ФГОБУ ВО «Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации»
ФГАОУ ВО «Северо-Восточный федеральный университет им. М.К. Аммосова»

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМА.
ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ – ФИНАНСИСТ!»
ПО ПРЕДМЕТУ **МАТЕМАТИКА** 2019-2020 уч. года

ОЧНЫЙ ЭТАП

8-9 классы

Задание 1 (10 баллов)

Когда часы показывали 18-00 на фитнес-браслете Вани количество шагов, пройденных с утра, оказалось равным числу 19791, которое является палиндромом (читается одинаково как слева направо, так и справа налево). Еще через полчаса количество шагов, пройденных Иваном с утра, вновь оказалось палиндромом. Какое наибольшее число шагов на фитнес-браслете мог увидеть Ваня в 18-30, если его средняя скорость за последние полчаса была не более 1 м/с, а его шаг не менее 75 см?

Решение.

Так как средняя скорость Ивана за последние полчаса была не более 1 м/с, то за это время он прошел не более $60 \cdot 30 = 1800$ метров.
При этом его шаг был не менее 75 см, следовательно, он мог пройти не более

$$\frac{1800}{0,75} = 2400 \text{ шагов.}$$

Итак, в 18-30 фитнес-браслет Ивана должен показывать не более чем

$$19791 + 2400 = 22191 \text{ шагов.}$$

Ближайшее к 22191 число-палиндром, которое не превышает его – это число 22122.

Ответ: 22122.

Содержание критерия	**Оценка**	**Баллы**
Задача решена полностью.	+	10
Решение задачи, содержит верную общую схему решения, но в результате описки или арифметической ошибки получен неверный ответ.	±	7

Решение содержит значительное продвижение в верном направлении. Приведена верная оценка сверху для количества шагов. В ответе неверно приведено число-палиндром.	+/2	5
Решение в целом неверное или незаконченное, но содержит определенное содержательное продвижение в верном направлении. Представлен верный подход к оценке сверху для числа шагов.	∓	2
Задача не решена, содержательных продвижений нет.	–	0
Задача не решалась.	0	0

Задание 2 (10 баллов)

На электронных часах Вася увидел время: $\overline{ab}$:$\overline{cd}$ (если часов меньше 10, то $a = 0$). Оказалось, что $a + bd + c = (a + d)(b + c)$. Верно ли, что Вася точно увидел на часах цифру ноль, если время на часах показывается в 24-часовом формате?

<u>Решение.</u>

Преобразуем данное в условии равенство:

$$a = ab + ac + dc - c.$$

Пусть на часах цифры ноль нет.

Заметим, что $a \leq 2$, тогда

$$a = ab + ac + (d - 1)c \geq 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 = 2.$$

Причем равенство достигается только при $a = b = c = d = 1$.

Тогда $1 = a = ab + ac + dc - c = 2$.

Получили противоречие. Следовательно, Вася точно увидел на часах цифру ноль.

<u>Ответ</u>: верно.

Содержание критерия	**Оценка**	**Баллы**
Задача решена полностью.	+	10
Решение задачи, содержит верную общую схему решения, в котором отсутствуют некоторые обоснования. Ответ верный.	±	7
Решение содержит значительное продвижение в верном направлении. При этом решение не завершено или при правильном ответе в нем отсутствуют важные обоснования.	+/2	5

Решение в целом неверное или незаконченное, но содержит определенное содержательное продвижение в верном направлении.	$\mp$	2
Задача не решена, содержательных продвижений нет.	–	0
Задача не решалась.	0	0

Задание 3 (12 баллов)

Прямоугольник разделили на непересекающиеся квадраты со стороной 1 см. Будем говорить, что квадрат расположен вдоль стороны прямоугольника, если хотя бы одна из сторон квадрата лежит на стороне прямоугольника. Половину квадратов, расположенных вдоль сторон прямоугольника, покрасили в зеленый цвет, а все остальные квадраты оставили незакрашенными. В итоге незакрашенных квадратов оказалось в 4 раза больше, чем зеленых. Найдите все возможные прямоугольники, указав длины их сторон.

Решение.

Пусть искомый прямоугольник имеет стороны равные n см и m см. Тогда вдоль сторон прямоугольника располагаются $2m+2n-4$ квадрата. Таким образом, в зеленый цвет покрасили $m+n-2$ квадрата, а незакрашенными остались $mn-m-n+2$ квадрата. По условию задачи получаем

$$mn-m-n+2=4(m+n-2) \quad\Rightarrow\quad mn=5m+5n-10 \quad\Rightarrow\quad m(n-5)=5n-10 \quad\Rightarrow$$

$$m=\frac{5n-10}{n-5}=\frac{5(n-5)+15}{n-5}=5+\frac{15}{n-5}.$$

Поскольку стороны прямоугольника являются натуральными числами, то 15 должно делиться на $n-5$.

1. $n-5=1 \Rightarrow n=6,\ m=20$.
2. $n-5=3 \Rightarrow n=8,\ m=10$.
3. $n-5=5 \Rightarrow n=10,\ m=8$.
4. $n-5=15 \Rightarrow n=20,\ m=6$.

Ответ: стороны прямоугольника равны 6 см и 20 см или 8 см и 10 см.

Содержание критерия	**Оценка**	**Баллы**
Задача решена полностью.	+	12
Решение задачи, содержит верную общую схему решения, в котором отсутствуют некоторые обоснования или в результате	±	8

описки/арифметической ошибки получен неверный ответ.		
Решение содержит значительное продвижение в верном направлении. Верно составлено уравнение, связывающие длины сторон прямоугольника. Верно найдена одна пара сторон прямоугольника.	+/2	6
Решение в целом неверное или незаконченное, но содержит определенное содержательное продвижение в верном направлении. Верно определена связь между сторонами прямоугольника.	∓	2
Задача не решена, содержательных продвижений нет.	–	0
Задача не решалась.	0	0

Задание 4 (12 баллов)

Пусть для чисел x и y запись $x * y$ обозначает число $xy + 5x - 3y - 12$.

Найдите значение выражения $0 * \left(1 * \left(2 * \left(3 * \left(4 * \left(\dots * (2019 * 2020)\right)\right)\right)\right)\right)$.

Решение.

Заметим, что $3 * y = 3y + 15 - 3y - 12 = 3$.

Следовательно, $3 * \left(4 * \left(\dots * (2019 * 2020)\right)\right) = 3$.

Далее получаем:

$$0 * \left(1 * (2 * 3)\right) = 0 * \left(1 * (2 \cdot 3 + 5 \cdot 2 - 3 \cdot 3 - 12)\right) =$$
$$= 0 * \left(1 * (-5)\right) = 0 * 3 = -21$$

Ответ: -21.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача решена полностью.	+	12
Решение задачи, содержит верную общую схему решения, в котором отсутствуют некоторые обоснования или в результате описки/арифметической ошибки получен неверный ответ.	±	8

Решение содержит значительное продвижение в верном направлении. При этом решение не завершено. Отмечено, что $3 * y = 3$.	+/2	6
Решение в целом неверное или незаконченное, но содержит определенное содержательное продвижение в верном направлении.	∓	2
Задача не решена, содержательных продвижений нет.	–	0
Задача не решалась.	0	0

Задание 5. (12 баллов)

Даны два положительных целых числа a и b. Могут ли числа $a^2 + 2b$ и $b^2 + 2a$ одновременно быть квадратами целых чисел?

Решение.

Пусть $a \geq b$. Тогда

$$a^2 < a^2 + 2b < a^2 + 2a + 1 \Rightarrow$$
$$a^2 < a^2 + 2b < (a+1)^2.$$

Таким образом, число $a^2 + 2b$ находится между двумя квадратами последовательных чисел и, следовательно, оно не может быть квадратом целого числа.

Ответ: нет, не могут.

Содержание критерия	**Оценка**	**Баллы**
Задача решена полностью.	+	12
Решение задачи, содержит верную общую схему решения, в котором отсутствуют некоторые обоснования.	±	8
Решение содержит значительное продвижение в верном направлении. При этом решение не завершено или при правильном ответе в нем отсутствуют важные обоснования.	+/2	6
Решение в целом неверное или незаконченное, но содержит определенное содержательное продвижение в верном направлении.	∓	2
Задача не решена, содержательных продвижений нет.	–	0
Задача не решалась.	0	0

Задание 6 (14 баллов)

За круглым столом разместились 18 человек. Сколькими способами можно выбрать из этих людей троих, чтобы между любыми двумя из выбранных людей находилось бы еще по меньшей мере два человека?

Решение.

Пронумеруем места за столом по часовой стрелке от 1 до 18.
Посчитаем, сколько троек мы можем создать, если один из людей сидит на первом месте. В этом случае мы не сможем взять людей, сидящих на 2, 3, 17 и 18 местах. То есть следующего мы сможем выбрать только 13 способами. Если следующим мы выбираем человека, сидящего на 4 месте, то следующего можно выбрать с 7 по 16 место, то есть 10 способами; если вторым выбираем человека на 5 месте, то третьего можно выбрать 9 способами и т.д.
В итоге, если один из выбранных людей сидит на первом месте, то существует $10 + 9 + 8 + \ldots + 2 + 1 = 55$ способов подобного выбора.
Общее количество выбора троих людей указанным в условии способом равно:

$$\frac{55 \cdot 18}{3} = 330.$$

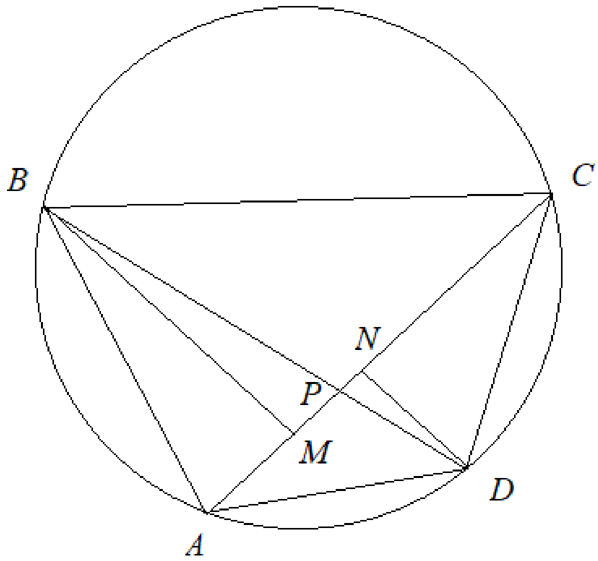
Отметим, что после умножения 55 на общее число людей, необходимо разделить на 3, так как в каждой тройке можно начинать выбор с любого из трех людей.

Ответ: 3.

<table>
<tr><th>Содержание критерия</th><th>Оценка</th><th>Баллы</th></tr>
<tr><td>Задача решена полностью.</td><td>+</td><td>14</td></tr>
<tr><td>Решение задачи, содержит верную общую схему решения, в котором отсутствуют некоторые обоснования, в частности, может быть не пояснено деление произведения 55 и 18 на 3. Ответ верный.</td><td rowspan="2">±</td><td rowspan="2">10</td></tr>
<tr><td>Решение задачи, содержит верную общую схему решения, но в результате описки/арифметической ошибки получен неверный ответ.</td></tr>
<tr><td>Решение содержит значительное продвижение в верном направлении. Верно найдено количество способов выбора людей при фиксированном выборе первого человека в тройке. При этом решение не завершено. Ответ отсутствует или неверный.</td><td>+/2</td><td>7</td></tr>
</table>

Решение в целом неверное или незаконченное, но содержит определенное содержательное продвижение в верном направлении.	∓	3
Задача не решена, содержательных продвижений нет.	–	0
Задача не решалась.	0	0

Задание 7 (14 баллов)



Пусть $ABCD$ – вписанный четырехугольник, в котором стороны *AB, BC, CD и AD* таковы, что $AB\cdot BC = 2AD\cdot DC$. Докажите, что $8BD^2 \le 9AC^2$.

Доказательство.

Пусть P – точка пересечения диагоналей четырехугольника *ABCD*.
Опустим в треугольниках ABC и ADC на сторону AC высоты BM и DN соответственно. Тогда

$$BM\cdot AC = 2S_{ABC} = AB\cdot BC\sin\angle ABC = 2AD\cdot DC\sin\angle(180^\circ - \angle ABC) =$$
$$= 2AD\cdot DC\angle ADC = 4S_{ADC} = 2DN\cdot AC \quad \Rightarrow \quad BM = 2DN.$$

Из подобия треугольников BMP и DNP следует, что

$$\frac{BP}{DP} = \frac{BM}{DN} = \frac{2}{1} \quad \Rightarrow \quad BP = 2DP, \quad BD = 3DP.$$

По теореме о пересекающихся хордах получаем

$$\frac{2}{9}BD^2 = \frac{2}{3}BD\cdot\frac{1}{3}BD = BP\cdot DP = AP\cdot PC \le \frac{1}{4}\left(AP + PC\right)^2 = \frac{1}{4}AC^2,$$

откуда вытекает неравенство $8BD^2 \le 9AC^2$.
Заметим, что равенство достигается, если $AP = PC$.

Содержание критерия	**Оценка**	**Баллы**
Задача решена полностью.	+	14
Решение задачи, содержит верную общую схему решения, в котором отсутствуют некоторые обоснования при доказательстве данного неравенства.	±	10

Решение не завершено, но содержит значительное продвижение в верном направлении.	+/2	7
Решение в целом неверное или незаконченное, но содержит определенное содержательное продвижение в верном направлении.	∓	3
Задача не решена, содержательных продвижений нет.	–	0
Задача не решалась.	0	0

Задача 8 (16 баллов)

По кругу сидят 10 или 11 человек так, что расстояния между любыми двумя соседями одинаковое. Затем эти люди пересели так, что расстояние по часовой стрелке между любыми двумя людьми изменилось, а расстояние между соседями по-прежнему оказалось одинаковым. Сколько человек сидело по кругу?

Решение.

Будем рассматривать расстояния s_i между старым и новым положением человека.
Все s_i должны быть разными, так как в противном случае получим, что расстояние между двумя какими-то людьми в результате пересадки не изменилось.
Пусть по кругу сидят n человек. Расстояния s_i могут принимать значения от 0 до n - 1.
Рассмотрим человека, у которого расстояние равно s_1, посмотрим куда пересел тот человек, на чье место пересел он, пусть у него расстояние равно s_2 и так далее.
Тогда последовательность этих расстояний образует цикл. Сумма длин всех таких циклов делится на n.
Поскольку все расстояния разные, то сумма длин равна или 45 (если n = 10) (не делится на 10), или 55 (если n = 11) (делится на 11).
Поскольку 45 не делится на 10, а 55 делится на 11, то получаем, что n = 11.

Ответ: 11.

Содержание критерия	**Оценка**	**Баллы**
Задача решена полностью.	+	16
Решение задачи, содержит верную общую схему решения, в котором отсутствуют некоторые обоснования при верном ответе.	±	12
Решение содержит значительное продвижение в верном направлении, но отсутствуют важные обоснования при верном ответе.	+/2	8

Ответ верный. Решение незаконченное, но содержит определенное содержательное продвижение в верном направлении.	∓	4
Задача не решена, содержательных продвижений нет.	–	0
Задача не решалась.	0	0