ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМА.
ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ – ФИНАНСИСТ!»
ПО ПРЕДМЕТУ **МАТЕМАТИКА** 2020-2021 уч. года

ОЧНЫЙ ЭТАП

11 класс

Вариант 1

Задание 1 (10 баллов)

При оптимизации штатного расписания в учреждении было сокращено 13 вакансий, в результате чего их доля в расписании снизилась на 13 процентных пунктов. Зная, что вакансии в этом учреждении еще остались, определите их количество.

Решение.

Пусть в учреждении было $m+13$, а осталось $m>0$ вакансий. Тогда, если $n-$ число работающих, то имеем уравнение $\frac{m+13}{m+n+13}-\frac{m}{m+n}=\frac{13}{100}$, преобразующееся к виду:

$$(m+n)(m+n+13)=100\cdot n.$$

Отсюда ясно, что $(m+n)$ и $(m+n+13)-$ натуральные числа, меньшие 100. Причем, одно из них кратно 25, а другое 4. Перебором устанавливаем, что $m+n=12$ либо $m+n=75$. В первом случае $n=\frac{12\cdot(12+13)}{100}=3$, а во втором: $n=\frac{75\cdot(75+13)}{100}=66$.
Число оставшихся вакансий m в обоих случаях равно 9.

Ответ: $9-$ число оставшихся вакансий.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача решена полностью.	+	10
Решение задачи, содержит верную общую схему решения, но перебор проведен не до конца: не доказано, что других решений нет.	±	7
Решение содержит значительное продвижение в верном направлении. Составлены верные соотношения, связывающие m и n, но дальше продвижений нет.	+/2	3

Решение в целом неверное или незаконченное, но содержит угаданную пару m и n	$\mp$	1 балл за каждую пару
Задача не решена, содержательных продвижений нет.	–	0
Задача не решалась.	0	0

Задание 2 (10 баллов)

Какие линейные размеры может иметь прямоугольный параллелепипед, если его объем равен 200 см^3, площадь полной поверхности равна 300 см^2, а периметр основания равен 50 см?

Решение.

Пусть x_1, x_2 и x_3 – линейные размеры параллелепипеда (в сантиметрах). Тогда система уравнений $x_1x_2x_3 = 200$, $2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = 300$ и $2(x_1 + x_2) = 50$ может быть решена, например, через разложение для кубического многочлена $x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x - x_1x_2x_3 = 0$, как уравнение

$$x^3 - (25 + x_3)x^2 + 150x - 200 = 0,$$

которому удовлетворяют все ребра параллелипипеда x_1, x_2 и x_3.
Подстановка $x = x_3$ приводит к квадратному уравнению $-25x_3^2 + 150x_3 - 200 = 0$ с корнями $x_3 = 2$ и $x_3 = 4$. Тогда для каждого из найденных x_3 получаем:
При $x_3 = 2$: $x^3 - 27x^2 + 150x - 200 = (x - 2)(x^2 - 25x + 100) = 0$ с корнями $x_1 = 5$ и $x_2 = 20$.
При $x_3 = 4$: $x^3 - 29x^2 + 150x - 200 = (x - 4)(x^2 - 25x + 50) = 0$ с корнями $x_1 = \frac{25+5\sqrt{17}}{2}$ и $x_2 = \frac{25-5\sqrt{17}}{2}$.

Ответ: $2\text{см} \times 5\text{см} \times 20\text{см}$ и $4\text{см} \times \frac{25-5\sqrt{17}}{2}\text{см} \times \frac{25+5\sqrt{17}}{2}\text{см}$
(с точностью до порядка следования)

Содержание критерия	**Оценка**	**Баллы**
Задача решена полностью.	+	10

Решение задачи, содержит верную общую схему решения, но в результате описки/арифметической ошибки получен неверный ответ	±	7
Решение задачи, содержит верную общую схему решения, но найден только один вариант линейных размеров.	+/2	4
Решение в целом неверное или незаконченное, но содержит формулировку верной системы уравнений.	∓	2
Задача не решена, содержательных продвижений нет.	–	0
Задача не решалась.	0	0

Задание 3 (12 баллов)

Решите уравнение $\frac{\sin^4\varphi}{\sin^2 x}+\frac{\cos^4\varphi}{\cos^2 x}=1$ при всех значениях параметра φ.

Решение.

ОДЗ уравнения определяется условием $\sin^2 x\cdot\cos^2 x\neq 0$, т.е. $x\neq\frac{\pi k}{2}, k\in Z$.

Введем $a=\sin^2\varphi$ и $t=\sin^2 x$. После подстановки получим:

$$\frac{\sin^4\varphi}{\sin^2 x}+\frac{\cos^4\varphi}{\cos^2 x}=\frac{a^2}{t}+\frac{(1-a)^2}{1-t}=\frac{a^2(1-t)+(1-a)^2t}{t(1-t)}=\frac{a^2-2at+t}{t-t^2}=\frac{(a-t)^2+t-t^2}{t-t^2}=1.$$

Следовательно, $a=t \iff \sin^2\varphi=\sin^2 x \iff x=\pm\varphi+\pi n, n\in Z.$

При $\varphi\neq\frac{\pi k}{2}, k\in Z$ решение x принадлежит ОДЗ уравнения, а при $\varphi=\frac{\pi k}{2}, k\in Z$ решений нет.

Ответ: При $\varphi\neq\frac{\pi k}{2}, k\in Z$ решение $x=\pm\varphi+\pi n, n\in Z$; при $\varphi=\frac{\pi k}{2}, k\in Z$ решений нет.

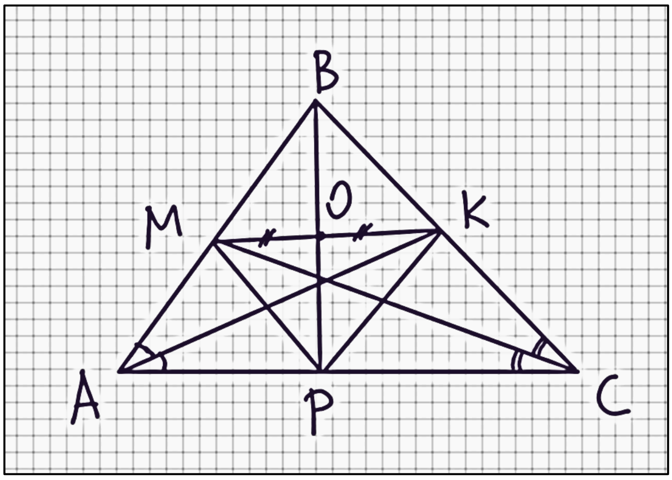
Содержание критерия	**Оценка**	**Баллы**
Задача решена полностью.	+	12

Ответ и решение верные, но форма ответа слишком громоздка	±	11
Решение содержит значительное продвижение в верном направлении. Найдены значения x, но не выписано в явном виде условие $\varphi \neq \frac{\pi k}{2}, k \in Z$, хотя уравнение на ОДЗ имеется.	+/2	10
При правильном решении и верном выражении для x ошибочно указано ОДЗ.	∓	6
Получено уравнение $\sin^2 \varphi = \sin^2 x$, но не решено или решено неверно.	−	2-3
Задача не решена, содержательных продвижений нет. Задача не решалась.	0	0

Задание 4 (12 баллов)

В треугольнике ABC проведены биссектрисы AK и CM. Известно, что середины отрезков AB, BC и MK лежат на одной прямой. Найдите AB, если $BK = 4$, а $KC = 5$.

<u>*Решение.*</u>



По свойству биссектрисы AK: $\frac{AB}{AC} = \frac{BK}{KC} = \frac{4}{5}$ и биссектрисы CM: $\frac{BC}{AC} = \frac{MB}{AM}$.

Пусть т. $O-$ середина отрезка MK, а т. $P-$ точка пересечения прямых BO и AC. Заметим, что из условия следует, что т. O лежит на средней линии ΔABC параллельной AC. Следовательно, по теореме Фалеса $BO = OP$ и четырехугольник $MBKP-$ параллелограмм (диагонали пересекаются и делятся точкой пересечения пополам). Ещё дважды применяя теорему Фалеса, получим $\frac{AM}{MB} = \frac{AP}{PC} = \frac{BK}{KC} = \frac{4}{5}$, откуда

$$AB = \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot (4+5) = \frac{144}{25} = 5{,}76$$

Ответ: $\frac{144}{25} = 5{,}76$.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача решена полностью.	+	12
Задача решена полностью, однако ответ содержит арифметическую ошибку или описку.	±	8
Представлен верный ответ, но имеются неточности обоснования Имеется значительное продвижение при решении задачи, однако ответ не получен.	+/2	6
Имеется определенное продвижение в задаче, однако оно далеко от настоящего.	∓	2
Задача не решена, содержательных продвижений нет.	–	0
Задача не решалась.	0	0

Задание 5 (12 баллов)

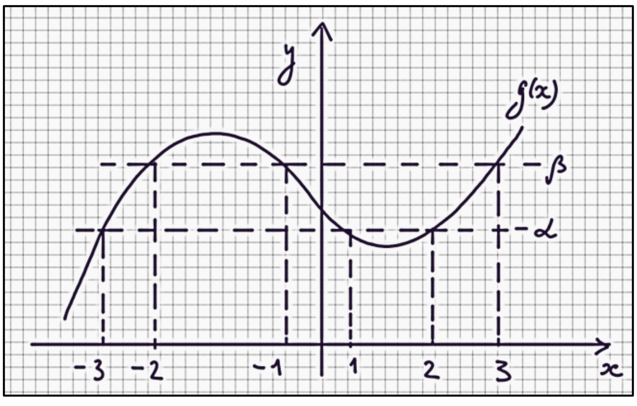
Приведите пример квадратного многочлена $f(x)$ и кубического многочлена $g(x)$ таких, что уравнению $f\big(g(x)\big) = 0$ удовлетворяют числа $\pm 1;\ \pm 2$ и ± 3.

Решение.

Будем искать такие $f(x)$ и $g(x)$ для которых выполняется

$$f\big(g(x)\big) = (g(x) - \alpha)(g(x) - \beta),$$

причем, $\alpha = g(-3) = g(1) = g(2)$, а $\beta = g(-2) = g(-1) = g(3)$ (см. рисунок),



где $g(x) = px^3 + qx^2 + rx + s$. Система уравнений

$$\begin{cases} g(-3) = g(1) = g(2) \\ g(-2) = g(-1) = g(3) \end{cases}$$

оказывается недоопределенной и эквивалентна $q = 0$ и $r = -7p$. Тогда для получения примера функции $g(x)$ достаточно положить $p = 1$ и $s = 0$. В итоге $g(x) = x^3 + 0x^2 - 7x + 0,\ \alpha = -6,\ \beta = 6,\ f(x) = (x+6)(x-6) = x^2 - 36.$

<u>Ответ</u>: $f(x) = x^2 - 36$, а $g(x) = x^3 - 7x$.

Содержание критерия	**Оценка**	**Баллы**
Задача решена полностью.	+	12
Решение задачи, содержит верную общую схему решения, в котором отсутствуют некоторые обоснования или допущена арифметическая ошибка	±	8
Решение содержит значительное продвижение в верном направлении. Верно сформулирована система уравнений, приводящая к ответу, но ответ не получен.	+/2	6
Решение незаконченное, но содержит определенное содержательное продвижение в верном направлении.	∓	2
Задача не решена, содержательных продвижений нет.	–	0
Задача не решалась.	0	0

Задание 6. (14 баллов)

Около шара радиуса 1 описана правильная n-угольная призма, все ребра которой касаются некоторого другого шара. Докажите, что $n = 4$ и найдите объем этой призмы.

<u>Решение.</u>

Высота призмы и боковое ребро равны 2 (диаметру вписанного шара). Основания призмы являются правильными n-угольниками, описанными около окружностей радиуса 1. Согласно известной формуле, сторона основания в этом случае равна $2\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}$. Поверхность шара, касающегося рёбер призмы, пересекает каждую из граней по окружности. Это значит, что прямоугольники, служащие боковыми гранями, – описанные, а потому являются квадратами. Отсюда $2\operatorname{tg}\frac{\pi}{n} = 2$ и $n = 4$.

Таким образом, призма представляет собой куб $2 \times 2 \times 2$.

<u>*Ответ:*</u> $V = 8$.

Содержание критерия	**Оценка**	**Баллы**
Задача решена полностью.	+	14
Решение задачи содержит верные рассуждения, но ответ дан с арифметической ошибкой (опиской).	±	11
Доказано $n = 4$, но искомый объем не найден		
Решение содержит значительное продвижение в верном направлении. При этом решение не завершено.	+/2	4
Решение содержит верный ответ, но $n = 4$ не доказано.	∓	2
Задача не решена, содержательных продвижений нет.	–	0
Задача не решалась.	0	0

Задание 7 (14 баллов)

Найдите множество значений функции $y = \log_{2x-1} x$.

<u>*Решение.*</u>

ОДЗ функции: $x > \frac{1}{2},\ \ x \neq 1$. Пропотенцируем уравнение $y = \log_{2x-1} x$ по основанию логарифма: $(2x-1)^y = x$ и, переобозначив $z = 2x - 1$, получим

$$z^y = \frac{1}{2}(z+1) \text{ при } z > 0,\ \ z \neq 1.$$

Выясним при каких y данное уравнение имеет решение, удовлетворяющее

$z > 0,\ \ z \neq 1$.

Сразу исключим два очевидных случая $y \leq 0$ и $y \geq 1$ (см. рисунок 1.).

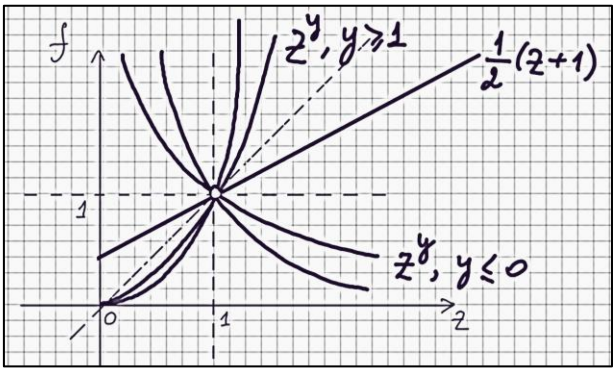


Рис.1

Остается рассмотреть вариант $0 < y < 1$.

Заметим, что левая часть уравнения z^y для указанных степеней y является выпуклой вверх функцией, т.к. $(z^y)'' = y(y-1)z^{y-2} < 0$. Это значит, что её график лежит строго ниже любой касательной к нему (кроме точки касания) и для случая, когда правая часть уравнения $\frac{1}{2}(z+1)$ является касательной к графику при $y = \frac{1}{2}$, уравнение $z^y = \frac{1}{2}(z+1)$ корней среди $z > 0,\ \ z \neq 1$ не имеет.

Во всех оставшихся случаях z^y будет пересекаться с прямой $\frac{1}{2}(z+1)$ при $z > 0,\ \ z \neq 1$ (см. рисунки $2-3$).

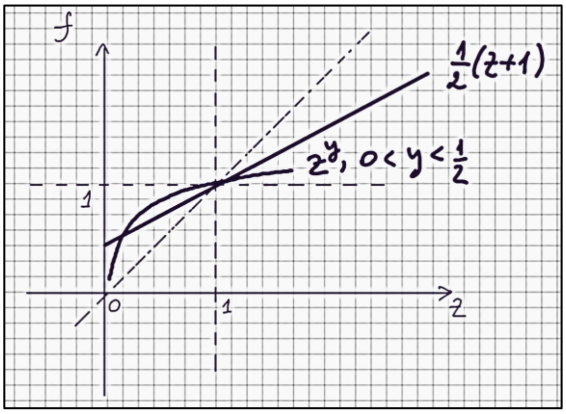


Рис.2

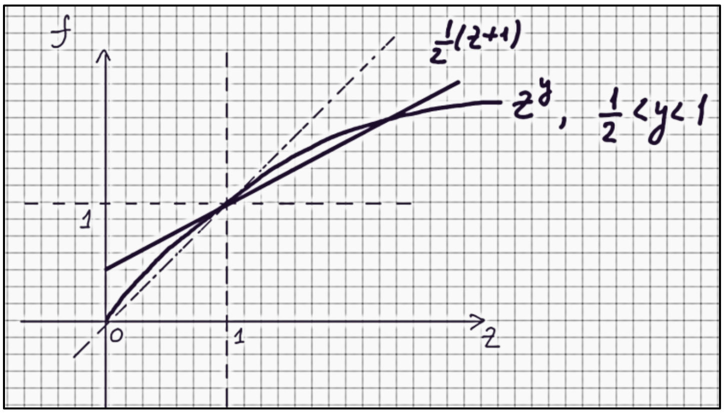


Рис.3

Действительно, в случае $0 < y < \frac{1}{2}$ (рис. 2) касательная, проведенная к z^y в точке $z = 1$, оказывается в некоторой левой окрестности точки касания выше прямой $\frac{1}{2}(z+1)$, а следовательно, и сам график z^y находится выше прямой $\frac{1}{2}(z+1)$ в некоторой (возможно меньшей) левой окрестности точки $z = 1$. Однако, в точке $z = 0$ функция z^y обнуляется и её график становится уже ниже прямой $\frac{1}{2}(z+1)$. В силу непрерывности обеих функций строго внутри интервала (0, 1) найдется точка пересечения их графиков.

В случае $\frac{1}{2} < y < 1$ (рис. 3) будет наблюдаться аналогичная ситуация: в некоторой правой окрестности точки касания $z = 1$ график z^y находится выше прямой $\frac{1}{2}(z+1)$. Однако, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{z^y}{\frac{1}{2}(z+1)} = \lim\limits_{x\to+\infty} 2z^{y-1} = 0$, следовательно, рано или поздно график функции z^y станет ниже прямой $\frac{1}{2}(z+1)$, и в силу непрерывности обеих функций на луче $(1, +\infty)$ найдется точка пересечения их графиков.

<u>Ответ</u>: $y \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

<table>
<tr><th>Содержание критерия</th><th>Оценка</th><th>Баллы</th></tr>
<tr><td>Задача решена полностью.</td><td>+</td><td>14</td></tr>
<tr><td>Решение задачи, содержит обоснованную схему, но найден интервал $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$</td><td>±</td><td>10</td></tr>
<tr><td>Решение задачи, содержит обоснованную схему, но найден интервал $\left(0, \frac{1}{2}\right)$</td><td>+/2</td><td>7</td></tr>
<tr><td>Решение в целом неверное или незаконченное, но содержит определенное содержательное продвижение в верном направлении. Ответ отсутствует или неверный.</td><td rowspan="2">∓</td><td rowspan="2">3</td></tr>
<tr><td>Ответ верный.
Решение отсутствует или неверное.</td></tr>
<tr><td>Задача не решена, содержательных продвижений нет.</td><td>–</td><td>0</td></tr>
<tr><td>Задача не решалась.</td><td>0</td><td>0</td></tr>
</table>

Задача 8 (16 баллов)

Пекарня планирует перейти на округление чеков в меньшую сторону (покупатель будет платить p рублей за товар ценой в p рублей с копейками). В связи с этим коммерческий директор выбрал 100 чеков и подсчитал, что выручка при таком округлении снизилась бы на 1%. Известно, что чеков на сумму менее 10 рублей не было, и что все цены в пекарне кратны 10 копейкам. Каким наибольшим (среди этих чеков) могло быть количество чеков на сумму более 100 рублей каждый?

Решение.

Чек на сумму более 100 рублей будем называть *большим*. Заметим, что при округлении одного чека пекарня теряет не более 90 коп., а при округлении 100 чеков – не более 90 руб. Поэтому чеки были выбраны на общую сумму, не превышавшую 9000 руб.

Пусть ровно n чеков из выбранных были *большими*. Тогда при округлении всех 100 чеков пекарня получила бы не меньше, чем $100 \cdot n + 10 \cdot (100 - n) = 90 \cdot n + 1000$ рублей. Следовательно, без округления получено не меньше, чем

$\frac{90 \cdot n + 1000}{0{,}99} = \frac{100 \cdot (90 \cdot n + 1000)}{99}$ руб. Наибольшее целое, удовлетворяющее неравенству

$\frac{100 \cdot (90 \cdot n + 1000)}{99} < 9000$, равно 87. И оно, действительно, могло быть реализовано на чеках. Например, при 87 чеках на сумму 100,9 руб. каждый, 12 чеках на сумму 16,9 руб. каждый и одном чеке на сумму 18,9 руб.

Ответ: $n = 87$.

Содержание критерия	**Оценка**	**Баллы**
Задача решена полностью.	+	16
Доказана верхняя оценка $n \leq 87$, но пример не приведен	+	13
Есть пример на $n = 87$, но максимальность такого набора не доказана	±	5
Доказана только верхняя оценка на сумму чеков, не превышающая 9000	+/2	3
Задача не решена, содержательных продвижений нет.	–	0
Задача не решалась.	0	0