической прогрессии. Коля посчитал среднее арифметическое для всех пар членов последовательности. Затем он выписал получившиеся результаты, упорядочив их по возрастанию и исключив повторы. Например, из набора чисел 4, 2, 9, 9, 9, 5, 4 Коля бы выписал числа 2, 4, 5, 9.

а) Докажите, что полученная последовательность также является арифметической прогрессией. ***(6 баллов)***

б) Сколько чисел выписал Коля? ***(4 балла)***

Решение.

Пусть $a_1, a_2, \dots, a_{2019}$ - исходная арифметическая прогрессия.

Тогда $a_n = a_1 + (n-1)d$.

Пусть $s_1, s_2, \dots, s_n$ - последовательность, полученная из средних значений.

Для любого $k \leq n$ выполняется $s_k = \frac{a_l + a_m}{2}$ для некоторых l и m.

Следовательно, $s_k = \frac{a_l + a_m}{2} = \frac{a_1 + (l-1)d + a_1 + (m-1)d}{2} = a_1 + (l + m - 2)\frac{d}{2}$.

Если l и m ($l \neq m$) пробегают все значения от 1 до 2025, то $l + m - 2$, пробегают все значения от 1 до 4047 (2024+2025-2). Следовательно, полученная последовательность является арифметической прогрессией с первым членом a_1 и знаменателем $\frac{d}{2}$. При этом Коля выписал 4047 чисел.

Содержание критерия	**Оценка**	**Баллы 1а**	**Баллы 1б**
Задача решена полностью.	+	6	4
Решение задачи, содержит верную общую схему решения, в котором отсутствуют некоторые обоснования.	±	4	3
Решение содержит значительное продвижение в верном направлении. При этом решение не завершено или при правильном ответе в нем отсутствуют важные обоснования.	+/2	2	2
Решение в целом неверное или незаконченное, но содержит определенное содержательное продвижение в верном направлении.	∓	1	1
Задача не решена, содержательных продвижений нет.	–	0	0
Задача не решалась.	0	0	0

Задание 2 (10 баллов)

Найдите наименьшее натуральное число, которое делится на 2026, а при делении на 2019 дает остаток 2009.

Решение.

Из условия задачи следует, что

$$2026n = 2019k + 2009$$

или

$$2026n - 2019k = 2009.$$

Получаем,

$$(2026n - 2019n) - 2019(k - n) = 2009, \qquad 7n = 2009 + 2019(k - n).$$

Если $n = k$, то $7n = 2009$ и $n = 287$.

Если $n < k$, то $n > 287$.

Если $n > k$, то $n < 0$.

Ответ: $2026 \cdot 287 = 581462$.

Содержание критерия	**Оценка**	**Баллы**
Задача решена полностью.	+	10

Решение задачи, содержит верную общую схему решения, в котором отсутствуют некоторые обоснования или в результате описки или арифметической ошибки найден неверный ответ.	±	7
Решение содержит значительное продвижение в верном направлении. При этом решение не завершено или при правильном ответе в нем отсутствуют важные обоснования.	+/2	5
Решение в целом неверное или незаконченное, но содержит определенное содержательное продвижение в верном направлении	∓	2
Задача не решена, содержательных продвижений нет.	−	0
Задача не решалась.	0	0

Задание 3 (12 баллов)

Двое бросают монету. Первый бросил ее 2018 раз, а второй 2019 раз. Предполагается, что монета симметричная, т.е. выпадение орла и решки при бросании равновероятно. Какова вероятность, что у второго монета упала орлом вверх большее число раз, чем у первого?

Решение:

Пусть событие А – «у второго выпало больше орлов, чем у первого», событие В – «у первого выпало больше орлов, чем у первого».

Поскольку выпадение орла и решки равновероятно. То события А и В равновероятны.

Так как второй бросал монету ровно на один раз больше первого, то либо орлов, либо решек у него выпало больше, но не одновременно. Поэтому события А и В дополняют друг друга.

Таким образом $P(A) = P(B)$ и $P(A) + P(B) = 1$.

Следовательно, $P(A) = 0{,}5$.

Ответ: 0,5.

Содержание критерия	**Оценка**	**Баллы**
Задача решена полностью.	+	12
Решение задачи, содержит верную общую схему решения, в котором отсутствуют некоторые обоснования.	±	8
Решение содержит значительное продвижение в верном направлении. При этом решение не завершено или при правильном ответе в нем отсутствуют важные обоснования.	+/2	6

Решение в целом неверное или незаконченное, но содержит определенное содержательное продвижение в верном направлении	∓	2
Задача не решена, содержательных продвижений нет.	−	0
Задача не решалась.	0	0

Задание 4 (12 баллов)

Какое из чисел больше число 2019 или число $\underbrace{a^{a^{a^{\cdot^{\cdot^{a}}}}}}_{2019}$, где $a = \sqrt[2019]{2019}$.

Решение:

$$\underbrace{a^{a^{a^{\cdot^{\cdot^{a}}}}}}_{2019} < \Bigl(\underbrace{a^{a^{a^{\cdot^{\cdot^{a}}}}}}_{2018}\Bigr)^{2019} = 2019$$

Ответ: 2019.

Содержание критерия	**Оценка**	**Баллы**
Задача решена полностью.	+	12
Решение задачи, содержит верную общую схему решения, в котором отсутствуют некоторые обоснования.	±	8
Решение содержит значительное продвижение в верном направлении. При этом решение не завершено или при правильном ответе в нем отсутствуют важные обоснования.	+/2	6
Решение в целом неверное или незаконченное, но содержит определенное содержательное продвижение в верном направлении	∓	2
Задача не решена, содержательных продвижений нет.	−	0
Задача не решалась.	0	0

Задание 5 (12 баллов)

Квадратный лист бумаги со стороной $5\sqrt{2} - 5$ сложили, как показано на рисунке 1, получив новый квадрат. Полученный квадрат снова таким же образом сложили (рис. 2) и получили третий квадрат.

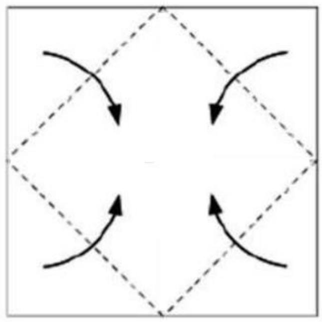

Рис. 1

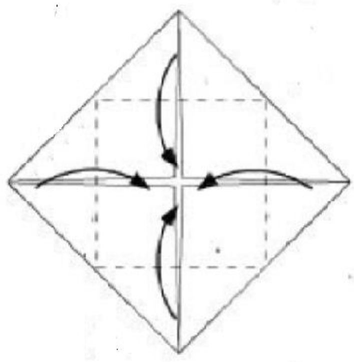

Рис. 2

Подобную операцию проделали еще четыре раза. Полученный седьмой квадрат полностью развернули до первоначального квадрата. Чему равна длина линий изгибов на развернутом квадрате?

Решение:

Пусть a_n – длина стороны квадрата перед n-м складыванием.

Заметим, что $a_{n+1} = \frac{a_n}{2}$.

После первого складывания длина линий изгибов будет равна $4\frac{a_1}{\sqrt{2}}$.

Так как при каждом складывании «толщина» в листах бумаги увеличивается вдвое, то после шестого складывания длина линий изгибов будет равна

$$4\frac{a_1}{\sqrt{2}} + 4\frac{a_1}{\left(\sqrt{2}\right)^2}2 + 4\frac{a_1}{\left(\sqrt{2}\right)^3}4 + \cdots + 4\frac{a_1}{\left(\sqrt{2}\right)^6}2^5 = 2a_1\left(\sqrt{2} + \sqrt{2}^2 + \cdots + \sqrt{2}^6\right)$$

$$= 2\sqrt{2}a_1\frac{\sqrt{2}^6 - 1}{\sqrt{2} - 1} = 2\sqrt{2}\,5\left(\sqrt{2} - 1\right)\frac{8 - 1}{\sqrt{2} - 1} = 70\sqrt{2}.$$

Ответ: $70\sqrt{2}$.

<table>
<tr><th>Содержание критерия</th><th>Оценка</th><th>Баллы</th></tr>
<tr><td>Задача решена полностью.</td><td>+</td><td>12</td></tr>
<tr><td>Решение задачи, содержит верную общую схему решения, в котором отсутствуют некоторые обоснования или в результате описки или арифметической ошибки найден неверный ответ.</td><td>±</td><td>8</td></tr>
<tr><td>Решение содержит значительное продвижение в верном направлении. При этом решение не завершено или при правильном ответе в нем отсутствуют важные обоснования.</td><td rowspan="2">+/2</td><td rowspan="2">6</td></tr>
<tr><td>В решении не учтено, что при каждом складывании «толщина» в листах бумаги увеличивается вдвое, что ведет к удвоению длины соответствующих линий сгиба. В остальном решение верное.</td></tr>
</table>

Решение в целом неверное или незаконченное, но содержит определенное содержательное продвижение в верном направлении	∓	2
Задача не решена, содержательных продвижений нет.	−	0
Задача не решалась.	0	0

Задание 6. (14 баллов)

Пусть $p(x)$ – такой многочлен с целыми коэффициентами, что $p(7) = 6$. Может ли число $p(2019)$ быть полным квадратом?

Решение:

Заметим, что $p(x) - p(y)$ делится на $x - y$. Значит $p(2019) - 6$ делится на $2019 - 7 = 2012$, а 2012 делится на 4. То есть $p(2019)$ имеет остаток 2 при делении на 4, чего не бывает у полных квадратов.

Ответ: нет, не может.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача решена полностью.	+	14
Решение задачи, содержит верную общую схему решения, в котором отсутствуют некоторые обоснования.	±	10
Решение в целом неверное или незаконченное, но содержит определенное содержательное продвижение в верном направлении	∓	3
Решение приведено для частного случая.		
Задача не решена, содержательных продвижений нет.	−	0
Задача не решалась.	0	0

Задание 7 (14 баллов)

Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$, в котором $CD = 6, BC = 4,\ \angle BAD = 90°$, $\angle BCD = 60°, AB = AD.$ Найдите длину диагонали AC.

Решение:

Повернем четырехугольник *ABCD* вокруг точки *A* на 90^0 (против часовой стрелки). Пусть точка *B, C* и *D* перейдут в точки $B_{1,}C_1, D_1$ соответственно.
Из условия задачи следует, что

$$B_1 \equiv D, AC = AC_1, \angle BCA = \angle DC_1A, \angle ACD = \angle AC_1D_1, \angle CAC_1 = 90^0,$$

Откуда

$$\angle AC_1D + \angle ACD = \angle BCA + \angle ACD = 60°.$$

Поэтому

$$\angle CDC_1 = 180^0 - (\angle DCC_1 + \angle DC_1C) =$$
$$= 180^0 - (180^0 - \angle CAC_1 - \angle AC_1D - \angle ACD) = 90° + 60°.$$

По теореме косинусов из $\Delta\, CDC_1$ мы получаем:

$$CC_1^2 = 6^2 + 4^2 - 2 \cdot 6 \cdot 4 \cdot \cos(90^0 + 60°) = 52 + 24\sqrt{3}.$$

Так как

$$CC_1^2 = AC^2 + AC_1^2 = 2AC^2, \text{ то } AC^2 = 26 + 12\sqrt{3}$$

Ответ: $\sqrt{26 + 12\sqrt{3}}$

Содержание критерия	**Оценка**	**Баллы**
Задача решена полностью.	+	14
Решение задачи, содержит верную общую схему решения, в котором отсутствуют некоторые обоснования или в результате описки или арифметической ошибки найден неверный ответ.	±	10
Решение содержит значительное продвижение в верном направлении. При этом решение не завершено или при правильном ответе в нем отсутствуют важные обоснования.	+/2	7
Решение в целом неверное или незаконченное, но содержит определенное содержательное продвижение в верном направлении	∓	3
Задача не решена, содержательных продвижений нет.	−	0
Задача не решалась.	0	0

Задача 8 (16 баллов)

В фойе банка по кругу расставлены *n* стульев. На эти стулья хотят сесть *n* посетителей. Первый посетитель выбирает свой стул произвольно. Затем (k+1)-й посетитель садится на k-ое место справа от k-го посетителя (для $1 \le k \le n - 1$). Никакой стул не может быть занят более, чем одним посетителем. Чему может быть равно n, если известно, что на каждом стуле в итоге оказался ровно один человек? Найдите все варианты.

Решение:

Если мы обозначим стулья за 0, 1, 2, …, *n-1*, где стул, занятый первым посетителем обозначен за 0, то стул, занятый *(k+1)*-м посетителем обозначен за $\sum_{r=0}^{k} r \pmod n$. Напомним, что $\sum_{r=0}^{k} r = \frac{k(k+1)}{2}$.

Так как два посетителя занимают одно место тогда и только тогда, когда найдутся два целых числа p и q между 0 и n-1 такие, что $\frac{p(p+1)}{2} - \frac{q(q+1)}{2} = \frac{(p+q+1)(p-q)}{2}$ делится на n. Без ограничения общности будем считать $p > q$.

Сначала рассмотрим случай n, не являющегося степенью 2. Запишем тогда $2n=uv$, где $u>v$, причем одно из значений u или v есть степень 2, как минимум 2, и другое значение – нечетное число, как минимум 3. Пусть $p = \frac{u+v-1}{2}$ и $q = \frac{u-v-1}{2}$. Так как числители – четные числа, то p и q – целые, а так как числители не превосходят $2u$, то p и q – различные целые числа от 0 до n-1.

Имеем, $\frac{(p+q+1)(p-q)}{2} = \frac{uv}{2} = \frac{2n}{2} = n$. То есть для n, не являющихся степенью 2, получаем более одного посетителя на одном стуле.

Теперь рассмотрим случай, когда n является степенью 2. Два посетителя сидят на одном стуле означает, что два целых числа p и q между 0 и n-1 таковы, что $\frac{(p+q+1)(p-q)}{2}$ делится на n. Разность двух множителей в числителе равна $(p+q+1)-(p-q) = 2q+1$, нечетное число. Это означает, что только один множитель может быть четным. Величина этого четного множителя не больше, чем $p+q+1$, что меньше $2n$. Таким образом, любой четный множитель в $\frac{(p+q+1)(p-q)}{2}$ меньше, чем n. Если n – степень 2, то $\frac{(p+q+1)(p-q)}{2}$ не может делиться на n, и каждый стул занят только одним посетителем.

Ответ: 2^m, где $m = 0,1,2,\ldots$ (1,2,4,8,16, …)

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача решена полностью.	+	16
Решение задачи, содержит верную общую схему решения, в котором отсутствуют некоторые обоснования. Ответ верный.	±	12
Решение в целом неверное или незаконченное, но содержит определенное содержательное продвижение в верном направлении	∓	4
Верно рассмотрены частные случаи.		
Задача не решена, содержательных продвижений нет.	–	0
Задача не решалась.	0	0