



**Всероссийская олимпиада школьников
«Миссия выполнима. Твое призвание-
финансист!»**

ПО МАТЕМАТИКЕ 10 класс

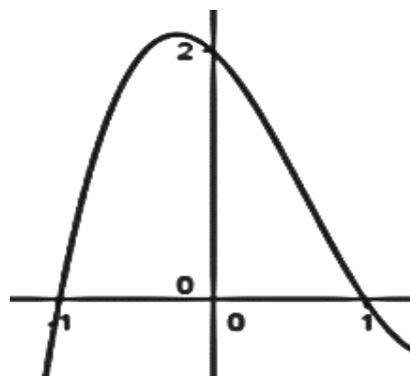
**Заключительный (очный) этап
2015/2016 учебный год**

Решение

Задание 1. (10 баллов)

На рисунке изображен график функции
 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

Найдите значение параметра b .



Решение.

Из рисунка следует

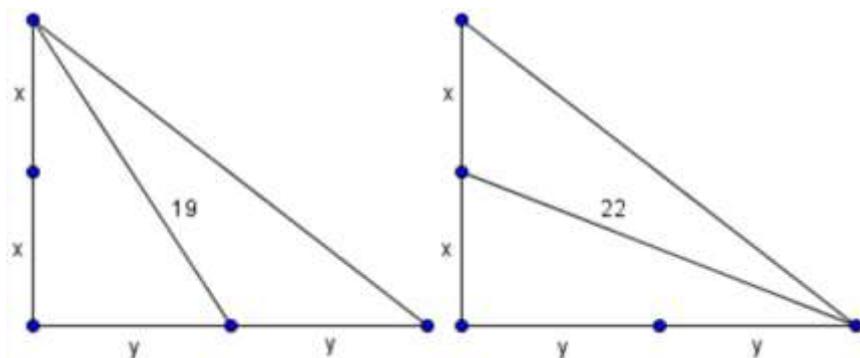
$$\begin{cases} -f(-1) = a - b + c - d = 0 \\ f(1) = a + b + c + d = 0 \\ f(0) = d = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b + d = 0 \\ d = 2 \end{cases} \Rightarrow b = -2.$$

Ответ: -2.

Задание 2. (10 баллов)

В прямоугольном треугольнике ABC (угол C – прямой) проведены медианы AM и BN , длины которых равны 19 и 22 соответственно. Найдите длину гипотенузы данного треугольника.

Решение.



Пусть $AC = 2x$, а $BC = 2y$. По теореме Пифагора имеем

$$\begin{cases} (2x)^2 + y^2 = 19^2 \\ x^2 + (2y)^2 = 22^2 \end{cases} \Rightarrow 5x^2 + 5y^2 = 19^2 + 22^2 = 845 \Rightarrow$$

$$BC^2 = 4x^2 + 4y^2 = 4 \cdot 169 \Rightarrow BC = 26.$$

Ответ: 26.

Задание 3. (12 баллов)

Бухгалтеры, менеджеры и экономисты банка сидят за круглым столом. Когда директор попросил поднять руку бухгалтеров, рядом с которыми сидит экономист, руку подняли 20 человек. А когда директор попросил поднять руку менеджеров, рядом с которыми сидит экономист, руку подняли 25 человек. Докажите, что рядом с кем-то из поднимавших руку сидит сразу два экономиста.

Решение

Назовем группой экономистов несколько (возможно, одного) экономиста, сидящих подряд, слева и справа от которых сидят представители других профессий. При этом если нет менеджера или бухгалтера, рядом с которым сидят два экономиста, то каждый человек поднял руку не более одного раза, а тогда общее количество поднявших руку людей равно удвоенному количеству групп, т.е. четно. А по условию их 45. Противоречие.

Задание 4. (12 баллов)

Решите уравнение $x^2 + y^2 + 1 = xy + x + y$.

Решение

$$x^2 + y^2 + 1 = xy + x + y \Leftrightarrow (x - y)^2 + (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = 1.$$

Ответ: $x = y = 1$.

Задание 5. (12 баллов)

Известно, что $5a + 3b + 2c = 0$ и $a \neq 0$. Докажите, что уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет два различных корня.

Решение.

Данное в условии равенство можно переписать в виде:

$$5a + 3b + 2c = 0 \Leftrightarrow a + b + c + 4a + 2b + c = 0.$$

А это равенство запишем в виде $f(1) + f(2) = 0$, где $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Таким образом, либо $f(1) = f(2) = 0$ и числа 1 и 2 являются корнями данного уравнения, либо эти значения имеют разные знаки, что также означает, что график функции $f(x)$ пересекает ось абсцисс в двух различных точках.

Задание 6. (14 баллов)

Определите знак числа

$$A = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{2012} + \frac{1}{2013} - \frac{1}{2014} - \frac{1}{2015} + \frac{1}{2016}.$$

Знаки расставлены так: “+” перед первой дробью, затем идут два “-” и два “+” по очереди. Перед последней дробью стоит “+”.

Решение

Разобьем все числа на группы по четыре числа:

$$\left(\frac{1}{4k+1} - \frac{1}{4k+2} - \frac{1}{4k+3} + \frac{1}{4k+4} \right).$$

Сумма чисел в каждой группе положительная:

$$\left(\frac{1}{4k+1} - \frac{1}{4k+2} - \frac{1}{4k+3} + \frac{1}{4k+4}\right) > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4k+1} - \frac{1}{4k+2} > \frac{1}{4k+3} - \frac{1}{4k+4} \Leftrightarrow \frac{1}{(4k+1)(4k+2)} > \frac{1}{(4k+3)(4k+4)}.$$

Следовательно, и число A положительное.

Ответ: $A > 0$

Задание 7. (14 баллов)

Обнаружилось, что на закрытии торгов курс акций некоторой компании в течении года каждый раз увеличивался или уменьшался ровно на $n\%$ по отношению к предыдущему закрытию. Существует ли такое натуральное значение n , при котором цена акций на закрытии торгов в течении года дважды принимала одно и то же значение?

Решение.

После k увеличений цены и l уменьшений цены на $n\%$ цена будет такой:

$$P \left(1 + \frac{n}{100}\right)^k \left(1 - \frac{n}{100}\right)^l,$$

где P – начальная цена акций. Если предположить, что цена дважды принимает одно и то же значение, что получится

$$\left(1 + \frac{n}{100}\right)^k \left(1 - \frac{n}{100}\right)^l = 1$$

или

$$(100 + n)^k (100 - n)^l = 100^{k+l}.$$

Правая часть этого равенства делится на 10, поэтому и n должно быть кратно 10. Предположим, что n не кратно 4, тогда $100 \pm n$ тоже не кратно 4, поэтому левая часть кратна 2^{k+l} и не кратна 2^{k+l+1} , а правая часть делится на 4^{k+l} . Получили противоречие. Следовательно, n кратно 4. Аналогично, можно показать, что n кратно 25. Поэтому n делится на 100, что невозможно, поскольку цена не может уменьшиться более, чем на 100%.

Ответ: не существует.

Задание 8. (16 баллов)

Пусть все фирмы страны имеют определенный ранг, который является натуральным числом. При слиянии двух фирм рангов m и n получается новая фирма ранга $(m + n)$. Прибыль полученной фирмы будет на $m \cdot n$ больше суммы прибылей фирм ее образующих. Прибыль фирмы первого ранга равна 1 д.е. Существует ли ранг, при котором прибыль фирмы будет равна 2016 д.е.?

Решение.

Пусть P_n – прибыль фирмы ранга n . Тогда по условию задачи

$$P_{m+n} = P_m + P_n + mn.$$

Заметим, что для любого n

$$P_n = P_{n-1} + P_1 + (n-1) \cdot 1 = P_{n-1} + 1 + n - 1 = P_{n-1} + n.$$

Докажем, что $P_n = 1 + 2 + \dots + n$.

Используем метод математической индукции.

1) База индукции: $P_1 = 1$.

2) Пусть $P_k = 1 + 2 + \dots + k$. Докажем, что $P_{k+1} = 1 + 2 + \dots + k + (k + 1)$.

Действительно, $P_{k+1} = P_k + (k + 1) = (1 + 2 + \dots + k) + (k + 1)$.

Следовательно, $P_n = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Для того, чтобы фирма имела прибыль равную 2016 д.е., ее ранг должен удовлетворять равенству

$$\frac{n(n+1)}{2} = 2016.$$

Последнее уравнение имеет натуральное решение $n = 63$.

Ответ: да, это ранг равный 63.