Оценочный бланк олимпиадных заданий по математике

Код участника: 440167

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8
Полученные баллы	10	10	12	12	12	14	7	3
Сумма баллов (оценка)	80							

Члены жюри:

Подпись	Кочерова А.С. Фамилия И.О.
Подпись	В. Б. [illegible] Фамилия И.О.
Подпись	Грабенщиков Ю.Б. Фамилия И.О.

Всероссийская олимпиада школьников «Миссия выполнима. Твое призвание-финансист!»

ПО МАТЕМАТИКЕ 11 класс

Заключительный (очный) этап
2016/2017 учебный год

440167

Код участника

Вариант I

Задание 1. (10 баллов)

Сколько существует натуральных чисел n таких, что уравнение $nx-12=3n$ имеет целочисленное решение. $n\in\mathbb{N}$ $x\in\mathbb{Z}$

Задание 2. (10 баллов)

Ниже нарисован магический квадрат, в котором некоторые числа отсутствуют.

20		
	17	
16		

Восстановите данный магический квадрат.

(В магическом квадрате суммы чисел, стоящих в каждой строке, в каждом столбце и на диагоналях, равны).

Задание 3. (12 баллов)

Среднее арифметическое десяти различных натуральных чисел равно 20, а среднее арифметическое любых девяти из этих чисел не меньше 17. Найдите максимально возможное значение наибольшего из этих чисел.

Чистовик **ЛИСТ-ВКЛАДЫШ** 440167

N1

$n \in \mathbb{N}$
$x \in \mathbb{Z}$

Делители числа 12:
$\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 4; \pm 6$
$12 = 1 \cdot 12 = 2 \cdot 6 = 3 \cdot 4$

$nx - 12 = 3n$; $nx - 3n = 12$; $n(x-3) = 12$

$x \in \mathbb{Z} \Rightarrow (x-3) \in \mathbb{Z}$; $(n(x-3))$ – произведение целых чисел

значит, чтобы уравнение имело целочисленные решения, должно выполняться следующее:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} n = 1 \\ x - 3 = 12 \end{cases} \\ \begin{cases} n = 2 \\ x - 3 = 6 \end{cases} \\ \begin{cases} n = 3 \\ x - 3 = 4 \end{cases} \\ \begin{cases} n = 4 \\ x - 3 = 3 \end{cases} \\ \begin{cases} n = 6 \\ x - 3 = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} n = 12 \\ x - 3 = 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} n = 1 \\ x = 15 \end{cases} \\ \begin{cases} n = 2 \\ x = 9 \end{cases} \\ \begin{cases} n = 3 \\ x = 7 \end{cases} \\ \begin{cases} n = 4 \\ x = 6 \end{cases} \\ \begin{cases} n = 6 \\ x = 5 \end{cases} \\ \begin{cases} n = 12 \\ x = 4 \end{cases} \end{array}\right.$$

+

Ответ: таких n существует 6 штук: $n \in \{1; 2; 3; 4; 6; 12\}$.

N2

20	13	a
a-3	17	19
16	21	14

↓

20	13	18
15	17	19
16	21	14

восстановленный магический квадрат

Пусть в правом верхнем углу находится число a.

1) Сумма чисел, стоящих в каждой строке, каждом столбце и на диагоналях, равна $(16+17+a)$, см. диагональ.
2) Верхняя строчка: $20 + ? + \cancel{a} = 16 + 17 + \cancel{a}$; $? = 13$
3) Левый столбец: $20 + ? + \cancel{16} = \cancel{16} + 17 + a$; $? = a - 3$
4) Средняя строчка: $\cancel{a} - 3 + \cancel{17} + ? = 16 + \cancel{17} + \cancel{a}$; $a = 19$
5) Диагональ \ и правый столбец:
$20 + 17 + \cancel{?} = a + 19 + \cancel{?}$; $a = 18$; $a - 3 = 15$
$(16 + 17 + a) = 51$ – сумма
6) Средний столбец: $? = 51 - 13 - 17 = 51 - 30 = 21$
7) Правый столбец: $? = 51 - 19 - 18 = 51 - 37 = 14$

+

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМАЮ, ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ-ФИНАНСИСТ!»

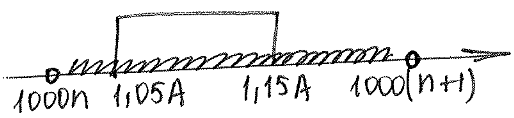
ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

440167

№5

Пусть сумма чека, который получил Сергей, равна A.
~~а также [illegible]~~
~~т.е. всего у него было~~ Будем считать, что у Сергея неогранич. кол-во банкнот в 1000 руб.
Значит, он захотел оставить чаевые в размере от $0{,}05A$ до $0{,}15A$, т.е. всего ему надо было оплатить от $1{,}05A$ до $1{,}15A$. Но тогда эта сумма должна лежать в диапазоне $(1000n;\ 1000(n+1))$, чтобы Сергей НЕ мог расплатиться. ($n \in \mathbb{N}$.)

$$\begin{cases} 1000n < 1{,}05A \\ 1{,}15A < 1000(n+1) \end{cases}$$



неравенство строгое, т.к. если включить $1000n$ и $1000(n+1)$, то Сергей сможет дать ровно 5% или 15% чаевых к счету, и все — банкнотами в 1000р.
Итак,

$$\begin{cases} 100000n < 105A \\ 115A < 100000(n+1) \end{cases} \qquad \begin{cases} 20000n < 21A \\ 23A < 20000(n+1) \end{cases}$$

Можем сложить нерав-ва: $\cancel{20000n} + 23A < 21A + \cancel{20000n} + 20000$;
$2A < 20000$; $A < 10000$. Однако это без учета системы.
~~Действительно если Сергей получил счет в 10000 руб. то он должен был оставить чаевые от 500 руб до 1500 руб.~~

$$\begin{cases} A < 10000 \\ 1000n < 10500 \end{cases} \quad \begin{cases} A < 10000 \\ n < 10{,}5 \end{cases} \quad \begin{cases} A < 10000 \\ n \le 10 \ (n \in \mathbb{Z}!) \end{cases}$$

Значит, на самом деле $23A < 20000 \cdot 11$; $A < \frac{20000}{23} \cdot 11 =$
$= \left(869 + \frac{13}{23}\right) \cdot 11 = 9559 + 6 + \frac{5}{23} = 9565 + \frac{5}{23} = 9565\frac{5}{23}$

~~И действительно, если счет был бы на 10000 руб., то чаевые должны были бы быть от 500 руб. до 1500 руб., т.е. Сергей мог бы заплатить 11000 руб.~~

Ответ: менее $9565\frac{5}{23}$ рублей.
Также при $n = 10$ $A > \frac{200000}{21} = 9523 + \frac{17}{21}$
Если считать, что счет был без копеек, то максимально возможная сумма: 9565 руб.   +

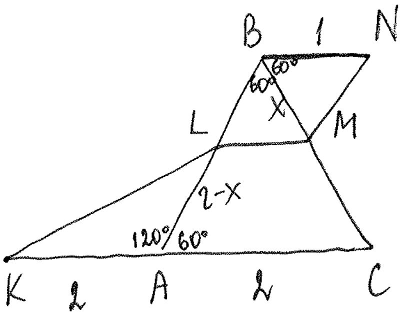
Ответ: стремится к $9565\frac{5}{23}$.

Запрещается делать пометки, раскрывающие авторство работы

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ 440167

N7

$|AN| > |CN| \Rightarrow$ N лежит ближе к C, чем к A



Пусть $BL = BM = x$, тогда $LA = MC = 2 - x$. $0 < x < 2$.

Из $\triangle KLA$ по Т косинусов:

$KL^2 = 4 + (2-x)^2 - 2 \cdot 2 \cdot (2-x) \cdot \cos 120°$

$KL^2 = 4 + 4 - 4x + x^2 + 4 - 2x$

$KL^2 = x^2 - 6x + 12$

$KL = \sqrt{x^2 - 6x + 12}$

Из $\triangle BNM$ по Т косинусов:

$MN^2 = x^2 + 1 - 2 \cdot 1 \cdot x \cdot \cos 60°$

$MN^2 = x^2 - x + 1$

$MN = \sqrt{x^2 - x + 1}$

$|KL| + |MN| = \underbrace{\sqrt{x^2-6x+12} + \sqrt{x^2-x+1}}_{f(x)}$ $f_{наим}$ - ?

$\frac{+}{2}$

$f'(x) = \frac{2x-6}{2\sqrt{x^2-6x+12}} + \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+1}} = \frac{(2x-6)\sqrt{x^2-x+1} + (2x-1)\sqrt{x^2-6x+12}}{2\sqrt{x^2-6x+12}\sqrt{x^2-x+1}}$

~~$D\,x^2-x+1 = 1 + 4 = -3$~~

~~$D\,x^2-6x+12 = 36 - 48$~~

$x^2 - x + 1 > 0 \quad \forall x$

$x^2 - 6x + 12 > 0 \quad \forall x$

Крит. точки:

$(2x-6)\sqrt{x^2-x+1} = (1-2x)\sqrt{x^2-6x+12}$ $\quad x < 2$

$\begin{cases} (2x-6)(1-2x) \geq 0 - \text{выполн. } \forall x \in [\frac{1}{2}; 2] \Rightarrow x \geq 0{,}5 \\ (2x-6)^2(x^2-x+1) = (1-2x)^2(x^2-6x+12) \end{cases}$

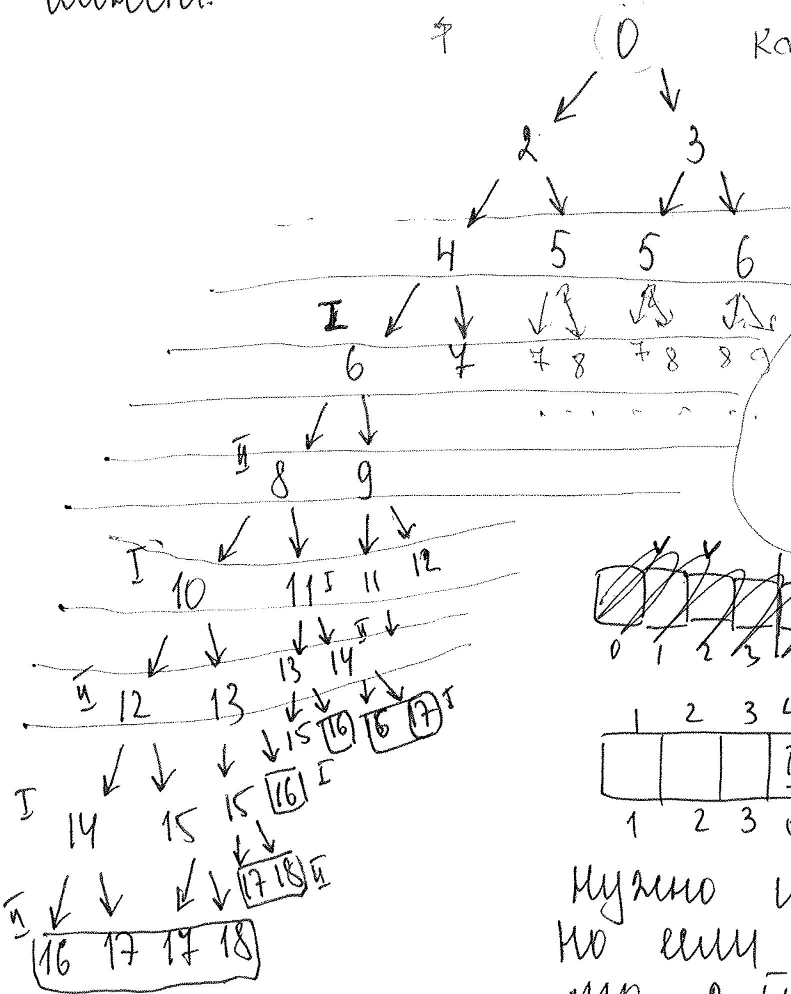
$\begin{cases} 0{,}5 \leq x < 2 \\ 4(x^2-6x+9)(x^2-x+1) = (4x^2-4x+1)(x^2-6x+12) \end{cases}$

С помощью кр. т. и анализа ф-ць мы можем верно получить. наим. знач.

№8

Составим граф, на каком месте будет последняя монета.

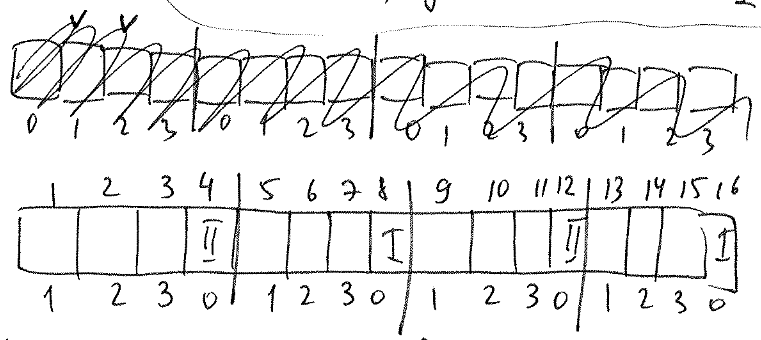
Какой ход должен выполнить I-ый игрок в начале игры?



I игрок

II

Рассмотрим остатки от деления на 4: 0, 1, 2, 3. 1-й находится изначально на ~~0, затем~~ на ~~2~~1 или 2.



?

Нужно иметь в итоге остаток 0. Но если изначально у 1го 2 или 3, то 2-й игрок может переместить 1-го на 1(5). Тот сможет занять 0 (8). Через чередование получим, что 16-ю монету положит 1-й вне зависимости от хода.

?

Не понятен вывод.

7

Нет всех цепочек, ~~для~~ после второго хода ~~второго~~ первого игрока. ~~игрока~~ Нет ясного изложения алгоритма действий ~~1-го~~ игрока. Отсутствует пункт б)

x

№6

$f(f(x)) = x$; $f(f(x+2)+2) = x$ $\forall x$; $f(0) = 1$

$f(2017)$ – ?

$f(0) = 1 \Rightarrow f(f(0)) = 0$, т.е. $f(1) = 0$

$f(f(-1+2)+2) = -1 \Rightarrow f(2) = -1$

$f(f(-2+2)+2) = -2 \Rightarrow f(+3) = -2$

$f(f(2)) = 2 \Rightarrow f(-1) = 2$

$f(f(3)) = 3 \Rightarrow f(-2) = 3$

$f(f(-3+2)+2) = -3 \Rightarrow f(4) = -3$

(к примеру)

$\forall n \in \mathbb{Z}$ $f(n) = 1 - n$

Докажем по индукции: база верна (см. примеры)

Пусть $\boxed{f(k) = 1 - k}$. Надо д! $f(-5-k) = k - 4$

$f(f(k)) = k \Rightarrow \boxed{f(1-k) = k}$ $f(1-k+2) = k-2 \Rightarrow \boxed{f(3-k) = k-2}$

$f(f(k-2+2)+2) = k-2 \Rightarrow \boxed{f(k+2) = -1-k}$

$f(f(-1-k+2)+2) = -1-k \Rightarrow$

$\Downarrow$ $\boxed{f(k-2) = 3-k}$

$\boxed{f(-1-k) = k+2}$

$f(f(-k)) = -k$

$f(f(-k+2)+2) = -k$

$f(f(-3-k+2)+2) = -3-k \Rightarrow f(f(-1-k)+2) = -3-k \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{f(k+4) = -3-k} \Rightarrow \boxed{f(-3-k) = k+4}$

$f(f(k-\overset{+2}{4})+2) = k-4 \Rightarrow f(f(k-2)+2) = k-4 \Rightarrow$

$\Rightarrow f(3-k+2) = k-4 \Rightarrow \boxed{f(5-k) = k-4}$

и т.д

очевидно, что $f(n) + n = 1$

Значит, $f(2017) = 1 - 2017 = -2016$

Ответ: -2016.

+

№3

Обозначим: $a_1, a_2, \dots, a_{10}$ – данные десять различных натуральных чисел, расположенные в порядке возрастания $(a_1 < a_2 < \dots < a_{10})$

$$\frac{a_1+a_2+\dots+a_{10}}{10} = 20 \qquad (a_{10})_{max} - ?$$

$a_1+a_2+\dots+a_{10} = 200$

$a_1+a_2+\dots+a_9 = 200 - a_{10}$

$\frac{a_1+a_2+\dots+a_9}{9} \geq 17$; $\frac{200-a_{10}}{9} \geq 17$; $200 - a_{10} \geq 153$; $a_{10} \leq 47$

Значит, максимально возможное значение наибольшего из чисел – 47.

Найдем пример: пусть $\{a_1; a_2; \dots; a_9\} \div$ $d=1$

$S_9 = 153 = \frac{2a_1+8d}{2} \cdot 9 = (a_1+4d)\cdot 9$; $a_1+4d = 17$; $a_1 = 13$

$13+14+\dots+21 = 153$

$(13+14+\dots+21)+47 = 200$

$\frac{(13+14+\dots+21)+47}{10} = 20$

наименьшее среднее арифм. 9 чисел: $\frac{13+14+\dots+21}{9} = \frac{153}{9} = 17$ (сохраняется условие „не меньше 17").

Ответ: 47.

№4

$\{x_n\}$: $x_1 = 1$; $\forall n \geq 2$ $x_n = \frac{n+2}{n x_{n-1}}$

Найти: $x_1 x_2 x_3 \dots x_{2016} x_{2017}$.

Решение:

Очевидно, $\forall n \in \mathbb{N}$ $x_n \neq 0$; тогда, по условию, $x_{n-1}x_n = \frac{n+2}{n}$.

Запишем некоторые произведения двоек чисел:

$(x_1 = 1)$

$x_2 x_3 = \frac{3+2}{3} = \frac{5}{3}$

$x_4 x_5 = \frac{5+2}{5} = \frac{7}{5}$

$x_6 x_7 = \frac{7+2}{7} = \frac{9}{7}$

$\dots$

$x_{n-1} x_n = \frac{n+2}{n}$ (n – нечет.)

$x_{n+1} x_{n+2} = \frac{n+4}{n+2}$

$x_{n+3} x_{n+4} = \frac{n+6}{n+4}$

$\dots$

$x_{2014} x_{2015} = \frac{2015+2}{2015} = \frac{2017}{2015}$

$x_{2016} x_{2017} = \frac{2017+2}{2017} = \frac{2019}{2017}$

$\Rightarrow x_1 x_2 x_3 \dots x_{2016} x_{2017} =$

$= 1 \cdot (x_2 x_3) \cdot (x_4 x_5) \cdot \dots \cdot (x_{2016} \cdot x_{2017}) =$

$= 1 \cdot \frac{\cancel{5}}{3} \cdot \frac{\cancel{7}}{\cancel{5}} \cdot \frac{\cancel{9}}{\cancel{7}} \cdot \dots \cdot \frac{\cancel{n+2}}{\cancel{n}} \cdot \frac{\cancel{n+4}}{\cancel{n+2}} \cdot \frac{\cancel{n+6}}{\cancel{n+4}} \cdot \dots$

$\times \frac{\cancel{2017}}{\cancel{2015}} \cdot \frac{2019}{\cancel{2017}} = \frac{2019}{3} = 673$

Ответ: 673.

+

Оценочный бланк олимпиадных заданий по математике

Код участника: 440172

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8
Полученные баллы	10	10	10	12	2	12	10	8
Сумма баллов (оценка)	~~62~~ 74							

Члены жюри:

Подпись	Кочерова А.С. Фамилия И.О.
Подпись	В. Б. [illegible] Фамилия И.О.
Подпись	Гребенщиков Ю.Б. Фамилия И.О.

Всероссийская олимпиада школьников «Миссия выполнима. Твое призвание-финансист!»

ПО МАТЕМАТИКЕ 11 класс

Заключительный (очный) этап 2016/2017 учебный год

440172

Код участника

Вариант I

Задание 1. (10 баллов)

Сколько существует натуральных чисел n таких, что уравнение $nx - 12 = 3n$ имеет целочисленное решение.

Задание 2. (10 баллов)

Ниже нарисован магический квадрат, в котором некоторые числа отсутствуют.

20		
	17	
16		

Восстановите данный магический квадрат.

(В магическом квадрате суммы чисел, стоящих в каждой строке, в каждом столбце и на диагоналях, равны).

Задание 3. (12 баллов)

Среднее арифметическое десяти различных натуральных чисел равно 20, а среднее арифметическое любых девяти из этих чисел не меньше 17. Найдите максимально возможное значение наибольшего из этих чисел.

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «МИССИЯ ВЫПОЛНИМАЮ, ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ-ФИНАНСИСТ!»

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

Задание 1

440172

$nx - 12 = 3n$

$nx = 3n + 12$

$x = \frac{3n+12}{n}$

$x = 3 + \frac{12}{n}$

Значит уравнение имеет целочисленные решения, если ~~12~~ $12 \vdots n$ (12 делится без остатка на n).

Среди натуральных чисел, существуют лишь 6, на которые 12 делится без остатка. Это числа 1, 2, 3, 4, 6, 12. То есть, существует 6 таких натуральных n, что уравнение $nx - 12 = 3n$ имеет целочисленное решение.

Ответ: 6

(+)

Задание 2

Обозначим пустые клетки квадрата буквами a, b, c, d, e, l:

	1	2	3
4	20	a	b
5	c	17	l
6	16	d	e

Известно, что суммы чисел в каждой строке, в каждом столбце и в каждой диагонали одинаковы.

В диагоналях:

$20 + 17 + e = 16 + 17 + b$

1) • $b = e + 4$

В столбцах 1 и 2:

$20 + 16 + c = a + d + 17$

2) • $c = a + d - 19$

В столбцах 2 и 3:

3) • $a + d = b + l + e - 17$

В строках 4 и 5:

4) • $a + b = c + l - 3$

В строках 5 и 6:

5) • $c + l = d + e - 1$

Подставив уравнения 1), 2), 5) в уравнения 3 и 4 получим:

$$\begin{cases} a + d = e + 4 + a + e + 4 - a - d + 19 + e - 17 + 3, \\ a + d - 19 + a + e + 4 - a - d + 19 + 3 = d - 1; \end{cases} \qquad \begin{cases} a + 2d = 3e + 13 \\ a + 8 = d \end{cases}$$

То есть • $a = d - 8$

$a + 2(a+8) = 3e + 13$

• $a = e - 1$

Запрещается делать пометки, раскрывающие авторство работы

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

440172

$$x_4 \cdot x_5 = x_4 \cdot \frac{n_1+3+2}{(n_1+3)\cdot x_4} = \frac{n_1+5}{n_1+3}$$

$$x_6 \cdot x_7 = x_1 \cdot \frac{n_1+5+2}{(n_1+5)x_1} = \frac{n_1+7}{n_1+5}$$

Таким образом, при умножении каждой пары друг на друга получим

$$M = x_1 \cdot \frac{n_1+3}{n_1+1} \cdot \frac{n_1+5}{n_1+3} \cdot \frac{n_1+7}{n_1+5} \cdot \ldots \cdot \frac{n_1+2015}{n_1+2013} \cdot \frac{n_1+2017}{n_1+2015} = \frac{n_1+2017}{n_1+1}.$$

Так как $x_1 = 1$, $n_1 = 2$, то

$$M = 1 \cdot \frac{2+2017}{2+1} = \frac{2019}{3} = 673$$

+

Ответ: 673

Задание 5

Обозначим счет в кафе как k. Рассмотрим несколько ситуаций:

1) $k \geq 20000$. Тогда $1000 \leq 0{,}05k$. Значит, Сергей обязательно сможет как-то от $0{,}05k$ до $0{,}15k$, используя одну или несколько тысячных банкнот

2) $\begin{cases} 1000 \leq 0{,}15k \\ 1000 > 0{,}05k \end{cases}$

При таком условии $\frac{100000}{15} \leq k < 20000$ и Сергей сможет заплатить чаевые в определенном размере, используя лишь одну тысячную банкноту

3) $1000 > 0{,}15k$

$k < \frac{100000}{15}$

$k < 6666\frac{2}{3}$

При таком условии тысячная банкнота больше, чем максимальный допустимый размер чаевых. Значит, наибольшая сумма чека, которую Сергей не сможет оплатить, равна 6666 рублей (предполагаем, что в чеке была целочисленная сумма)

Ответ: 6666 рублей

Требуется заплатить всю сумму банкнотами в 1000, а не только чаевые

–

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМАЮ, ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ-ФИНАНСИСТ!»

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

Так как $|AN| > |CN|$, то точка N лежит на продолжении прямой CB за точку B.

$|AK| = 2$, $|BN| = 1$.

Пусть $AL = x$. Тогда $LB = AB - x = 2 - x$ **44017?**

По теореме Фалеса т.к $BN \parallel LM \parallel AC$, то
$LA = MC = x$, $BL = BM = 2 - x$.

$\angle BAK = \cancel{\ldots} = 120°$ (внешний угол в правильном треугольнике)

$\angle CBN = \angle BAC = 60°$ (т.к $BN \parallel AC$)

По теореме косинусов:

$KL^2 = AK^2 + x^2 - 2AK \cdot x \cdot \cos \angle KAB = x^2 + 2x + 4$

$MN^2 = BN^2 + MB^2 - 2BM \cdot MB \cdot \cos \angle CBN =$

$= 1 + (2-x)^2 - 2 \cdot (2-x) \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 1 + 4 - 4x + x^2 - 2 + x =$

$= x^2 - 3x + 3.$

$KL + MN = \sqrt{x^2+2x+4} + \sqrt{x^2-3x+3}$ To

Чтобы найти минимальное значение, вычислим производную:

$(KL+MN)' = (2x+2) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2+2x+4}} + (2x-3) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2-3x+3}}$

$\frac{(2x+2) \cdot \sqrt{x^2-3x+3} + (2x-3) \cdot \sqrt{x^2+2x+4}}{\sqrt{x^2+2x+4} \cdot \sqrt{x^2-3x+3}} = 0$

$(2x+2) \cdot \sqrt{x^2-3x+3} = (3-2x) \cdot \sqrt{x^2+2x+4}$

$(4x^2+8x+4)(x^2-3x+3) = (9-12x+4x^2)(x^2+2x+4)$

$\underline{4x^4} - 12x^3 + 12x^2 + \underline{8x^3} - 24x^2 + 24x + 4x^2 - 12x + 12 =$
$= 9x^2 + 18x + 36 - 12x^3 - 24x^2 - 48x + \underline{4x^4} + \underline{8x^3} + 16x^2$

$-8x^2 + 12x + 12 = x^2 - 30x + 36$

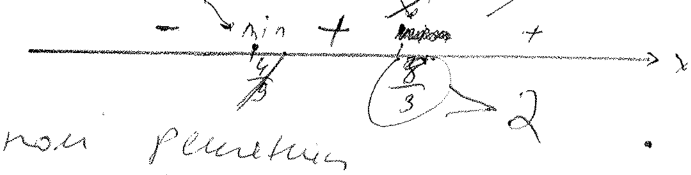
$9x^2 - 42x + 24 = 0.$ — верно

$3x^2 - 14x + 8 = 0$

$D = 196 - 96 = 100$; $\sqrt{D} = 10$

$x_1 = \frac{14+10}{\cancel{3}\ 6} = \cancel{\frac{24}{3}} = \cancel{\frac{8}{3}}$ $x_2 = \cancel{\frac{4}{3}}$

Ошибка в решении кв. уравнения



Как поменяли знак?

в верном решении $x = 2/3$

+1

Запрещается делать пометки, раскрывающие авторство работы

Задание 4. (12 баллов)

Числовая последовательность такова, что $x_n = \dfrac{n+2}{n x_{n-1}}$ для всех $n \geq 2$. Найдите произведение $x_1 x_2 x_3 \ldots x_{2016} x_{2017}$, если $x_1 = 1$.

Задание 5. (12 баллов)

Когда Сергей пошел в кафе поужинать, в его кошельке были только банкноты в 1000 рублей. Он решил оставить официанту чаевые строго в размере от 5% до 15% от размера чека. Когда он получил чек, то понял, что не может осуществить задуманное. Найдите сумму наибольшего чека, который Сергей не может оплатить с учетом чаевых, используя только банкноты в 1000 рублей.

Задание 6. (14 баллов)

Функция $f(x)$ такова, что $f(f(x)) = x$ и $f(f(x+2)+2) = x$ для любого x.
Найдите $f(2017)$, если $f(0) = 1$.

Задание 7. (14 баллов)

Дан правильный треугольник ABC со стороной 2. Точка K лежит на продолжении стороны AC за точку A, точка N лежит на прямой, параллельной прямой AC и проходящей через точку B, причем $|AK| = 2$, $|BN| = 1$. Рассматриваются такие ломаные $KLMN$, что точка L лежит на стороне AB, точка M лежит на стороне BC, а отрезок LM параллелен стороне AC. Найдите наименьшее возможное значение суммы $|KL| + |MN|$, если $|AN| > |CN|$.

Задание 8. (16 баллов)

Два игрока по очереди выкладывают монеты в ряд. За один ход можно положить две или три монеты. Выигрывает тот, кто выложит 16 монету.

a) Определите, какой игрок (первый или второй) обладает стратегией, которая позволит ему выиграть вне зависимости от ходов другого игрока. Опишите эту стратегию.
b) Какой первый ход должен сделать первый игрок, играя с автоматом, чтобы выиграть с наибольшей вероятностью, если известно, что автомат ходит случайно и выкладывает две монеты или три монеты с равной вероятностью? Чему равна вероятность выиграть для первого игрока при этом ходе?

Значит, минимальное значение достигается тогда, когда $x = \frac{8}{9}$. Но в нашем случае $x \in [0;2]$.

Значит $|KL| + |MN| = \min$ при $x = \frac{4}{9}$

$KL = \sqrt{x^2 + 2x + 4} = \sqrt{\frac{16}{81} + \frac{8}{9} + 4} = \frac{2}{9}\sqrt{103}$

~~Точка A совпадает с точкой B, поэтому MN = 1~~ $MN = \frac{\sqrt{403}}{9}$

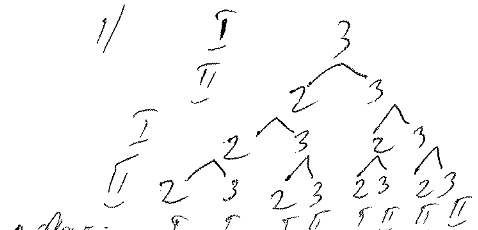
$|KL| + |MN| =$ тогда $\frac{2\sqrt{103} + \sqrt{403}}{9}$

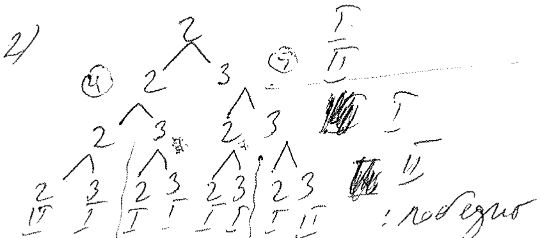
Ответ: $\frac{2\sqrt{103} + \sqrt{403}}{9}$

Задание 8

а) Рассмотрим возможные случаи, когда:

1) первый ход 3 монеты
2) первый ход 2 монеты

1/ 

2/ 

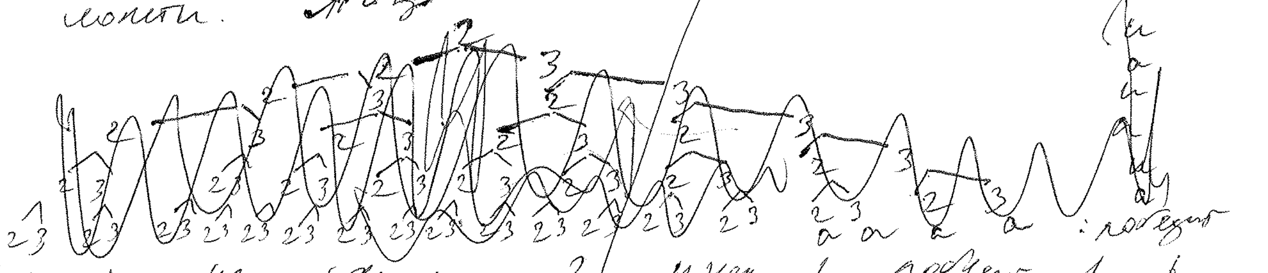
Выигрывает тот, кто одним из своих ходов может набрать 12 монет (или 11 монет). Ведь тогда его соперник может сделать лишь 13/14/15 монет, и игрок неизбежно выиграет.

В первом случае второй игрок набирает 11 или 12 монет 4 раза и первый 4 раза.

Но если первый игрок начнет ход с двух монет, то тогда он неизбежно выиграет. Если второй ходит и кладет 3 монеты, то первому необходимо положить 2 монеты и тогда он наберет 12 монет (или 11 монет) на 3 ходе. Если второй ходит с двух монет, то первый наберет 11 или 12 монет на 3-4 ходе и также победит, если на втором ходе положит 3 монеты.

Ответ: победит первый игрок

б) Как мы видим, наиболее выигрышная ситуация складывается для первого игрока, когда он ходит с 2 монет. Значит, сначала ему нужно положить 2 монеты. ~~тогда~~



Исходя из схемы 2, игрок 1 победит в 6 случаях из 8. Тогда вероятность:

$A = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} = 0{,}75$ (автомат выбрасывает монеты с равной вероятностью).

Ответ: 0,75 ?!

Задание 6

$f(f(x)) = x$
$f(f(x+2)+2) = x$ } при любых x
$f(0) = 1.$

$f(2017)$ - ?

Решение.

Известно, что $f(0) = 1$. Тогда

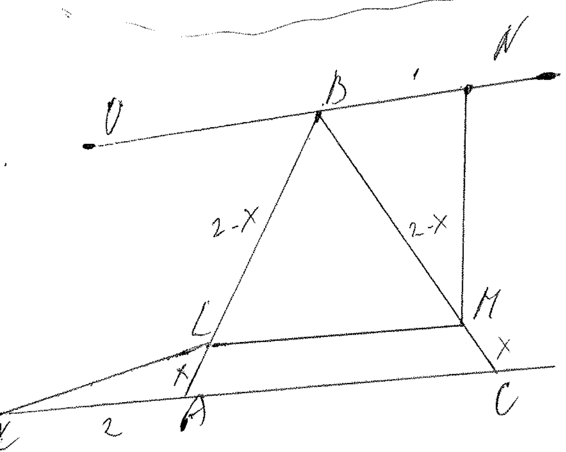
$f(f(0)) = 0$
$f(1) = 0$
$f(f(0)+2) = x_1$
$x_1 + 2 = 0$
$x_1 = -2$?
$f(3) = -2$ ✓
$f(f(3)) = 3$
$f(-2) = 3$ ✓
$f(f(-2)+2) = x_2$
$x_2 = -4$
$f(5) = -4$ ✓
$f(f(5)) = 5$
$f(-4) = 5$ ✓
$f(f(-4)+2) = x_3$
$x_3 = -6$
$f(7) = -6$ ✓
$f(-6) = +7.$

±

утверждение не обосновано достаточно строго.

Таким образом, мы получили, что для x
$f(x) = -x+1$, если x - четное и $x \le 0$
$f(x) = -x+1$, если x - нечетное и $x \ge 0$
Т.к. 2017 - нечетное, больше нуля, то
$f(2017) = -2017+1 = -2016$
Ответ: -2016

Задание 7



Дано: $\triangle ABC$, $AB = BC = AC = 2$, $|AK| = 2$, $|BN| = 1$, $BN \parallel AC$, $LM \parallel AC$. $|AN| > |CN|$

Найти: $|KL| + |MN|$ min - ?

Решение:

$b = e + 4 = a + 5$

• $a = b - 5$

$c = a + d - 19 = a + a + 8 - 19 = a - 11$

• $a = c + 11$

$l = a + a + 5 - a + 11 + 3 = a + 19$

• $a = l - 19$.

Чтобы в таблице были лишь натуральные числа необходимо, чтобы $a \geq 12$ ($a > 0$, $c > 0$, $a = c + 11$).

Пусть $a = 13$, тогда

$d = 21$, $l = 14$, $b = 18$, $c = 2$, $l = 32$.

Наш магический квадрат будет выглядеть так:

20	13	18
2	17	32
16	21	14

Суммы чисел в каждой строке, в каждом столбце и по диагоналям равны 51 (одинаковы).

+

Задание 3

Пусть эти числа $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, k, n$.

Известно, что

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_8 + k + n}{10} = 20 \Rightarrow$$

$$Sum = 200$$

~~Пусть~~ Чтобы одно из чисел было максимальным, необходимо, чтобы остальные были минимальны, но при этом должны выполняться все заданные условия

Пусть n - максимальное. Чтобы остальные числа были минимальны и выполнялись все заданные условия, необходимо, чтобы

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_8 + k}{9} \geq 17$$

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_8 + k \geq 153$$

n_{max}, если $a_1 + a_2 + \ldots + a_8 + k = 153$. Тогда

$n = Sum - a_1 - a_2 - \ldots - a_8 - k = 200 - 153 = 47$

Так как n - максимальное, то среднее арифметическое любых 9 чисел, одно из которых n, обязательно больше 17.

доказано, что $a_{max} \leq 47$, но может быть $a_{max} < 47$

Ответ: 47

±

Задание 4

$$X_n = \frac{n+2}{n X_{n-1}} \quad \text{при} \quad n \geq 2$$

$X_1 X_2 X_3 \ldots X_{2016} X_{2017}$ - ?

$X_1 X_2 X_3 \ldots X_{2016} X_{2017} = \cancel{(X_1 X_2) \cdot (X_3 X_4) \cdot (X_5 X_6)} \ldots X_1 \cdot (X_2 X_3) \cdot (X_4 X_5) \cdot \ldots \cdot (X_{2016} X_{2017})$

Пусть $n = 2$, тогда

$$X_2 \cdot X_3 = X_2 \cdot \frac{n+1+2}{(n+1) \cdot X_2} = \frac{n+3}{n+1}$$

Оценочный бланк олимпиадных заданий по математике

Код участника: 440176

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8
Полученные баллы	10	5	10	12	~~7~~ 2	14	7	16
Сумма баллов (оценка)	76							

Члены жюри:

Подпись	Кочерова Н.С. Фамилия И.О.
Подпись	В.Б. Шеин Фамилия И.О.
Подпись	Гребенщиков Ю.Б Фамилия И.О.

Всероссийская олимпиада школьников «Миссия выполнима. Твое призвание-финансист!»

ПО МАТЕМАТИКЕ 11 класс

Заключительный (очный) этап 2016/2017 учебный год

440176

Код участника

Вариант I

Задание 1. (10 баллов)

Сколько существует натуральных чисел n таких, что уравнение $nx-12=3n$ имеет целочисленное решение.

$nx-3n-12=0$ $\quad$ 1 2 3 4 6 12

$n(x-3)=12$

Задание 2. (10 баллов)

Ниже нарисован магический квадрат, в котором некоторые числа отсутствуют.

20		
	17	
16		1

$20+12=32$
$20+16=36$

Восстановите данный магический квадрат.

(В магическом квадрате суммы чисел, стоящих в каждой строке, в каждом столбце и на диагоналях, равны).

Задание 3. (12 баллов)

Среднее арифметическое десяти различных натуральных чисел равно 20, а среднее арифметическое любых девяти из этих чисел не меньше 17. Найдите максимально возможное значение наибольшего из этих чисел.

Задание 4. (12 баллов)

Числовая последовательность такова, что $x_n = \dfrac{n+2}{n x_{n-1}}$ для всех $n \geq 2$. Найдите произведение $x_1 x_2 x_3 \ldots x_{2016} x_{2017}$, если $x_1 = 1$.

Задание 5. (12 баллов)

Когда Сергей пошел в кафе поужинать, в его кошельке были только банкноты в 1000 рублей. Он решил оставить официанту чаевые строго в размере от 5% до 15% от размера чека. Когда он получил чек, то понял, что не может осуществить задуманное. Найдите сумму наибольшего чека, который Сергей не может оплатить с учетом чаевых, используя только банкноты в 1000 рублей.

Задание 6. (14 баллов)

Функция $f(x)$ такова, что $f(f(x)) = x$ и $f(f(x+2)+2) = x$ для любого x.
Найдите $f(2017)$, если $f(0) = 1$.

Задание 7. (14 баллов)

Дан правильный треугольник ABC со стороной 2. Точка K лежит на продолжении стороны AC за точку A, точка N лежит на прямой, параллельной прямой AC и проходящей через точку B, причем $|AK| = 2$, $|BN| = 1$. Рассматриваются такие ломаные $KLMN$, что точка L лежит на стороне AB, точка M лежит на стороне BC, а отрезок LM параллелен стороне AC. Найдите наименьшее возможное значение суммы $|KL| + |MN|$, если $|AN| > |CN|$.

Задание 8. (16 баллов)

Два игрока по очереди выкладывают монеты в ряд. За один ход можно положить две или три монеты. Выигрывает тот, кто выложит 16 монету.

a) Определите, какой игрок (первый или второй) обладает стратегией, которая позволит ему выиграть вне зависимости от ходов другого игрока. Опишите эту стратегию.
b) Какой первый ход должен сделать первый игрок, играя с автоматом, чтобы выиграть с наибольшей вероятностью, если известно, что автомат ходит случайно и выкладывает две монеты или три монеты с равной вероятностью? Чему равна вероятность выиграть для первого игрока при этом ходе?

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМАЮ, ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ-ФИНАНСИСТ!»

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

440176

№ 1

$nx - 12 = 3n$

$n(x-3) = 12$

1) n и $(x-3)$ натуральные делители 12

т.к. $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{Z}$ => n может принимать значения 1; 2; 3; 4; 6; 12

2) x при этом имеют целые значения: ($n=1$; $x=15$)

($n=2$; $x=9$) ($n=3$; $x=7$) ($n=4$; $x=6$) ($n=6$; $x=5$) ($n=12$; $x=4$)

Ответ: 1; 2; 3; 4; 6; 12   6 значений n

+

№ 2

20	13	18
15	17	19
16	21	14

сумма = 51

Нет решения

Есть ли ещё другой квадрат?

$\frac{+}{2}$

объяснение:

1	2	3
4	5	6
7	8	9

нумерация клеток

20		3+a
a	17	
16		a−1

1) пусть в клетке №4 стоит a, очевидно, что №3 = $3+a$, №9 = $a-1$

т.к. суммы в (№1+№5+№9) = (№7+№5+№3) = = (№1+№4+№7) = X

2) т.к. (№4+№5+№6) = (№9+№6+№3) =>

$a + 17 = 3a + a - 1 \Rightarrow a = 15$

зная a остальные клетки легко заполняются

Запрещается делать пометки, раскрывающие авторство работы

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

№5 продолжение

440176

если $0,1x < 1000 \Rightarrow x < 10000$

допустим $0,1x = 999$ т.к. больше только 1000

тогда $x = 9990$; $0,15x = 1498,5$
$0,05x = 499,5$

F

неверно, т.к. можно дать чаевые $= 1000$р, но теперь мы знаем, что $0,05x \leq 499,5 \Rightarrow n = 0$

имеем: $\begin{cases} 0,05x > 0 \\ 0,15x < 1000 \end{cases} \Rightarrow x < 6666\frac{2}{3}$ $x \in \mathbb{N} \Rightarrow x = 6666$ руб

Ответ: 6666 рублей

Он должен оплатить всю сумму банкнотами в 1000, а не только чаевые

№6

пусть мы знаем, что $f(x) = a$

по условию $f(\underset{a}{f(x)}) = x \Rightarrow f(a) = x$ ① формула

по условию $f(\underbrace{f(a-2+2)}_{x}+2) = a-2 \Rightarrow f(x+2) = a-2$ ② формула

тогда мы знаем по условию $f(0) = 1 \Rightarrow f(1) = 0$ по формуле ①

применяя формулу ② имеем: $f(3) = -2$; $f(5) = -4$; $f(7) = -6$ ....

$\Rightarrow f(2017) = -2016$

Ответ: -2016

+

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМАЮ, ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ-ФИНАНСИСТ!»

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ 440176

№8

а) Первый игрок всегда выигрывает, если следует следующей стратегии:

I игрок кладёт на стол 2

II игрок может выложить 4 (2+2) или 5 (2+3), больше ничего

I игрок выкладывает 6 (4+2) или 7 (5+2)

II игрок может выложить 8 (6+2) или 9 (6+3; 7+2) или 10 (7+3), больше ничего

I игрок выкладывает 11 (8+3) или 12 (9+3; 10+2)

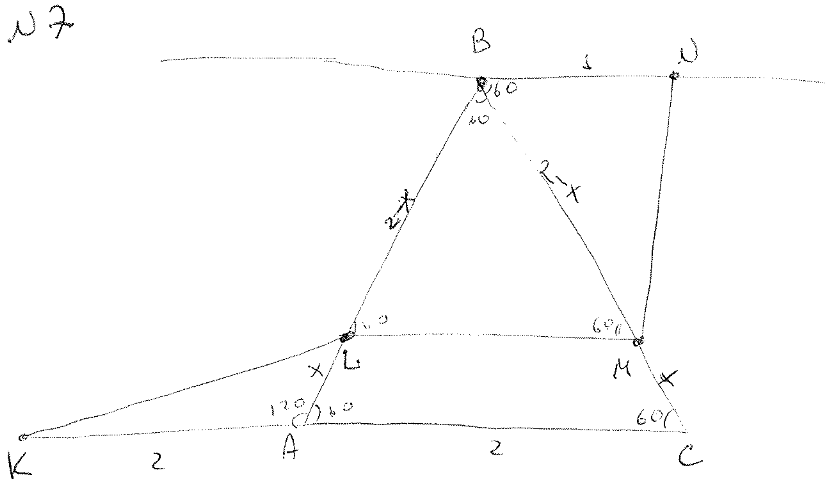
II игрок может выложить 13 (11+2) или 14 (11+3; 12+2) или 15 (12+3), и больше ничего

I игрок выигрывает: 13+3=16! 14+2=16! 15+2=17!

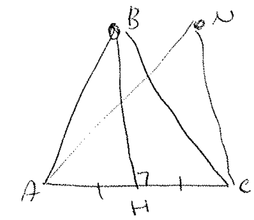
б) Первый ход игрок делает, выкладывая 2 монеты, и выигрывает у автомата, играя по стратегии из пункта а), во всех случаях. Потому что стратегия из пункта а) выигрышная во всех случаях хода противника. Следовательно игрок выигрывает с вероятностью 100%

Запрещается делать пометки, раскрывающие авторство работы

№7



① очевидно, что N лежит справа от B т.к. $|AN|>|CN|$ потому что из-за правильности $\triangle ABC$ имеем серединный $\perp$ к AC – BH, для которого верно, что $|AN|>|CN|$



② пусть $|AL| = x$, где $0\leq x \leq 2$

$AL=MC=x$ т.к. $\begin{cases} LM \parallel AC \\ \triangle ABC \text{ правильный} \end{cases}$

$MC=x \Rightarrow BM=2-x$ $\triangle LMB \sim \triangle ABC$ по 3 углам $\Rightarrow \frac{BA}{BC}=\frac{BL}{BM}=1 \Rightarrow LB=BM=LA=MC$

③ $l(x) = |KL|(x)+|MN|(x)$ применим теорему cos

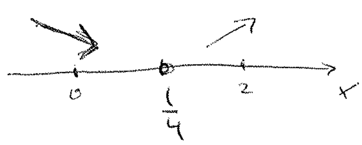
$|KL|^2(x) = KA^2+AL^2-2KA\cdot AL\cdot\cos(\angle KAL) = 4+x^2+2x$ т.к. $\angle KAL=120^\circ=180-\angle LAC$

$|MN|^2(x) = BN^2+BM^2-2\cdot BN\cdot BM\cdot\cos(\angle MBN) = 1+(2-x)^2-2+x$ т.к. $\angle MBN=60^\circ$

$l(x) = 2x^2-x+7$ $l(x)$ – парабола, непрерывная
$0\leq x\leq 2$

$l'(x) = 4x-1=0$

$x=\frac{1}{4}$



на $(-\infty;\frac{1}{4}]$ производная <0
$l(x)$ убывает
на $[\frac{1}{4};+\infty)$ производная >0
$l(x)$ возрастает
$\Rightarrow$

7

$\Rightarrow x=\frac{1}{4}$ минимум

$l(\frac{1}{4})=7 \Rightarrow$ наименьшее значение $|KL|+|MN|=7$

Ответ: 7

№3

Очевидно, что если среднее арифметическое 10 натуральных чисел = 20 $\Rightarrow$ сумма этих чисел = 200

Если ~~сумма 9~~ среднее арифметическое любых 9 из них ≥ 17 $\Rightarrow$ сумма любых 9 чисел ≥ 153 $\Rightarrow$ любое ~~десятое~~ число ≤ 47

Спрашивается максимально возможное значение числа, очевидно это 47 Ответ: 47

№4

рассмотрим произведение двух любых соседних чисел

$$x_{n-1} \cdot x_n = \frac{x_{n-1} \cdot (n+2)}{n \cdot x_{n-1}} = \frac{n+2}{n} \qquad n \geq 2$$

имеем $\underbrace{x_2 \cdot x_3} \cdot \underbrace{x_4 \cdot x_5} \cdot \underbrace{x_6 \cdot x_7} \cdots \underbrace{x_{2016} \cdot x_{2017}}$ ($x_1 = 1$, поэтому можем его не записывать в произведении)

сгруппируем парами. Произведение в каждой такой паре $= \frac{n+2}{n}$, где n - порядковый номер старшего члена в паре

получаем $\frac{(3+2)(5+2)(7+2)\dots(2017+2)}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdots 2017} = \frac{\cancel{5} \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{9} \cdot \cancel{11} \cdot \cancel{13} \cdots 2019}{3 \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{9} \cdot \cancel{11} \cdots \cancel{2017}} = \frac{2019}{3} = 673$

Ответ: 673

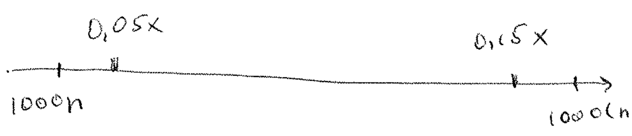
№5

Пусть сумма чека x руб, копейки учитывать не будем тогда, чтобы Сергей не смог дать чаевые, должно быть верно следующие неравенства:

$$\begin{cases} 0{,}05x > 1000n \\ 0{,}15x < 1000(n+1) \end{cases} \qquad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

очевидно, что длина отрезка $[0{,}05x; 0{,}15x] < 1000$, $(0{,}1x < 1000)$

~~но т.к. мы ищем максимум~~, ~~пусть~~



Оценочный бланк олимпиадных заданий по математике

Код участника: 440207

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8
Полученные баллы	10	10	10	12	0	7	~~3~~ 7	16
Сумма баллов (оценка)	~~68~~ 72							

Члены жюри:

Подпись — В.Б. [illegible]
Фамилия И.О.

Подпись — Маевский Е.В.
Фамилия И.О.

Подпись — Орел О.Е.
Фамилия И.О.

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМАЮ, ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ-ФИНАНСИСТ!»

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

Задание 1.

440207

$nx - 12 = 3n$

$n(x-3) = 12$

$n = \frac{12}{x-3}$ т.к. n - натуральное, то $\frac{12}{x-3} > 0 \Rightarrow x > 3$ и $\frac{12}{x-3} \geq 1 \Rightarrow x - 3 \leq 12 \Rightarrow x \leq 15$;

так же $(x-3)$ должен являтся делителем числа 12, т.е. 1, 2, 3, 4, 6, 12

$x_1 = 4$; $x_2 = 5$; $x_3 = 6$; $x_4 = 7$; $x_5 = 9$; $x_6 = 15$; отсюда можно найти и сами n:

$n_1 = 12$; $n_2 = 6$; $n_3 = 4$; $n_4 = 3$; $n_5 = 2$; $x_6 = 1$ и их кол-во 6. (+)

Ответ: 6

Задание 2.

20	13	18
15	17	19
16	21	14

(См. черновик)

+

$S = 51$

Задание 3.

$\frac{n_1 + n_2 + \ldots + n_9 + n_{10}}{10} = 20$; $n_1 + n_2 + \ldots + n_9 + n_{10} = 200$;

±

$\frac{n_1 + n_2 + \ldots + n_8 + n_9}{9} \geq 17$; $n_1 + n_2 + \ldots + n_8 + n_9 \geq 153$; допустим, что n_{10} - MAX, тогда сумма девяти других должна быть минимально возможной (153), тогда $n_{10} = 200 - 153 = 47$. Допустим, что есть число, больше 47, например 48. Тогда $n_1 + n_2 + \ldots + n_8 + n_9 + 48 = 200 \Rightarrow n_1 + n_2 + \ldots + n_8 + n_9 = 152$, а по вышедоказанному сумма девяти чисел должна быть больше или равной $153 \Rightarrow$ максимально большое число - 47;

Ответ: 47

Запрещается делать пометки, раскрывающие авторство работы

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМАЮ, ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ-ФИНАНСИСТ!»

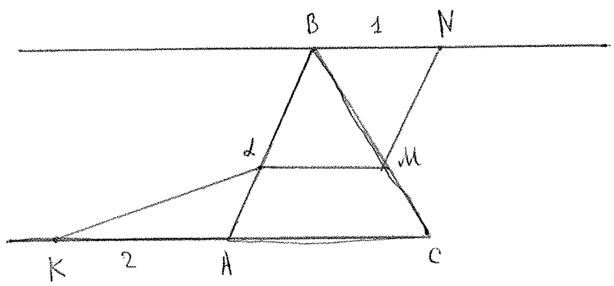
ЛИСТ-ВКЛАДЫШ 440207

Задание 8

а) Первый игрок обладает выигрышной стратегией. Первым ходом он выставляет две монеты. Далее он кладёт монеты: 3 штуки, если второй положил две, и две, если второй положил 3. После третьего хода первого игрока в ряду будет 12 монет. Не зависимо от хода второго игрока, первый игрок выложит 16-ую монету и победит. +

б) Т.к. у первого игрока есть выигрышная стратегия, то вероятность победы у него 100%, если первым ходом он положит 2 монеты, не зависимо от ходов автомата.

Задание 7.



Из $|AN|>|CN|$ следует, что точка N лежит правее от точки B.

Т.к. $LM \parallel AC$, то $AL = MC \Rightarrow BM = BC - AL$.

Рассмотрим ΔKAL и ΔNBM: $\angle LAK = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$

$\angle NBM = \angle BCA = 60^\circ$

$|KL| = \left|\sqrt{AK^2 + AL^2 - 2AK\cdot AL\cdot\cos 120^\circ}\right|$; $|MN| = \left|\sqrt{BN^2 + (BC-AL)^2 - 2BN\cdot(BC-AL)\cdot\cos 60^\circ}\right|$

$|KL| + |MN| = \left|\sqrt{4 + x^2 - 2\cdot 2\cdot x\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}\right| + \left|\sqrt{1+4-4x+x^2-2+x}\right| = \left|\sqrt{x^2+2x+4}\right| + \left|\sqrt{x^2-3x+3}\right|$,

где $x>0$ и $x<2$.

Т.к. эти уравнения описывают формулы парабол, то минимальное значение будет при $x=1$, т.е. точки L и M лежат на серединах отрезков AB и BC соответственно. Таким образом, $|KL| + |MN| = \left|\sqrt{1+2+4}\right| + \left|\sqrt{1-3+3}\right| = \sqrt{3}+1$

Ответ: $\sqrt{3}+1$

+/2

Запрещается делать пометки, раскрывающие авторство работы

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМАЮ, ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ-ФИНАНСИСТ!»

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

Запрещается делать пометки, раскрывающие авторство работы

I в. Вопрос

Задание №5.

Можете объяснить процесс оставления чаевых.
Он оставляет чай со сдачи или он оплачивает 1000и крат-ную сумму?

Если сумма чека и чая менее 1000р. он может оплатить одной купюрой со сдачей?

Предполагается отсутствие сдачи.

Черновик

$nx - 12 = 3n$ $\qquad n = \frac{12}{x-3}$ $\qquad \frac{\cancel{3}\cdot \cancel{16}}{\cancel{12}} = 4$

$n(x-3) = 12$

$x = \frac{3n+12}{n} = \frac{3(n+4)}{n}$ $\qquad n = 3;\ 1;\ 6;\ 12.$

$n \vdots 3$ $\qquad x - 3 \vdots 12$

$n \vdots n+4$ $\qquad \frac{12}{x-3} > 0$

$x > 3$

$x = \cancel{4}, \cancel{5}, \cancel{6}, \cancel{7}, \cancel{9}, \cancel{12}, 15$

$n = 12$
$n = 6$
$n = 4$
$n = 3$
$n = 2$
$n = 1$

$x = 3$

$3x - 12 = 3n$

36, 48, 37, 33

20	13	15
12	17	
16	28	11

$35 - 48 = 13$

16 + 11 = 27; 27 + 28 = 55

36

45 − 26 = 19

37

20	13	17
14	17	
16	20	13

32

37

50

20		12
9	17	19
16		8

45 − 33 = 12

37

20		13
10	17	19
16		9

36

46 − 33 = 13

46 − 37 = 9

				51
51	20	13	18	
47	15	17	19	
51	16	21	14	51
	51	51	47	

29 + 18 = 47

35 + 16

19 + 13 + 9

20

32 + 9 = 41

35 + 16 = 51

14 + 18 = 32; 32 + 19 = 51

$20 + 13 + 18 = 51$
$20 + 17 + 14 = 51$
$20 + 15 + 16 = 51$
$15 + 17 + 19 = 51$
$16 + 21 + 14 = 51$
$18 + 17 + 16 = 51$
$13 + 17 + 21 = 51$
$18 + 14 + 19 = 51$

Задание №5.

$S = x + \frac{xk}{100} = \frac{x(100+k)}{100}$, где x - сумма чека, $k \geq 5$; $k \leq 15$.

$x = \frac{100S}{100+k}$, где $S \neq 1000N$

Максимальный x будет при минимальном $(100+k)$, т.е. 105

почему от S не зависит?

$x = 105 \times 9 \times 100 = 94500$

Ответ: 94500

Задание 4.

$x_{2017}=\frac{2019}{2017\cdot x_{2016}}$; $x_{2016}=\frac{2018}{2016\cdot x_{2015}}$; $x_{2015}=\frac{2017}{2015\cdot x_{2014}}$; $x_{2014}=\frac{2016}{2014\cdot x_{2013}}$

$$x_{2017}=\cfrac{2019}{\cfrac{\cancel{2017}\cdot 2018}{\cfrac{\cancel{2016}\cdot\cancel{2017}}{\cfrac{\cancel{2015}\cdot\cancel{2016}}{\cfrac{\cancel{2014}\cdot\cancel{2015}}{\cfrac{\cdots}{\cfrac{\cancel{6}\cdot\cancel{7}}{\cfrac{\cancel{5}\cdot\cancel{6}}{\cfrac{\cancel{4}\cdot\cancel{5}}{\cfrac{3\cdot\cancel{4}}{2\cdot 1}}}}}}}}}}=\frac{2019}{2018\cdot\frac{2}{3}}=\cancel{\frac{2019}{3027}};\quad x_{2016}=\frac{2018}{2017\cdot\frac{3}{2}};\quad x_{2015}=\frac{2017}{2016\cdot\frac{2}{3}}$$

$$\Uparrow$$

$$x_{2016}=\cfrac{2018}{\cfrac{\cancel{2016}\cdot 2017}{\cfrac{\cancel{2015}\cdot\cancel{2016}}{\cfrac{\cancel{2014}\cdot\cancel{2015}}{\cfrac{\cdots}{\cfrac{\cancel{6}\cdot\cancel{7}}{\cfrac{\cancel{5}\cdot\cancel{6}}{\cfrac{\cancel{4}\cdot\cancel{5}}{\cfrac{3\cdot\cancel{4}}{2\cdot 1}}}}}}}}}$$

Можно заметить, что при n-чётном кол-во „подзнаменателей" чётное, т.е. конечная дробь $\frac{3}{2}$ „переворачивается" четное кол-во раз, а при n-нечёт. дробь „переворачивается" нечёт кол-во раз и становится дробью $\frac{2}{3}$.

Таким образом можно вывести новую формулу для n-го члена:

$x_n=\frac{n+2}{n+1}\cdot\frac{2}{3}$, где n-нечёт и $x_n=\frac{n+2}{n+1}\cdot\frac{3}{2}$, где n-чёт.

+

$x_2\cdot x_3\cdot x_4\cdot\ldots\cdot x_{2016}\cdot x_{2017}=\frac{\cancel{4}}{3}\cdot\frac{\cancel{2}}{\cancel{3}}\cdot\frac{\cancel{5}}{\cancel{4}}\cdot\frac{\cancel{3}}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{6}}{\cancel{5}}\cdot\frac{\cancel{2}}{\cancel{3}}\cdot\ldots\cdot\frac{\cancel{2018}}{\cancel{2017}}\cdot\frac{\cancel{3}}{\cancel{2}}\cdot\frac{2019}{\cancel{2018}}\cdot\frac{\cancel{2}}{\cancel{3}}=\frac{2019}{3}=673$

Ответ: 673

Задание 6.

$f(0)=1$; $f(f(x))=x$; $f(f(0))=0$; $f(1)=0$;

$f(f(x+2)+2)=x$; $f(f(-2+2)+2)=-2$; $f(1+3)=2$; $f(3)=-2$;

$f(f(\cancel{-1}+2)+2)=-1$; $f(f(1)+2)=-1$; $f(2)=-1$;

$f(-2)=3$; $f(-1)=2$

нельзя

Можно заметить, что ~~про~~ функция $f(x)$ - ~~это~~ прямая, заданная уравнением $y=-x+1$. $\Rightarrow f(2017)=-2017+1=-2016$

Ответ: -2016

+/2

Оценочный бланк олимпиадных заданий по математике

Код участника: 440185

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8
Полученные баллы	10	10	10	12	~~7~~ 6	7	0	13
Сумма баллов (оценка)	68							

Члены жюри:

Подпись	Маевский Е.В. Фамилия И.О.
Подпись	В.Б. [illegible] Фамилия И.О.
Подпись	Гребенщиков Ю.Б. Фамилия И.О.

Всероссийская олимпиада школьников «Миссия выполнима. Твое призвание-финансист!»

ПО МАТЕМАТИКЕ 11 класс

Заключительный (очный) этап 2016/2017 учебный год

440185

Код участника

Вариант I

Задание 1. (10 баллов)

Сколько существует натуральных чисел n таких, что уравнение $nx-12=3n$ имеет целочисленное решение.

Задание 2. (10 баллов)

Ниже нарисован магический квадрат, в котором некоторые числа отсутствуют.

20		
	17	
16		

Восстановите данный магический квадрат.

(В магическом квадрате суммы чисел, стоящих в каждой строке, в каждом столбце и на диагоналях, равны).

Задание 3. (12 баллов)

Среднее арифметическое десяти различных натуральных чисел равно 20, а среднее арифметическое любых девяти из этих чисел не меньше 17. Найдите максимально возможное значение наибольшего из этих чисел.

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМАЮ, ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ-ФИНАНСИСТ!»

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

Задание №1.

440185

$nx - 12 = 3n$

$nx - 3n = 12$

$n(x-3) = 12$

$x - 3 = \frac{12}{n}$

Чтобы корни были целочисленными, нужно подобрать числа, на которые 12 делится без остатка.

Натуральные делители 12: 1, 2, 3, 4, 6, 12. +

Всего: 6 натуральных чисел.

Ответ: 6.

Задание №2.

20	13	18
15	17	19
16	21	14

1) Рассмотрим ячейку первой строки третьего столбца. Так как она влияет и на диагональ с числами 17 и 16, и на горизонталь с числом 20, ~~то сумма~~ и числом в ячейке второго столбца первой строки, то суммы этих чисел равны.

$20 + x = 16 + 17$

$x = 13.$

2) Аналогично, ячейка третьего столбца третьей строки влияет на ячейку второго столбца третьей строки.

$16 + y = 20 + 17$

$y = 21$

3) Т.к. сумма чисел во всех вертикалях, горизонталях и диагоналях равна, то сумма равна ~~51.~~ $13 + 17 + 21 = 51$.

4) $A[2;1] = 51 - 20 - 16 = 15$

$A[1;3] = 51 - 20 - 13 = 18$

$A[2;3] = 51 - 15 - 17 = 19$

$A[3;3] = 51 - 16 - 21 = 14$

+

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМАЮ, ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ-ФИНАНСИСТ!»

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

440185

3. Составим неравенство:

$$\begin{cases} 1000n < 1{,}05S \quad \cdot(-1) \\ 1000(n+1) > 1{,}15S \end{cases}$$

$$\begin{cases} -1000n > 1{,}05S \\ 1000n + 1000 > 1{,}15S \end{cases}$$

$1000 > 0{,}1S \quad \cdot 10$

$S < 10000$ — это верно, но это только оценка

Следовательно максимальное $S = 9999$ — не подходит

Ответ: 9999.

+

Задание №6

Дано
$f(f(x)) = x$
$f(f(x+2)+2) = x$
$f(0) = 1$
Найти $f(2017)$

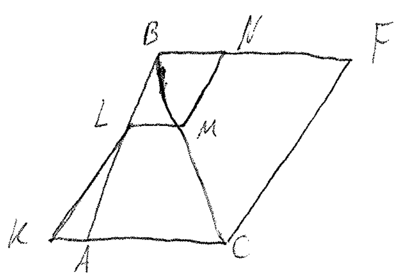
Решение: 1) Найдем сумму первых 3 элементов
$f(1) = f(f(0)) = 0$
$f(2) = f(f(1)+2) = f(f(-1+2)+2) = -1$
$f(3) = f(f(0)+2) = f(f(-2+2)+2) = -2$
2) Заметим, что значение каждого последующего элемента заметим, но для $x = 1,2,3$ равно ~~значению~~ противоположному значению аргумента $+1$.
3) Следовательно $f(2017) = -2017 + 1 = -2016$

Ответ: $f(2017) = -2016$.

+/2

Задание №7.

Дано:
ΔABC — равносторонний.
$AB = 2$
$AK = 2$, $BN = 1$
$K \in AC$, $N \in BN$, $BN \parallel AC$
$L \in AB$, $M \in BC$, $LM \parallel AC$
$|AN| > |CN|$
Найти: $|KL| + |MN|$.



Решение:
1) Т.к. $|AN| > |CN|$, то N лежит правее точки B
2) Чтобы сумма $|KL|$ и $|MN|$ была наименьшей, данные прямые должны быть параллельными, так как сумма двух сторон треугольника всегда больше третьей.

Задание 4. (12 баллов)

Числовая последовательность такова, что $x_n = \dfrac{n+2}{n x_{n-1}}$ для всех $n \geq 2$. Найдите произведение $x_1 x_2 x_3 \dots x_{2016} x_{2017}$, если $x_1 = 1$.

Задание 5. (12 баллов)

Когда Сергей пошел в кафе поужинать, в его кошельке были только банкноты в 1000 рублей. Он решил оставить официанту чаевые строго в размере от 5% до 15% от размера чека. Когда он получил чек, то понял, что не может осуществить задуманное. Найдите сумму наибольшего чека, который Сергей не может оплатить с учетом чаевых, используя только банкноты в 1000 рублей.

Задание 6. (14 баллов)

Функция $f(x)$ такова, что $f(f(x)) = x$ и $f(f(x+2)+2) = x$ для любого x.
Найдите $f(2017)$, если $f(0) = 1$.

Задание 7. (14 баллов)

Дан правильный треугольник ABC со стороной 2. Точка K лежит на продолжении стороны AC за точку A, точка N лежит на прямой, параллельной прямой AC и проходящей через точку B, причем $|AK| = 2$, $|BN| = 1$. Рассматриваются такие ломаные $KLMN$, что точка L лежит на стороне AB, точка M лежит на стороне BC, а отрезок LM параллелен стороне AC. Найдите наименьшее возможное значение суммы $|KL| + |MN|$, если $|AN| > |CN|$.

Задание 8. (16 баллов)

Два игрока по очереди выкладывают монеты в ряд. За один ход можно положить две или три монеты. Выигрывает тот, кто выложит 16 монету.

a) Определите, какой игрок (первый или второй) обладает стратегией, которая позволит ему выиграть вне зависимости от ходов другого игрока. Опишите эту стратегию.
b) Какой первый ход должен сделать первый игрок, играя с автоматом, чтобы выиграть с наибольшей вероятностью, если известно, что автомат ходит случайно и выкладывает две монеты или три монеты с равной вероятностью? Чему равна вероятность выиграть для первого игрока при этом ходе?

3) Проведём FC ∥ MN.

4) Т.к. KL ∥ MN и LM – секущая, то ∠KLM = ∠LMN

5) Т.к. LM ∥ BF и MN – секущая, то ∠LMN = ∠MNF

6) $\left.\begin{array}{l}\angle KLM = \angle LMN \\ \angle LMN = \angle MNF\end{array}\right\} \Rightarrow \angle KLM = \angle MNF$

7) Рассмотрим трапецию ALMC: 1) Т.к. LM ∥ AC, то ∠LAC = 180° − ∠ALC, то ∠ALC = 180° − 60°, то ∠ALC = 120°.

2) Т.к. LM ∥ AC и ΔABC – правильный, то AL = MC, то трапеция равнобедренная, то ∠ALC = ∠LMC.

8) Т.к ∠NMC = 360° − ∠LMN − 120° = 120°, то x, то ∠NMC = ∠LMC, то трапеции KLMC и MCFN – равны, то FC = KC = KA + AC = 4, то |KL| + |MN| = 4

Ответ: 4.

Задание 8.

а)

Начальная позиция	1й ход I игрока выигрышный	2й ход II все ходы	3й ход I выигрышный	4й ход II все ходы	5й ход I выигрыш.	6й ход II все ходы	7й ход I выигрышный
0	2	4	7	9	12	14	17
		5		10		15	

Выиграет I игрок

b) Если ~~Ход~~ I игрок положит 3 монеты первым ходом, то при любом ходе I игрока ~~выигрыш~~ выигрышную стратегию имеет II игрок и автомат никак не может обыграть второго игрока.

Самый короткий путь к победе I игрока описан ход пунктом а.
I игрок делает всего 4 хода.
Так как первым ходом управляет игрок ~~а также~~, а последний ход может быть любым, то эти два хода имеют 100% вероятность быть верными
Т.к. 3й ход и 5й ход должны быть обязательными, то вероятность выигрыша равна: 1 · 0,5 · 0,5 · 1 = 0,25.

Ответ: а) I игрок в) ~~0,2~~ +2; 0,25.

Задание №3.

Дано:

$$\frac{n_1+n_2+n_3 \ldots +n_{10}}{10}=20$$

$$\frac{n_1+n_2+n_3 \ldots +n_9}{9} \geq 17$$

Найти: max n.

Решение:

1) Сумма 10 элементов равна: $20 \cdot 10 = 200$

2) Сумма любых 9 элементов из первоначальных десятки больше либо равна ~~153~~ $17 \cdot 9 = 153$

3) Т.к мы можем взять любые 9 элементов, то ни один из них не должен превышать $200 - 153 = 47$. Следовательно $\max n = 47$

+

Ответ. 47.

Задание №4

Дано:

$x_n = \frac{n+2}{n \cdot x_{n-1}}$ при $n \geq 2$

$x_1 = 1$

Найти: $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \ldots x_{2017}$

Решение:

1) Найдем первые пять элементов

$$x_2 = \frac{2+2}{2 \cdot x_1} = 2$$

$$x_3 = \frac{3+2}{3 \cdot 2} = \frac{5}{6}$$

$$x_4 = \frac{4+2}{4 \cdot \frac{5}{6}} = \frac{6 \cdot 6}{4 \cdot 5} = \frac{9}{5}$$

$$x_5 = \frac{5+2}{5 \cdot \frac{9}{5}} = \frac{7}{9}$$

2) Заметим, что числитель каждого ~~последующего~~ элемента становится знаменателем последующего, начиная с 3 элемента. При перемножении всех элементов они будут сокращаться, а у x_{2017} - останется только числитель.

3) Из всех элементов останется только 4 числа: x_1, x_2, ~~2017 / 6 зна~~ числитель 2017 элемента и знаменатель третьего

+

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot (2017+2)}{6} = \frac{2019}{3} = 673$$

Ответ: 673

Задание №5.

1) Пусть начальная сумма в чеке будет S.

2) Так как Сергей не может добавить чаевые, то при n купюр ~~Х~~ сумма будет меньше, чем 1,05 S, ~~а~~ а при n+1 купюр сумма будет больше, чем 1,15 S.

Оценочный бланк олимпиадных заданий по математике

Код участника: 440199

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8
Полученные баллы	10	10	10	12	12	14	0	0
Сумма баллов (оценка)	68							

Члены жюри:

Подпись	Орел Д. Е. Фамилия И.О.
Подпись	Гребенщиков Ю.Б. Фамилия И.О.
Подпись	Маевский Е.В. Фамилия И.О.

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМАЮ, ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ-ФИНАНСИСТ!»

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

440199

№1.

$nx - 12 = 3n$

$n \cdot (x-3) = 12$

$\in N$ по условию; Z по условию $\Rightarrow (x-3) \in Z$

$n > 0$, $12 > 0$ $\Rightarrow (x-3) > 0 \Rightarrow (x-3) \in N$

Подберём все возможные пары двух чисел, которые при умножении дают 12.

n	$x-3$	x
1	12	15
2	6	12
3	4	7
4	3	6
6	2	5
12	1	4

Всего 6 натуральных чисел.

Ответ: 6.

+

№2.

Пусть x - сумма чисел в строке / столбце / диагонали квадрата:

20	a	b
c	17	d
16	e	f

1) $c = x - 36$

2) $f = x - 37$, $b = x - 33$ $\Rightarrow x - 37 + x - 33 + d = x$, $d = 70 - x$

3) $\underbrace{70 - x}_{d} + 17 + \underbrace{x - 36}_{c} = x$

$x = 51$

4) $c = 15$, $f = 14$, $b = 18$, $d = 19$

5) $a = 13$, $e = 21$

Ответ:

20	13	18
15	17	19
16	21	14

+

Запрещается делать пометки, раскрывающие авторство работы

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМАЮ, ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ-ФИНАНСИСТ!»

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

440199

№3.

Среднее арифметическое всех чисел равно 20, значит, их сумма равна 200. Среднее арифметическое девяти чисел не меньше 17, значит, сумма любых девяти чисел не меньше 153, следовательно, ни одно из чисел не может быть больше, чем 47.

+

Ответ: 47 – максимально возможное значение наибольшего из чисел.

№4.

Возьмём два числа x_n и x_{n-1} и найдём их произведение: $x_n \cdot x_{n-1} = \frac{(n+2) \cdot x_{n-1}}{n \cdot x_{n-1}} = \frac{n+2}{n}$

$x_1 = 1$ и не влияет на произведение

~~Возьмём~~ Разобьём ~~их~~ все множители произведения на пары соседних множителей начиная с двух: $(x_2 \cdot x_3) \cdot (x_4 \cdot x_5) \cdot (x_6 \cdot x_7) \cdot \ldots \cdot (x_{2016} \cdot x_{2017})$ и найдём это произведение:

$\frac{3+2}{3}$

Ответ:

$$\frac{5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot \ldots \cdot 2017 \cdot 2019}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot 2015 \cdot 2017} = \frac{2019}{3} = 673$$

+

№5.

Пусть a рублей – сумма чека.

Общий счёт составляет от $1{,}05a$ рублей до $1{,}15a$ рублей. Т.к. Сергей не может оплатить его, то среди чисел от $1{,}05a$ до $1{,}15a$ нет ни одного кратного 1000.

При $a \geq 10000$ такое невозможно, т.к. разность $1{,}15a$ и $1{,}05a$ не меньше 1000.

Значит $1{,}05a$ точно меньше 11000. Получается, что наибольшая сумма с учётом чаевых может лежать в диапазоне $(10000; 11000)$, а отрезок $(11000; 12000)$ уже не подходит.

Допустим, что такая сумма счёта, при которой $\left(\begin{cases} 1{,}05a > 10000 \\ 1{,}15a < 11000 \end{cases}\right)$ существует.

Проверим, есть ли у этой системы решение:

$$\begin{cases} a > \frac{200000}{21} \\ a < \frac{220000}{23} \end{cases}$$

$$\frac{220000}{23} - \frac{200000}{21} = \frac{10000 \cdot (\overset{461}{21 \cdot 22} - \overset{460}{20 \cdot 23})}{23 \cdot 21} > 0 \Rightarrow \frac{220000}{23} > \frac{200000}{21}$$

+

Наибольшая сумма чека – $\frac{220000}{23}$ рубля

Запрещается делать пометки, раскрывающие авторство работы

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМАЮ, ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ-ФИНАНСИСТ!»

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

440199

№6.

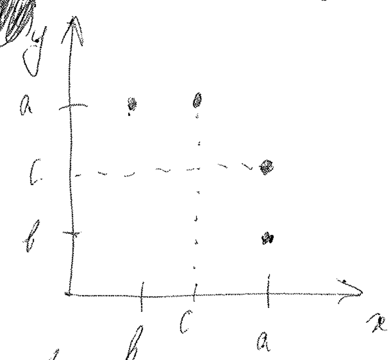
$f(f(x))=x$

~~$f(f(x+2)+2)=x$~~

$f(f(x+2)+2)=x$

Пусть $f(a)=b$, тогда $f(f(a))=a$; $f(b)=a$

Докажем, что каждое возможное значение функции встречается ровно один раз при всех возможных значениях x.



Если графику функции $f(x)$ принадлежит точка $(a;b)$, то ей принадлежит и точка $(b;a)$. Допустим, что также есть точка $(c;a)$, принадлежащая этому графику. Но тогда на графике лежит и точка $(a;c)$, что невозможно, т.к. каждому значению аргумента соответствует единственное значение функции. Противоречие. Итак, каждое возможное значение функции встречается не более одного раза.

Из доказанного утверждения следует, что, если $f(f(x)) = f(f(x+2)+2)$, то $f(x) = f(x+2)+2$

$f(x+2) = f(x)-2$

Это означает, что при увеличении аргумента на 2 значение функции уменьшается на 2, значит, $f(2017)$ меньше, чем $f(1)$ на 2016.

Ответ:

$\begin{cases} f(0)=1 \\ f(a)=b \\ f(b)=a \end{cases} \Rightarrow f(1)=0 \Rightarrow f(2017)=-2016$

(+)

№8.

а) Для гарантированного выигрыша одного из игроков необходимо, чтобы игрок после своего хода увеличил количество монет до 13, 14, или 15.

За четыре хода сделать так невозможно, даже если каждый будет класть по 3 монеты, но так может быть через 5 ходов, (например, 3+2+3+2+3) что случится после хода первого, следовательно, задача второго — сделать количество монет не меньшим 13 к пятому ходу а задача первого — „оттянуть" этот момент до шестого хода, когда он получит возможность выиграть. Тогда первый будет минимизировать количество монет на столе (класть по две), а второй — максимизировать (класть по три). Через пять ходов

I II I II I
на столе будет 2+3+2+3+2 = 12 монет, что даёт преимущество первому игроку. Итак, если за первые три хода первый положит по две монеты, то второй не сможет сделать так, чтобы к ~~...~~ его 3-му ходу было 13 и более монет на столе. Допустим, что второй захочет ещё больше „оттянуть" монет, когда к его ходу будет 13 или более монет, чтобы это случилось после седьмого хода. Это возможно при стратегии 2/2/2/2/2/2/2. Но если он будет так действовать, то первый поймёт смену стратегии второго, и изменит свою, поставив 3 монеты на пятом ходу, из-за чего второй будет вынужден увеличить количество монет до 13 или 14 к следующему ходу первого.

Получается, что выигрышной стратегией обладает первый, кладя две монеты за ход ~~всегда~~ и изменяя тактику при подозрительном поведении второго.

б) Первый также будет стараться сделать так, чтобы на столе было не меньше 13 монет к его ходу. За три хода ~~компьютера~~ автомата с одинаковой вероятностью выпадет один из всех вариантов:

2/2/2	+6	$\frac{1}{8}$
2/2/3, 2/3/2, 3/2/2	+7	$\frac{3}{8}$
3/3/2, 3/2/3, 2/3/3	+8	$\frac{3}{8}$
3/3/3	+9	$\frac{1}{8}$

Т.к. ходы автомата случайны, то ~~в~~ порядок, в котором игрок будет выкладывать монеты, не важен.

Оценочный бланк олимпиадных заданий по математике

Код участника: 43 02 54

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8
Полученные баллы	10	10	12	12.	0	10.	0	16.
Сумма баллов (оценка)	~~65~~ 70							

Члены жюри:

Подпись — Банин В.Т.
Фамилия И.О.

Подпись — Кочерова А.С
Фамилия И.О.

Подпись — Маевский Е.В.
Фамилия И.О.

Всероссийская олимпиада школьников «Миссия выполнима. Твое призвание-финансист!»

ПО МАТЕМАТИКЕ 11 класс

Заключительный (очный) этап 2016/2017 учебный год

430254

Код участника

Вариант II

Задание 1. (10 баллов)

Сколько существует натуральных чисел n таких, что уравнение $nx+18=5n$ имеет целочисленное решение. Ответ: 6, это: 1, 2, 3, 6, 9, 18

Задание 2. (10 баллов)

Ниже нарисован магический квадрат, в котором некоторые числа отсутствуют.

20	5	26
23	17	11
8	29	14

Восстановите данный магический квадрат.

(В магическом квадрате суммы чисел, стоящих в каждой строке, в каждом столбце и на диагоналях, равны).

Задание 3. (12 баллов)

Среднее арифметическое десяти различных натуральных чисел равно 21, а среднее арифметическое любых девяти из этих чисел не меньше 15. Найдите максимально возможное значение наибольшего из этих чисел.

430254

Задание 4. (12 баллов)

Числовая последовательность такова, что $x_n = \dfrac{n}{(n-2)x_{n-1}}$ для всех $n \geq 3$. Найдите произведение $x_1 x_2 x_3 \ldots x_{2016} \cdot x_{2017}$, если $x_1 = 1$, а $x_2 = 2$. Ответ: 2017

Задание 5. (12 баллов)

Когда Сергей пошел в кафе поужинать, в его кошельке были только банкноты в 1000 рублей. Он решил оставить официанту чаевые строго в размере от 7% до 15% от размера чека. Когда он получил чек, то понял, что не может осуществить задуманное. Найдите сумму наибольшего чека, который Сергей не может оплатить с учетом чаевых, используя только банкноты в 1000 рублей.

Задание 6. (14 баллов)

Функция $f(x)$ такова, что $f(f(x)) = x$ и $f(f(x+2)+2) = x$ для любого x.
Найдите $f(2017)$, если $f(0) = 1$. Ответ: -2016

Задание 7. (14 баллов)

Дан правильный треугольник ABC со стороной 2. Точка K лежит на продолжении стороны AC за точку A, точка N лежит на прямой, параллельной прямой AC и проходящей через точку B, причем $|AK| = 2$, $|BN| = 1$. Рассматриваются такие ломаные $KLMN$, что точка L лежит на стороне AB, точка M лежит на стороне BC, а отрезок LM параллелен стороне AC. Найдите наименьшее возможное значение суммы $|KL| + |MN|$, если $|AN| > |CN|$. $\boxed{2\sqrt{3}}$

Задание 8. (16 баллов)

Два игрока по очереди выкладывают монеты в ряд. За один ход можно положить две или три монеты. Выигрывает тот, кто выложит 16 монету.

a) Определите, какой игрок (первый или второй) обладает стратегией, которая позволит ему выиграть вне зависимости от ходов другого игрока. Опишите эту стратегию. (в черновике)

Первый →

b) Какой первый ход должен сделать первый игрок, играя с автоматом, чтобы выиграть с наибольшей вероятностью, если известно, что автомат ходит случайно и выкладывает две монеты или три монеты с равной вероятностью? Чему равна вероятность выиграть для первого игрока при этом ходе? или $\frac{53}{64}$

Ход по 2 монеты
вероятность 100%
(если использовать
стратегию

~~а): Первый. Выкладывает 3 монеты, и делает так, чтобы сумма ходов его и оппонента была равна 5, тогда ему останется последний ход равный 3.~~
~~б): аналогично (с учетом а)) (ход 3, выигрывает 1), вероятность 100%, ибо стратегия универсальна~~

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМАЮ. ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ-ФИНАНСИСТ!»

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

430254

хода, что вместо [illegible]

Задача №3 а)):

Первый кладёт монету 2, делает так, чтобы сумма монет его и ~~второго~~ была кратна 5, тогда предпоследним ходом 2 выложит либо 2 либо 3 монеты и общая сумма будет равна 14 или 13 => мы спокойно кладём либо 2, либо 3 монеты и выигрываем.

б):

Тактика описана в пункте а), кладём 2 монеты, если использовать стратегию вероятность = 100%

Если же он не знает стратегии, то найдём исходы когда выигрываем:

~~2 2 2 2 3 2~~ $= \frac{1}{64}$ 2 или 3

~~2 2 2 2 3 2~~

2 3 3 3 3 — 2 или 3 ← вероят $= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{16}$

2 3 3 3 2 3 ← вероят $= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{32}$

2 3 2 3 2 3

2 2 2 2 2 2 2 2 ← 2 или 3 $\frac{1}{128}$ $\frac{1}{64}$

2 2 2 2 2 2 3 — ← $\frac{1}{64}$

Суммарная вероят $= \frac{11}{64}$ =>

$\Rightarrow 1 - \frac{11}{64} = \frac{53}{64}$ вероят победы 1 без стратегии

Задача №3

Упорядочим числа и заметим, что чтобы найти максимально возможное число, остальные должны быть минимальны и при этом удовлетворять условию, что: $(a_1 + a_2 + \ldots + a_{10}) = 21 \cdot 10$ & $\sum_{i=1}^{9} a_i \geq 15 \cdot 9$

Пусть a_1 - самое меньшее a_{10} - самое большое, остальные, т.к. упорядочены и различны и при этом минимальные: $a_i = a + i - 1$ $\forall i \leq 10$, $i \geq 1$ =>

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{9} a_i = 9a + 36 \geq 15 \cdot 9 \Rightarrow a \geq 11$ подставим т.к. оптим. $a = 11$ =>

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{10} a_i = 135 + a_{10} = 210 \Rightarrow \boxed{a_{10} = 75}$

$\boxed{\text{Ответ: } 75}$

+

Запрещается делать пометки, раскрывающие авторство работы

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМАЮ, ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ-ФИНАНСИСТ!»

430254

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

Задача №1

$nx+18=5n$ $n(x-5)=18$ n - натуральное и должно являться делителем числа, чтобы $(x-5)$ было целым => найдем делители 18 это: 1, 2, 3, ~~4~~6, 9, 18

Т.е. их 6, тогда ответ: $\boxed{6}$

Задача №2

$$\begin{cases} 20+x_1+8=\xi \\ 20+17+x_3=\xi \\ 8+17+x_2=\xi \\ x_1+17+x_4=\xi \\ x_2+x_4+x_3=\xi \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x_2=\xi-25 \\ \& \\ x_3=\xi-37 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} \xi-25+x_4+\xi-37=\xi \\ x_4=62-\xi \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x_1+17+62-\xi=\xi \\ x_1+79=2\xi \\ \& \\ x_1=\xi-28 \end{matrix} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \xi-28+79=2\xi \Rightarrow \boxed{\xi=51} \Rightarrow$ найдем все неизвестные

20	5	26
23	17	11
8	29	14

Задача №6

1) $x=0$ $f(f(0))=0 \Rightarrow f(1)=0$ & $f(f(2)+2)=0 \Rightarrow f(2)+2=1 \Rightarrow$
$\Rightarrow \underline{f(2)=-1} \Rightarrow f(f(2))=2 \Rightarrow \underline{f(-1)=2}$

2) $x=-2$ ~~...~~ $f(f(0)+2)=-2 \Rightarrow \underline{f(3)=-2} \Rightarrow f(f(3))=3 \Rightarrow$
$=\underline{f(-2)=3}$

3) $x=-3$ $f(f(-1)+2)=f(4)=-3 \Rightarrow f(f(4))=4 \Rightarrow \underline{f(-3)=4}$

4) $x=-4$ $f(f(-2)+2)=f(5)=-4 \Rightarrow$ общая формула: $f(x)=-x-1$

нет обоснования

+/2

~~...~~ $\boxed{\text{Ответ: } f(2017)=-2016}$

Задача №4

$x_n=\dfrac{n}{(n-2)\cdot x_{n-1}}$ $n\geq 3$ $\Rightarrow x_3=\dfrac{3}{1\cdot 2}=\dfrac{3}{2}$; $x_4=\dfrac{4}{2\cdot\frac{3}{2}}=\dfrac{4}{3}$; $x_5=\dfrac{5}{3\cdot\frac{4}{3}}=\dfrac{5}{4}$; $x_6=\dfrac{6}{4\cdot\frac{5}{4}}=\dfrac{6}{5}$

$\ldots$ $x_n=\dfrac{n}{(n-2)\cdot\frac{(n-1)}{(n-2)}}=\dfrac{n}{n-1} \Rightarrow$

почему?

$\Rightarrow \prod\limits_{i=1}^{2017}=1\cdot 2\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdots\frac{2016}{2015}\cdot\frac{2017}{2016}=2017$ Ответ: $\boxed{2017}$

+

Задание №8

а) Первый ход: Тактика: вытаскиваем 3 монеты, остается 13
делаем так, чтоб кол-во ~~монет~~ монет было кратно 5 ~~...~~

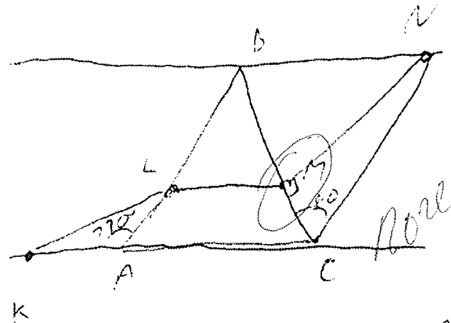
2

Запрещается делать пометки, раскрывающие авторство работы

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

430254

Задача №7



$\angle KAL = 120°$ $\angle MCN = 60°$ ($MC \parallel AK$)

Заметим, что $AL = MC$ в $\triangle BNC$ MN будет минимальной тогда, когда она высота, при этом $BM = 1 = AL$, а AK минимальна когда равна AK ⇒ равны два отрезка [illegible]

Тогда минимальные MN и AK ⇒ $MN = \sqrt{3}$ по Th Пифагора ⇒ KL тоже $= \sqrt{3}$ ⇒

⇒ $KL + MN = 2\sqrt{3}$

Погрешность

неверно

2) $MN = 2$; $AK = 2$ ⇒ $MN + AK = 4$ в 1) случае ~~больше~~ меньше ⇒ по непрерывности

$KL + MN = 2\sqrt{3}$ это min

$\boxed{\text{Ответ: } 2\sqrt{3}}$

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМАЮ, ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ-ФИНАНСИСТ!»

430254

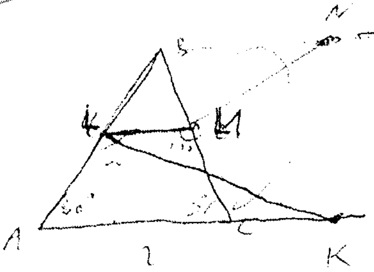
ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

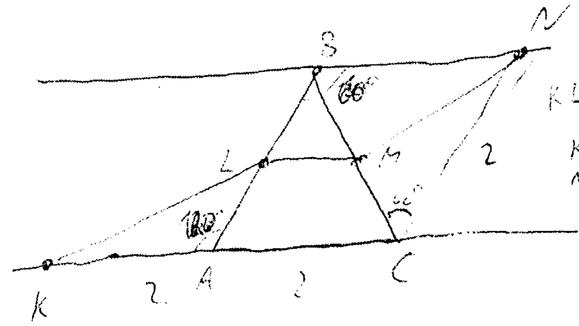
№ 4

$x_n = \frac{n}{(n-2)x_{n-1}}$ $n \geq 3$ $x_1 = 1$ $x_2 = 2$ $x_3 = \frac{3}{1 \cdot 2} = \frac{3}{2}$ $x_4 = \frac{4}{2 \cdot \frac{3}{2}} = \frac{4}{3}$

$x_5 = \frac{5}{3 \cdot \frac{4}{3}} = \frac{5}{4}$ $x_6 = \frac{6}{4 \cdot \frac{5}{4}} = \frac{6}{5}$ $x_i = \frac{i}{(i-2) \cdot \frac{(i-1)}{i-2}} = \frac{i}{i-1}$

$\prod_{i=1}^{2017} = 1 \cdot 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{6}{5} \cdots \frac{2016}{2015} \cdot \frac{2017}{2016} = \boxed{2017}$





$KL^2 = 4 \cdot AL^2 + 4AL \cdot \frac{1}{2} = 2AL(AL+2)$

$MN^2 = 4MC^2 + 2MC = 2MC(MC-$

$2(x_1+x_2+x_3) = 2 \cdot (4a+6b+6c) = 21 \cdot 2$

$= 210$

$a+1+a+2+ \dots +a+8 + b = 210$

$1+2+3+4+5+6+7+8+9$

$9a+36 = 6a+9$ $a+4 \geq 15$ $a \geq 11$

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМАЮ. ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ-ФИНАНСИСТ!»

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

430254

№1

$nx + 18 = 5n$ $\quad n(x-5) = -18$ $\quad n \neq 0$ $\quad x - 5 \neq 0$

$n = 1, 2, 3, 6, 9, 18$ ← кол-во делителей 18 +

n должно быть делителем

$x - 5 = -18$

$2x - 10 = -18$

$3x - 15 = -18$

$x = 4$

$6x = 30 - 18$

6

№2

$4AL(AL+\frac{1}{2}) + 4AC(AC - \frac{1}{2}) =$
$= 4AL(AL + \frac{1}{2} + AC - \frac{1}{2}) = 8AL^2$

20 $\quad x_1$
x_3 17
8 $\quad x_2$

$10 + 17 + x_2 = 8 + 17 + x_1 \quad = \quad 20 + 8 + x_3$

$12 + x_2 = x_1$

$20 + 17 + x_2 = 20 + 8 + x_3$

$20 + 17 + x_2 = 20 + 8 + x_3$

$8 + 17 + x_1 = 20 + 8 + x_3$

$x_2 - x_1 = -8 \quad\quad x_2 = x_1 - 8$

$x_1 + x_1 + 62 = 56 + 2x_3$

$2x_1 - 8 + 62 = 56 + 2x_3$

$x_1 - 4 + 31 = 28$ $\quad\quad 9 - 2 = 2$

$x_1 - 1 = x_3$ $\quad\quad 2\sqrt{3} \quad 3$

$\begin{cases} 20 + a + 8 = S \\ 8 + 17 + b = S \\ 20 + 17 + c = S \end{cases}$

20	x_5	x_2
x_1	17	x_4
8	x_4	x_3

$20 + 17 = S - c$

$20 = S - c - 17$

$17 = S - c - 20$

$S - C - 17 + a + 8 = S$

$a - C = 9$

$a - b = -3$

$b - c = 12$

$4AL^2 + 4AL \cdot \frac{1}{2} = 4AL(AL + \frac{1}{2})$

$a - c + a + 18 - c = 18$

$a - 2b + c = -15$

$\begin{cases} 20 + x_1 + 8 = S \\ 20 + 17 + x_3 = S \\ 8 + 17 + x_2 = S \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 + 17 + x_4 = S \\ x_2 + x_4 + x_3 = S \end{cases}$

$x_1 + 17 + 62 - S = S$

$x_1 + 79 = 2S$

$x_1 = S - 28$

$S - 28 + 79 = 2S$

$\boxed{50 = S}$

$x_2 = S - 8 - 17$

$x_3 = S - 17 - 20$

$S - 8 - 17 + x_4 + S - 84 - 20 = S$

$x_4 = 62 - S$

20		25
22	17	12
8		13

Запрещается делать пометки, раскрывающие авторство работы

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМАЮ. ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ-ФИНАНСИСТ!»

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ **430254**

$$\begin{cases} 20+x_1+8=S \\ 20+17+x_3=S \\ 8+17+x_2=S \\ x_1+17+x_4=S \\ x_2+x_4+x_3=S \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x_2=S-25 \\ x_3=S-37 \end{matrix} \Rightarrow S-25+x_4+S-37=S \Rightarrow x_4=62-S \Rightarrow$$

$\Rightarrow x_1+17+62-S=S \Rightarrow x_1+79=2S$ & $x_1=S-28 \Rightarrow$

$\Rightarrow S-28+79=2S$ $\quad$ ~~2S=51~~ $\quad \boxed{S=51}$

20	5	26
23	17	11
8	29	14

$x_1 \dots x_{10}$ $\quad \dfrac{\sum_{i=1}^{10} x_i}{10} = 21$

$x_1+x_2+x_3+\dots+x_{10}=210$

$x_{a_1}+x_{a_2}+x_{a_3}\dots x_{a_9}=t_a\cdot 9$

$x_1+x_2+\dots+x_9=t_1\cdot 9$ $\quad t_1>15$

$x_2+\dots+x_{10}=t_2\cdot 9$ $\quad t_2>\dots$

$x_1+2(x_2+\dots+x_9)+x_{10}=210+(t_1+t_2)\cdot 9$

№6

$f(x)$ $\quad f(f(x))=x$ $\quad f(f(x+2)+2)=x$ $\quad \forall x$

$f(f(0))=0$ $\quad f(f(2)+2)=0$ $\quad f(f(0))=0$ $\quad$ ~~f(0)=1~~

$f(f(x-2))=x-2$ $\quad f(f(x)+2)=x-2$ $\quad f(1)=0$ ✓

$f(f(2017))=2017$ $\quad f(f(20\cancel{17}+2)=201\cancel{5}$ $\quad$ &

$f(1)=1$ $\quad f(2)+2=1$ $\quad f(f(2)+2)=0$

$f(2)=-1$ ✓ $\quad f(2)+2=1$

$f(2)=-1$

$f(-1)=2$ $\quad f(f(2))=2$

~~f(f(1))=1~~ $\quad f(f(3)+2)=1$

~~f(fx..)~~ $\quad f(f(-2))=-2$ $\quad f(f(-2+2)+2)=+2$

нет.

$f(3)=-2$ ✓ $\Rightarrow f(-2)=3$ ✓ $\quad$ ~~f~~ $=-(n-1)$

+1/2

$\boxed{f(n)=-(n-1)}$?
нет обоснования

$\boxed{f(2017)=-(2017-1)=-2016}$

Запрещается делать пометки, раскрывающие авторство работы

Оценочный бланк олимпиадных заданий по математике

Код участника: 440593

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8
Полученные баллы	10	10	10	12 +2	0	10	0	16
Сумма баллов (оценка)	68							

Члены жюри:

Подпись	Фамилия И.О.
	Банин В.Т.
	Кочерова А.С.
	Маевский Е.В.

Чистовик

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМАЮ, ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ-ФИНАНСИСТ!»

440593

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

Задание №2.

20		
	17	
8	x	y

– заметим, что $20+17+y = 8+x+y$, откуда $x = 29$

20	x	y
	17	
8	29	

: $20+x+y = 8+17+y$, $x = 5$, тогда

сумма $= 20+17+14 = 51$

20	5	b
a	17	c
8	29	d

$a = 51-(20+8) = 23$, $b = 26$, $c = 11$, $d = 14$

Ответ

20	5	26
23	17	11
8	29	14

+

Задание №3

Чтобы получить одно максимально возможное, нужно взять сумму 9 чисел, таких, что их сумма $= k$ минимальна $\frac{k}{9} \geq 15$ $k \geq 135$, тогда подберем 10-е максимальное

$\frac{135+x}{10} = 21$ $135+x = 210$ $x = 75$

Ответ 75

±

Запрещается делать пометки, раскрывающие авторство работы

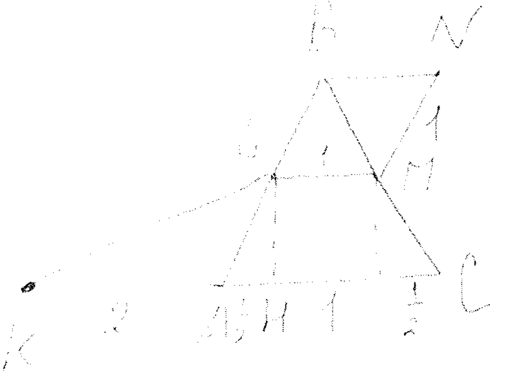
Чистовик

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМА. ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ-ФИНАНСИСТ!»

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

440593

Задание 7



1) $|KL| + |MN|$ — будет наименьшей ~~минимальна~~, если L и M — середины AB и BC.

2) $AH = \frac{1}{2}(\ldots)$; $HL = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$KH = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}$

HL

теперь $KL = \sqrt{\frac{25}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{7}$

3) ΔBMN: $BN = 1$, $BM = 1$, $\angle MBN = 60°$ (н.л.) — треугольник правильный $\Rightarrow MN = 1$

Ответ: $|KL| + |MN| = 1 + \sqrt{7}$

—

Задание 1

$nx + 18 = 5n$

$5n - nx = 18$

$n(5 - x) = 18$

чтобы x было целочисленное, n должно являться делителем 18, а это числа: 1, 2, 3, 6, 9, 18 — их 6

+

Ответ: 6

Чистовик

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМАЮ, ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ-ФИНАНСИСТ!»

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ **440593**

Задание 4

Запишем некоторые числа:

$x_1=1 \quad x_2=2 \quad x_3=\frac{3}{1\cdot 2}=\frac{3}{2} \quad x_4=\frac{4}{1\cdot\frac{3}{2}}=\frac{4}{3} \quad x_5=\frac{5}{4} \ldots \quad x_{2017}=\frac{2017}{2016}$,

тогда произведение выглядит так: почему?

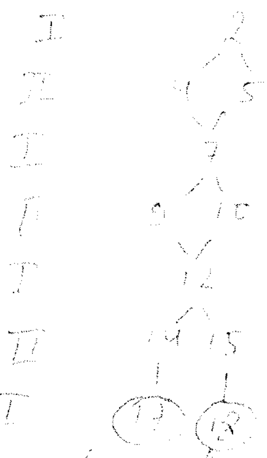
$1\cdot 2\cdot \frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2015}{2014}\cdot\frac{2016}{2015}\cdot\frac{2017}{2016}$, ?

сократятся все, кроме $2017\cdot 1=2017$ ±

Ответ: 2017

Задание 8

а) Нарисуем неполное дерево игры:



б) если первый своим первым ходом положит 2 монеты, у автомата не будет шансов победить (см. дерево) 100% выигрыш

первый выиграет, если будет играть как представлено на дереве.

+

Ответ: а) I-игрок б) положить 2 монеты 100% - вероятность выиграть.

Чистовик

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМАЮ, ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ-ФИНАНСИСТ!»

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

440593

Задание 6

$f(f(x))=x$ $f(f(x+2)+2)=x$, тогда

$f(x)=f(x+2)+2$ нет обоснования

при $x=0$ $f(0)=1$

$1=f(2)+2$ $f(2)=-1$, тогда вот такая закономерность

$f(0)=1$

$f(1)=0$ нет обоснования

$f(2)=-1$

$f(3)=-2$

...

$f(2017)=-2016$

Ответ: $f(2017)=-2016$

±

Задание 5

Не понял условие задачи,

Сергей ведь может оплатить любую сумму.

—

Запрещается делать пометки, раскрывающие авторство работы

Оценочный бланк олимпиадных заданий по математике

Код участника: 440098

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8
Полученные баллы	10	10	10	12	2	7	7	16
Сумма баллов (оценка)	74							

Члены жюри:

Подпись	В.Б. Шишин Фамилия И.О.
Подпись	Маевский Е.К. Фамилия И.О.
Подпись	Орел О.Е. Фамилия И.О.

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

Задание 1.

44009[illegible]

$nx - 12 = 3n$

$nx = 12 + 3n \mid : n$ $\quad$ $n = 0$ не является решением, т.к. $0x = 12$, $x \in \varnothing$. и $n \neq 0$ по условию

$x = \dfrac{12+3n}{n}$

$x = \dfrac{12}{n} + 3.$

Чтобы были целочисленные решение, нужно, чтобы $\dfrac{12}{n}$ было целым числом.

Тогда $n = \pm 12$ $\quad$ $n = 12$ $\quad$ $x = 4$
$n = \pm 6$ $\quad$ $n = 6$ $\quad$ $x = 5$
$n = \pm 4$ $\quad$ $n = 4$ $\quad$ $x = 6$
$n = \pm 3$ $\quad$ $n = 3$ $\quad$ $x = 7$
$n = \pm 2$ $\quad$ $n = 2$ $\quad$ $x = 9$
$n = 1$ $\quad$ $x = 15.$

6 возможных.

+

Ответ: 6

Задание 2

Пронумеруем пустые клетки буквами, тогда:

20	b 13	c 18
15 a	17	d 19
16	f 21	e 14

$\begin{cases} 20+17+e = 16+17+c \\ 16+f+e = 16+17+c \end{cases}$

$20+17+\cancel{e} = 16+f+\cancel{e}$

$f = 37-16 = 21$

$f = 21$ $\quad$ $d = 19$

$b = 13$ $\quad$ $e = 14.$

$c = 18.$

$a = 15$

$20+16+a = 16+17+c$

$c = 3+a \Rightarrow 20+b+3+\cancel{a} = 20+16+\cancel{a}$

$23+b = 36$

$b = 13 \Rightarrow$ сумма $= 13+17+21 = 51.$

+

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМАЮ, ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ-ФИНАНСИСТ!»

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

Значит $z_2 = 200 - 17 \cdot 9 = 200 - 153 = 47$.

Ответ: 47.

440098

Задание 4

$x_n = \frac{n+2}{n x_{n-1}}$, $n \geq 2$.

Найти: $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \ldots x_{2016} \cdot x_{2017}$, если $x_1 = 1$.

$x_1 = 1$, $x_2 = \frac{2+2}{1 \cdot 2} = \frac{4}{2} = 2$, $x_3 = \frac{3+2}{3 \cdot 2} = \frac{5}{6}$,

$x_4 = \frac{4+2}{\frac{5}{6} \cdot 4} = \frac{6 \cdot 6}{5 \cdot 4} = \frac{6 \cdot 2 \cdot 3}{5 \cdot 4}$, $x_5 = \frac{7}{\frac{6 \cdot 2 \cdot 3}{5 \cdot 4} \cdot 5} = \frac{7 \cdot 5 \cdot 4}{5 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 3}$,

$x_6 = \frac{6+2}{\frac{7 \cdot 5 \cdot 4}{5 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 6} = \frac{8 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 3}{7 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 6} \ldots$

Рассмотрим это произведение:

$x_1 \cdot x_2 \ldots x_{2017} = 1 \cdot 2 \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{\cancel{6 \cdot 2 \cdot 3}}{\cancel{5 \cdot 4}} \cdot \frac{\cancel{7 \cdot 5 \cdot 4}}{\cancel{5 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 3}} \cdot \frac{\cancel{8 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 3}}{\cancel{7 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 6}} \cdot$

$\cdot \frac{9 \cdot \cancel{7 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 6}}{\cancel{8 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 7} \cdot \frac{10 \cdot \cancel{8 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 7}{9 \cdot \cancel{7 \cdot 5 \cdot 4} \cdot 6 \cdot 8} \ldots =$

+

$= 1 \cdot 2 \cdot \frac{\cancel{5}}{6} \cdot \frac{\cancel{7}}{\cancel{5}} \cdot \frac{\cancel{9}}{\cancel{7}} \cdot \frac{\cancel{11}}{\cancel{9}} \cdot \frac{13}{\cancel{11}} \ldots$, то есть

у нас все сокращается

$1 \cdot 2 \cdot \frac{\cancel{5}}{6} \cdot \frac{\cancel{7}}{\cancel{5}} \cdot \frac{\cancel{9}}{\cancel{7}} \cdot \frac{\cancel{11}}{\cancel{9}} \cdot \frac{\cancel{13}}{\cancel{11}} \ldots \cdot \frac{2019}{\cancel{2017}} = \frac{1}{3} \cdot 2019 = 673$

Ответ: 673.

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМАЮ, ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ-ФИНАНСИСТ!»

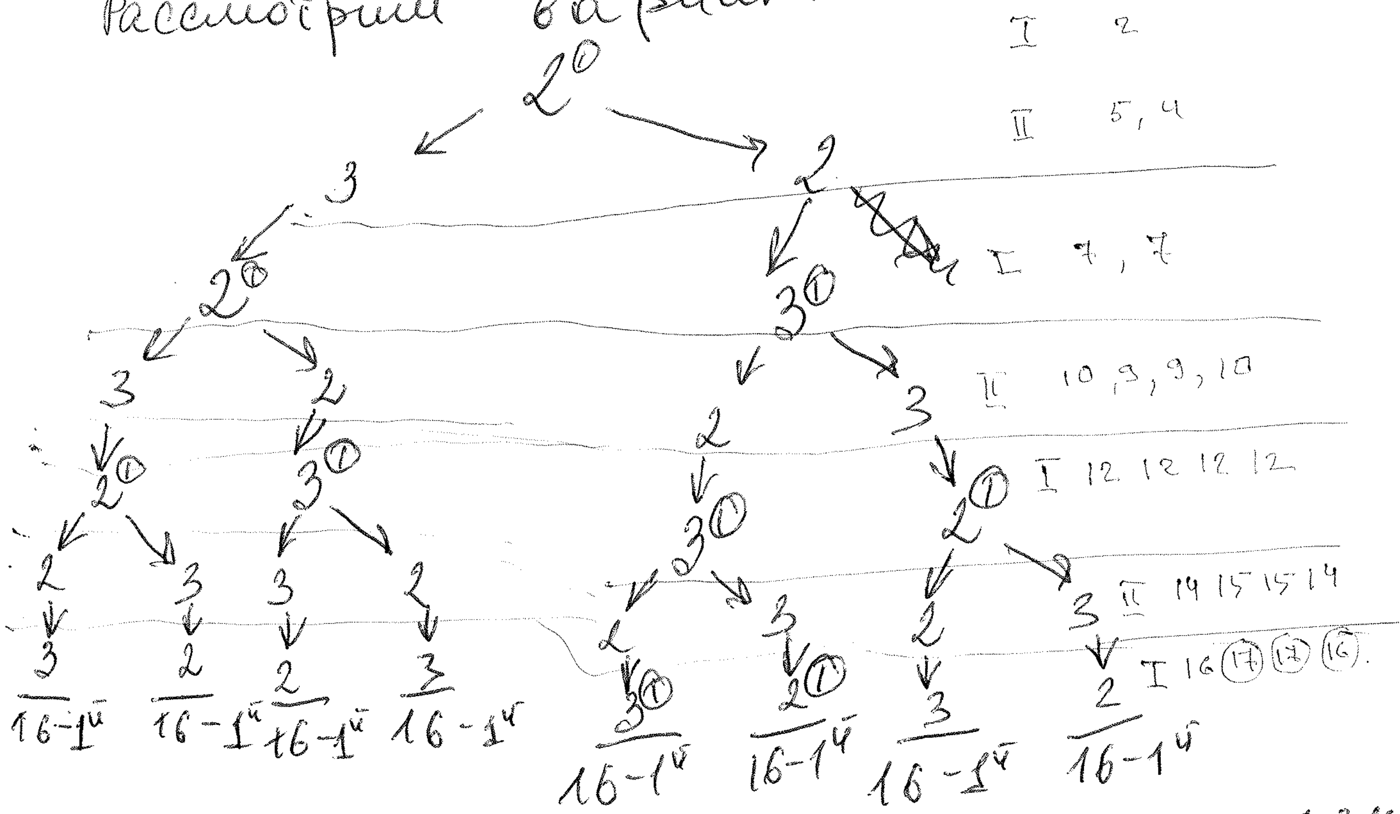
ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

Задание 8.

440098

а). Стратегия следующая: выигрывает первый игрок. Сначала ходим 2

Рассмотрим варианты.



Этой стратегией обладает первый игрок, эта стратегия представлена.

б). Нужно ходить с двойки, тогда + .
с вероятностью 100% выиграет человек.
Ход его действий (человека) показан.

Запрещается делать пометки, раскрывающие авторство работы

Задание № 5 (продолжение). | Листовик

Тогда если чек в ресторане S, то

$\begin{cases} 1{,}15S = 1000a + c \\ 1{,}05S = 1000a + b \end{cases}$ ✓ $c \in [1; 999]$, $b \in [1; 999]$

440098

$0{,}1S = c - b$ ✓

$S = \dfrac{c-b}{0{,}1} = 10(c-b)$.

чтобы S была максимальна, нужно чтобы $c - b$ было максимально.

Тогда $c = 999$, $b = 1$ $\Rightarrow c - b = 999 - 1 = 998$

$S = 10 \cdot (c-b) = 10 \cdot 998 = 9980$ рублей.

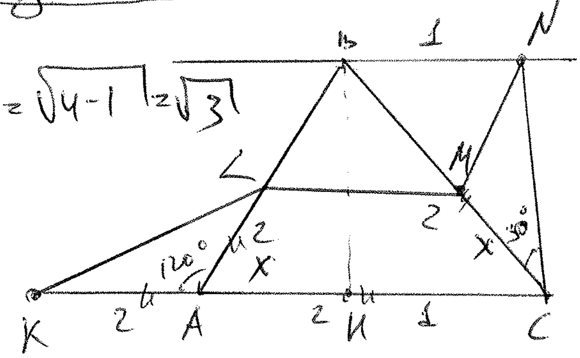
$\overset{\cdot}{+}$

Ответ: 9980 рублей.

не подходит. 1020 — чаевые например

Задание №7.

Решение:



$NC=\sqrt{4-1}=\sqrt{3}$

$NC \perp AC$, т.к. $BN=HC=$ $=1$ (BH - медиана $=\frac{1}{2}AC$); и $BH \perp AC$.

Значит $\angle BCN = 30° = 90° - 60°$.

$\angle KAB = 180-60=120°$.

$AL = MC$ (т.к. $\triangle ABC$ - р/б, а $LM \parallel AC$) $= x$

По т. косинусов:

$KL^2 = KA^2+AL^2-2KA\cdot AL\cdot\cos 120 = 4+x^2+2\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\cdot x =$

$= 4+x^2+2x$

$MN^2 = x^2+3-2\cdot\sqrt{3}\cdot x\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = x^2+3-3x.$

$KL=\sqrt{x^2+2x+4}$ $\quad MN=\sqrt{x^2+3-3x}$

$KL+MN=\sqrt{x^2+2x+4}+\sqrt{x^2-3x+3}$

Оно наименьшее когда производная от этого выражения $=0$.

нет

$\cancel{y'=\frac{2x+2}{\sqrt{x}}+\frac{2x-3}{\sqrt{x}}=\frac{4x-1}{\sqrt{x}}=0.}$

+/2

$4x-1=0.$

$x=\frac{1}{4}$ $\Rightarrow$ $KL=\sqrt{\frac{1}{16}+\frac{1}{2}+4}=\sqrt{\frac{1+8+48}{16}}=\frac{\sqrt{57}}{4}$

$MN=\sqrt{\frac{1}{16}+3-\frac{3}{4}}=\sqrt{\frac{1+48-12}{16}}=\frac{\sqrt{37}}{4}.$

$KL+MN=\frac{\sqrt{57}+\sqrt{37}}{4}$

Ответ: $\frac{\sqrt{57}+\sqrt{37}}{4}.$

Задание №5.

Чтобы он этого не мог сделать, нужно чтобы сумма как с 5ю, так и с 15ю процентами была либо больше числа, кратного 1000 на число не кратное 1000, либо меньше.

Задание №6.

$f(f(x))=x$

$f(f(x+2)+2)=x.$

$f(0)=1$ $f(2017)$ - ?

$f(f(0))=x=0.$

$f(1)=0.$

$f(f(0+2)+2)=0.$

$f(f(2)+2)=0.$

$f(2)+2=1$? основание?

$f(2)=-1.$

$f(f(1+2)+2)=1.$

$f(f(3)+2)=1.$

$f(3)+2=0$?

$f(3)=-2$

не обосновано.

и т.д., таким образом у нас $f(x)$ убывает на 1 с каждым увеличением x на 1.

$f(0)=1$ $f(x)=-x+1 \Rightarrow f(2017)=-2017+1=-2016.$

$f(1)=0$

$f(2)=-1$

$f(3)=-2$

$f(4)=-3$

$f(5)=-4$

Ответ: -2016.

+/2

$c = 51 - 20 - 13 = 18$
$a = 51 - 20 - 16 = 15$
$d = 51 - 15 - 17 = 19$
$e = 51 - 21 - 16 = 14$

Тогда наш квадрат имеет вид:

20	13	18
15	17	19
16	21	14

Сумма всех вертикалей, горизонталей и вертикалей равна 51.

Ответ:

Задание №3.

Найдем сумму всех $10^{ти}$ чисел:
$S = 20 \cdot 10 = 200.$
Наименьшее среднее арифметическое девяти чисел будет без самого большого числа из десяти.
Ведь пусть сумма 8ми чисел равна X, какое-то число равно y, а наибольшее $= z$, тогда среднее арифметическое $a_1 = \frac{x+y}{9} = \frac{x}{9} + \frac{y}{9}$

$a_2 = \frac{x+z}{9} = \frac{x}{9} + \frac{z}{9}.$

$\frac{x}{9} + \frac{y}{9} \vee \frac{x}{9} + \frac{z}{9}$

$\frac{z}{9} \vee \frac{y}{9}$ $\quad \frac{z}{9} - \frac{y}{9} > 0$, т.к. $z > y$ по условию.

Следовательно min среднее арифметическое будет без наибольшего числа, и равно это среднее арифметическое 17.

Оценочный бланк олимпиадных заданий по математике

Код участника: 440096

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8
Полученные баллы	10	10	10	10	0	0	[illegible]	16
Сумма баллов (оценка)		70					14	

Члены жюри:

Подпись	В.Б. [illegible] Фамилия И.О.
Подпись	Маевский Е.В. Фамилия И.О.
Подпись	Орел О.Е. Фамилия И.О.

Всероссийская олимпиада школьников «Миссия выполнима. Твое призвание-финансист!»

ПО МАТЕМАТИКЕ 11 класс

Заключительный (очный) этап
2016/2017 учебный год

440096

Код участника

Вариант I

Задание 1. (10 баллов)

Сколько существует натуральных чисел n таких, что уравнение $nx-12=3n$ имеет целочисленное решение.

Задание 2. (10 баллов)

Ниже нарисован магический квадрат, в котором некоторые числа отсутствуют.

20	13	15
12	17	
16	18	

[illegible]

2

34

Восстановите данный магический квадрат.

(В магическом квадрате суммы чисел, стоящих в каждой строке, в каждом столбце и на диагоналях, равны).

Задание 3. (12 баллов)

Среднее арифметическое десяти различных натуральных чисел равно 20, а среднее арифметическое любых девяти из этих чисел не меньше 17. Найдите максимально возможное значение наибольшего из этих чисел.

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМАЮ, ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ-ФИНАНСИСТ!»

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

440090

N1

$nx - 12 = 3n$

$nx - 3n = 12$

$n(x - 3) = 12$ Переберем все пары натуральных чисел, произведение которых равно 12

(6 решений)

1	12
12	1
3	4
4	3
6	2
2	6

+.

Ответ: 6.

N2

~~20~~		~~y~~
~~x~~	~~17~~	
~~16~~		

~~Отсюда получаем, что сумма 20+x+16, должна быть равна 16+17+y:~~

~~$20+x+16=16+17+y$~~

~~$20+x=17+y$~~

~~$y-x=3$~~

I

20		
	17	
16	x	y

Из условия мы знаем, что $16+x+y$ должно быть равно $20+17+y$

$20+17+y=16+x+y$

$37=16+x$

$x=21$

II

20	y	z
	17	
16	21	

Далее получаем:

1) $20+y+z=16+17+z$

$y=33-20$ $y=13$

2) $20+y+z=21+17+y$

$z=18$

III

20	13	18
a	17	b
16	21	c

Отсюда мы выясняем, что сумма столбцов, строк и диагоналей равна 51

$20+a+16=51$ $a=15$

$15+17+b=51$ $b=19$

$18+19+c=51$ $c=14$

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМАЮ, ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ-ФИНАНСИСТ!»

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ 440096

При перемножении у всех членов, начиная с 4-ого сокращаются числитель и знаменатель. Заметим, что x_{2017} - нечетный член, а у всех нечетных членов данной последовательности знаменатель сокращается с числителем предыдущего члена, а числитель - с знаменателем следующего. Но x_{2017} - последний, а значит, у него останется числитель равный $2017+2=2019$.

~~Произведение~~ Тогда произведение будет равно:

$$1\cdot 2\cdot \frac{1}{6}\cdot \frac{1}{\cancel{4}}\cdot 2019=\frac{2\cdot 2019}{\cancel{2}\cdot 6}=\frac{2019}{12}=168,25$$ ← ошибка в 4 раза

Ответ: 168,25.

±

N5

Пусть x - сумма чека ⇒

$$\begin{cases} 1,15\cdot x<1000\cdot n & \text{где } n\in N \\ 1,05x>1000\cdot(n-1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x<\frac{1000}{1,15}\cdot n \\ x>\frac{1000}{1,05}\cdot(n-1) \end{cases}$$

Таким образом, либо „$\frac{1000}{1,15}\cdot n$", либо „$\frac{1000}{1,05}(n-1)$" должно делиться на 1000 без остатка и модуль их разности должен быть меньше 1000.

неверно!

$$\frac{1000\cdot n}{1,15}-\frac{1000(n-1)}{1,05}<1000 \quad \backslash 1,15\cdot 1,05$$

$$1150n-1050n+1050-1207,5<0$$

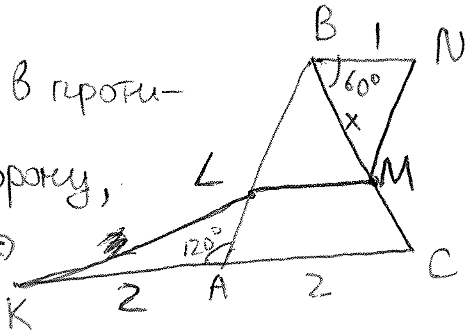
$100n<157,5 \Rightarrow n=1 \Rightarrow$ Наибольшая сумма чека - 999 рублей,

т.к. $0<x<1000$ Ответ: 999.

Запрещается делать пометки, раскрывающие авторство работы

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ 440096

N7



1) $\overrightarrow{BN}$ будет направлен в противоположную от $\overrightarrow{AK}$ сторону, т.к. $|AN|>|CN|$ (по услов.) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle ACN > \angle NAC$

2) $\angle ABC = 60^\circ$ ($\triangle ABC$ – правильный)

$\angle MBN = \dfrac{180^\circ - 60^\circ}{2} = 60^\circ$

3) Пусть $BM = x$. Тогда, по теореме косинусов:

$MN^2 = x^2 + BN^2 - 2\cos 60^\circ \cdot BM \cdot BN$

$MN^2 = x^2 + 1 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot x$

$MN^2 = x^2 - x + 1$ $\quad MN = \sqrt{x^2 - x + 1}$

4) $\triangle KAL$:

$\angle KAL = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$

$\angle A\cancel{LA} = AB - \angle B = AB - x$ $\quad (\angle B = BM$, т.к. $\angle M \parallel AC)$

Тогда, по теореме косинусов:

$KL^2 = 4 + (x-2)^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (2 - x)$

$KL^2 = 4 + x^2 - 4x + 4 + 4 - 2x$

$KL^2 = x^2 - 6x + 12$ $\quad KL = \sqrt{x^2 - 6x + 12}$

$|KL| + |MN| = \sqrt{x^2 - 6x + 12} + \sqrt{x^2 - x + 1}$

$f(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 12} + \sqrt{x^2 - x + 1}$

$f'(x) = \dfrac{2x - 6}{2\sqrt{x^2 - 6x + 12}}^{\backslash\sqrt{x^2-x+1}} + \dfrac{2x - 1}{2\sqrt{x^2 - x + 1}}^{\backslash\sqrt{x^2-6x+12}}$

Для того, чтобы найти точку минимума выражения, приравняем производную к нулю. (её числитель)

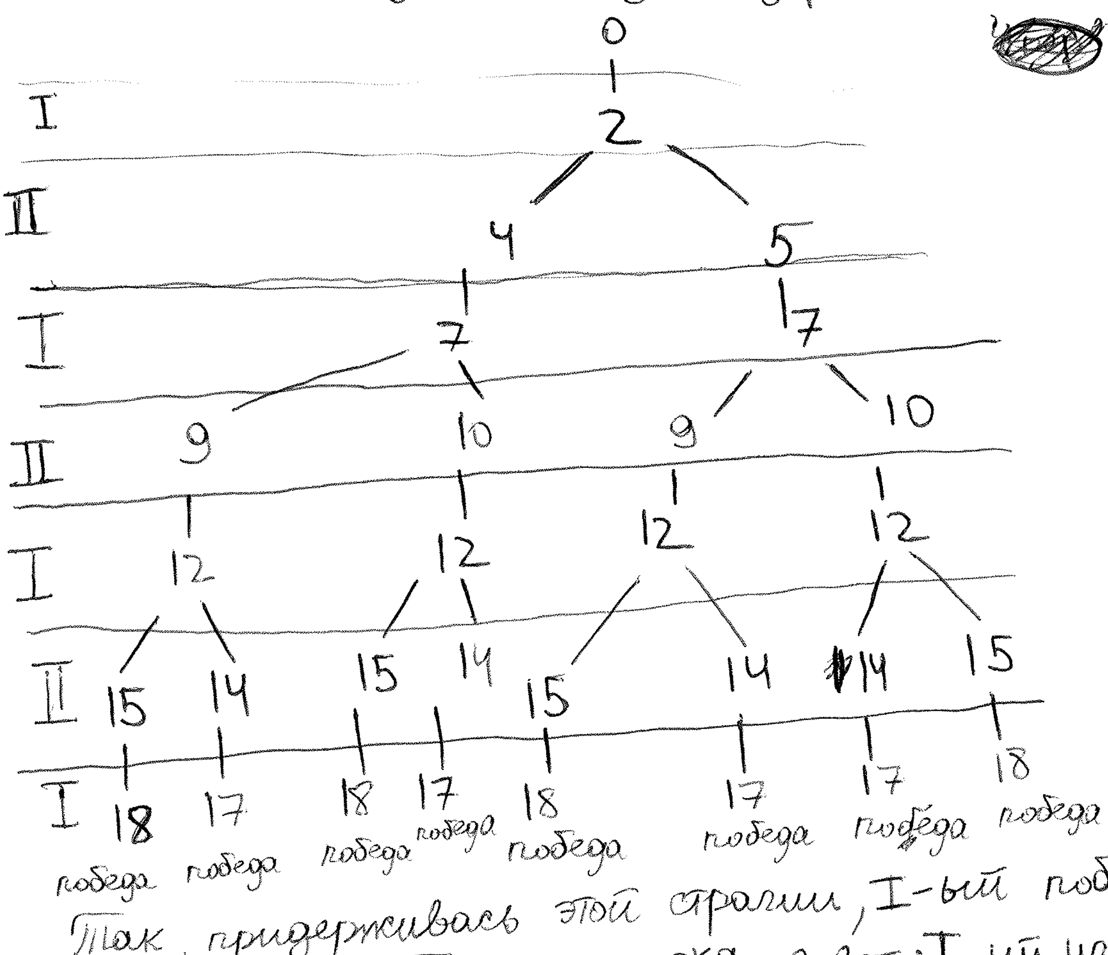
№8 (продолжение) ЧИСТОВИК (не хватило листков)

~~Таким образом, нужно выбрать те ветви, в которых к 6-ому ходу независимо от ходов I-ого игрока будет 13 ... выигрышную для II-ого игрока 10, 13 или 14 монет. Продемонстрирую тактику на дереве:~~

~~0 2 3~~

440096

а) Таким образом, нужно выбрать те ветви, в которых после 6-ого хода было бы 13, 14 или 15 монет вне зависимости от ходов второго игрока. Для этого кол-во монет перед шестым шагом должно быть равно 11 и 12. Продемонстрирую выигрышную тактику на дереве:



Так, придерживаясь этой стратегии, I-ый победит вне зависимости от ходов II-ого игрока. Ответ: I-ый игрок.

б) ~~Первым ходом он должен положить 2 монеты, т.к. при~~ ~~...~~. Если он будет придерживаться стратегии, то первым ходом он должен положить 2 монеты. И тогда вероятность его выигрыша равна 100%.

• А если все ходы, кроме 1-ого, будут случайными (т.е. любыми), то тогда вероятность выигрыша будет равна ~~$\frac{25}{32}$~~ $\frac{25}{32}$.

Ответ: первый ход ~~[illegible]~~ – 2 монеты; вероятность равна $\frac{25}{32}$.

$(2x-6)(\sqrt{x^2-x+1}) + (2x-1)\cdot(\sqrt{x^2-6x+12}) = 0$

$(2x-6)^2(x^2-x+1) = (2x-1)^2\cdot(x^2-6x+12)$

$(4x^2-24x+36)\cdot(x^2-x+1) = (4x^2-4x+1)\cdot(x^2-6x+12)$

$4x^4-4x^3+4x^2-24x^3+24x^2+\cancel{\ldots}-24x+36x^2-36x+36 = 4x^4-24x^3+48x^2-4x^3+24x^2-48x+x^2-6x+12$

$40x^2-\cancel{24x}\ 60x+36 = 49x^2-54x+12$

$9x^2+6x-24=0$ $\quad D=4+12\cdot 8=100=10^2$

$3x^2+2x-8=0$ $\quad x>0 \Rightarrow x=\frac{-2+10}{6}$ $\quad x=\frac{8}{6}$ $\quad x=\frac{4}{3}$ - точка минимума

верно

Теперь подставим её в ~~...~~ $f(x)$

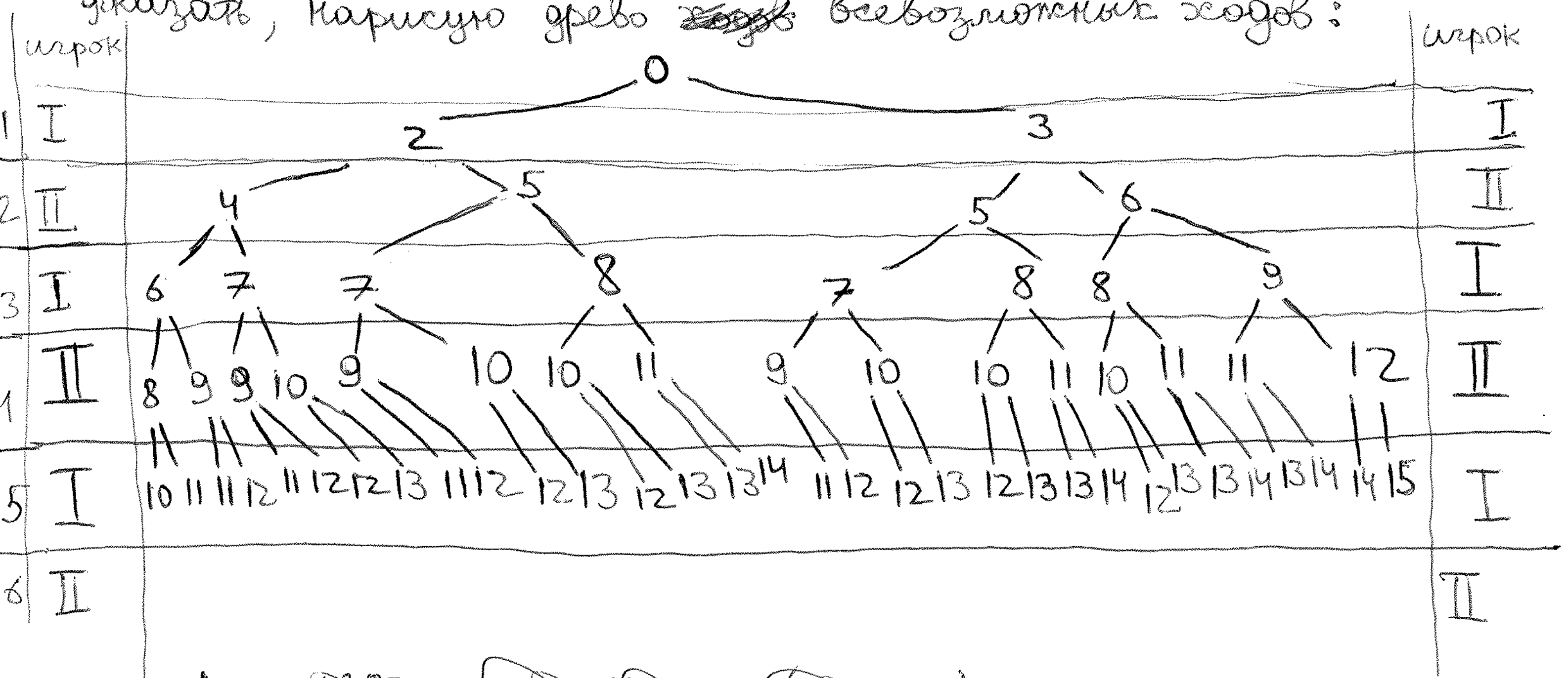
$f\left(\frac{4}{3}\right)=\sqrt{\frac{16}{9}-6\cdot\frac{4}{3}+12}+\sqrt{\frac{16}{9}-\frac{4}{3}+1} = \sqrt{\frac{16}{9}+4}+\sqrt{\frac{4}{9}+1} = \sqrt{\frac{52}{9}}+\sqrt{\frac{13}{9}}$

Ответ: $\sqrt{\frac{52}{9}}+\sqrt{\frac{13}{9}} = \frac{2\sqrt{13}}{3}+\frac{\sqrt{13}}{3}=\sqrt{13}$

+

№8 Первый

а) ~~Второй~~ игрок обладает выигрышной тактикой. Для того чтобы это доказать, нарисую древо ~~ходов~~ всевозможных ходов:



~~к шестому шагу (ходу)~~

~~Для того чтобы II-ый игрок выиграл своим:~~

~~1) 3-им ходом, кол-во монет в ряду должно быть равным 13 или 14.~~

~~2) 4-ым ходом, кол-во монет в ряду должно равным 9 и 10~~

~~(Но, 9-ти монет к шестому ходу быть не может ⇒ только 10)~~ Этим 10.

N 6

$f(f(x)) = x$ $\qquad$ $f(f(2017)) = 2017$

$f(f(x+2)+2) = x$ $\qquad$ $f(f(2017)+2) = 2015$

$f(f(0)) = 0$ $\qquad$ $f(f(2)+2) = 0$

$f(f(1)) = 1$ $\qquad$ $f(f(1)+2) = -1$

$f(f(2)) = 2$ $\qquad$ $f(f(0)+2) = -2$

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(f(0)) = 0 \\ f(f(0)+2) = -2 \end{cases}$$

$f(f(0)+2) = f(f(0)) + f(2)$

$f(2) = -2 \Rightarrow \quad \Rightarrow (1-7)$

$\Rightarrow f(2017) = -3025{,}5$ $\qquad$ Ответ: $-3025{,}5$.

—

Проверим: $16+21+14=51$ (Нижний ряд)

$30+21=51$

$51=51$ верно.

ответ:

20	13	18
15	17	19
16	21	14

+

№3

~~Для начала найдем 8 первых членов.~~

Пусть y – наибольшее число из этих 10-ти чисел

Для того чтобы „y" был максимально возможным, остальные числа должны быть ~~наибольшими~~ наименьшими и одинаковыми.

Пусть x – такое число. Отсюда:

$\frac{y+9x}{10}=20$ Но из второго условия мы знаем, что среднее арифметическое любых 9-ти чисел не меньше 17

$y+9x=200$ Возьмем девять x (их среднее арифметическое)

$\frac{9x}{9}\geqslant 17$ $x\geqslant 17$ ⇒ минимально возможное значение $x=17$

Вернемся в первое ур-ние.

$\frac{y+9\cdot 17}{10}=20$ $y=200-153$ $y=47$ ±

~~$y=2\ldots$~~ Ответ: 47. нужен пример с $y=47$. может быть $y<47$

№4

Для начала найдем 8 первых членов числовой последовательности

$a_2=\frac{4}{2}=2$ $a_3=\frac{5}{3\cdot 2}=\frac{5}{6}$ $a_4=\frac{6}{4\cdot\frac{5}{6}}=\frac{36}{20}$ $a_5=\frac{7}{5\cdot\frac{36}{20}}=\frac{7}{\frac{36}{4}}=\frac{28}{36}$

$a_6=\frac{8}{6\cdot\frac{28}{36}}=\frac{8}{\frac{28}{6}}=\frac{48}{28}$ $a_7=\frac{9}{7\cdot\frac{48}{28}}=\frac{36}{48}$ $a_8=\frac{10}{8\cdot\frac{36}{48}}=\frac{60}{36}$

Оценочный бланк олимпиадных заданий по математике

Код участника: 440135

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8
Полученные баллы	10	10	12	12	0	7	14	16
Сумма баллов (оценка)	81							

Члены жюри:

Подпись	Банин В.Г. Фамилия И.О.
Подпись	В.Б. Гисин Фамилия И.О.
Подпись	Орел Д.Е. Фамилия И.О.

Всероссийская олимпиада школьников «Миссия выполнима. Твое призвание-финансист!»

ПО МАТЕМАТИКЕ 11 класс

**Заключительный (очный) этап
2016/2017 учебный год**

440135

Код участника

Вариант I

Задание 1. (10 баллов)

$nx - 3n = 12$ $n(x-3) = 12$ $x - 3 = \frac{12}{n}$ $x = \frac{12}{n} + 3$ x – целое число или натуральное

Сколько существует натуральных чисел n таких, что уравнение $nx - 12 = 3n$ имеет целочисленное решение.

$n = 1; 2; 3; 4; 6; 12$

Ответ 6

Задание 2. (10 баллов)

Ниже нарисован магический квадрат, в котором некоторые числа отсутствуют.

20	13	18
15	17	19
16	21	14

Восстановите данный магический квадрат.

(В магическом квадрате суммы чисел, стоящих в каждой строке, в каждом столбце и на диагоналях, равны).

Задание 3. (12 баллов)

Среднее арифметическое десяти различных натуральных чисел равно 20, а среднее арифметическое любых девяти из этих чисел не меньше 17. Найдите максимально возможное значение наибольшего из этих чисел. 47

Задание 4. (12 баллов)

Числовая последовательность такова, что $x_n = \dfrac{n+2}{n x_{n-1}}$ для всех $n \geq 2$. Найдите произведение $x_1 x_2 x_3 \dots x_{2016} x_{2017}$, если $x_1 = 1$. 673

Задание 5. (12 баллов)

Когда Сергей пошел в кафе поужинать, в его кошельке были только банкноты в 1000 рублей. Он решил оставить официанту чаевые строго в размере от 5% до 15% от размера чека. Когда он получил чек, то понял, что не может осуществить задуманное. Найдите сумму наибольшего чека, который Сергей не может оплатить с учетом чаевых, используя только банкноты в 1000 рублей. 6086,95 или 6086

Задание 6. (14 баллов)

Функция $f(x)$ такова, что $f(f(x)) = x$ и $f(f(x+2)+2) = x$ для любого x.
Найдите $f(2017)$, если $f(0) = 1$. -2016

Задание 7. (14 баллов)

Дан правильный треугольник ABC со стороной 2. Точка K лежит на продолжении стороны AC за точку A, точка N лежит на прямой, параллельной прямой AC и проходящей через точку B, причем $|AK| = 2$, $|BN| = 1$. Рассматриваются такие ломаные $KLMN$, что точка L лежит на стороне AB, точка M лежит на стороне BC, а отрезок LM параллелен стороне AC. Найдите наименьшее возможное значение суммы $|KL| + |MN|$, если $|AN| > |CN|$. ~~12~~ 11,875

Задание 8. (16 баллов)

Два игрока по очереди выкладывают монеты в ряд. За один ход можно положить две или три монеты. Выигрывает тот, кто выложит 16 монету.

a) Определите, какой игрок (первый или второй) обладает стратегией, которая позволит ему выиграть вне зависимости от ходов другого игрока. Опишите эту стратегию.
b) Какой первый ход должен сделать первый игрок, играя с автоматом, чтобы выиграть с наибольшей вероятностью, если известно, что автомат ходит случайно и выкладывает две монеты или три монеты с равной вероятностью? Чему равна вероятность выиграть для первого игрока при этом ходе?

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМАЮ, ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ-ФИНАНСИСТ!»

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

440135

Задание №1.

n – натуральное число
x – должно быть целым

$nx - 12 = 3n$
$nx - 3n = 12$
$n(x-3) = 12$
$x - 3 = \frac{12}{n}$
$x = \frac{12}{n} + 3$

выражение $\frac{12}{n} + 3$ будет целым тогда, когда $\frac{12}{n}$ – целое число,

т.к. $n \in N$, то удовлетворяют

$n = 1$; $n = 2$; $n = 3$; $n = 4$; $n = 6$; $n = 12$

(+)

$x = 15$ $x = 9$ $x = 7$ $x = 6$ $x = 5$ $x = 4$

Тогда, существует 6 натуральных чисел, удовлетворяющих условию.

Ответ: 6 натуральных чисел.

Задание №2

20	x	y_{18}
z	17	f_{19}
16	m_{21}	k

$\cancel{20} + 17 + k = \cancel{20} + 16 + z$
$z = k + 1$

$20 + 17 + k = 17 + z + f$
$20 + \cancel{17} + \cancel{k} = \cancel{17} + \cancel{k} + 1 + f$ +

$\boxed{f = 19}$

$20 + 17 + \cancel{k} = y + f + \cancel{k}$
$20 + 17 = y + 19$

Запрещается делать пометки, раскрывающие авторство работы

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ 440135

5) Пусть к наибольшее число, и $к = 47$, (число больше 47 не может быть, т.к не будет выполняться условие 3), тогда $а+б+в+г+д+е+ж+з+и = 153$, и их среднее арифметическое 17.

6) для нахождения чисел, скажем, что ~~два соседних числа а=17, а также~~ ~~б+в~~ $а+б = 34 = в+г = д+е = ж+з$, а $34 = 2+32 = 3+31 = 4+30 = 5+29$, причем $34 \cdot 4 = 136$, тогда $и = 153 - 136 = 17$. +

7) $а+б+в+г+д+е+ж+з+и+к = 200$

$200 = 2+32+3+31+4+30+5+29+17+47$.

т.к. все числа меньше 47, а для 47 выполняется условие 3, то среднее арифметическое 9 любых чисел будет не меньше 17.

Рассмотрим $48 \Rightarrow 200 - 48 = 152$

$\frac{152}{9} = 16\frac{8}{9}$, что противоречит условию.

Ответ: 47

Задание №4

$x_1 = 1$, $x_n = \frac{n+2}{n \cdot x_{n-1}}$, где $n \geq 2$

произведение $x_1 \cdot x_2 \dots \cdot x_{2016} \cdot x_{2017}$ – ?

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ 440135

1) Рассмотрим числа кратные 1000 и их 5% и 15%. Найдем два таких числа, что 15% у одного меньше 1000, а у другого больше, и разница между числами не была бы больше 1000.

1000 → 50, 150
2000 → 100, 300
3000 → 150, 450
4000 → 200, 600
5000 → 250, 750
6000 → 300, 900
7000 → 350, 1050

Для любого числа больше 7000 можно подобрать такой процент от 5% до 15%, чтобы оно с процентами было бы кратно 1000 руб.

2) Необходимое число находится в диапазоне от 6000 до 7000, причем, (пусть число равно x) должны выполняться условие: $1{,}15x < 7000$
$0{,}05x > 6000$,

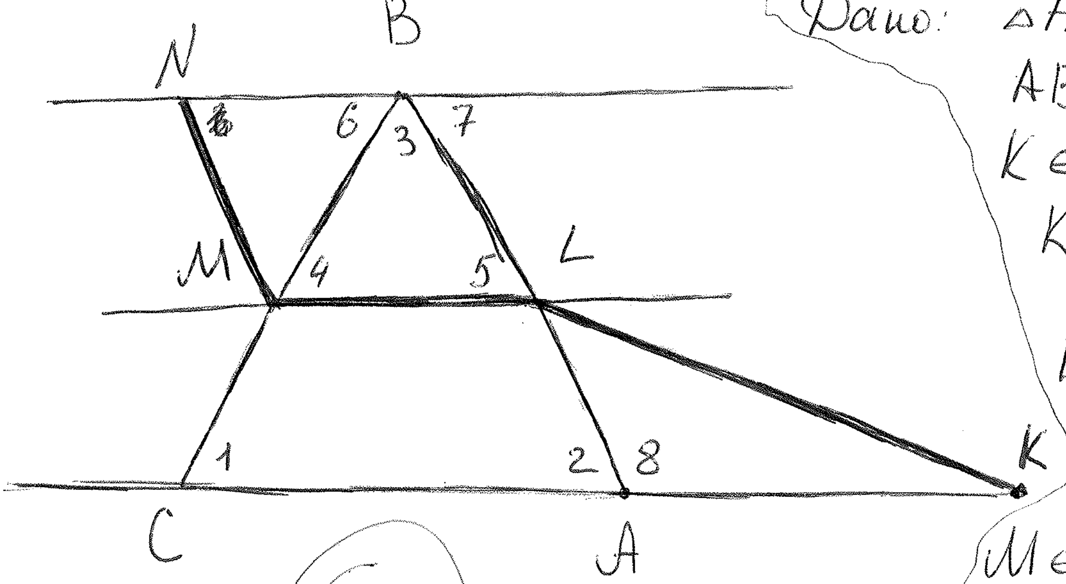
тогда $x \in \left(5714\frac{6}{21};\ 6086\frac{22}{23}\right)$

3) Наибольшее число x будет равно:
6086 – для целого
6086,95 – для округления до сотых

Ответ: 6086 (6086,95) – наибольшая сумма чека.

Чистовик:

440135



Дано: $\triangle ABC$ - р/с
$AB = BC = AC = 2$
$K \in AC$, причем
$KC = KA + AC$,
$|AK| = 2$
$BN \parallel AC$,
$|AN| > |CN|$
$|BN| = 1$.
$M \in BC$, $L \in AB$,
$LM \parallel AC$
Найти: наименьшее
$|KL| + |MN|$ - ?

Решение:

1) $\triangle ABC$ - р/с по условию,
$\angle 1 = \angle 2 = \angle 3 = 60°$,

2) $AC \parallel ML$ по условию,
для секущей BC $\angle 1 = \angle 4$ как соответственные
для секущей AB $\angle 2 = \angle 5$ как соответственные

3) $BN \parallel AC$ по условию
для секущей BC $\angle 6 = \angle 1$ как накрест лежащие
для секущей AB $\angle 7 = \angle 2$ как накрет лежащие

4) $\angle 2 + \angle 8 = 180°$ - как смежные
$\angle 8 = 180° - \angle 2 = 180° - 60° = 120°$
$\angle 6 = \angle 1 = 60°$

5) Рассмотрим $\triangle BML$, и $\triangle ABC$
$ML \parallel AC$, $\Rightarrow \angle 4 = \angle 1$
$\angle B$ - общий
$\Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle LBM$ по 2-ум углам
$\triangle LBM$ - р/с $\Rightarrow BM = ML = BL$

Чистовик.

наименьшее значение $|MN|+|KL|$ при $x=\frac{4}{3}$, тогда

440135

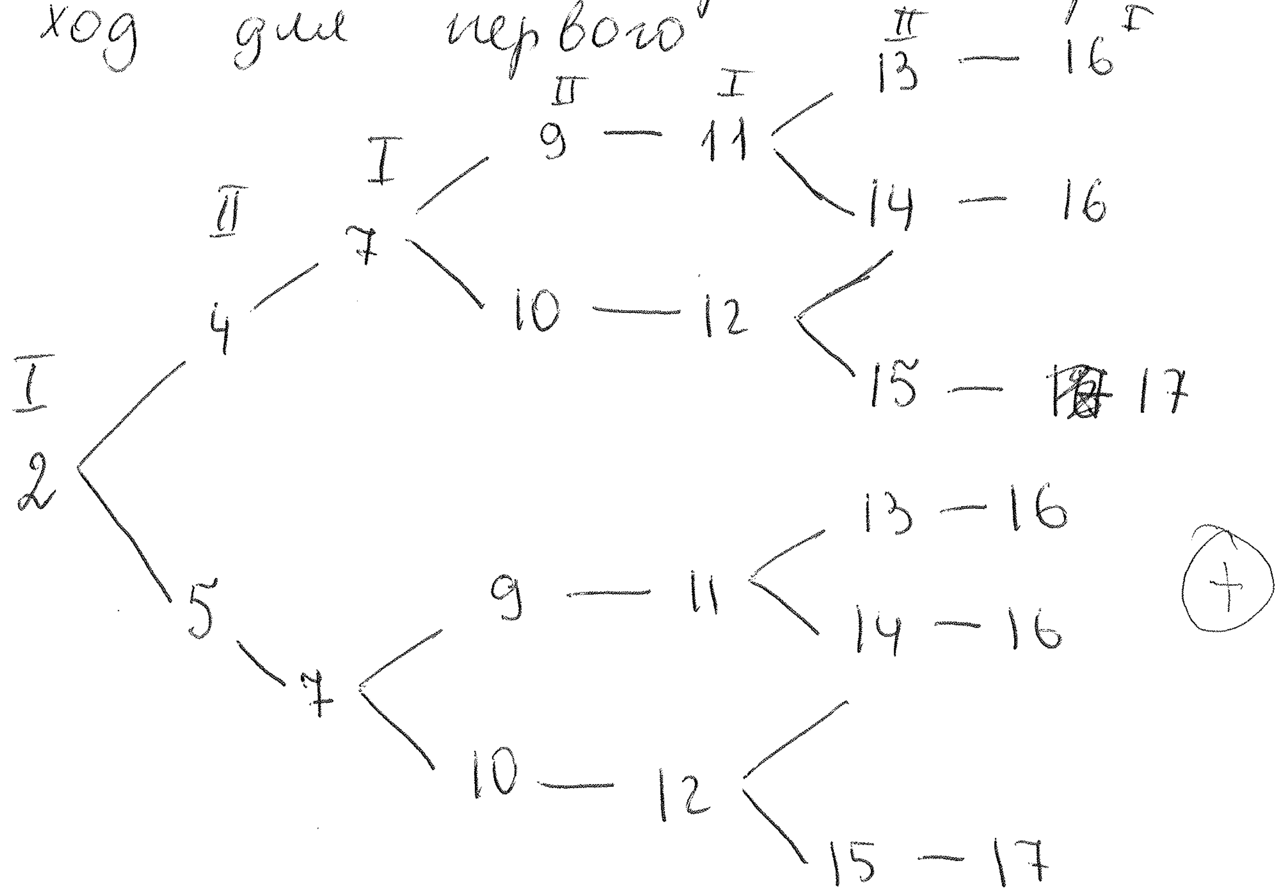
$$|MN|+|KL| = \sqrt{\frac{16}{9}-\frac{4}{3}+1} + \sqrt{\frac{16}{9}-\frac{24}{3}+12} =$$

$$= \sqrt{\frac{13}{9}} + \sqrt{\frac{52}{9}} = \frac{\sqrt{13}+\sqrt{52}}{3}$$

Ответ: $\frac{\sqrt{13}+\sqrt{52}}{3} = \frac{\sqrt{13}+2\sqrt{13}}{3} = \sqrt{13}$

Задание № 8

а) У первого игрока есть выигрышная стратегия, изобразим ее в форме дерева, указав 2 варианта хода для 2-ого игрока и правильный ход для первого



б) Чтобы первый игрок выиграл с большей вероятностью ему необходимо начать с 2-ух монет, тогда вероятность выигрыша равна 1, т.к. независимо от хода автомата победа первого игрока гарантирована.

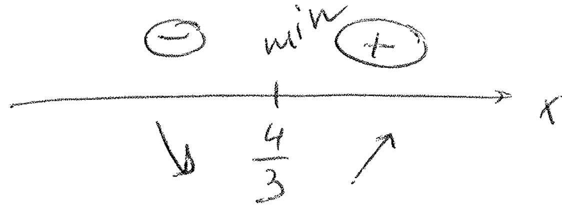
6) Пусть $ML = x$, тогда
$BM = x$, $AL = AB - x = 2 - x$

7) Рассмотрим $\triangle NBM$
по теореме косинусов
$$MN^2 = BN^2 + BM^2 - 2 \cdot BM \cdot BN \cos\angle 6$$
$$MN^2 = 1 + x^2 - 2 \cdot 1 \cdot x \cos 60^\circ = x^2 + 1 - x = x^2 - x + 1$$
Рассмотрим $\triangle KAL$
по теореме косинусов
$$KL^2 = KA^2 + AL^2 - 2 \cdot KA \cdot AL \cdot \cos\angle 8$$
$$KL^2 = 4 + (2-x)^2 - 2 \cdot 2(2-x)\cos 120^\circ =$$
$$= 4 + 4 - 4x + x^2 + \frac{1}{2}(8 - 4x) = x^2 - 6x + 12$$

8) тогда $|MN| = \sqrt{x^2 - x + 1}$ и $|KL| = \sqrt{x^2 - 6x + 12}$
$$|MN| + |KL| = \sqrt{x^2 - x + 1} + \sqrt{x^2 - 6x + 12}$$
$x^2 - x + 1$ всегда больше 0
$x^2 - 6x + 12$ всегда больше 0

найдем производную:
$$\frac{1\,(2x-1)}{2\sqrt{x^2 - x + 1}} + \frac{1\,(2x-6)}{2\sqrt{x^2 - 6x + 12}} = \frac{(2x-1)\sqrt{x^2-6x+12} + (2x-6)\sqrt{x^2-x+1}}{2\sqrt{x^2-6x+12}\,\sqrt{x^2-x+1}}$$

~~к~~ найдем критические точки:
$$(2x-1)^2(x^2 - 6x + 12) = (2x-6)^2(x^2 - x + 1)$$
после преобразований:
$$9x^2 + 6x - 24 = 0$$
$$3x^2 + 2x - 8 = 0$$
$$D = 4 + 96 = 10^2$$



$x = -2$ $\quad x = \frac{4}{3}$

не уд,
т.к. $(2x-1) < 0$
$(2x-6) < 0$

которую Сергей с учетом чаевых не сможет оплатить банкнотами номиналом только 1000 руб.

Задание №6

$f(f(x))=x$, $f(f(x+2)+2)=x$, $f(0)=1$

$f(2017)-?$

① $f(f(0))=\boxed{f(1)=0}$

$f(-1+2)=f(1)=0 \Rightarrow f(x+2)=0$ при $x=-1$

$f(-1+2)+2=0+2=2$

$\boxed{f(2)=-1}$

$f(-2+2)=f(0)=1 \Rightarrow f(x+2)=1$ при $x=-2$

$f(-2+2)+2=1+2=3$

$\boxed{f(3)=-2}$

$f(f(2))=\boxed{2=f(-1)}$

$f(f(3))=\boxed{3=f(-2)}$

② При рассмотрении нескольких значений ф-ции можно сказать, что

$f(x)=-x+1$, нет обоснования.

тогда $f(2017)=-2017+1=-2016$,

(проверим условие:

$f(2017)=f(f(-2016))=-2016$

$f(2017)=f(2015+2)=f(f(-2016)+2)=-2016)$

Ответ: -2016

+/2

Задание №7.

1) Найдем произведение 2-ух соседних чисел

$$x_n \cdot x_{n-1} = \frac{n+2}{n \cdot x_{n-1}} \cdot x_{n-1} = \frac{n+2}{n},$$

$$x_{n+2} \cdot x_{n+1} = \frac{(n+2)+2}{n+2} = \frac{n+4}{n+2}$$

$$x_{n+4} \cdot x_{n+3} = \frac{(n+4)+2}{(n+4)} = \frac{n+6}{n+4}$$

$$x_{n+6} \cdot x_{n+5} = \frac{(n+6)+2}{n+6} = \frac{n+8}{n+6},$$

тогда ~~для~~ произведение пар произведений:

$$\frac{\cancel{(n+2)}\cancel{(n+4)}\cancel{(n+6)}(n+8)}{n\,\cancel{(n+2)}\cancel{(n+4)}\cancel{(n+6)}} = \frac{\overset{n+6+2}{n+8}}{\underset{n-1+1}{n}}$$ – для чисел от x_{n-1} до x_{n+6},

тогда для x_n до x_k формула:

$\frac{k+2}{n+1}$, а т.к. формула для $n \geq 2$, то произведение от x_2

2) первый множитель x_2, последний множитель x_{2017}, тогда $k = 2017$, $n = 2$, и произведение $x_2 \cdot x_3 \ldots x_{2016} \cdot x_{2017}$ равно:

$$\frac{2017+2}{2+1} = \frac{2019}{3} = 673,$$

при домножении на $x_1 = 1$ произведение также равно 673

Ответ: 673

Задание №5

$\boxed{y = 18}$

$\cancel{20} + x + y = \cancel{20} + 17 + k$

$x + 18 = 17 + k$

$x = k - 1$

$20 + \cancel{17} + \cancel{k} = x + \cancel{17} + m$

$20 + \cancel{k} = \cancel{k} - 1 + m$

$\boxed{m = 21}$

$16 + \cancel{17} + y = 20 + \cancel{17} + k$

$16 + 18 = 20 + k$

$\boxed{k = 14}$

$\boxed{z = 15}$

$\boxed{x = 13}$

используя различные комбинации равенства суммы трех цифр найдем недостающие элементы: x, y, z, f, m, k.

Ответ:

20	13	18
15	17	19
16	21	14

сумма ~~цис~~ чисел 51.

Задание №3

1) обозначим десять различных натуральных чисел буквами: а, б, в, г, д, е, ж, з, и, к.

2) запишем их среднее арифметическое:

$$\frac{а+б+в+г+д+е+ж+з+и+к}{10} = 20$$, тогда

$$а+б+в+г+д+е+ж+з+и+к = 200$$

3) ~~Пусть к – число~~ запишем среднее арифметическое любых девяти чисел:

$$\frac{а+б+в+г+д+е+ж+з+и}{9} \geqslant 17$$

$$а+б+в+г+д+е+ж+з+и \geq 153$$

4) Тогда число к может принимать значения: $1 \leq к \leq 47$.