ФГОБУ ВО «Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации»
ФГАОУ ВО «Северо-Восточный федеральный университет им. М.К. Аммосова»

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМА.
ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ – ФИНАНСИСТ!»
ПО ПРЕДМЕТУ **МАТЕМАТИКА** 2019-2020 уч. года

ОЧНЫЙ ЭТАП

11 класс

Задание 1 (10 баллов)

В некотором регионе 60% работающих – бюджетники, и их зарплата в среднем на 20% ниже средней зарплаты по этому региону. На сколько процентов должна повыситься зарплата бюджетников, чтобы сравняться со средней зарплатой всех работающих?

Решение.

Пусть n – число всех работающих, s – их средняя зарплата.
Тогда число бюджетников равно $0{,}6n$, а их средняя зарплата равна $0{,}8s$.
Зарплата всех бюджетников равна $0{,}6n \cdot 0{,}8s = 0{,}48ns$.
Средняя зарплата остальных $0{,}4n$ работающих равна

$$\frac{ns - 0{,}48ns}{0{,}4n} = 1{,}3s.$$

Чтобы зарплата бюджетников стала равной зарплате всех работающих в данном регионе, необходимо чтобы она выросла с $0{,}8s$ до $1{,}3s$, то есть на

$$\frac{1{,}3s - 0{,}8s}{0{,}8s} \cdot 100\% = 62{,}5\%.$$

Ответ: на 62,5%.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача решена полностью.	+	10
Решение задачи, содержит верную общую схему решения, но в результате описки или арифметической ошибки получен неверный ответ.	±	7
Решение содержит значительное продвижение в верном направлении. Составлены верные	+/2	5

соотношения, связывающие среднюю заработную плату и число всех работающих. При этом решение не завершено.		
Решение в целом неверное или незаконченное, но содержит определенное содержательное продвижение в верном направлении.	∓	2
Ответ верный. Решение отсутствует или неверное.		
Задача не решена, содержательных продвижений нет.	–	0
Задача не решалась.	0	0

Задание 2 (10 баллов)

Длины диагоналей граней $ABCD$, ABB_1A_1 и ADD_1A_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ выражаются различными целыми числами. Какой наименьшей может быть сумма этих чисел?

Решение.

Ни одна из рассматриваемых диагоналей не может иметь длину 1.

Действительно, невозможно, равенство $AB_1 = 1$, поскольку в треугольнике AB_1D_1 (сторона B_1D_1 которого равна BD) должно выполняться неравенство

$$AB_1 > | AD_1 - B_1D_1 | \geq 1.$$

Аналогично доказывается для диагоналей граней $ABCD$ и ADD_1A_1.

Таким образом, наименьшая длина одной из шести диагоналей рассматриваемых граней должна быть не меньше 2.

Нетрудно установить существование параллелепипеда, у которого 6 диагоналей рассматриваемых граней равны 2, 3, 4, 5, 6 и 7.

Например, одновременного могут выполняться следующие равенства:

$$AB_1 = 2, \quad AC = 4, \quad AD_1 = 6, \quad A_1B = 3, \quad A_1D = 5, \quad BD = 7.$$

Таким образом, наименьшая сумма длин граней $ABCD$, ABB_1A_1 и ADD_1A_1 равна 27.

Ответ: 27.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача решена полностью.	+	10

Решение задачи, содержит верную общую схему решения, но в результате описки/арифметической ошибки получен неверный ответ или не найдена искомая сумма при верно найденных длинах диагоналей.	±	7
Решение задачи, содержит верную общую схему решения, в котором отсутствуют некоторые обоснования. В частности, не показано, что параллелепипед с указанными длинами диагоналей существует. Ответ верный.		
Решение содержит значительное продвижение в верном направлении. Составлены верные соотношения, для длин искомых диагоналей. Показано, что все диагонали должны иметь длину не меньше 2. Не обосновано даны правильные длины рассматриваемых диагоналей.	+/2	5
Решение в целом неверное или незаконченное, но содержит определенное содержательное продвижение в верном направлении. Показано, что все диагонали должны иметь длину не меньше 2. Не обосновано даны правильные длины рассматриваемых диагоналей.	∓	2
Ответ верный. Рассмотрен частный случай прямоугольного параллелепипеда.		
Задача не решена, содержательных продвижений нет.	–	0
Задача не решалась.	0	0

Задание 3 (12 баллов)

На доске написаны все натуральные числа от 1 до 100. Можно любую пару чисел x, y заменять на $xy - 29x - 29y + 870$. Какое число останется после 99 таких операций?

Решение.

Заметим, что

$$xy - 29x - 29y + 870 = (x - 29)(y - 29) + 29.$$

Если одно из пары заменяемых чисел x, y равно 29, то эта пара чисел заменяется на 29.

Следовательно, на доске всегда одно из чисел будет равно 29. Именно это число останется после 99 рассматриваемых операций.

Ответ: 29.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача решена полностью.	+	12
Ответ верный. Решение задачи, содержит верную общую схему решения, в котором отсутствуют некоторые обоснования. В частности, представлено разложение $xy - 29x - 29y + 870 = (x - 29)(y - 29) + 29$, на основании которого без дополнительных пояснений представлен правильный ответ.	±	8
Решение содержит значительное продвижение в верном направлении. При правильном ответе в решении отсутствуют важные обоснования.	+/2	6
Ответ верный. Решение отсутствует или рассмотрены частные случаи замены пар чисел на одно число.	∓	2
Задача не решена, содержательных продвижений нет.	–	0
Задача не решалась.	0	0

Задание 4 (12 баллов)

Найдите множество значений выражения $\dfrac{ac}{ab+ac+bc}$ при условии, что a, b и c – положительные числа, удовлетворяющие неравенствам $a \le b \le c$.

<u>Решение.</u>

Так как a, b и c – положительные числа, то $\dfrac{ac}{ab+ac+bc} > 0$.

В то же время

$$\frac{ac}{ab+ac+bc} < \frac{ac}{ac+bc} = \frac{a}{a+b} \le \frac{a}{a+a} = \frac{1}{2}.$$

Покажем, что произвольное число t из интервала $\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$ входит в искомое множество.

При $0 < t \le \dfrac{1}{3}$ равенство $\dfrac{ac}{ab+ac+bc} = t$ выполняется, если $a = \dfrac{t}{1-2t}$, $b = c = 1$.

Заметим, что так как $t \le \dfrac{1}{3}$, то $a = \dfrac{t}{1-2t} \le 1$.

При $\frac{1}{3} \le t < \frac{1}{2}$ можно положить $a = b = 1$, $c = \frac{t}{1-2t}$. Легко проверить, что в этом случае $c = \frac{t}{1-2t} \ge 1$.

Итак, искомое множество есть интервал $\left(0;\frac{1}{2}\right)$.

<u>*Ответ*</u>: $\left(0;\frac{1}{2}\right)$.

<table>
<tr><th>Содержание критерия</th><th>Оценка</th><th>Баллы</th></tr>
<tr><td>Задача решена полностью.</td><td>+</td><td>12</td></tr>
<tr><td>Представлен верный ответ, имеется обоснование, что любое число из интервала $\left(0;\frac{1}{2}\right)$ входит в искомое множество значений. Это обоснование содержит незначительные пробелы.</td><td rowspan="2">±</td><td rowspan="2">8</td></tr>
<tr><td>Представлен один из ответов $\left(0;\frac{1}{2}\right]$, $\left[0;\frac{1}{2}\right)$ или $\left[0;\frac{1}{2}\right]$. Имеется верное обоснование, что любое число из интервала $\left(0;\frac{1}{2}\right)$ входит в искомое множество значений.</td></tr>
<tr><td>Имеются значительное продвижение при решении задачи. Представлен верный ответ, имеется обоснование, что любое число из интервала $\left(0;\frac{1}{2}\right)$ входит в искомое множество значений. Это обоснование содержит значительные пробелы.</td><td>+/2</td><td>6</td></tr>
<tr><td>Представлен один из ответов: $\left(0;\frac{1}{2}\right)$, $\left(0;\frac{1}{2}\right]$, $\left[0;\frac{1}{2}\right)$ или $\left[0;\frac{1}{2}\right]$. Нет обоснования, что любое число из интервала $\left(0;\frac{1}{2}\right)$ входит в искомое множество значений.</td><td>∓</td><td>2</td></tr>
</table>

Задача не решена, содержательных продвижений нет.	–	0
Задача не решалась.	0	0

Задание 5 (12 баллов)

Для чисел *x*, *y*, *z*, *t* из интервала $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ выполняется равенство

$\cos 2x+\cos 2y+\cos 2z+\cos 2t=4(\cos x\cos y\cos z\cos t-\sin x\sin y\sin z\sin t)$.

Докажите, что сумма некоторых двух из чисел *x*, *y*, *z*, *t* равна сумме двух остальных.

Доказательство.

Введем обозначения $p=cos(x-y)$, $q=cos(x+y)$, $r=cos(z-t)$, $s=cos(z+t)$.

Используя формулы

$$cos\,\alpha+cos\,\beta=2cos\frac{\alpha-\beta}{2}cos\frac{\alpha+\beta}{2},$$

$$cos\,\alpha\,cos\,\beta=\frac{1}{2}\big(cos(\alpha-\beta)+cos(\alpha+\beta)\big),$$

$$sin\,\alpha\,sin\,\beta=\frac{1}{2}\big(cos(\alpha-\beta)-cos(\alpha+\beta)\big),$$

получим равенство

$$2pq+2rs=(p+q)(r+s)-(p-q)(r-s),$$

которое преобразуется к равенству

$$(p-r)(q-s)=0.$$

Итак, должно выполняться хотя бы одно из равенств: $p = r$ или $q = s$.

В первом случае имеем

$$|x-y|=|z-t|,$$

то есть либо $x+t=y+z$, либо $x+z=y+t$.

Во втором получаем равенство $x+y=z+t$.

Таким образом, всегда сумма некоторых двух из чисел *x*, *y*, *z*, *t* равна сумме двух остальных.

Содержание критерия	**Оценка**	**Баллы**
Задача решена полностью.	+	12
Решение задачи, содержит верную общую схему решения, в котором отсутствуют некоторые обоснования.	±	8

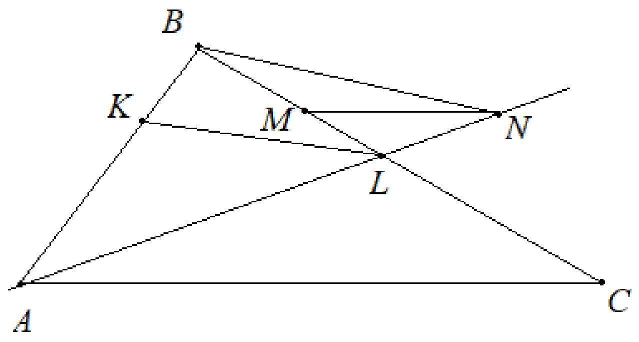
Рассмотрены оба возможных случая ($p = r$ и $q = s$) или представлено альтернативное решение, некоторые обоснования.		
Решение содержит значительное продвижение в верном направлении. Верно рассмотрен только один из возможных случаев ($p = r$ и $q = s$).	+/2	6
Решение незаконченное, но содержит определенное содержательное продвижение в верном направлении.	∓	2
Задача не решена, содержательных продвижений нет.	–	0
Задача не решалась.	0	0

Задание 6. (14 баллов)

Дан треугольник ABC; точка K на стороне AB и точка L на стороне BC таковы, что $AK = KL = LC$. На луче CB отмечена точка M, для которой $CM = AB$, а на прямой AL – точка N, для которой $MN \parallel AC$. Докажите, что $BN = AB$.

Доказательство.

Из равенств $\angle MLN = \angle ALC$ и $\angle MNL = \angle CAL$ следует подобие треугольников MNL и CAL. Поэтому $AL : AN = CL : CM = AK : AB$, и треугольник ABN подобен треугольнику AKL. Равенство $BN = AB$ теперь следует из равенства $KL = AK$.



Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача решена полностью.	+	14
Решение задачи, содержит верную общую схему решения, в котором отсутствуют некоторые обоснования.	±	10
Решение содержит значительное продвижение в верном направлении. При этом решение не завершено.	+/2	7
Решение в целом неверное или незаконченное, но содержит определенное содержательное продвижение в верном направлении.	∓	3

Задача не решена, содержательных продвижений нет.	–	0
Задача не решалась.	0	0

Задание 7 (14 баллов)

Зная, что $0{,}698 < lg\,5 < 0{,}699$, определите, у скольких из чисел $1,\ 5,\ 25,\ ...,\ 5^n,\ ...,\ 5^{100}$ десятичная запись начинается с единицы.

Решение.

Десятичная запись числа $5^{100} = 10^{100 lg 5}$, лежащего на отрезке $\left[10^{69{,}8};\ 10^{69{,}9}\right]$, состоит из 70 цифр и, вследствие неравенства $10^{0{,}8} \cdot 10^{69} > 2 \cdot 10^{69}$, начинается не с единицы.

Заметим, что при любом натуральном *k* среди *k*-значных чисел имеется ровно одна начинающаяся не с единицы степень пятёрки.

Поэтому записи ровно 70 чисел из набора $\left\{1,\ 5,\ 25,\ ...,\ 5^n,\ ...5^{100}\right\}$ начинаются с цифр, отличных от единицы.

С единиц же начинаются записи остальных 101 – 70 = 31 чисел.

Ответ: у 31 числа.

Содержание критерия	**Оценка**	**Баллы**
Задача решена полностью.	+	14
Решение задачи, содержит верную общую схему решения, в котором отсутствуют некоторые обоснования. Ответ верный.	±	10
Решение задачи, содержит верную общую схему решения, но в результате описки или арифметической ошибки получен неверный ответ.		
Решение содержит значительное продвижение в верном направлении, но не закончено. Отмечено, что при любом натуральном *k* среди *k*-значных чисел имеется ровно одна начинающаяся не с единицы степень пятёрки.	+/2	7
Решение задачи, содержит верную общую схему решения, в котором отсутствуют некоторые обоснования. Ответ неверный.		
Решение в целом неверное или незаконченное, но содержит определенное содержательное	∓	3

продвижение в верном направлении. Ответ отсутствует или неверный.		
Ответ верный. Решение отсутствует или неверное.		
Задача не решена, содержательных продвижений нет.	–	0
Задача не решалась.	0	0

Задача 8 (16 баллов)

Каждый из 25 учеников 11«А» класса дружит ровно с двумя учениками 11«Б», а все ученики 11«Б» имеют разные наборы друзей в 11«А». Каким наибольшим может быть число учеников в 11«Б»?

Решение.

Каждых двух учеников, которые учатся в разных классах и дружат между собой, назовём смешанной парой.
Поскольку каждый из 25 учеников 11«А» входит ровно в две такие пары, то всего имеется 50 смешанных пар.
Пусть в 11«Б» учится n человек, причем ровно k из них имеют ровно по одному другу в 11«А». Из условия задачи следует, что $k \le 25$.
Кроме того, в этом классе может найтись не более одного ученика, не имеющий друзей в 11«А».
Каждый из остальных $n - k - 1$ (если такой ученик один) или $n - k$ (если таких учеников нет) учеников 11«Б» входит по меньшей мере в две смешанные пары.
Значит, общее число смешанных пар больше или равно $k + 2(n - k - 1) = 2n - k - 2$.
Сложив неравенства $2n - k - 2 \le 50$ и $k \le 25$, получим $2n - 2 \le 75$, откуда $n \le 38$.
С другой стороны, нетрудно привести пример, показывающий, что равенство $n = 38$ возможно.

Ответ: 38 учеников.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача решена полностью.	+	16
Не рассмотрен случай, когда у кого-то их школьников нет друзей. В остальном задача решена.	+ .	15
Решение задачи, содержит верную общую схему решения. Приведен алгоритм, построения соответствия друзей в рассматриваемых классах, удовлетворяющий условию задачи и приводящий	±	12

к правильному ответу. Обоснование, что в результате реализации данного алгоритма получается наибольшее количество учеников в классе имеется, но содержит некоторые пробелы.		
Решение задачи, содержит верную общую схему решения, но в результате описки или арифметической ошибки получен неверный ответ.		
Решение содержит значительное продвижение в верном направлении. Дана верная оценка сверху для искомого числа учеников в классе. Не показано, что данная оценка достигается.	+/2	8
Приведен алгоритм, построения соответствия друзей в рассматриваемых классах, удовлетворяющий условию задачи и приводящий к правильному ответу. Обоснование, что в результате реализации данного алгоритма получается наибольшее количество учеников в классе отсутствует.		
Решение в целом неверное или незаконченное, но содержит определенное содержательное продвижение в верном направлении.	∓	4
Задача не решена, содержательных продвижений нет.	–	0
Задача не решалась.	0	0