ФГОБУ ВО «Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации»

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМА.
ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ – ФИНАНСИСТ!»
ПО ПРЕДМЕТУ **МАТЕМАТИКА** 2020-2021 уч. года

ОЧНЫЙ ЭТАП

11 класс

Вариант 2

Задание 1 (10 баллов)

Когда в фирму пришел новый сотрудник, доля сотрудников с экономическим образованием там возросла на 1 процентный пункт. Сколько же теперь сотрудников в этой фирме имеют экономическое образование?

Решение.

Пусть в фирме было m, а стало $m+1$ сотрудников с экономическим образованием. Тогда, если $n-$ число остальных сотрудников, то имеем уравнение $\frac{m+1}{m+n+1}-\frac{m}{m+n}=\frac{1}{100}$, преобразующееся к виду:

$$(m+n)(m+n+1)=100\cdot n.$$

Отсюда ясно, что $(m+n)$ и $(m+n+1)-$ натуральные числа, меньшие 100. Причем, одно из них кратно 25, а другое 4. Перебором устанавливаем, что $m+n=24$ либо $m+n=75$. В первом случае $n=\frac{24\cdot(24+1)}{100}=6$, а во втором: $n=\frac{75\cdot(75+1)}{100}=57$.
Число $m+1$ в обоих случаях равно 19.

Ответ: В фирме стало 19 сотрудников с экономическим образованием.

Содержание критерия	**Оценка**	**Баллы**
Задача решена полностью.	+	10
Решение задачи, содержит верную общую схему решения, но перебор проведен не до конца: не доказано, что других решений нет.	±	7
Решение содержит значительное продвижение в верном направлении. Составлены верные соотношения, связывающие m и n, но дальше продвижений нет.	+/2	3

Решение в целом неверное или незаконченное, но содержит угаданную пару m и n	$\mp$	1 балл за каждую пару
Задача не решена, содержательных продвижений нет.	–	0
Задача не решалась.	0	0

Задание 2 (10 баллов)

Какие линейные размеры может иметь прямоугольный параллелепипед, если его объем равен 240 см^3, площадь боковой поверхности равна 220 см^2, а сумма длин всех ребер составляет 84 см?

Решение.

Пусть x_1, x_2 и x_3 – линейные размеры параллелепипеда (в сантиметрах). Тогда имеем систему уравнений $x_1x_2x_3 = 240$, $2(x_1x_3 + x_2x_3) = 220$ и $4(x_1 + x_2 + x_3) = 84$.
Из последних двух уравнений легко выражается x_3: $x_3^2 - 21x_3 + 110 = 0$.
Откуда $x_3 = 10$ и $x_3 = 11$. Последующие подстановки найденного приводят
для случая $x_3 = 10$ к корням $x_1 = 3$ и $x_2 = 8$;

для случая $x_3 = 11$ к корням $x_1 = 5 + \sqrt{\frac{35}{11}}$ и $x_2 = 5 - \sqrt{\frac{35}{11}}$.

Ответ: $3\text{см} \times 8\text{см} \times 10\text{см}$ и $11\text{см} \times \left(5 - \sqrt{\frac{35}{11}}\right)\text{см} \times \left(5 + \sqrt{\frac{35}{11}}\right)\text{см}$

(с точностью до порядка следования)

Содержание критерия	**Оценка**	**Баллы**
Задача решена полностью.	+	10
Решение задачи, содержит верную общую схему решения, но в результате описки/арифметической ошибки получен неверный ответ	±	7

Решение задачи, содержит верную общую схему решения, но найден только один вариант линейных размеров.	+/2	4
Решение в целом неверное или незаконченное, но содержит формулировку верной системы уравнений.	∓	2
Задача не решена, содержательных продвижений нет.	–	0
Задача не решалась.	0	0

Задание 3 (12 баллов)

Решите уравнение $\frac{\cos^4\varphi}{\sin^2 x}+\frac{\sin^4\varphi}{\cos^2 x}=1$ при всех значениях параметра φ.

Решение.

ОДЗ уравнения определяется условием $\sin^2 x\cdot\cos^2 x\neq 0$, т.е. $x\neq\frac{\pi k}{2}, k\in Z$.

Введем $a=\cos^2\varphi$ и $t=\sin^2 x$. После подстановки получим:

$$\frac{\cos^4\varphi}{\sin^2 x}+\frac{\sin^4\varphi}{\cos^2 x}=\frac{a^2}{t}+\frac{(1-a)^2}{1-t}=\frac{a^2(1-t)+(1-a)^2t}{t(1-t)}=\frac{a^2-2at+t}{t-t^2}=\frac{(a-t)^2+t-t^2}{t-t^2}=1.$$

Следовательно, $a=t \;\Leftrightarrow\; \cos^2\varphi=\sin^2 x \;\Leftrightarrow\; x=\pm\varphi+\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z.$

При $\varphi\neq\frac{\pi k}{2}, k\in Z$ решение x принадлежит ОДЗ уравнения, а при $\varphi=\frac{\pi k}{2}, k\in Z$ решений нет.

Ответ: При $\varphi\neq\frac{\pi k}{2}, k\in Z$ решение $x=\pm\varphi+\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z$; при $\varphi=\frac{\pi k}{2}, k\in Z$ решений нет.

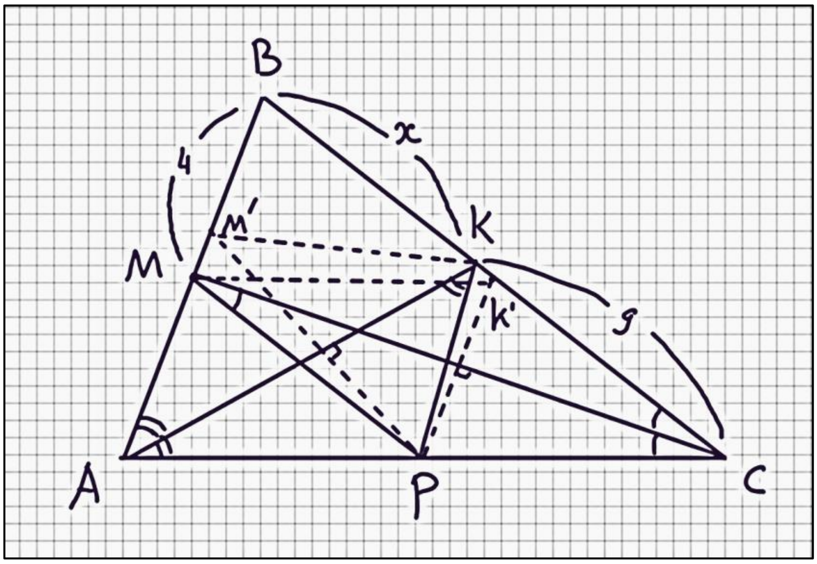
Содержание критерия	**Оценка**	**Баллы**
Задача решена полностью.	+	12
Ответ и решение верные, но форма ответа слишком громоздка	±	11
Решение содержит значительное продвижение в верном направлении. Найдены значения x, но не	+/2	10

выписано в явном виде условие $\varphi \neq \frac{\pi k}{2}, k \in Z$, хотя уравнение на ОДЗ имеется.		
При правильном решении и верном выражении для x ошибочно указано ОДЗ.	$\mp$	6
Получено уравнение $\cos^2 \varphi = \sin^2 x$, но не решено или решено неверно.	–	2-3
Задача не решена, содержательных продвижений нет. Задача не решалась.	0	0

Задание 4 (12 баллов)

Серединные перпендикуляры, проведенные к биссектрисам AK и CM треугольника ABC, пересекаются на стороне AC. Найдите AC, если $BM = 4$, а $KC = 9$.

Решение.



Пусть точка $P -$ общая точка серединных перпендикуляров, а точки K' и M' точки пересечения этих перпендикуляров со сторонами BC и AB соответственно. Нетрудно заметить, что четырехугольник $CPMK'$ является параллелограммом (диагонали пересекаясь делятся пополам). Отсюда получаем $MP||BC$ и $\angle CMP = \angle KCM = \angle MCP$, что в свою очередь доказывает равнобедренность треугольника CPM с равенством $CP = MP$.

Аналогично рассуждая с четырехугольником $APKM'$ приходим к $KP||AB$ и равнобедренности треугольника APK с равенством $AP = KP$.

Далее замечаем, что четырехугольник $MBKP$ также является параллелограммом (параллельность противолежащих сторон по доказанному выше), что позволяет записать равенства, введя $x = BK$: $CP = MP = BK = x$ и $AP = KP = BM = 4$.

В заключение замечаем, что треугольники ABC и AMP подобны (по трем углам, т.к. $MP||BC$), что дает равенство $\frac{AP}{AC} = \frac{MP}{BC}$ или после подстановки значений $\frac{4}{4+x} = \frac{x}{x+9}$, эквивалентное уравнению $x^2 = 36$, откуда $x = 6$ и искомая сторона $AC = 4 + 6 = 10$.

<u>Ответ</u>: $AC = 10$.

Содержание критерия	**Оценка**	**Баллы**
Задача решена полностью.	+	12
Задача решена полностью, однако ответ содержит арифметическую ошибку или описку.	±	8
Представлен верный ответ, но имеются неточности обоснования	+/2	6
Имеется значительное продвижение при решении задачи, однако ответ не получен.		
Имеется определенное продвижение в задаче, однако оно далеко от настоящего.	∓	2
Задача не решена, содержательных продвижений нет.	–	0
Задача не решалась.	0	0

Задание 5 (12 баллов)

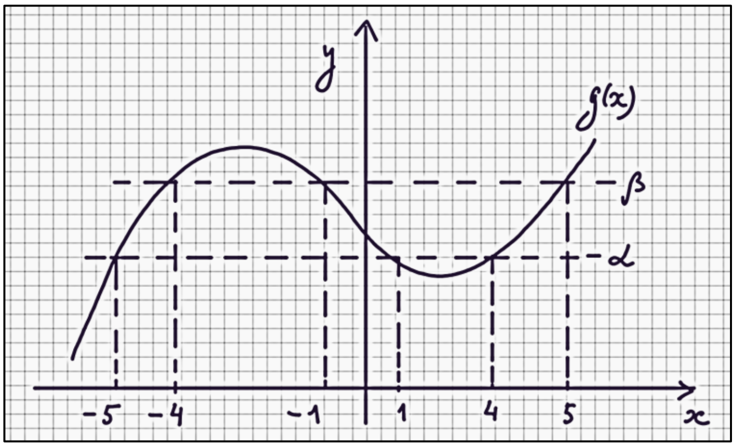
Приведите пример квадратного многочлена $f(x)$ и кубического многочлена $g(x)$ таких, что уравнению $f\big(g(x)\big) = 0$ удовлетворяют числа $\pm 1;\ \pm 4$ и ± 5.

<u>Решение.</u>

Будем искать такие $f(x)$ и $g(x)$ для которых выполняется

$$f\big(g(x)\big) = (g(x) - \alpha)(g(x) - \beta),$$

причем, $\alpha = g(-5) = g(1) = g(4)$, а $\beta = g(-4) = g(-1) = g(5)$ (см. рисунок),



где $g(x) = px^3 + qx^2 + rx + s$. Система уравнений

$$\begin{cases} g(-5) = g(1) = g(4) \\ g(-4) = g(-1) = g(5) \end{cases}$$

оказывается недоопределенной и эквивалентна $q = 0$ и $r = -21p$. Тогда для получения примера функции $g(x)$ достаточно положить $p = 1$ и $s = 0$. В итоге $g(x) = x^3 + 0x^2 - 21x + 0,\ \alpha = -20,\ \beta = 20,\ f(x) = (x + 20)(x - 20) = x^2 - 400.$

<u>Ответ</u>: $f(x) = x^2 - 400$, а $g(x) = x^3 - 21x$.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача решена полностью.	+	12
Решение задачи, содержит верную общую схему решения, в котором отсутствуют некоторые обоснования или допущена арифметическая ошибка	±	8
Решение содержит значительное продвижение в верном направлении. Верно сформулирована система уравнений, приводящая к ответу, но ответ не получен.	+/2	6
Решение незаконченное, но содержит определенное содержательное продвижение в верном направлении.	∓	2
Задача не решена, содержательных продвижений нет.	–	0
Задача не решалась.	0	0

Задание 6. (14 баллов)

Все рёбра правильной n-угольной усеченной пирамиды, описанной около сферы σ, касаются сферы ω с центром в центре нижнего основания этой пирамиды. Докажите, что $n = 3$ и найдите угол наклона бокового ребра пирамиды к плоскости основания.

Решение.

Пусть точки O и O_1 $-$ центры нижнего и верхнего оснований соответственно, AA_1B_1B $-$ одна из боковых граней ($A_1B_1||AB$), M и M_1 $-$ середины ребер AB и A_1B_1 этой пирамиды. Тогда $MM_1 = OM + O_1M_1$ (как отрезки двух касательных к сфере σ) и $AA_1 = AM + A_1M_1$ (как отрезки двух касательных к сфере ω).

При этом $\frac{OM}{AM} = \frac{O_1M_1}{A_1M_1} = \operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}$, откуда $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n} = \frac{MM_1}{AA_1} < 1$ ("< 1" поскольку апофема короче бокового ребра). Следовательно, $n < 4$, т.е. $n = 3$.

Искомый угол – это $\angle OAA_1$. Из равенства прямоугольных треугольников OAM и OAP (где $P \in AA_1$ и $OP \perp AA_1$) имеем: $\angle OAA_1 = \angle OAP = \angle OAM = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$.

Ответ: $\frac{\pi}{6}$.

Содержание критерия	**Оценка**	**Баллы**
Задача решена полностью.	+	14
Решение задачи содержит верные рассуждения, но ответ дан с арифметической ошибкой (опиской).	±	11
Доказано $n = 3$, но искомый угол не найден		
Решение содержит значительное продвижение в верном направлении. При этом решение не завершено.	+/2	4
Решение содержит верный ответ, но $n = 3$ не доказано.	∓	2
Задача не решена, содержательных продвижений нет.	–	0
Задача не решалась.	0	0

Задание 7 (14 баллов)

Найдите множество значений функции $y = \log_{3x+1}(x + 1)$.

Решение.

ОДЗ функции: $x > -\frac{1}{3}$, $x \neq 0$. Пропотенцируем уравнение $y = \log_{3x+1}(x+1)$ по основанию логарифма: $(3x+1)^y = x+1$ и, переобозначив $z = 3x+1$, получим эквивалентную связь

$$z^y = \frac{1}{3}(z+2) \text{ при } z > 0,\ \ z \neq 1.$$

Выясним при каких y данное уравнение имеет решение, удовлетворяющее

$z > 0,\ \ z \neq 1$.

Сразу исключим два очевидных случая $y \leq 0$ и $y \geq 1$ (см. рисунок 1.).

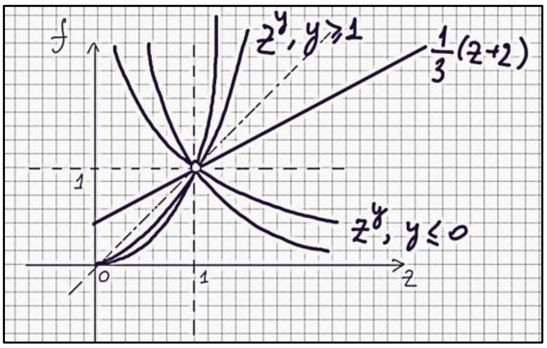


Рис.1

Остается рассмотреть вариант $0 < y < 1$.

Заметим, что левая часть уравнения z^y для указанных степеней является выпуклой вверх функцией, т.к. $(z^y)'' = y(y-1)z^{y-2} < 0$. Это значит, что её график лежит строго ниже любой касательной к нему (кроме точки касания) и для случая, когда правая часть уравнения $\frac{1}{3}(z+2)$ является касательной к графику при $y = \frac{1}{3}$, уравнение $z^y = \frac{1}{3}(z+2)$ корней среди $z > 0,\ \ z \neq 1$ не имеет.

Во всех оставшихся случаях z^y будет пересекаться с прямой $\frac{1}{3}(z+2)$ при $z > 0,\ \ z \neq 1$ (см. рисунки $2-3$).

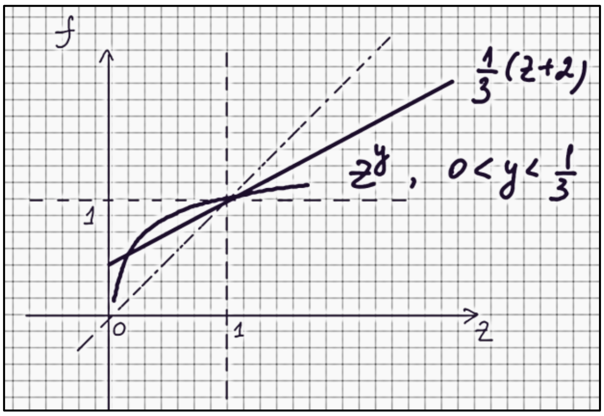


Рис.2

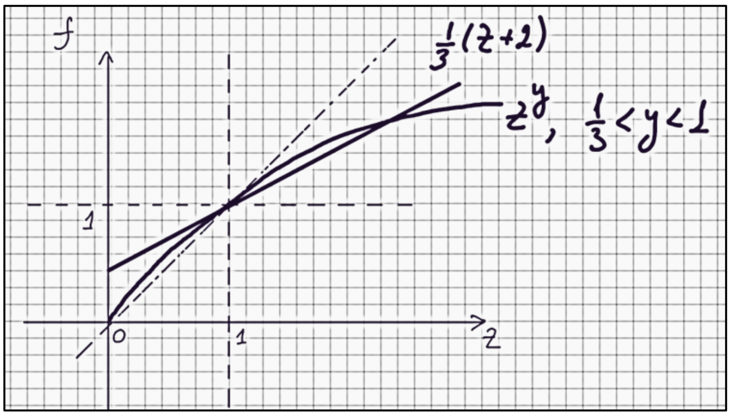


Рис.3

Действительно, в случае $0 < y < \frac{1}{3}$ (рис. 2) касательная, проведенная к z^y в точке $z = 1$, оказывается в некоторой левой окрестности точки касания выше прямой $\frac{1}{3}(z+2)$, а следовательно, и сам график z^y находится выше прямой $\frac{1}{3}(z+2)$ в некоторой (возможно меньшей) левой окрестности точки $z = 1$. Однако, в точке $z = 0$ функция z^y обнуляется и её график становится уже ниже прямой $\frac{1}{3}(z+2)$. В силу непрерывности обеих функций строго внутри интервала (0, 1) найдется точка пересечения их графиков.

В случае $\frac{1}{3} < y < 1$ (рис. 3) будет наблюдаться аналогичная ситуация: в некоторой правой окрестности точки касания $z = 1$ график z^y находится выше прямой $\frac{1}{3}(z+2)$. Однако, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{z^y}{\frac{1}{3}(z+2)} = \lim\limits_{x\to+\infty} 3z^{y-1} = 0$, следовательно, рано или поздно график функции z^y станет ниже прямой $\frac{1}{3}(z+2)$, и в силу непрерывности обеих функций на луче (1, +∞) найдется точка пересечения их графиков.

<u>*Ответ*</u>: $y \in \left(0, \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}, 1\right)$.

Содержание критерия	**Оценка**	**Баллы**
Задача решена полностью.	+	14
Решение задачи, содержит обоснованную схему, но найден интервал $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$	±	10
Решение задачи, содержит обоснованную схему, но найден интервал $\left(0, \frac{1}{3}\right)$	+/2	8
Решение в целом неверное или незаконченное, но содержит определенное содержательное продвижение в верном направлении. Ответ отсутствует или неверный.	∓	3
Ответ верный. Решение отсутствует или неверное.		
Задача не решена, содержательных продвижений нет.	–	0

Задача не решалась.	0	0

Задача 8 (16 баллов)

Телефонная компания планирует перейти с поминутной оплаты (по 1 рублю за каждую полную и неполную минуту разговора) на точную оплату (разговор стоит t рублей, где $t -$ время разговора в минутах). В связи с этим специалисты компании выбрали 100 звонков и подсчитали, что при точной оплате за эти звонки было бы получено на 30% денег меньше, чем при поминутной. Каким наименьшим (среди этих 100) могло быть количество звонков длительностью менее 3 минут каждый?

Решение.

За t минут разговора клиент платит (по-новому) меньше, чем $t+1$ руб. Поэтому, если состоялись разговоры длительностью $t_1, t_2, \dots, t_{100}$ минут соответственно, то за них получено меньше, чем $T+100$ руб., где $T = t_1, +t_2 + \cdots + t_{100}$. Из условия задачи имеем $T < 0{,}7 \cdot (T+100)$. Откуда, $T < \frac{700}{3}$.

Пусть ровно n из выбранных 100 звонков имели длительность менее 3 минут. Тогда на остальные $100-n$ звонков пришлось не меньше $3 \cdot (100-n)$ минут и должно выполняться неравенство $3 \cdot (100-n) < \frac{700}{3}$. Наименьшим таким целым является $n = 23$. Покажем, что $n = 23$ могло быть реализовано в выбранных 100 разговорах.

Пусть $t_1 = t_2 = \cdots = t_{23} = a < 1$ и $t_{24} = t_{25} = \cdots = t_{100} = 3 + a \geq 3$. Тогда

$$\underbrace{23 \cdot a + (100-23) \cdot (3+a)}_{\text{оплата по}-\text{новому}} = 0{,}7 \cdot (\underbrace{23 \cdot 1 + (100-23) \cdot 3 + (100-23)}_{\text{оплата по}-\text{старому}} \cdot 1)$$

Тогда, $a = \frac{23 \cdot 0{,}9 - 20}{100} = 0{,}007$. Действительно, найденное $a < 1$, что доказывает возможность найденного минимального набора таких звонков в количестве $n = 23$.

Ответ: $n = 23$.

Содержание критерия	**Оценка**	**Баллы**
Задача решена полностью.	+	16
Доказана нижняя оценка $n \geq 23$, но пример не приведен	+ .	13
Есть пример на $n = 23$, но минимальность такого набора не доказана	±	5
Доказана только верхняя оценка на сумму чеков $T < \frac{700}{3}$	+/2	3

Задача не решена, содержательных продвижений нет.	–	0
Задача не решалась.	0	0