ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМА.
ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ – ФИНАНСИСТ!»
ПО ПРЕДМЕТУ **МАТЕМАТИКА** 2020-2021 уч. года

ОЧНЫЙ ЭТАП

8-9 классы

Вариант 2

Задание 1 (10 баллов)

Пчелы продают гречишный мёд и дикий мёд в одинаковых стеклянных банках. Цена дикого мёда вдвое больше цены гречишного мёда (без учета стоимости банки). Пчёлы могут взять пустые банки, обменяв их на мёд. Винни Пух принёс 26 пустых банок, зная, что этого хватит на несколько банок с мёдом. Сколько банок и с каким именно мёдом он может получить от пчёл, если стоимость 12 банок с гречишным мёдом равна стоимости 7 банок с диким мёдом?

Решение.

Пусть $a -$ цена пустой банки, $x -$ цена банки гречишного мёда (не считая цены банки). Тогда дикий мёд без стоимости банки будет стоить $2x$, а из последнего условия имеем: $12(x+a)=7(2x+a)$, т.е. $2x=5a$. Таким образом, цена банки дикого мёда (вместе с ценой за банку) составит $2x+a=6a$, а соответственно полная цена банки с гречишным мёдом составит $x+a=\frac{7}{2}a$.

Пусть $m -$ количество полученных банок с диким мёдом, а $n -$ соответственно с гречишным мёдом. Тогда имеем уравнение баланса $26a=m6a+n\frac{7}{2}a$, которое имеет единственную натуральную пару решений $(m;\ n)=(2;4)$.

Ответ: 2 банки дикого мёда и 4 банки гречишного мёда.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача решена полностью.	+	10
Решение задачи, содержит верную общую схему решения, но в результате описки или арифметической ошибки получен неверный ответ.	±	7

Решение содержит значительное продвижение в верном направлении. Получено верное уравнение баланса, но решено неверно.	+/2	5
Решение в целом неверное или незаконченное, но содержит определенное содержательное продвижение в верном направлении. Получены верные соотношения между ценами мёда и банки, но отсутствует верное уравнение баланса.	∓	2
Задача не решена, содержательных продвижений нет.	–	0
Задача не решалась.	0	0

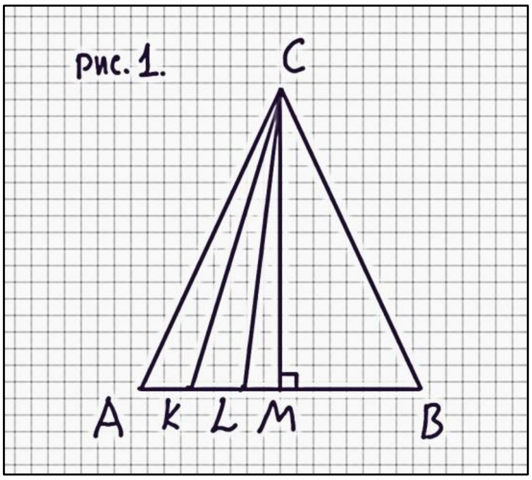
Задание 2 (10 баллов)

На основании AB равнобедренного треугольника ABC отмечены точки K и L так, что $\angle KCL \leq \frac{1}{2}\angle ACB$. Докажите, что площадь треугольника KCL не превышает половины площади треугольника ABC.

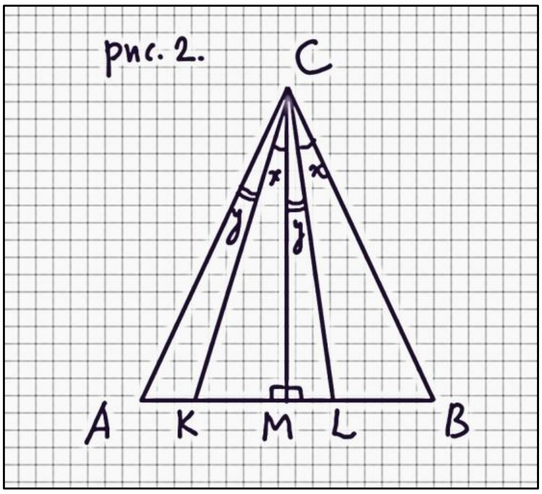
Доказательство

Пусть точка M −середина основания AB. Заметим, что медиана CM также является и высотой, причем высотой как треугольника ABC, так и треугольника KCL. Поэтому достаточно доказать неравенство для оснований: $KL \leq \frac{1}{2}AB$.

Если точки K и L лежат на отрезке AB по одну сторону относительно точки M (например, между точками A и M), то доказывать нечего, т.к. $KL \leq AM = \frac{1}{2}AB$ (рис.1).



Рассмотрим второй случай, когда точки K и L лежат по разные стороны от точки M (рис.2).



Докажем утверждение $KL \le \frac{1}{2}AB$ для максимального случая $\angle KCL = \frac{1}{2}\angle ACB$ (ясно, что при уменьшении угла $\angle KCL$ основание KL также будет уменьшаться и неравенство $KL \le \frac{1}{2}AB$ будет тем более верным).
Обозначим $x = \angle KCM$ и $y = \angle MCL$. Учитывая, что медиана равнобедренного треугольника CM является биссектрисой, получим $\angle ACK = y$ и $\angle LCB = x$.
Далее заметим, что площадь треугольника KCM не превосходит площадь треугольника LCB (это следует из $S_{KCM} = \frac{1}{2} \cdot KC \cdot MC \cdot \sin x \le \frac{1}{2} \cdot BC \cdot LC \cdot \sin x = S_{LCB}$), но высоты в этих треугольниках одинаковы и равны CM (медиана является и высотой в равнобедренном треугольнике), следовательно, основание первого треугольника должно быть не больше основания второго, т.е. $KM \le LB$.
Аналогично устанавливается, что $ML \le AK$.
В итоге приходим к требуемому утверждению:

$$2KL = KL + KM + ML \le KL + LB + AK = AB \quad \Rightarrow$$
$$KL \le \frac{1}{2}AB.$$

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача решена полностью.	+	10
Решение задачи, содержит верную общую схему решения, в котором отсутствуют некоторые обоснования.	±	7
Решение содержит значительное продвижение в верном направлении. При этом решение не завершено или не обоснованы неравенства на основания треугольников.	+/2	5
Решение в целом неверное или незаконченное, но содержит определенное содержательное продвижение в верном направлении.	∓	2

Задача не решена, содержательных продвижений нет.	–	0
Задача не решалась.	0	0

Задание 3 (12 баллов)

Незнайка предложил вычитать дроби по такому правилу:

$$\frac{a}{b} \ominus \frac{c}{d} = \frac{ac}{ad - bc}$$

Существуют ли ненулевые дроби, для которых вычитание по правилу Незнайки даёт верный результат как при обычном вычитании.

Решение.

Приравняем результаты обычного вычитания и вычитания по правилу Незнайки:

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd} = \frac{ac}{ad - bc} = \frac{a}{b} \ominus \frac{c}{d}$$

Следовательно, $(ad - bc)^2 = abcd$ или в раскрытом виде:

$$(ad)^2 + (bc)^2 - (ad)(bc) = 0.$$

В последнем выражение левая часть является неполным квадратом, и уравнение не имеет ненулевых решений. (Достаточно выписать дискриминант для квадратного уравнения относительно переменной ad и убедиться, что он отрицательный при ненулевых параметрах).

Ответ: не существует таких ненулевых дробей

Содержание критерия	**Оценка**	**Баллы**
Задача решена полностью.	+	12
Решение задачи, содержит верную общую схему решения, в котором отсутствуют некоторые обоснования, но неполный квадрат выделен и верно классифицирован.	±	8
Решение содержит значительное продвижение в верном направлении. Верно составлено уравнение, связывающие формулы Незнайки и нормы, но не исследован неполный квадрат.	+/2	6
Решение в целом неверное или незаконченное, но содержит определенное содержательное продвижение в верном направлении.	∓	2

Задача не решена, содержательных продвижений нет.	–	0
Задача не решалась.	0	0

Задание 4 (12 баллов)

Можно ли число 3053 представить в виде суммы нескольких различных факториалов?

Решение.

Вычислим факториалы первых нескольких чисел и их суммы пока не превысим заданное число 3053:

$$\underbrace{1 + 2 + 6 + 24 + 120 + 720}_{873} + 5040 + \cdots$$

Ясно, что запаса всех первых 6-ти чисел не хватает, а использование 7! и выше приводит к превышению.

Ответ: Нет, представить нельзя.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача решена полностью.	+	12
Решение задачи, содержит верную общую схему решения, в котором отсутствуют некоторые обоснования или в результате описки/арифметической ошибки получен неверный ответ.	±	8
Решение содержит значительное продвижение в верном направлении. При этом решение не завершено.	+/2	6
Решение в целом неверное или незаконченное, но содержит определенное содержательное продвижение в верном направлении.	∓	2
Задача не решена, содержательных продвижений нет.	–	0
Задача не решалась.	0	0

Задание 5. (12 баллов)

Произведение двух различных целых чисел a и b является квадратом натурального числа. Существует ли такое целое число x, что $n = \frac{(a+x)(b-x)}{b-a}$?

Решение.

Рассмотрим $x = n$. Тогда, действительно: $\frac{(a+n)(b-n)}{b-a} = \frac{ab-n^2+(-a+b)n}{b-a} = \frac{(b-a)n}{b-a} = n$.
<u>*Ответ*</u>: Да, $x = n$.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача решена полностью.	+	12
Решение задачи, содержит верную общую схему решения, в котором отсутствуют некоторые обоснования.	±	8
Решение содержит значительное продвижение в верном направлении. При этом решение не завершено или при правильном ответе в нем отсутствуют важные обоснования.	+/2	6
Решение в целом неверное или незаконченное, но содержит определенное содержательное продвижение в верном направлении.	∓	2
Задача не решена, содержательных продвижений нет.	–	0
Задача не решалась.	0	0

Задание 6 (14 баллов)

Вася решал пример на доске в классе. Пока он стирал с доски, он случайно стёр две цифры из условия. Оставшийся на доске текст такой: $113 \cdot (72 + x) = 20{**}21$, где символ * означает стертую цифру. Покажите, что Вася, тем не менее, может решить этот пример, зная, что x –целое число.

<u>*Решение.*</u>

Обозначим $y = 72 + x$ и оценим его, заменив ** на 00 с одной стороны и 99 – с другой:
$113 \cdot 1770 = 200010 < 200021 \leq 20{**}21 \leq 209921 < 209954 = 113 \cdot 1858$.
Таким образом, искать y следует из диапазона $1771 \leq y \leq 1857$.
Нетрудно заметить, что последняя цифра у y может быть только 7. Остается перебрать из нескольких вариантов: 1777, 1787, … , 1857. В результате получаем искомое тождество $113 \cdot 1817 = 205321$.
Откуда получаем $x = y - 72 = 1817 - 72 = 1745$.
<u>*Ответ*</u>: $x = 1745$

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача решена полностью.	+	14

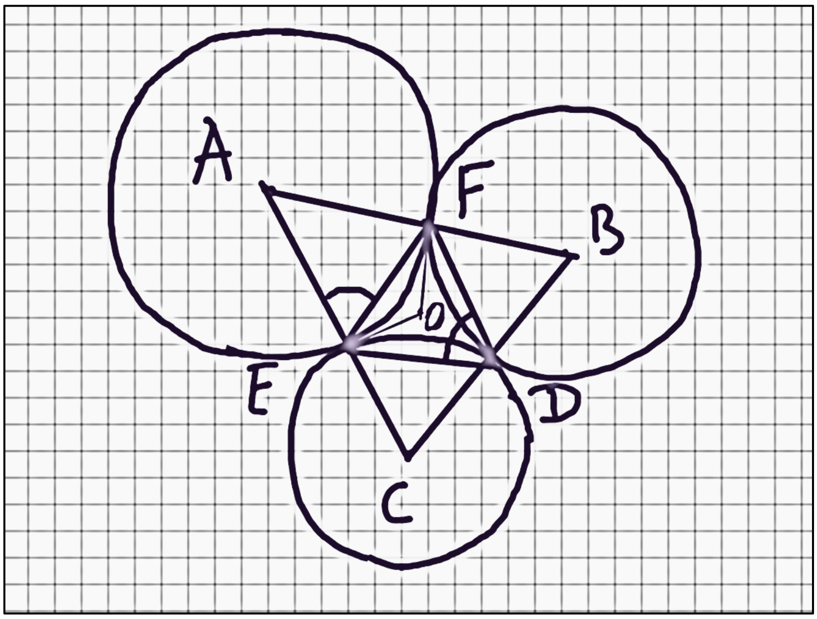
Решение задачи, содержит верную общую схему решения, в котором отсутствуют некоторые обоснования, в частности, диапазон выбран более широким. Ответ верный, но необоснован.	±	10
Решение задачи, содержит верную общую схему решения, но в результате описки/арифметической ошибки получен неверный ответ.		
Решение содержит значительное продвижение в верном направлении. Верно найден диапазон изменения y. При этом решение не завершено. Ответ отсутствует или неверный.	+/2	7
Решение в целом неверное или незаконченное, но содержит определенное содержательное продвижение в верном направлении.	∓	3
Задача не решена, содержательных продвижений нет.	–	0
Задача не решалась.	0	0

Задание 7 (14 баллов)

Три окружности с центрами в точках A, B и C и радиусами 6, 4 и 3 соответственно касаются друг друга внешним образом в точках D, E и F. Найдите радиус окружности, проходящей через точки касания D, E и F.

Решение.

Докажем, что окружность, проходящая через точки касания D, E и F, вписана в треугольник ΔABC.



Установим равенство углов, отмеченных на рисунке дугами ($\angle FDE = \angle AEF$):

$$\angle FDE = 180° - \angle FDB - \angle EDC = 180° - \frac{180° - \angle B}{2} - \frac{180° - \angle C}{2} =$$

$$= \frac{\angle B + \angle C}{2} = \frac{180° - \angle A}{2} = \angle AEF.$$

Далее установим, что искомая окружность с центром в точке O касается стороны AC треугольника в точке E: $\angle OEA = \angle OEF + \angle FEA = \frac{180° - \angle FOE}{2} + \angle FEA =$
$= \frac{180° - 2\cdot\angle FDE}{2} + \angle FEA = 90° - \angle FDE + \angle FEA = 90°.$

Аналогично доказываются касания с двумя другими сторонами треугольника в точках D и F.

Тогда радиус вписанной в треугольник окружности находится по формуле

$$r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}},$$

где $a = AB = 6 + 4 = 10;\ b = BC = 4 + 3 = 7; c = AC = 6 + 3 = 9;$
$p = \frac{10+7+9}{2} = 13.$

$$r = \sqrt{\frac{3\cdot 6\cdot 4}{13}} = 6\cdot\sqrt{\frac{2}{13}} = \sqrt{\frac{72}{13}} = 2{,}35339\ldots$$

<u>*Ответ*</u>: $r = 6\cdot\sqrt{\frac{2}{13}} = \sqrt{\frac{72}{13}} = 2{,}35339\ldots$

Содержание критерия	**Оценка**	**Баллы**
Задача решена полностью.	+	14
Решение задачи, содержит верную общую схему решения, в котором отсутствуют некоторые обоснования.	±	10
Ответ получен, но не приведено доказательство основного факта "вписанности" окружности в треугольник	+/2	7
Решение в целом неверное или незаконченное, но содержит определенное содержательное продвижение в верном направлении.	∓	3
Задача не решена, содержательных продвижений нет.	–	0
Задача не решалась.	0	0

Задача 8 (16 баллов)

На дне рождения Пети проводится лотерея с определенным количеством призов, причем, каждый гость может получить не более одного приза. Известно, что если бы было на один приз меньше, чем в действительности, то количество всех возможных комбинаций распределения призов среди гостей было бы в 5 раз меньшее. А если бы было на один приз больше, чем в действительности, то количество различных комбинаций распределения выигрышей среди гостей увеличилось бы 4 раза. Сколько гостей пришло поздравить Петю и скольким из них повезет в лотерею.

Решение.

Пусть $n-$ количество гостей, а $k-$ количество призов. Тогда количество всех различных распределений призов $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. Из условия следует, что $C_n^{k-1} = \frac{1}{5} C_n^k$ и $C_n^{k+1} = 4C_n^k$. Подставляя выражение для биномиальных коэффициентов и сокращая подобные, получим:

$$\begin{cases} C_n^{k-1} = \dfrac{1}{5} C_n^k \\ C_n^{k+1} = 4C_n^k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{n-k+1} = \dfrac{1}{5} \cdot \dfrac{1}{k} \\ \dfrac{1}{k+1} = 4 \cdot \dfrac{1}{n-k} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5k = n-k+1 \\ n-k = 4(k+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 5 \\ n = 29 \end{cases}$$

Ответ: Было 29 гостей, 5 гостей получат призы лотереи.