ФГОБУ ВО «Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации»
ФГАОУ ВО «Северо-Восточный федеральный университет им. М.К. Аммосова»

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМА.
ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ – ФИНАНСИСТ!»
ПО ПРЕДМЕТУ **МАТЕМАТИКА** 2019-2020 уч. года

ОЧНЫЙ ЭТАП

10 класс

Задание 1 (10 баллов)

В цеху работало несколько станков фирмы «Левша». После того как 5 станков были заменены на 5 станков фирмы «Инноватика» общая производительность всех станков цеха выросла на 25%. Если бы изначально 40% станков фирмы «Левша» заменили на такое же количество станков фирмы «Инноватика», то общая производительность выросла бы в 1,5 раза. Найдите количество станков в цеху, если станки одной и той же фирмы имеют одинаковую производительность.

Решение.

Пусть в цеху было n станков, производительность каждого из которых равна p.
После замены 5 станков на станки с производительностью p_1 общая производительность стала равна

$$(n-5)p+5p_1=1,25np.$$

Следовательно,

$$np=20(p_1-p).$$

При замене 40% станков получим

$$0,6np+0,4np_1=1,5np,$$

откуда

$$p_1=\frac{9}{4}p.$$

Таким образом, получаем

$$np=20\left(\frac{9}{4}p-p\right)=25p \quad \Rightarrow \quad n=25.$$

Ответ: 25 станков.

Содержание критерия	**Оценка**	**Баллы**
Задача решена полностью.	+	10

Решение задачи, содержит верную общую схему решения, но в результате описки или арифметической ошибки получен неверный ответ.	±	7
Решение содержит значительное продвижение в верном направлении. Составлены верные соотношения, связывающие производительность станков и их количество. При этом решение не завершено.	+/2	5
Решение в целом неверное или незаконченное, но содержит определенное содержательное продвижение в верном направлении.	∓	2
Ответ верный. Решение отсутствует или неверное.		
Задача не решена, содержательных продвижений нет.	–	0
Задача не решалась.	0	0

Задание 2 (10 баллов)

Докажите, что для всех натуральных n число $n^6 - n^2$ делится на 10.

Доказательство.

Заметим, что $n^6 - n^2 = n^2 \cdot \left(n^4 - 1\right) = n^2 \cdot \left(n^2 - 1\right) \cdot \left(n^2 + 1\right)$.

Поскольку одно из чисел n^2 или $n^2 + 1$ четное, то число $n^6 - n^2$ также является четным. Осталось показать, что это число также делится на 5.
Рассмотрим всевозможные случаи остатков при делении числа n на 5.

1. n делится 5. Тогда и число $n^6 - n^2 = n^2 \cdot \left(n^2 - 1\right) \cdot \left(n^2 + 1\right)$ также делится на 5.
2. n при делении на 5 имеет остаток 1, тогда делится на 5 число $n^2 - 1$ и, как следствие, число $n^6 - n^2$.
3. n при делении на 5 имеет остаток 2, тогда делится на 5 число $n^2 + 1$ и, как следствие, число $n^6 - n^2$.
4. n при делении на 5 имеет остаток 3, тогда делится на 5 число $n^2 + 1$ и, как следствие, число $n^6 - n^2$.
5. n при делении на 5 имеет остаток 4, тогда делится на 5 число $n^2 - 1$ и, как следствие, число $n^6 - n^2$.

Итак, показали, что число $n^6 - n^2$ четное и делится на 5, следовательно, оно делится на 10.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача решена полностью.	+	10
Решение задачи, содержит верную общую схему решения, в котором отсутствуют некоторые обоснования.	±	7
Решение содержит значительное продвижение в верном направлении, но в нем отсутствуют важные обоснования. В частности, при доказательстве деления данного числа на 5 или на 10 при переборе случаев не все случаи полностью обоснованы или рассмотрены.	+/2	5
Решение в целом неверное или незаконченное. Доказано, что данное число четное. Отмечено, что данное число делится на 5, но обоснование этого факта отсутствует, неверное или имеет значительные пробелы.	∓	2
Рассматриваются различные остатки от деления числа n на 10. Решение при этом в целом неверное или незаконченное.		
Задача не решена, содержательных продвижений нет.	–	0
Задача не решалась.	0	0

Задание 3 (12 баллов)

Последовательность действительных чисел a_n такова, что $a_{n+1} = a_n(a_n + 4) + 2$ для всех натуральных n. Найдите минимальное возможное значение числа a_{2020}.

Решение.

Заметим, что $a_{n+1} = a_n(a_n + 4) + 2 \Leftrightarrow a_{n+1} + 2 = (a_n + 2)^2$.

Пусть $b_n = a_n + 2$.

Тогда из равенства $a_{n+1} + 2 = (a_n + 2)^2$ следует, что

$b_{n+1} = b_n^2$ и $b_n = b_1^{2^{n-1}}$.

Таким образом, получаем

$$b_{2020} = b_1^{2^{2019}} \Leftrightarrow a_{2020} = (a_1 + 2)^{2^{2019}} - 2 \Rightarrow a_{2020} \geq -2.$$

При $a_1 = -2$ достигается минимально значение $a_{2020} = -2$.

Ответ: -2

Содержание критерия	**Оценка**	**Баллы**
Задача решена полностью.	+	12
Решение задачи, содержит верную общую схему решения, в котором отсутствуют некоторые обоснования. Ответ верный.	±	8
Решение задачи, содержит верную общую схему решения, но в результате описки или арифметической ошибки получен неверный ответ.		
Решение содержит значительное продвижение в верном направлении. Дана верная оценка снизу для a_{2020}. Не показано, что данная оценка достигается.	+/2	6
Решение в целом неверное или незаконченное, но содержит определенное содержательное продвижение в верном направлении.	∓	2
Задача не решена, содержательных продвижений нет.	−	0
Задача не решалась.	0	0

Задание 4 (12 баллов)

Функция f такова, что для любого действительного числа x выполнено равенство $9f\big(f(x)\big) = 3f(x) + 8x$. Решите уравнение $f(x) = 0$.

<u>Решение.</u>

Пусть a – корень уравнения $f(x) = 0$, то есть $f(a) = 0$.

Подставим $x = a$ в данное равенство $9f\big(f(x)\big) = 3f(x) + 8x$:

$$9f\big(f(a)\big) = 3f(a) + 8a \Rightarrow f(0) = \frac{8a}{9}.$$

Подставим $x = 0$:

$$9f\big(f(0)\big) = 3f(0) \Rightarrow f\left(\frac{8a}{9}\right) = \frac{8a}{27}.$$

Подставим $x = \frac{8a}{9}$:

$$9f\left(f\left(\frac{8a}{9}\right)\right) = 3f\left(\frac{8a}{9}\right) + \frac{64a}{9} \Rightarrow f\left(\frac{8a}{27}\right) = \frac{8a}{27}.$$

Подставим $x = \frac{8a}{27}$:

$$9f\left(f\left(\frac{8a}{27}\right)\right) = 3f\left(\frac{8a}{27}\right) + \frac{64a}{27} \Rightarrow 9\frac{8a}{27} = 3\frac{8a}{27} + \frac{64a}{27}.$$

Из последнего равенства получаем, что $a = 0$.

Таким образом, если уравнение имеет корень, то этот корень может быть только равным 0.

Покажем, что $x = 0$ является корнем исходного уравнения.

Пусть $f(0) = b$. Аналогично предыдущим выкладкам подставим $x = 0, x = b, x = \frac{b}{3}$ в данное равенство и получим, что $b = 0$.

Итак, исходное уравнение имеет единственное решение $x = 0$.

Ответ: 0.

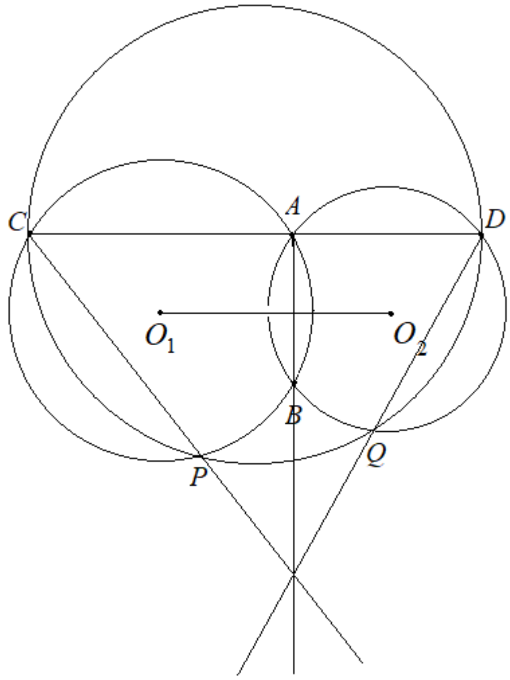
Содержание критерия	**Оценка**	**Баллы**
Задача решена полностью.	+	12
Решение задачи, содержит верную общую схему решения, в котором отсутствуют некоторые обоснования. Ответ верный.	±	8
Ответ верный. Решение содержит значительное продвижение в верном направлении. Показано, что корнем уравнения может быть только число 0.	+/2	6
Решение в целом неверное или незаконченное, но содержит определенное содержательное продвижение в верном направлении.	∓	2
Задача не решена, содержательных продвижений нет.	–	0
Задача не решалась.	0	0

Задание 5 (12 баллов)

Окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках *A* и *B*. Прямая, проходящая через *A*, параллельна их линии центров и пересекает ω_1 и ω_2 вторично в точках *C* и *D* соответственно. Окружность ω_3 построена на *CD* как на диаметре и пересекает ω_1 и ω_2 в точках *P* и *Q* соответственно. Докажите, что прямые *CP*, *DQ* и *AB* пересекаются в одной точке.

Решение.

Пусть O_1 и O_2 - центры окружностей ω_1 и ω_2 соответственно.



Тогда $O_1O_2 \perp AB$.

Так как $CD \parallel O_1O_2$, то $AB \perp CD$.

Точки *P, B* и *D* лежат на одной прямой.

Действительно, *CB* и *CD* – диаметры окружностей ω_1 и ω_3, следовательно, $CP \perp PB$ и $CP \perp PD$, что и доказывает, что точки *P, B* и *D* лежат на одной прямой.

Аналогично точки *C, B* и *Q* также лежат на одной прямой и $DQ \perp CB$.

Итак, прямые CP, DQ, AB содержат высоты треугольника *BCD* и, следовательно, пересекаются в одной точке.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача решена полностью.	+	12
Решение задачи, содержит верную общую схему решения, в котором отсутствуют некоторые обоснования.	±	8
Решение содержит значительное продвижение в верном направлении. При этом решение не завершено.	+/2	6
Решение в целом неверное или незаконченное, но содержит определенное содержательное продвижение в верном направлении.	∓	2
Задача не решена, содержательных продвижений нет.	–	0
Задача не решалась.	0	0

Задание 6. (14 баллов)

Найти все значения a, при которых корни x_1, x_2, x_3 многочлена

$x^3 + 4x^2 + ax + a$ удовлетворяют равенству $(x_1 + 2)^3 + (x_2 + 2)^3 + (x_3 + 2)^3 = 0$.

Решение.

Сделаем замену $y = x + 2$, тогда числа $y_1 = x_1 + 2$, $y_2 = x_2 + 2$, $y_3 = x_3 + 2$ являются корнями многочлена

$$(y-2)^3+4(y-2)^2+a(y-2)+a=y^3-2y^2+(a-4)y+8-a.$$

По теореме Виета:

$$y_1+y_2+y_3= 2$$

$$y_1y_2+y_1y_3+y_2y_3=a-4$$

$$y_1y_2y_3=a-8.$$

Кроме того, должно выполняться равенство $y_1^3+y_2^3+y_3^3=0$.

Непосредственно проверкой убеждаемся, что

$$y_1^3+y_2^3+y_3^3=(y_1+y_2+y_3)^3-3(y_1y_2+y_1y_3+y_2y_3)(y_1+y_2+y_3)+3y_1y_2y_3,$$

из которого получается:

$$0=(2)^3-3(a-4)(2)+3(a-8)$$

$$0=8-6a+3a, 0=8-3a$$

$$a=\frac{8}{3}$$

Ответ: $a=\frac{8}{3}$.

<table>
<tr><th>Содержание критерия</th><th>Оценка</th><th>Баллы</th></tr>
<tr><td>Задача решена полностью.</td><td>+</td><td>14</td></tr>
<tr><td>Решение задачи, содержит верную общую схему решения, в котором отсутствуют некоторые обоснования.</td><td rowspan="2">±</td><td rowspan="2">10</td></tr>
<tr><td>Решение задачи, содержит верную общую схему решения, но в результате описки или арифметической ошибки получен неверный ответ.</td></tr>
<tr><td>Решение содержит значительное продвижение в верном направлении. Составлено верное уравнение для нахождения искомого параметра a. При этом решение не завершено или при правильном ответе в нем отсутствуют важные обоснования.</td><td rowspan="2">+/2</td><td rowspan="2">7</td></tr>
<tr><td>Верно найдено значение параметра a, но не показано, что это значение единственно.</td></tr>
<tr><td>Решение в целом неверное или незаконченное, но содержит определенное содержательное продвижение в верном направлении.</td><td>∓</td><td>3</td></tr>
</table>

Задача не решена, содержательных продвижений нет.	–	0
Задача не решалась.	0	0

Задание 7 (14 баллов)

Даны два подобных треугольника, стороны первого из которых соответственно в два раза больше высот второго. Найдите наибольшее возможное значение коэффициента подобия первого треугольника ко второму.

Решение.

Пусть a, b и c – стороны второго треугольника, а h_a, h_b, h_c – его соответствующие высоты.

Тогда

$$2S_2 = ah_a = bh_b = ch_c.$$

Не умаляя общности $a \geq b \geq c.$ Тогда $h_a \leq h_b \leq h_c$.

По условию задачи

$$2h_c = ka, 2h_b = kb, 2h_a = kc,$$

где k – коэффициент подобия.

Следовательно,

$$kca = kb^2 = kac \Rightarrow b^2 = ac.$$

Пусть $\beta = \angle(a, c),$ тогда

$$c\sin(\beta) = h_a = kc/2 \Rightarrow k = 2\sin(\beta).$$

По теореме косинусов

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos(\beta) \Rightarrow b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos(\beta).$$

Так как $b^2 = ac$, получаем

$$ac(1 + 2\cos(\beta)) = a^2 + c^2 \geq 2ac.$$

Следовательно,

$$\cos(\beta) \geq \frac{1}{2} \Rightarrow \beta \leq 60° \Rightarrow k = 2\sin(\beta) \leq \sqrt{3}.$$

Очевидно, что если данные треугольники будут равносторонние, то $k = \sqrt{3}$.

Ответ. $k = \sqrt{3}$

<table>
<tr><th>Содержание критерия</th><th>Оценка</th><th>Баллы</th></tr>
<tr><td>Задача решена полностью.</td><td>+</td><td>14</td></tr>
<tr><td>Решение задачи, содержит верную общую схему решения, в котором отсутствуют некоторые обоснования. Ответ верный.</td><td rowspan="2">±</td><td rowspan="2">10</td></tr>
<tr><td>Решение задачи, содержит верную общую схему решения, но в результате описки или арифметической ошибки получен неверный ответ.</td></tr>
<tr><td>Решение содержит значительное продвижение в верном направлении.
Дана верная оценка сверху для искомого коэффициента подобия. Не показано, что данная оценка достигается.</td><td>+/2</td><td>7</td></tr>
<tr><td>Решение в целом неверное или незаконченное, но содержит определенное содержательное продвижение в верном направлении.</td><td rowspan="2">∓</td><td rowspan="2">3</td></tr>
<tr><td>Верный ответ получен при рассмотрении равносторонних треугольников. Обоснование, что найденное значение является наибольшим возможным отсутствует или имеет значительные пробелы.</td></tr>
<tr><td>Задача не решена, содержательных продвижений нет.</td><td>–</td><td>0</td></tr>
<tr><td>Задача не решалась.</td><td>0</td><td>0</td></tr>
</table>

Задача 8 (16 баллов)

В классе 25 учащихся. Для них были куплены билеты на один ряд в кинотеатре, состоящий из 25 мест, пронумерованных от 1 до 25. Несмотря на то, что каждый школьник получил индивидуальный билет, они сели на места своего ряда случайным образом. Какова вероятность того, что у каждого школьника для номера места N, на которое он сел, и номера места M, указанного в билете, выполнено неравенство $M \geq N - 3$?

<u>*Решение.*</u>

Пусть i_k – номер места в билете у школьника, который сел на место k.

Найдем количество возможных рассадок учащихся, для которых

$$i_k \geq k - 3 \text{ для всех } k \text{ от 1 до 25.}$$

Число i_n может принимать 4 значения: $n, n-1, n-2, n-3$. Число i_{n-1} может принимать 5 значений:

$n, n-1, n-2, n-3, n-4$, кроме того значения, которое уже занято числом i_n, то есть тоже 4 значения.

Аналогично, каждое из чисел $i_{n-2}, \ldots, i_4$ может принимать тоже 4 значения. Числа i_1, i_2, i_3 могут быть выбраны произвольно из 3 значений, оставшихся после выбора чисел $i_4, \ldots, i_n$.

Тогда из 25! возможных рассадок учащихся имеется ровно $5^{27} \cdot 3!$ рассадок, удовлетворяющих условию. Следовательно, искомая вероятность: $\frac{5^{27} \cdot 3!}{25!}$.

<u>*Ответ*</u>: $\frac{5^{27} \cdot 3!}{25!}$.

<table>
<tr><th>Содержание критерия</th><th>Оценка</th><th>Баллы</th></tr>
<tr><td>Задача решена полностью.</td><td>+</td><td>16</td></tr>
<tr><td>Решение задачи, содержит верную общую схему решения, в котором отсутствуют некоторые обоснования. Ответ верный.</td><td rowspan="3">±</td><td rowspan="3">12</td></tr>
<tr><td>Решение задачи, содержит верную общую схему решения, но в результате описки или арифметической ошибки получен неверный ответ.</td></tr>
<tr><td>Верно найдено количество возможных рассадок учеников, удовлетворяющих условию. Ответ отсутствует или неверный.</td></tr>
<tr><td>Решение содержит значительное продвижение в верном направлении. Дано правильное значение для количества возможных рассадок учеников, удовлетворяющих условию, но обоснования этого значения отсутствует или имеет значительные пробелы.</td><td>+/2</td><td>8</td></tr>
<tr><td>Решение в целом неверное или незаконченное, но содержит определенное содержательное продвижение для нахождения количества возможных рассадок учеников, удовлетворяющих условию.</td><td>∓</td><td>4</td></tr>
<tr><td>Задача не решена, содержательных продвижений нет.</td><td>–</td><td>0</td></tr>
<tr><td>Задача не решалась.</td><td>0</td><td>0</td></tr>
</table>