Всероссийская олимпиада школьников «Миссия выполнима. Твое призвание-финансист!»

ПО МАТЕМАТИКЕ 8-9 классы

Заключительный (очный) этап
2015/2016 учебный год

РЕШЕНИЕ

Задание 1. (10 баллов)

Пять карточек лежат на столе, как показано на рисунке.

На каждой из карточек на одной стороне написано некоторая буква, а на другой стороне – натуральное число. Петр сказал: «Если на одной стороне карты написана гласная буква, то на другой стороне этой карты написано четное число». Перевернув одну карту, Катя показала, что Петр ошибается. Какую карту перевернула Катя?

Решение

Чтобы показать, что Петр неправ, Катя должна найти карточку с нечетным номером на одной стороне, и гласной на другой стороне. Единственная карта, которая может иметь это свойство – карта номер 4, на которой написана цифра 7.

Ответ: четвертую карту.

Задание 2. (10 баллов)

Известно, что график функции $f(x)=x^2-2016x+2015$ проходит через две различные точки с координатами (a, c) и (b, c). Найдите сумму $a + b$.

Решение

По условию задачи

$$f(a)=a^2-2016a+2015=f(b)=b^2-2016b+2015 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad a^2-b^2=2016a-2016b \quad \Leftrightarrow \quad (a-b)(a+b)=2016(a-b) \quad \Leftrightarrow \quad a+b=2016.$$

Ответ: 2016.

Задание 3. (12 баллов)

В школе учатся 1200 школьников, у каждого из которых каждый день по пять уроков. Любой учитель этой школы проводит в день 4 урока. Сколько учителей работает в школе, если в каждом классе ровно 30 учеников?

Решение

Поскольку у каждого школьника в день по 5 уроков, то если бы в классе был один ученик, то общее число уроков в день было бы равно $5 \times 1200 = 6000$. Так как в классе 30 учеников, то количество уроков, которые проводятся в школе каждый день равно $\frac{6000}{30} = 200$. Следовательно, число учителей в школе равно $\frac{200}{4} = 50$.

<u>Ответ:</u> 50.

Задание 4. (12 баллов)

Рассматривается последовательность чисел $x_1, x_2, \ldots, x_{2015}$. При этом

$$x_n = \begin{cases} 7, & \text{если } n \text{ делится на 9 и 32;} \\ 9, & \text{если } n \text{ делится на 7 и 32;} \\ 32, & \text{если } n \text{ делится на 7 и 9;} \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Найдите сумму всех членов данной последовательности.

Решение

Поскольку $7 \cdot 9 \cdot 32 = 2016$, то

$$x_n = \begin{cases} 7, & \text{если } n = 9 \cdot 32 \cdot k, \text{где } k = 1, \ldots, 6; \\ 9, & \text{если } n = 7 \cdot 32 \cdot k, \text{где } k = 1, \ldots, 8; \\ 32, & \text{если } n = 7 \cdot 9 \cdot k, \text{где } k = 1, \ldots, 31; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Искомая сумма равна

$$7 \cdot 6 + 9 \cdot 8 + 32 \cdot 31 = 1106.$$

<u>Ответ</u>:1106.

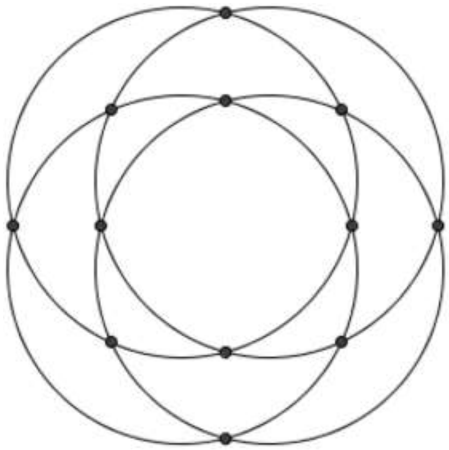
Задание 5. (12 баллов)

На плоскости расположены четыре различных окружности. Назовем точкой пересечения точку, в которой пересекаются не менее двух окружностей. Найдите наибольшее возможное число точек пересечения четырех окружностей.

Решение

Любые две окружности, могут пересекаться не более чем в двух точках. Из четырех окружностей можно выбрать 6 различных пар окружностей. Следовательно, точек пересечения не может быть больше 12.

Ниже на рисунке представлен случай, когда точек пересечения ровно 12.



Ответ: 12.

Задание 6. (14 баллов)

Известно, что $2016 + a^2 + ac < ab$. Докажите, что уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет два различных корня.

Решение

Из условия следует, что $a \neq 0$, иначе получим неверное неравенство $2016 < 0$. Далее условие задачи перепишем в виде:

$$a^2 - ab + ac = a(a - b + c) < -2016 < 0$$

или

$$a(a - b + c) = a \cdot f(-1) < 0,$$

где $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Если $a > 0$, то ветви параболы направлены вверх и $f(-1) < 0$, и данное уравнение имеет два различных корня. Аналогично при $a < 0$.

Задание 7. (14 баллов)

При анализе банковских счетов обнаружилось, что остатки средств на каждом из них больше 10 рублей. При этом нашлась группа клиентов, каждый из которых имеет на своем счете одинаковую денежную сумму. Эта сумма является числом, состоящим из одних единиц. Если сложить все денежные средства на счетах данной группы клиентов, то полученная сумма также будет представляться числом, состоящим из одних единиц. Найдите, при каком наименьшем числе клиентов в группе это возможно, если в группе больше одного человека

Решение

Данная задача эквивалентна следующей.

Найдите наименьшее натуральное число m, для которого найдутся натуральные числа n и k, такие что $n > k > 1$ и $\underbrace{11...1}_{n} = \underbrace{11...1}_{k} \cdot m$.

Очевидно, что $m > 9$. Если $m = \overline{ab}$, где $a \geq 1$, то равенство $\underbrace{11...1}_{n} = \underbrace{11...1}_{k} \cdot \overline{ab}$ означает, что $b = 1$. Но в этом случае, независимо от a вторая цифра справа в числе $\underbrace{11...1}_{k} \cdot \overline{ab}$ равна $a + 1$, и это не может быть 1. Таким образом, $m \geq 100$. Ясно, что $n = 100$ не удовлетворяет условию потому, что $\underbrace{11...1}_{k} \cdot 100 = \underbrace{11...1}_{k}00$.

С другой стороны, $n = 101$ подходит, т.к. $101 \cdot 11 = 1111$.

<u>Ответ:</u> 101.

Задание 8. (16 баллов)

На конференцию приехали несколько человек. Докажите, что их можно разместить в двух конференц-залах так, чтобы у каждого из них в своем зале имелось четное число знакомых. (Один из залов можно оставить пустым.)

Решение

Проведем решение индукцией по количеству участников конференции. База индукции проверяется непосредственно.

Предположим, что для n участников утверждение задачи верно.

Пусть на конференцию приехали $n + 1$ участников. Если каждый из них имеет четное число знакомых, что можно оставить одну из комнат пустой и требование задачи будет выполнено. Поэтому будем считать, что некоторый участник A имеет нечётное количество знакомых $B_1, B_2, \ldots, B_{2к+1}$.Попросим участника A на время удалиться с конференции. Кроме того, заставим любых двух его знакомых познакомиться между собой, если они прежде не были знакомы, и, напротив, временно прервать знакомство, если они знали друг друга. Полученную компанию из n человек можно, по предположению индукции, разместить в двух комнатах так, чтобы у каждого было четное число знакомых в своей комнате.

Не умаляя общности, можно считать, что участники $B_1, B_2, \ldots, B_{2s}$ попали в первую комнату, а B_{2s+1}, $B_{2s+2}, \ldots, B_{2к+1}$ - во вторую $(0 \le s \le k)$. Теперь позовем обратно изгнанного А и подселим его в первую комнату – он будет знать там четное число людей. При этом количество знакомых у участников $B_1, B_2, \ldots, B_{2s}$ станет нечетным. Наконец, вернем все знакомства между B_i $(1\le i \le 2k + 1)$ в первоначальное состояние. Каждое приобретенное или потерянное знакомство меняет количество знакомых на единицу. Поэтому у каждого из $B_1, B_2, \ldots, B_{2s}$ количество знакомых среди людей этого набора поменяет четность (и станет четным), а у каждого из B_{2s+1}, $B_{2s+2}, \ldots, B_{2к+1}$ по-прежнему останется четным. У других участников, кроме A и B_i, наборы знакомых всё это время вообще не менялись. Поэтому полученное размещение всех участников по двум комнатам удовлетворяет условию задачи.