Всероссийская олимпиада школьников
«Миссия выполнима. Твое призвание-финансист!»

ЗАДАНИЯ, РЕШЕНИЯ, КРИТЕРИИ
ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ (ОЧНЫЙ) ЭТАП

Математика 11 класс, 2016/2017 учебный год

Задание 1. (10 баллов)

Сколько существует натуральных чисел n таких, что уравнение $nx-12=3n$ имеет целочисленное решение.

Решение.

Поскольку $nx-12=3n \Rightarrow x=3+\frac{12}{n}$, то условие задачи выполняется, если 12 делится на n. Следовательно, n может принимать значения 1, 2, 3, 4, 6, 12.

Ответ. 6

Содержание критерия	**Оценка**	**Баллы**
Полное решение.	+	10
Приведены все основные логические шаги решения. Посчитаны целые значения n.	+/2	5
Приведены все основные логические шаги решения. Ответ неверный.		
Ответ верный. Решение отсутствует или неверное.	$\mp$	2
Решение не соответствует ни одному критерию, описанному выше.	−/0	0
Максимальный балл		10

Задание 2. (10 баллов)

Ниже нарисован магический квадрат, в котором некоторые числа отсутствуют.

20		
	17	
16		

Восстановите данный магический квадрат.

(В магическом квадрате суммы чисел, стоящих в каждой строке, в каждом столбце и на диагоналях, равны).

Решение.

1)

20		
	17	
16		

2)

20		x
	17	
16		

3)

20	13	x
x-3	17	
16		

4)

20	13	x
x-3	17	19
16	x+3	14

Следовательно, $20 + 17 + 14 = 16 + 17 + x \Rightarrow x = 18$.

Ответ:

20	13	18
15	17	19
16	21	14

Содержание критерия	**Оценка**	**Баллы**
Полное решение.	+	10
Приведен верный ответ. Не показано, что других решений нет.	+/2	5
Приведены все основные логические шаги решения. В результате вычислительной ошибки или описки получен неверный ответ.	+/2	5
Решение не соответствует ни одному критерию, описанному выше.	−/0	0
Максимальный балл		10

Задание 3. (12 баллов)

Среднее арифметическое десяти различных натуральных чисел равно 20, а среднее арифметическое любых девяти из этих чисел не меньше 17. Найдите максимально возможное значение наибольшего из этих чисел.

Решение.

Упорядочим 10 данных чисел по возрастанию.
По условию задачи сумма первых 9 чисел не может быть меньше $9 \cdot 17 = 153$.
Следовательно, 10-е наибольшее число не может быть больше $20 \cdot 10 - 153 = 47$.
При этом набор 17, 17, …, 17, 47 удовлетворяет условию задачи.

Ответ. 47

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Полное решение.	+	12
Ответ верный. Показано, что максимально возможное значение не может быть больше 47. Не указан набор, который содержит 47.	+/2	6
Приведены все основные логические шаги решения. В результате вычислительной ошибки или описки получен неверный ответ.	+/2	6
Ответ верный. Не показано, что 47 является максимально возможным значением.	∓	2
Решение не соответствует ни одному критерию, описанному выше.	−/0	0
Максимальный балл		12

Задание 4. (12 баллов)

Числовая последовательность такова, что $x_n = \dfrac{n+2}{n x_{n-1}}$ для всех $n \geq 2$. Найдите произведение $x_1 x_2 x_3 \ldots x_{2016} x_{2017}$, если $x_1 = 1$.

Решение.

Заметим, что $x_n x_{n-1} = \dfrac{n+2}{n}$, следовательно,

$$x_1 x_2 x_3 \ldots x_{2016} x_{2017} = x_1 (x_2 x_3)(x_4 x_5) \ldots (x_{2016} x_{2017}) = 1 \frac{5}{3} \frac{7}{5} \ldots \frac{2017}{2015} \frac{2019}{2017} = 673$$

Ответ. 673

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Полное решение.	+	12
В результате вычислительной ошибки или описки получен неверный ответ.	±	9

Показано в общем случае, что $x_n x_{n-1} = \dfrac{n+2}{n}$. Ответ неверный или отсутствует.	+/2	6
Показано при некоторых n, что $x_n x_{n-1} = \dfrac{n+2}{n}$. Ответ неверный или отсутствует.	∓	2
Решение не соответствует ни одному критерию, описанному выше.	−/0	0
Максимальный балл		12

Задание 5. (12 баллов)

Когда Сергей пошел в кафе поужинать, в его кошельке были только банкноты в 1000 рублей. Он решил оставить официанту чаевые строго в размере от 5% до 15% от размера чека. Когда он получил чек, то понял, что не может осуществить задуманное, не получив сдачи. Найдите сумму наибольшего чека в рублях без учета копеек, который Сергей не может оплатить с учетом чаевых, используя только банкноты в 1000 рублей.

Решение.

Пусть x – сумма чека. Для того, чтобы Сергей не мог оплатить согласно условию задачи (банкнотами по 1000), должно выполняться $1.15x - 1.05x < 1000, \text{т. е.}\, x < 10000$. Так как $1.15 \cdot 10000 = 11500$, он сможет заплатить не более 11000 (включая чаевые). Следовательно, $x \leq \frac{11000}{1.15} < 9566$. Но так как $1.15 \cdot 9565 = 10999.75$, а $1.05 \cdot 9565 = 10043.25$, то наибольшая целая сумма чека 9565 руб.

Ответ. 9565 руб.

Содержание критерия	**Оценка**	**Баллы**
Полное решение.	+	12
Приведены все основные логические шаги решения. Приведены оценки сверху для искомой суммы чека. Доказана ее достижимость. В результате вычислительной ошибки или описки получен неверный ответ.	+.	10
Найдена основная идея решения. Доказано, что искомая сумма чека не может быть больше 9565. Не показано, что чек в 9565 руб. не может быть оплачен согласно условию задачи.	±	9
Найдена основная идея решения. Доказано, что искомая сумма чека не может быть больше 11000. Отмечено, что искомая сумма чека не может быть больше 9565, но строгое доказательство этого факта отсутствует.		

Показано, что чек в 9565 руб. не может быть оплачен согласно условию задачи.		
Найдена основная идея решения. Доказано, что искомая сумма чека не может быть больше 11000. Отмечено, что искомая сумма чека не может быть больше 9565, но строгое доказательство этого факта отсутствует. Не показано, что чек в 9565 руб. не может быть оплачен согласно условию задачи.	+/2	6
Решение незаконченное или неверное. Доказано, что искомая сумма чека не может быть больше 11000.	∓	2
Решение не соответствует ни одному критерию, описанному выше.	−/0	0
Максимальный балл		12

Задание 6. (14 баллов)

Функция $f(x)$ такова, что $f\big(f(x)\big) = x$ и $f(f(x+2)+2) = x$ для любого x. Найдите $f(2017)$, если $f(0) = 1$.

Решение.

Из равенства $f(x) = f\big(f(f(x+2)+2)\big) = f(x+2) + 2$ мы получаем формулу $f(x+2) = f(x) - 2$.

Кроме того, $f(1) = f\big(f(0)\big) = 0$.

Докажем по индукции, что $f(x) = 1 - x$ для любого целого x.

Вначале докажем, что указанное равенство верно при четных x.[1]

1) $f(0) = 1$ – верно.
2) Пусть $f(2n) = 1 - 2n$.
3) Докажем, что $f(2(n+1)) = 1 - 2(n+1)$

Действительно, $f(2(n+1)) = f(2n) - 2 = 1 - 2n - 2 = 1 - 2(n+1)$.

Теперь докажем, что указанное равенство верно при нечетных x.

1) $f(1) = 0$ – верно.
2) Пусть $f(2n+1) = 1 - (2n+1)$ при некотором.
3) Докажем, что $f(2(n+1)+1) = 1 - (2(n+1)+1)$

Действительно, $f(2(n+1)+1+2) = f(2n+1) - 2 = 1 - (2n+1) - 2 = 1 - (2(n+1)+1)$.

[1] Заметим, что в данном случае достаточно доказать, что $f(x) = 1 - x$ верно для любого нечетного x.

Следовательно, $f(2017) = 1 - 2017 = -2016$.

<u>*Ответ.*</u> – 2016.

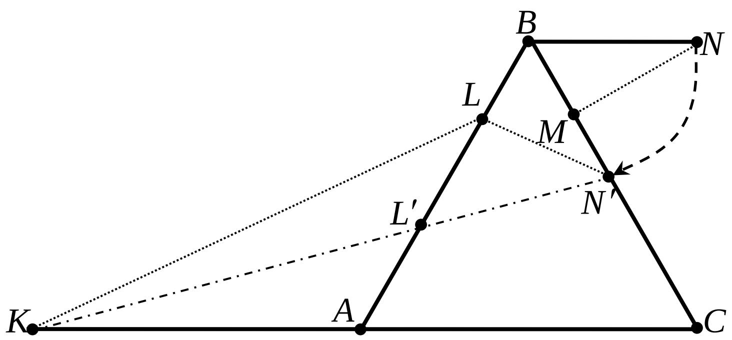
Содержание критерия	Оценка	Баллы
Полное решение.	+	14
Представлены все основные логические шаги решения. Доказано, что $f(x+2) = f(x) - 2$. В решении отсутствуют некоторые обоснования. Ответ верный.	±	11
Выписаны несколько первых значений последовательности $f(n)$. Делается предположение, что $f(x) = 1 - x$, но доказательство данного факта не приводится. Ответ верный.	+/2	7
Отмечено, что $f(x) = 1 - x$. Обоснования, а также частные подтверждения данного факта не приводятся. Ответ верный.	∓	3
Решение не соответствует ни одному критерию, описанному выше.	−/0	0
Максимальный балл		14

Задание 7. (14 баллов)

Дан правильный треугольник ABC со стороной 2. Точка K лежит на продолжении стороны AC за точку A, точка N лежит на прямой, параллельной прямой AC и проходящей через точку B, причем $|AK| = 2$, $|BN| = 1$. Рассматриваются такие ломаные $KLMN$, что точка L лежит на стороне AB, точка M лежит на стороне BC, а отрезок LM параллелен стороне AC. Найдите наименьшее возможное значение суммы $|KL| + |MN|$, если $|AN| > |CN|$.

<u>*Решение.*</u>

Повернем отрезок BN на 60° относительно точки B так, чтобы точка N перешла в середину стороны BC, на рисунке это точка N'. Тогда отрезок MN перейдет в отрезок LN'.



Таким образом, сумма $|KL|+|MN|$ равна длине ломанной KLN'. Это ломаная будет иметь наименьшую длину, если точка L лежит на прямой KN'. По теореме косинусов находим, что $\left(|KL|+|MN|\right)_{\min} = |KN'| = \sqrt{4^2+1^2-2\cdot 1\cdot 4\cdot\cos 60^\circ} = \sqrt{13}$.

Ответ. $\sqrt{13}$

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Полное решение.	+	14
Представлены все основные логические шаги решения. Допущена вычислительная ошибка.	+.	12
Приведена верная схема решения. Описан, но неверно реализован, поворот отрезка BN. Получен неверный ответ.	±	11
Задача сведена к задаче на нахождение наибольшего значения функции: сумма $|KL|+|MN|$ представлена как функция некоторой переменной. При решении последней задачи допущены ошибки в преобразованиях и/или при нахождении производной. Получен неверный ответ.		
Задача сведена к задаче на нахождение наибольшего значения функции: сумма $|KL|+|MN|$ представлена как функция некоторой переменной. Решение полученной задачи отсутствует.	+/2	7
Решение не соответствует ни одному критерию, описанному выше.	−/0	0
Максимальный балл		14

Задание 8. (16 баллов)

Два игрока по очереди выкладывают монеты в ряд. За один ход можно положить две или три монеты. Выигрывает тот, кто выложит 16 монету. Определите, какой игрок (первый или второй) обладает стратегией, которая позволит ему выиграть вне зависимости от ходов другого игрока. Опишите эту стратегию.

Решение.

Выигрышной стратегией обладает первый игрок. Для этого ему первым ходом нужно положить 2 монеты, а следующими ходами класть столько монет, чтобы сумма его монет и монет, положенных перед этим вторым игроком была равна 5. В этом случае после третьего хода первого игрока в ряду будут лежать 12 монет. Далее, как бы не сходил второй игрок своим третьим ходом и как бы после этого не сходил первый игрок 16 монета будет положена первым игроком.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Полное решение.	+	16

Используя перебор, описана выигрышная стратегия для первого игрока. Представлен полный перебор случаев, но не обосновано, что все случаи рассмотрены.	±	12
Используя перебор, описана выигрышная стратегия для первого игрока. Представлен неполный перебор случаев.	+/2	8
Указано, что выигрышной стратегией обладает первый игрок и, что первым ходом он должен положить 2 монеты. Доказательство этого факта не приводится. На частном примере показано, что данная стратегия приводит к выигрышу первого игрока.	∓	4
Решение не соответствует ни одному критерию, описанному выше.	−/0	0
Максимальный балл		14

ФИНАНСОВЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПРИ ПРАВИТЕЛЬСТВЕ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Всероссийская олимпиада школьников
«Миссия выполнима. Твое призвание-финансист!»

ЗАДАНИЯ, РЕШЕНИЯ, КРИТЕРИИ
ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ (ОЧНЫЙ) ЭТАП

Математика 10 класс, 2016/2017 учебный год

Задание 1. (10 баллов)

Сколько существует натуральных чисел n не превосходящих 2017, таких что квадратный трехчлен x^2+x-n раскладывается на линейные множители с целочисленными коэффициентами?

Решение.

По условию задачи $x^2+x-n=(x-a)(x-b)$. Следовательно, $ab=-n$, то числа a и b разных знаков и не равны нулю. Без ограничения общности будем считать, что $a\geq 0$. Поскольку $a+b=-1\Rightarrow b=-1-a$, то

$$ab=-n=a(-1-a)\Rightarrow a^2+a=n\leq 2017\Rightarrow a\leq 44.$$

Таким образом, получаем 44 пары чисел a и b, удовлетворяющих заданным условиям.

Ответ. 44.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Полное решение.	+	10
Все логические шаги решения приведены, в том числе оценка для одного из корней и связь между корнями квадратного трехчлена. Ответ неверный.	±	7
Верно дана оценка для одного из корней квадратного трехчлена. Ответ неверный или отсутствует.	+/2	5
Показана связь между n и корнями квадратного трехчлена. Приведены неверные оценки для одного из корней и/или количества чисел n, удовлетворяющих условию задачи.	∓	2
Решение не соответствует ни одному критерию, описанному выше.	−/0	0
Максимальный балл		10

Задание 2. (10 баллов)

В тридесятом государстве 29 февраля одного стародавнего года на ярмарке купец продавал сапоги-самоплясы за 2000 алтын. По правилам торговли, цена на товар корректируется каждое утро перед открытием. Цену можно увеличить на 10%, можно уменьшить на 1% или на 12% относительно цены предыдущего дня, а можно вообще не менять. При этом цена должна быть целым числом алтын, округлять ее нельзя. 1 апреля того же года боярин из торговой инспекции обнаружил, что у того же купца те же сапоги-самоплясы стоят 2017 алтын, и составил акт о нарушении правил торговли. Купец в ответ на это заявил, что никаких нарушений он не допускал. Кто из них прав?

Решение.

Прав боярин.

Если цена была равна s, то после изменения она должна составить $\frac{110}{100}s$, $\frac{99}{100}s$ или $\frac{88}{100}s$. При любом таком изменении новая цена должна делиться на 11. Число 9876543210 на 11 не делится, а потому оно не может быть получена с помощью нескольких таких изменений.

Ответ. Прав боярин.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Полное решение.	+	10
При решении задачи использовался метод перебора возможных изменений цены. Все варианты были представлены, но не обосновано, что других вариантов нет. Ответ верный.	±	7

При решении задачи использовался метод перебора возможных изменений цены. При этом один или два варианта не были представлены. Ответ верный.	+/2	5
При решении задачи использовался метод перебора возможных изменений цены. При этом более двух вариантов не было представлено. Ответ верный.	∓	2
Представлены формулы для всех возможных изменений цены. Ответ верный.		
Решение не соответствует ни одному критерию, описанному выше.	−/0	0
Максимальный балл		10

Задание 3. (12 баллов)

Числовая последовательность такова, что $x_n = \frac{x_{n-1}}{5} + 4$ для всех $n \geq 2$. Найдите x_{2017}, если $x_1 = 6$.

Решение.

$$x_2 = \frac{x_1}{5} + 4 = \frac{6}{5} + 4 = 5 + \frac{1}{5}.$$

$$x_3 = \frac{x_3}{5} + 4 = \frac{5 + \frac{1}{5}}{5} + 4 = 5 + \frac{1}{5^2}.$$

Докажем по индукции, что $x_n = 5 + \frac{1}{5^{1-n}}$ при всех натуральных *n*.

1) $n = 1$: $x_1 = 5 + \frac{1}{5^{1-1}} = 6$ - верно.

2) Пусть утверждение верно при $n = k$: $x_k = 5 + \frac{1}{5^{1-k}}$.

3) $n = k + 1$: $x_{k+1} = \frac{x_k}{5} + 4 = \frac{5 + \frac{1}{5^{1-k}}}{5} + 4 = 5 + \frac{1}{5^{1-(k+1)}}$.

Так как $x_n = 5 + \frac{1}{5^{1-n}}$, то $x_{2017} = 5 + \frac{1}{5^{-2016}}$

Ответ: $5 + \frac{1}{5^{-2016}}$.

Содержание критерия	**Оценка**	**Баллы**

Полное решение.	+	12
Выписаны несколько первых членов последовательности. Дополнительных обоснований не приведено или приведенные обоснования неверные. Ответ верный.	+/2	6
Выписаны несколько первых членов последовательности в виде суммы 5 и дроби. Ответ отсутствует или неверный.	∓	2
Решение не соответствует ни одному критерию, описанному выше.	−/0	0
Максимальный балл		12

Задание 4. (12 баллов)

Какое из чисел больше $\frac{1}{2016}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2016}\right)$ или $\frac{1}{2017}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2017}\right)$?

Решение.

Обозначим

$$x=\frac{1}{2016}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2016}\right),\ y=\frac{1}{2017}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2017}\right), a=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2016}\right).$$

Тогда $x=\frac{a}{2016}, y=\frac{1}{2017}\left(a+\frac{1}{2017}\right),\ x-y=\frac{a}{2016}-\frac{a}{2017}-\frac{1}{2017^2}=\frac{1}{2017}\left(\frac{a}{2016}-\frac{1}{2017}\right)>0,$

т.к. $a>1$.

Ответ: первое число больше.

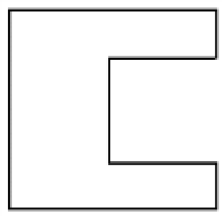
Содержание критерия	**Оценка**	**Баллы**
Полное решение.	+	12
Представлены все логические шаги решения. В результате вычислительной ошибки получен неверный ответ.	±	9
Показана связь между двумя сравниваемыми числами. При сравнении чисел допущены ошибки в алгебраических преобразованиях. Ответ приведен, возможно, неверный.	+/2	6
Показана связь между двумя сравниваемыми числами. Отсутствует полное обоснование верного ответа.		
При решении задачи использовался метод перебора возможных изменений цены. При этом более двух вариантов не было представлено. Ответ верный.	∓	2
Показана связь между двумя сравниваемыми числами. Ответа нет.		
Решение не соответствует ни одному критерию, описанному выше.	−/0	0
Максимальный балл		12

Задание 5. (12 баллов)

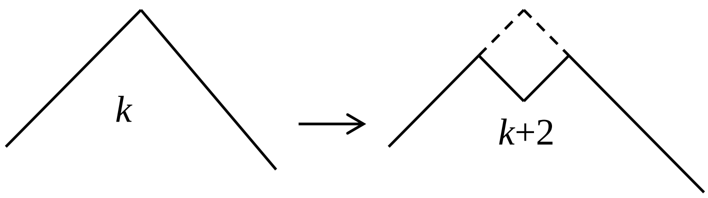
Для каких положительных целых $n > 2$ существует многоугольник с n вершинами (не обязательно выпуклый) такой, что каждая его сторона параллельна какой-либо другой его стороне?

Решение.

1. Если n – четное, то такой многоугольник существует. Достаточно взять правильный n-угольник.
2. Для $n = 3$ и 5 такого быть не может.
   Действительно, никакие две стороны в треугольнике не параллельны. Если каждая из сторон пятиугольника была бы параллельна другой стороне, мы бы нашли три параллельные стороны, при этом две из них должны были бы пересекаться. Это невозможно.
3. Для $n = 7$ такой многоугольник существует. Пример приведен на рисунке.



   Докажем по индукции, что для нечетного положительного числа n>5 искомый многоугольник существует. Пусть для некоторого целого k существует k-угольник, удовлетворяющий условию задачи. Выберем вершину, в которой внутренний угол многоугольника меньше 180^0. Теперь отрежем маленький параллелограмм как показано на рис. 2. Мы получим (k+2)-угольник, удовлетворяющий условию задачи.



Ответ: при $n \neq 3$ и $n \neq 5$.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Полное решение.	+	12
Доказано, что при четном n такой многоугольник существует. Доказано, что $n \neq 3$ и $n \neq 5$. Приведен пример семиугольника, который удовлетворяет условию задачи. Доказательство, что	+.	10

подобный многоугольник существует при нечетных n больше 7 неполное.		
Доказано, что при четном n такой многоугольник существует. Доказано, что $n \neq 3$ и $n \neq 5$. Приведен пример многоугольника с нечетным числом сторон, который удовлетворяет условию задачи.	±	9
Доказано, что при четном n такой многоугольник существует.	+/2	6
Верно рассмотрены случаи при некоторых n.	∓	2
Решение не соответствует ни одному критерию, описанному выше.	−/0	0
Максимальный балл		12

Задание 6. (14 баллов)

Натуральные числа a, b, c, d, и e являются последовательными членами арифметической прогрессии. Найдите наименьшее возможное значение числа c, если сумма $b + c + d$ является полным квадратом, а сумма $a + b + c + d + e$ является полным кубом.

Решение.

Поскольку $b + d = 2c,$ то $3c = n^2$ для некоторого натурального n.

Следовательно, n делиться на 3 и $c = 3l^2$ для некоторого натурального l.

Поскольку $a + b + d + e = 4c,$ то $5c = m^3$ для некоторого натурального m.

Следовательно, m делиться на 5 и $c = 5^2l^3$ для некоторого натурального l.

Наименьшее число, удовлетворяющее данным условиям равно $5^2 3^3 = 675$

Ответ. 675.

Содержание критерия	**Оценка**	**Баллы**
Полное решение.	+	14
Представлены основные логические шаги решения. В решении отсутствуют некоторые обоснования. Ответ верный.	±	11
Представлены основные логические шаги решения. Ответ неверный.	+/2	7
Решение содержит определенное продвижение в верном направлении. Ответ верный.		
Решение в целом неверное или незаконченное, но содержит определенное продвижение в верном направлении. Ответ неверный или отсутствует.	∓	3
Ответ верный. Решение отсутствует или неверное.		
Решение не соответствует ни одному критерию, описанному выше.	−/0	0

Максимальный балл	14

Задание 7. (14 баллов)

В конференции принял участие 281 сотрудник из 7 различных филиалов фирмы. В каждой группе из шести участников конференции по меньшей мере двое были одного возраста. Докажите, что среди всех участников можно найти пятерых одного возраста, одного пола и из одного филиала фирмы.

Решение

По принципу Дирихле как минимум в одном филиале как минимум 41 участник и как минимум 21 из них одного пола. Требуется доказать, что по меньшей мере 5 из этих 21 участника одного возраста. Если это не так, то существует не более 4 участников из каждой возрастной группы. В группе из 21 человека как минимум 6 возрастных групп, и если мы возьмем по представителю из каждой возрастной группы, то очевидно получим противоречие с одним из условий задачи.

Содержание критерия	**Оценка**	**Баллы**
Полное решение.	+	14
Доказательство приведено. Нет строгого обоснования отдельных фактов.	±	11
Доказательства нет. Имеется определенное продвижение в верном напралении.	∓	3
Решение не соответствует ни одному критерию, описанному выше.	−/0	0
Максимальный балл		14

Задание 8. (16 баллов)

Десять пиратов делят между собой золотые и серебряные монеты. Серебряных монет в два раза больше, чем золотых. Они разделили золотые монеты так, что разница между количеством золотых монет у любых двух пиратов не делится на 10. Докажите, что они не смогут разделить серебряные монеты подобным образом.

Решение.

Пусть a_1 – количество золотых монет у первого пирата, a_2 – у второго, и т.д. Так как a_i - a_j не делится на 10 для любых i и j, то числа $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$ должны давать различные остатки при делении на 10. Запишем $a_i=10k_i+l_i$., где l_i – остаток a_i при делении на 10. Общее количество золотых монет равно

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{10} = 10(k_1+k_2 + \cdots + k_{10}) + (l_1 + \cdots + l_{10}).$$

Так как числа $l_1, \dots, l_{10}$ - в точности числа 0, 1, 2, …, 9 (только не обязательно в таком порядке), то их сумма равна 45. Значит всего золотых монет $10(k_1 + k_2 + \dots + k_{10}) + 45$.

Предположим, что пираты могут разделить серебряные монеты таким же образом. Как и раньше мы можем показать, что общее количество серебряных монет $10(m_1 + m_2 + \dots + m_{10}) + 45$ для некоторых целых чисел $m_1, m_2, \dots, m_{10}$.

Но общее число серебряных монет четно, получаем противоречие.

Содержание критерия	**Оценка**	**Баллы**
Полное решение.	+	16
Доказательство приведено. Нет строгого обоснования отдельных фактов.	±	12
Доказательства нет. Доказано, что число золотых монет нечетно, а число серебряных монет четно.	+/2	8
Доказательства нет. Отмечено, но не доказано, что число золотых монет нечетно, а число серебряных монет четно.	∓	3
Решение не соответствует ни одному критерию, описанному выше.	−/0	0
Максимальный балл		16

Всероссийская олимпиада школьников
«Миссия выполнима. Твое призвание-финансист!»

ЗАДАНИЯ, РЕШЕНИЯ, КРИТЕРИИ
ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ (ОЧНЫЙ) ЭТАП

Математика 8-9 класс, 2016/2017 учебный год

Задание 1. (10 баллов)

Каждый из 2017 учащихся средней школы изучает английский или немецкий язык. Английский язык изучают от 70% до 85% от общего числа учащихся, а оба языка изучают от 5% до 8%. Какое наибольшее число школьников может изучать немецкий язык.

Решение.

Пусть A человек изучают английский язык, N – немецкий, а AN – оба языка.

Тогда $N = 2017 – A + AN$.

Известно, что $A \geq 2017 \cdot 0{,}7 = 1411{,}9$ и $AN \leq 0{,}08 \cdot 2017=161{,}36$.

Следовательно, $N \leq 2017 – 1412 + 161 = 766$.

Заметим, что $N = 766$, если $A = 1412$, $AN =161$

Ответ: 766.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Полное решение.	+	10
Допущена незначительная вычислительная ошибка.	+.	8
Приведены основные оценки. Отсутствует необходимая строгость в получении ответа. Ответ верный.	±	7
Приведены основные оценки. Отсутствует необходимая строгость в получении ответа. Ответ неверный.	+/2	5
Приведены не все оценки. Ответ не получен или неверный.	∓	2
Ответ верный, но решение отсутствует.		
Решение не соответствует ни одному критерию, описанному выше.	−/0	0
Максимальный балл		10

Задание 2. (10 баллов)

Иван-царевич сражается с Змеем Горынычем на Калиновом мосту. У Змея 198 голов. Одним взмахом меча Иван-царевич может отрубить пять голов, но после этого у Змея моментально отрастают новые головы в количестве, равном остатку при делении на 9 от числа оставшихся после удара Ивана-царевича голов. Если число оставшихся голов делится на 9, то новые головы не вырастают. Если голов перед взмахом у Змея Горыныча было пять или меньшее, то Иван царевич одним взмахом убивает поганого Змея. Сколько взмахов мечом должен сделать Иван-царевич, чтобы победить Змея Горыныча?

Решение.

События развивались так:

Было 198 голов,

1. Иван царевич взмахнул мечом, осталось 193 головы, выросли новые получилось 197,
2. Иван царевич взмахнул мечом, осталось 192, выросли новые получилось 195,

3. Иван царевич взмахнул мечом, осталось 190, выросли новые получилось 191,
4. Иван царевич взмахнул мечом, осталось 186, выросли новые получилось 192,
5. Иван царевич взмахнул мечом, осталось 187, выросли новые получилось 194,
6. Иван царевич взмахнул мечом, осталось 189, новые не выросли.

Таким образом, для уменьшения числа голов на 9 (с 198 до 189) понадобилось 6 взмахов.

Следовательно, для уменьшения числа голов с 198 до 9 понадобится 6·(198-9)/9 = 126 взмахов.

После этого нужно еще 4 взмаха:

1. Иван царевич взмахнул мечом, осталось 4 головы, выросли новые получилось 8,
2. Иван царевич взмахнул мечом, осталось 3, выросли новые получилось 6,
3. Иван царевич взмахнул мечом, осталось 1, выросли новые получилось 2,
4. Иван царевич взмахнул мечом и убил змея.

Ответ: 130 взмахов.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Полное решение.	+	10
Допущена незначительная вычислительная ошибка.	+.	8
Найдена основная идея решения. Решение неполное. Ответ верный.	$\pm$	7
Найдена основная идея решения. Найден период равный 9. Не учтено, что для четырех взмахов достаточно, чтобы отрубить последние 9 голов.	+/2	5
Показана идея периодичности, но период не найден или найден неверно.	$\mp$	2
Решение не соответствует ни одному критерию, описанному выше.	−/0	0
Максимальный балл		10

Задание 3. (12 баллов)

Найдите все пары (a, b) действительных чисел a и b таких, что уравнения $x^2 + ax + b^2 = 0$ и $x^2 + bx + a^2 = 0$ имеют хотя бы один общих корень.

Решение.

Пусть x_0 – общий корень уравнений.

Подставляя x_0 в уравнения и вычитая одно из другого, получим

$$(a-b)x_0 + b^2 - a^2 = 0 \Leftrightarrow (a-b)\big(x_0 - (a+b)\big) = 0.$$

1) Пусть $a \neq b$, тогда $x_0 = a + b$ и

$(a+b)^2 + a(a+b) + b^2 = 0$ или $2a^2 + 3ab + 2b^2 = 0$ или $2(a + \frac{3}{4}b)^2 + \frac{7}{8}b^2 = 0.$ Откуда следует, что $a = b = 0$, противоречие.

2) Пусть $a = b$, тогда оба уравнения имеют вид $x^2 + ax + a^2 = 0$ с дискриминантом $-3a^2 \leq 0$. Следовательно, единственная возможность это $a = b = 0$.

<u>*Ответ.*</u> (0,0)

Содержание критерия	**Оценка**	**Баллы**
Полное решение.	+	12
Найдена основная идея решения. Показано, что других решений нет. Решение неполное или содержит недочеты. Ответ верный.	±	9
Найдена основная идея решения. Ответ верный. Не показано, что других решений нет.	+/2	6
Приведен верный ответ. Решение отсутствует или не содержит продвижения в верном направлении.	∓	2
Решение не соответствует ни одному критерию, описанному выше.	−/0	0
Максимальный балл		12

Задание 4. (12 баллов)

Найдите наименьшее положительное целое число, в котором произведение цифр равно 5120.

<u>*Решение.*</u>

Так как 5120=$2^{10} \cdot 5$, то основной вопрос – сколько цифр в этом числе. Очевидно, что среди цифр нет 0 и есть 5. Из десяти множителей 2 мы можем сделать минимально 4 цифры. Это возможно сделать двумя способами: 2,8,8,8 или 4,4,8,8. Тогда из двух наборов цифр 5,2,8,8,8 и 5,4,4,8,8 мы должны составить наименьшее число. Первая цифра должна быть минимальной, т.е. 2.

<u>*Ответ:*</u> 25888.

Содержание критерия	**Оценка**	**Баллы**
Полное решение.	+	12
Приведена идея разложения числа на простые множители. Представлены не все варианты разложения. Ответ верный.	±	9
Найдена основная идея решения. Представлены все варианты разложения. Получен неверный ответ.	+/2	6

Приведена идея разложения числа на простые множители. Представлены не все варианты разложения. Ответ неверный.	∓	2
Ответ верный, решение отсутствует.		
Решение не соответствует ни одному критерию, описанному выше.	−/0	0
Максимальный балл		10

Задание 5. (12 баллов)

Ася учится писать и умеет писать три буквы А, С и Я. Мама предложила ей написать семь букв подряд. В полученном «слове» три подряд идущих буквы образовали имя «АСЯ». Сколько существует таких различных семибуквенных «слов»?

Решение.

Можно рассмотреть слово АСЯ как четвертую букву, тогда семибуквенные слова превратятся в пятибуквенные. «Буква» АСЯ может стоять на одном из 5 мест, в остальных местах может стоять любая из 3 букв, следовательно, получаем $5 \cdot 3^4 = 405$ слов. При этом среди них есть слова, где «буква» АСЯ написана дважды. Эти слова посчитаны дважды. Таких слов $3 \cdot 3 = 9$: *x*АСЯАСЯ, АСЯ*x*АСЯ, АСЯАСЯ*x*, где *x* – одна из букв А, С или Я. Таким образом, всего различных слов, содержащих имя АСЯ равно 405 – 9 = 396.

Ответ: 396.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Полное решение.	+	12
Допущена незначительная вычислительная ошибка.	+.	10
Правильно представлены расчеты без учета повторения имени в «слове». Учтено, что имя может повторяться, но при этом допущены ошибки.	±	9
Правильно представлены расчеты без учета повторения имени в «слове». Не учтено, что имя может повторяться.	+/2	6
Представлены расчеты без учета повторения имени часть из которых верные.	∓	2
Указана идея, что имя может повторяться. Расчеты неверные.		
Решение не соответствует ни одному критерию, описанному выше.	−/0	0
Максимальный балл		10

Задание 6. (14 баллов)

На хорде AB окружности отмечена точка P так, что $AP = 2PB$. Хорда DE перпендикулярна AB и проходит через точку P. Докажите, что середина отрезка AP является точкой пересечения высот треугольника AED.

Решение.

Пусть M – середина отрезка AP, а прямая EM пересекает отрезок AD в точке Q. Треугольники MPE и BPE – равны по двум катетам. Тогда углы $\angle QAM = \angle DAB = \angle DEB = \angle PEB = \angle PEM$. Т.к. $\angle QMA = \angle EMP$, то треугольники QMA и EMP имеют два равных угла. Значит у них равен и третий угол, и он прямой. EQ и AP – высоты в треугольнике ADE, значит M – точка пересечения высот.

Содержание критерия	**Оценка**	**Баллы**
Полное решение.	+	14
Доказательство приведено. Нет строгого обоснования отдельных фактов.	±	11
Приведены основные оценки. Отсутствует необходимая строгость в получении ответа. Ответ неверный.	+/2	7
Доказательства нет, но имеется определенное продвижение в верном направлении.	∓	3
Решение не соответствует ни одному критерию, описанному выше.	–/0	0
Максимальный балл		14

Задание 7. (14 баллов)

В некоторой компании ни у каких двух сотрудников нет работы одинаковой сложности, и никакие двое не получают одинаковую зарплату. 1 апреля каждый сотрудник сделал два утверждения:

(а) Не найдется 12 сотрудников с более сложной работой.

(б) По меньшей мере 30 сотрудников имеют большую зарплату.

Сколько сотрудников в компании, если часть сотрудников дважды сказали правду, а остальные дважды солгали.

Решение.

Если 1 апреля все сотрудники компании сказали правду, то второе утверждение про наибольшую зарплату ложно, что быть не может. Если же все они солгали, то первое утверждение для сотрудника с наибольшей зарплатой будет верно, то есть вновь получаем противоречие.

Таким образом, существует хотя бы один солгавший и хотя бы один сказавший правду.

Возьмем сотрудника, сказавшего правду с наибольшей зарплатой из всех правдивых сотрудников. Поскольку из его второго утверждения следует, что по меньшей мере 30 «лжецов» имеют большую зарплату, чем он. Второе утверждение солгавшего сотрудника, имеющего наименьшую зарплату среди «лжецов» ложно, таким образом, не более 29 «лжецов» имеют большую зарплату и не более 30 «лжецов» всего. То есть лжецов всего 30.

Первое утверждение для «лжеца» с наиболее трудной работой среди всех «лжецов» ложно, поэтому существуют по меньшей мере 12 правдивых сотрудников, имеющих более трудную работу.

Первое утверждение для правдивого сотрудника с наименее сложной работой среди всех правдивых сотрудников верно, поэтому существует не более 12 правдивых сотрудников всего. То есть правдивых сотрудников ровно 12.

Окончательно получаем, что в компании работают 42 сотрудника.

Ответ. 42

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Полное решение.	+	14
Ответ верный. Нет строгого обоснования, что лжецов 30 или что правдивых сотрудников 12.	±	11
Ответ верный. Утверждается, что лжецов 30, а правдивых сотрудников 12, но не доказываны оба эти факта.	+/2	7
Приведен верный ответ. В решении не указано, что лжецов 30, а правдивых сотрудников 12.	∓	3
Решение не соответствует ни одному критерию, описанному выше.	−/0	0
Максимальный балл		14

Задание 8. (16 баллов)

В классе 14 девочек. Каждая из них узнала, скольких девочек в классе зовут также как ее, и у скольких такая же фамилия, и выписала два числа на доску. Оказалось, что среди чисел на доске встречаются все числа от 0 до 6. Докажите, что найдутся две девочки в классе, у которых совпадают и имя, и фамилия.

Решение.

Рассмотрим множества девочек с одинаковым именем. Это подмножества множества из 14 девочек. Также рассмотрим множества девочек с одинаковой фамилией, это тоже подмножества исходного множества. Каждая девочка принадлежит двум таким множествам, и по условию задачи эти множества содержат 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 человек, но сумма этих чисел 1+2+3+4+5+6+7=28. Таким образом, есть по одному множеству каждого размера и нет никаких других множеств.

Предположим без ограничения общности, что множество из 7 элементов – это множество девочек с одинаковым именем. Существуют по меньшей мере 6 множеств девочек с одинаковой фамилией и по принципу Дирихле, две девочки из множества из 7 имеют одинаковое имя и фамилию.

Содержание критерия	**Оценка**	**Баллы**
Полное решение.	+	16
Доказательство приведено. Нет строгого обоснования отдельных фактов.	±	12
Доказательства нет. Определено количество множества девочек с одинаковой фамилией и множества девочек с одинаковым именем.	+/2	8
Доказательства нет. Для множеств девочек с одинаковой фамилией и/или одинаковым именем определено количество элементов.	∓	3
Решение не соответствует ни одному критерию, описанному выше.	−/0	0
Максимальный балл		16

Всероссийская олимпиада школьников
«Миссия выполнима. Твое призвание-финансист!»

ОТБОРОЧНЫЙ (ЗАОЧНЫЙ) ЭТАП

Математика 11 класс, 2016/2017 учебный год

ЗАДАНИЕ 1. (10 БАЛЛОВ)

За первый квартал цена акции выросла на a %, а по итогам второго квартала снизилась на те же a % и составила 2464 рубля за одну акцию. Найдите значение a, если начальная цена акции была равна 2500 рублей за акцию.

ЗАДАНИЕ 2. (10 БАЛЛОВ)

Сколько различных решений в натуральных числах имеет уравнение
$x^4y^4 - 10x^2y^2 + 9 = 0$?

ЗАДАНИЕ 3. (10 БАЛЛОВ)

Дон Кихот, проезжая на своем коне, встретил Санчо Панса, идущего в противоположную сторону. Проехав еще 1,5 минуты в том же направлении, Дон Кихот спрыгнул с коня и стал догонять Санчо Панса. Скорость Дон Кихота в 4 раза меньше скорости его коня. Во сколько раз скорость Дон Кихота больше скорости Санчо Панса, если он догнал Санчо Панса через 15 минут после их встречи?

ЗАДАНИЕ 4. (10 БАЛЛОВ)

Известно, что $|x| + x + y = 10$, а $x + |y| - y = 12$. Найдите значение выражения $x + y$.

ЗАДАНИЕ 5. (10 БАЛЛОВ)

Б, А, Н, К – различные натуральные числа. Известно, что Б·А·Н·К = 2160. Какое наибольшее значение может принимать сумма Б+А+Н+К?

ЗАДАНИЕ 6. (10 БАЛЛОВ)

На сторонах *AB, BC* и *CD* треугольника *ABC* взяты точки *K, L* и *M* соответственно. Известно, что $AK:KB = BL:LC = CM:AM = 1:7$. Найдите площадь треугольника *KLM*, если площадь треугольника *ABC* равна 64.

ЗАДАНИЕ 7. (10 БАЛЛОВ)

В выборах в городской парламент участвовали 9 партий. В парламент проходят партии, за которые на выборах проголосовало строго больше 5% избирателей. Между прошедшими в парламент партиями места распределяются пропорционально числу набранных ими голосов. После выборов оказалось, что каждый избиратель проголосовал ровно за одну из партий. При этом партия «Наш край» набрала 26 % голосов. Какое наибольшее число мест в парламенте она могла получить, если в парламенте 100 мест?

ЗАДАНИЕ 8. (10 БАЛЛОВ)

Найдите остаток от деления числа $2016^{2017} - 2017^{2016}$ на 11.

ЗАДАНИЕ 9. (10 БАЛЛОВ)

Найдите значение выражения $ax^5 + by^5$, если числа *a, b, x, y* удовлетворяют системе уравнений $\begin{cases} ax + by = 2, \\ ax^2 + by^2 = 16, \\ ax^3 + by^3 = 20, \\ ax^4 + by^4 = 52. \end{cases}$

ЗАДАНИЕ 10. (10 БАЛЛОВ)

Множество натуральных чисел разбили на множества $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$ следующим образом

$$S_1 = \{1\};$$
$$S_2 = \{2,3\};$$
$$S_3 = \{4,5,6\};$$
$$S_4 = \{7,8,9,10\};$$
$$\ldots\ \ldots\ \ldots$$

Найдите сумму элементов множества S_{21}.

Всероссийская олимпиада школьников
«Миссия выполнима. Твое призвание-финансист!»

ОТБОРОЧНЫЙ (ЗАОЧНЫЙ) ЭТАП

Математика 10 класс, 2016/2017 учебный год

ЗАДАНИЕ 1. (10 БАЛЛОВ)

Найдите наибольший корень уравнения $|x-2015|=|x-2017|$.

ЗАДАНИЕ 2. (10 БАЛЛОВ)

В квадрат площадью 48 см^2 вписана окружность, в которую вписан второй квадрат, в который вписана вторая окружность, в которую вписан третий квадрат. Найдите площадь третьего квадрата.

ЗАДАНИЕ 3. (10 БАЛЛОВ)

На вопрос: «Будет ли новый директор лучше прежнего?» ответили 200 работников предприятия. Из них x человек считают, что будет лучше, y – что будет такой же и z – что будет хуже. Других ответов не было. Социологи построили два показателя «оптимизма» опрошенных: $M = x + \frac{y}{2}$, $N = x - z$. Оказалось, что $M = 110$. Чему равно N?

ЗАДАНИЕ 4. (10 БАЛЛОВ)

На одной из вечеринок присутствовали 11 супружеских пар. Каждый из мужчин поздоровался за руку со всеми, кроме своей жены. Женщины приветствовали друг друга без рукопожатия. Сколько было различных рукопожатий?

ЗАДАНИЕ 5. (10 БАЛЛОВ)

Какое наименьшее количество подряд идущих натуральных чисел необходимо перемножить, чтобы полученное произведение заведомо было кратно числу 2016?

ЗАДАНИЕ 6. (10 БАЛЛОВ)

Возрастающая последовательность 2,3,5,6,7,10,11,… состоит из всех положительных чисел, которые не являются ни квадратом, ни кубом натурального числа. Найдите 600-й член этой последовательности.

ЗАДАНИЕ 7. (10 БАЛЛОВ)

Некоторое число в десятичной записи содержит 64 цифры, причем среди этих цифр есть только цифры 4, 5 и 6. Количество четверок на 17 больше количества шестерок. Найдите остаток от деления этого числа на 9.

ЗАДАНИЕ 8. (10 БАЛЛОВ)

Две свечи одинаковой длины были зажжены ночью в одно и тоже время. Первая свеча сгорает полностью за 3 часа, а вторая – за 4 часа. В четыре часа утра обнаружилось, что длина одной из свеч в два раза больше длины второй. Определите во сколько были зажжены свечи, если они сгорают равномерно.

ЗАДАНИЕ 9. (10 БАЛЛОВ)

Пусть y равно сумме цифр натурального числа x, а z – равно сумме цифр числа y. Найдите все значения x, удовлетворяющих уравнению $x+y+z=72$. В ответ запишите сумму найденных чисел.

ЗАДАНИЕ 10. (10 БАЛЛОВ)

В таблице приведены результаты сдачи ЕГЭ по математике в двух регионах, в каждом из которых выделили два типа школ: специализированные и общеобразовательные.

	Регион А	Регион В	Оба региона
Средний балл	74	84	
Средний балл в специализированных школах	76	90	?
Средний балл в общеобразовательных школах	71	81	79

Найдите средний балл ЕГЭ по математике в специализированных школах данных регионов.

Всероссийская олимпиада школьников
«Миссия выполнима. Твое призвание-финансист!»

ОТБОРОЧНЫЙ (ЗАОЧНЫЙ) ЭТАП

Математика 8-9 класс, 2016/2017 учебный год

ЗАДАНИЕ 1. (10 БАЛЛОВ)

В первый свой приезд купец купил на ярмарке некоторое количество шапок по цене 16 рублей за шапку и затем продал их на 25% дороже. Приехав второй раз на ярмарку, купец сумел купить то же количество шапок на 5% дешевле. На сколько процентов купец может понизить цену продажи, чтобы получить прибыль в рублях ту же, что и в первый раз?

ЗАДАНИЕ 2. (10 БАЛЛОВ)

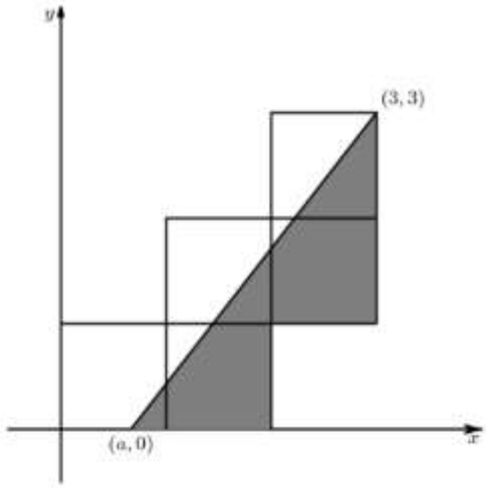
В треугольнике все длины сторон являются натуральными числами. При этом длина одной из сторон в три раза больше длины второй стороны, а длина третьей стороны равна 15 см. Найдите максимально возможный периметр этого треугольника.

ЗАДАНИЕ 3. (10 БАЛЛОВ)

Юный финансист Боря изучает Налоговый Кодекс России, записывая подряд без пробелов цифры номеров изученных страниц: 12345678910111213… К концу дня оказалось, что он написал 2016 цифр. Сколько страниц Налогового Кодекса изучил Боря?

ЗАДАНИЕ 4. (10 БАЛЛОВ)

Пять равных квадратов со стороной равной 1 см, расположенных на координатной плоскости разделили на светлую и темную часть, как показано на рисунке.



Найдите значение параметра *a*, если площадь светлой части составляет 60 % площади темной части. Чему при этом равна площадь темной фигуры?

ЗАДАНИЕ 5. (10 БАЛЛОВ)

У Ваниного калькулятора есть один изъян. При выводе на экран он иногда, но не обязательно всегда, цифру *a* заменяет на цифру *b*. При вычислении суммы двух чисел Ваня увидел на экране следующее выражение:

$$742586 + 829430 = 1212016.$$

Найдите цифры *a* и *b*.

ЗАДАНИЕ 6. (10 БАЛЛОВ)

У Коли в ящике шкафа лежат носки четырех цветов. В темноте он вынимает из ящика некоторое количество носков, не видя их цвета. Какое наименьшее количество носков должен вынуть Коля, чтобы среди них гарантированно оказалось 8 пар носков одного цвета?

ЗАДАНИЕ 7. (10 БАЛЛОВ)

Известно, что $ax^3 + bx^2 + 1 = (x^2 - x - 1)(ax + c)$. Чему равно значение *b*?

ЗАДАНИЕ 8. (10 БАЛЛОВ)

Некоторое число в десятичной записи содержит 64 цифры, причем среди этих цифр есть только цифры 4, 5 и 6. Количество четверок на 17 больше количества шестерок. Найдите остаток от деления этого числа на 9.

ЗАДАНИЕ 9. (10 БАЛЛОВ)

В выборах в городской парламент участвовали 9 партий. В парламент проходят партии, за которые на выборах проголосовало строго больше 5% избирателей. Между прошедшими в парламент партиями места распределяются пропорционально числу набранных ими голосов. После выборов оказалось, что каждый избиратель проголосовал ровно за одну из партий. При этом партия «Наш край» набрала 26 % голосов. Какое наибольшее число мест в парламенте она могла получить, если в парламенте 100 мест?

ЗАДАНИЕ 10. (10 БАЛЛОВ)

При каком простом значении параметра p уравнение $x^2+2px-1776p=0$ будет иметь два различных целочисленных корня?

Всероссийская олимпиада школьников
«Миссия выполнима. Твое призвание-финансист!»

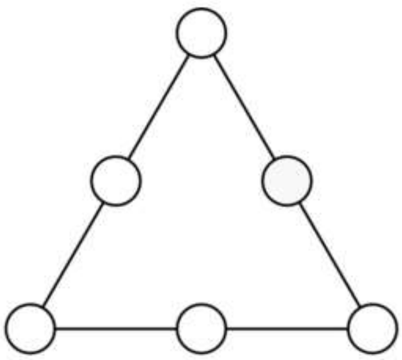
ЗАДАНИЯ, РЕШЕНИЯ, КРИТЕРИИ
ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ (ОЧНЫЙ) ЭТАП

Математика 11 класс, 2015/2016 учебный год

Задание 1. (10 баллов)

Шесть последовательных натуральных чисел от 10 до 15 вписаны в круги на сторонах треугольника таким образом, что суммы трех чисел на каждой из сторон равны.

Какое максимальное значение может принимать эта сумма?



Решение.

Пусть a, b, c, d, e, f – указанные числа, записанные в порядке их следования в кругах при обходе по часовой стрелке и числа a, c, e располагаются в вершинах треугольника. Если S – рассматриваемая сумма, то имеем

$$\begin{cases} a+b+c=S, \\ c+d+e=S, \\ e+f+a=S. \end{cases}$$

Складывая все уравнения данной системы получаем,

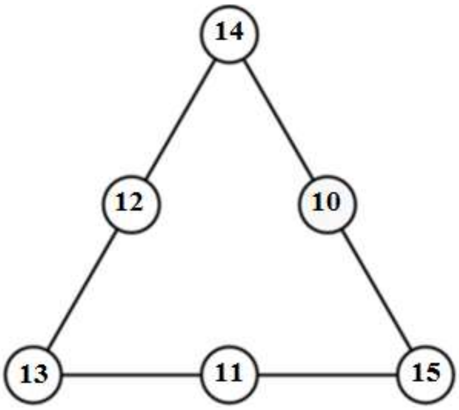
$$(a+b+c+d+e+f)+a+c+e=3S \quad \Rightarrow$$

$$(10+11+12+13+14+15)+a+c+e=75+a+c+e=3S \quad \Rightarrow.$$

$$S=25+\frac{a+c+e}{3}.$$

Следовательно, число S не может быть больше числа $25+\dfrac{15+14+13}{3}=39.$

Рисунок ниже показывает, что число S может быть равно 39.



<u>Ответ:</u> 39.

Задание 2. (10 баллов)

Найти значение параметра p, при котором уравнение $px^2=|x-1|$ имеет ровно три решения.

Решение

Заметим, что при $p<0$ данное уравнение не имеет решения, а при $p=0$ – имеет единственное решение $x=1$. Следовательно, $p>0$.

Данное уравнение будет иметь три корня, если парабола $y = px^2$ имеет ровно три общие точки с «уголком» $y = |x-1|$. Поскольку левая ветвь «уголка» при $p > 0$ пересекает параболу ровно в двух точках, то правая ветвь должна касаться параболы.

Последнее выполняется тогда и только тогда, когда уравнение $px^2 = x-1$имеет ровно одно решение, то есть когда

$$D = 1-4p = 0 \quad \Leftrightarrow \quad p = \frac{1}{4}$$

<u>Ответ</u>: $p = \frac{1}{4}$.

Задание 3. (12 баллов)

Егоров решил открыть накопительный вклад для покупки автомобиля стоимостью 900000 руб. Начальная сумма вклада равна 300000 руб. Через месяц и далее ежемесячно Егоров планирует пополнять свой вклад на 15000 руб. Банк начисляет ежемесячно проценты по ставке 12% годовых. Начисленные за месяц проценты перечисляются на вклад, и в следующем месяце на них также начисляются проценты. Через какое наименьшее число месяцев на вкладе будет сумма достаточная для покупки автомобиля?

Решение

Пусть S_n – сумма вклада через n месяцев после начисления процентов и после внесения дополнительных взносов D (15000 руб.).

Так как в месяц банк начисляет 1%, то

$$S_1 = 300000(1+0,01)+D,$$

$$S_2 = S_1(1+0,01)+D = (S_0(1+0,01)+D)(1+0,01)+D = S_0(1+0,01)^2 + D\big(1+(1+0,01)\big)$$

$$S_3 = S_2(1+0,01) = (S_0(1+0,01)^2 + D(1+0,01)+D)(1+0,01)+D =$$

$$= S_0(1+0,01)^3 + D\big((1+0,01)^2 + (1+0,01)+1\big)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$S_n = S_0(1+0,01)^n + D\big((1+0,01)^{n-1} + (1+0,01)^{n-2} + \ldots + (1+0,01)+1\big)$$

По формуле суммы n членов геометрической прогрессии получаем

$$(1+0,01)^{n-1} + (1+0,01)^{n-2} + \ldots + (1+0,01)+1 = \frac{1,01^n - 1}{1,01-1} = \frac{1,01^n-1}{0,01}.$$

Следовательно, $S_n = S_0(1+0,01)^n + D\dfrac{1,01^n - 1}{0,01}$.

Искомое число месяцев удовлетворяет неравенству

$$300000 \cdot 1,01^n + 15000\frac{1,01^n - 1}{0,01} \geq 900000 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad 3 \cdot 1,01^n + 15(1,01^n - 1) \geq 9 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad 18 \cdot 1,01^n \geq 24 \quad \Leftrightarrow \quad 1,01^n \geq \frac{24}{18} \quad \Leftrightarrow \quad n \geq 28,91$$

Таким образом, достаточная для покупки автомобиля сумма будет на вкладе через 29 месяцев.

Ответ: 29.

Задание 4. (12 баллов)

Решите уравнение $(x+2)^4 + x^4 = 82$.

Решение

Пусть $y = x+1$, тогда получаем

$$(y+1)^4 + (y-1)^4 = 82 \Leftrightarrow y^4 + 6y^2 - 40 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y^2 = -10 \\ y^2 = 4 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = -3 \\ x = 1 \end{array}\right.$$

Ответ: $x_1 = -3; x_2 = 1$.

Задание 5. (12 баллов)

Код сейфа состоит из пяти идущих подряд цифр. Василий Петрович положил деньги в сейф, а когда захотел их забрать, выяснилось, что он забыл код. Он только помнил, что в коде были числа 21 и 16. Какое наименьшее количество пятизначных номеров необходимо перебрать, чтобы наверняка открыть сейф?

Решение

Рассмотрим несколько случаев.

1. Код содержит комбинацию цифр 216. Ее можно расположить в коде тремя способами: **216, *216* или 216**. В каждом из этих возможных кодов каждую из остальных цифр можно выбрать 10 способами.

Таким образом, получается $3 \cdot 100 = 300$ вариантов.

2. Код содержит комбинации 21 и 16, причем комбинация 21 расположена левее. Тогда оставшуюся цифру можно выбрать 10 способами и поставить ее на одно из трех мест. То есть 30 вариантов.

3. Код содержит комбинации 21 и 16, причем комбинация 21 расположена правее. Аналогично - 30 вариантов.

Заметим, что числа 21621, 21216, 21616, 16216 мы посчитали дважды.

Таким образом, чтобы открыть сейф достаточно перебрать 300+30+30-4=356 номеров.

<u>Ответ</u>: 356

Задание 6. (14 баллов)

Конечная последовательность чисел $x_1, x_2, \ldots, x_N$ обладает следующим свойством:

$$x_{n+2} = x_n - \frac{1}{x_{n+1}} \text{ для всех } 1 \le n \le N-2.$$

Найдите максимально возможное число членов данной последовательности, если $x_1 = 20;\ x_2 = 16.$

Решение

Последовательность будет иметь максимальное число членов, если последний ее член будет равен нулю. Иначе эту последовательность можно продолжить.

Для всех $1 \le n \le N-2$ имеем

$$x_{n+2} = x_n - \frac{1}{x_{n+1}} \quad \Leftrightarrow \quad x_{n+2} \cdot x_{n+1} = x_{n+1} \cdot x_n - 1 \quad \Leftrightarrow \quad x_{n+1} \cdot x_n = x_{n+2} \cdot x_{n+1} + 1.$$

Пусть $x_N = 0$, тогда

$$x_{N-1} \cdot x_{N-2} = x_N \cdot x_{N-1} + 1 = 1;$$

$$x_{N-2} \cdot x_{N-3} = x_{N-1} \cdot x_{N-2} + 1 = 1 + 1 = 2;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots....$$

$$x_3 \cdot x_2 = (N-4) + 1 = N-3;$$

$$x_2 \cdot x_1 = (N-3) + 1 = N-2 = 20 \cdot 16 \quad \Rightarrow \quad N = 20 \cdot 16 + 2 = 322.$$

<u>Ответ</u>: 322.

Задание 7. (14 баллов)

Несколько бизнесменов решили открыть фирму и делить всю прибыль на равные части. Одного из бизнесменов назначили директором. Однажды этот директор фирмы перевел часть прибыли со счета фирмы на свой собственный счет. Эта часть денег была втрое больше, чем часть каждого из остальных, если бы они разделили остаток прибыли между собой поровну. После этого директор покинул фирму. Следующий директор фирмы, один из оставшихся бизнесменов, сразу же поступил точно также, как и предыдущий и т.д. В конце концов, предпоследний директор фирмы перевел на свой собственный счет часть прибыли, которая также была в три раза больше, чем осталось у последнего бизнесмена. В результате этих распределений доходов последний бизнесмен получил денег в 190 раз меньше, чем первый директор фирмы. Сколько бизнесменов открыли эту фирму?

Решение.

Пусть n – количество бизнесменов и d_i – прибыль i-го директора, $i = 1, \ldots, n$.

По условию $d_i = 3\dfrac{d_{i+1} + d_{i+2} + \ldots + d_n}{n-i}$. Тогда

$$d_{i-1} = 3\frac{d_i + d_{i+1} + \ldots + d_n}{n-i+1} = 3\frac{3\dfrac{d_{i+1} + d_{i+2} + \ldots + d_n}{n-i} + d_{i+1} + \ldots + d_n}{n-i+1} =$$

$$= 3\frac{(n-i+3)(d_{i+1} + d_{i+2} + \ldots + d_n)}{(n-i)(n-i+1)}.$$

Таким образом, $\dfrac{d_{i-1}}{d_i} = \dfrac{n-i+3}{n-i+1}, \quad i = 2, \ldots, n.$

Перемножая эти равенства, получим

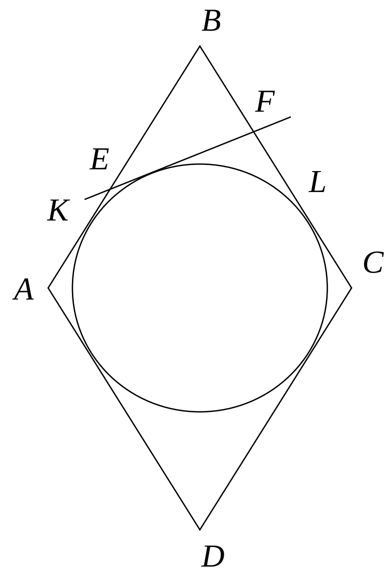
$$\frac{d_1}{d_n} = \frac{d_1}{d_2} \cdot \frac{d_2}{d_3} \cdot \ldots \cdot \frac{d_{n-1}}{d_n} = \frac{n+1}{n-1} \cdot \frac{n}{n-2} \cdot \ldots \cdot \frac{4}{2} \cdot \frac{3}{1} = \frac{(n+1)n}{2}.$$

По условию $\dfrac{d_1}{d_n} = 190$, то есть $(n+1)n = 380$, откуда $n = 19$.

<u>Ответ</u>: 19.

Задание 8. (16 баллов)

Касательная *l* к окружности, вписанной в ромб, пересекает его стороны AB и BC в точках E и F соответственно. Докажите, что произведение $AE\cdot FC$ не зависит от выбора касательной *l*.



Решение.

Пусть

$$q = BK,\ p = AK,\ x = EK,\ y = FL$$

(K и L – точки касания вписанной окружности со сторонами AB и BC) и $\alpha = \angle ABC$.

Докажем, что $AE \cdot FC = (p + x)(p + y)$ не зависит от x и y.

Рассмотрим треугольник EBF, в котором

$$EB = q - x, BF = q - y, EF = x + y.$$

По теореме косинусов

$$(x + y)^2 = (q - x)^2 + (q - y)^2 - 2(q - x)(q - y)\cos\alpha,$$

откуда

$$xy = (q^2 - xq - yq)\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}.$$

Так как $p = q\ \mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}$, получаем

$$AE \cdot FC = p^2 + p(x + y) + xy = p^2 + q^2\ \mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}.$$

Видим, что произведение $AE \cdot FC$ не зависит от x и y, следовательно, не зависит от выбора касательной.

Критерии оценки олимпиадных заданий по математике

Правильное и полное решение задачи оценивается указанными в условии баллами.

<u>Полным</u> считается решение, содержащее

- правильную последовательность всех его шагов;
- верное обоснование всех ключевых моментов;
- безошибочные чертежи, рисунки, схемы;
- правильно выполненные вычисления и преобразования.

За погрешности и ошибки, допущенные при выполнении задания, с каждой задачи снимается определенное количество баллов, зависящее от характера допущенных ошибок.

К недочетам относятся описки, негрубые вычислительные ошибки, не влияющие на правильность дальнейшего хода рассуждений.

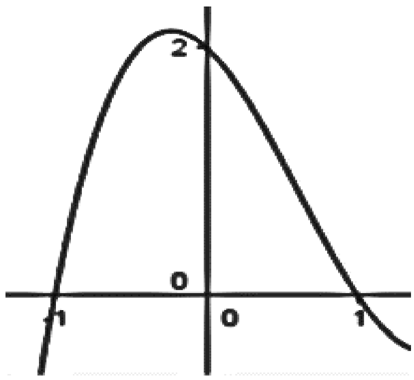
Шкала оценивания заданий

Качество выполнения задания	**Оценка**	**Максимальное число баллов за задание**			
		10	**12**	**14**	**16**
		Баллы			
Полное решение	+	10	12	14	16
Решение с недочетом/недочетами	+.	8	10	12	14
Решение, содержащее верную общую схему решения, в котором отсутствуют некоторые обоснования.	±	7	9	11	12
Найдена идея решения, но оно не доведено до конца. При этом выполнена некоторая существенная часть задания	+/2	5	6	7	8
Решение в целом неверное или незаконченное, но содержит определенное продвижение в верном направлении	∓	2	2	3	3
Остальные случаи	–/ 0	0	0	0	0

Всероссийская олимпиада школьников
«Миссия выполнима. Твое призвание-финансист!»

ЗАДАНИЯ, РЕШЕНИЯ, КРИТЕРИИ
ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ (ОЧНЫЙ) ЭТАП

Математика 10 класс, 2015/2016 учебный год



Задание 1. (10 баллов)

На рисунке изображен график функции
$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

Найдите значение параметра b.

Решение.

Из рисунка следует

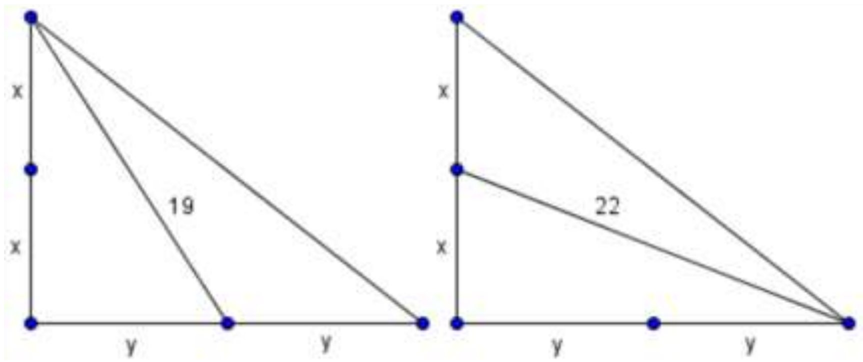
$$\begin{cases} -f(-1) = a - b + c - d = 0 \\ f(1) = a + b + c + d = 0 \\ f(0) = d = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b + d = 0 \\ d = 2 \end{cases} \Rightarrow b = -2.$$

Ответ: -2.

Задание 2. (10 баллов)

В прямоугольном треугольнике ABC (угол C – прямой) проведены медианы AM и BN, длины которых равны 19 и 22 соответственно. Найдите длину гипотенузы данного треугольника.

Решение.



Пусть $AC = 2x$, а $BC = 2y$. По теореме Пифагора имеем

$$\begin{cases} (2x)^2 + y^2 = 19^2 \\ x^2 + (2y)^2 = 22^2 \end{cases} \Rightarrow \quad 5x^2 + 5y^2 = 19^2 + 22^2 = 845 \quad \Rightarrow$$

$$BC^2 = 4x^2 + 4y^2 = 4 \cdot 169 \quad \Rightarrow \quad BC = 26.$$

Ответ: 26.

Задание 3. (12 баллов)

Бухгалтеры, менеджеры и экономисты банка сидят за круглым столом. Когда директор попросил поднять руку бухгалтеров, рядом с которыми сидит экономист, руку подняли 20 человек. А когда директор попросил поднять руку менеджеров, рядом с которыми сидит экономист, руку подняли 25 человек. Докажите, что рядом с кем-то из поднимавших руку сидит сразу два экономиста.

Решение

Назовем группой экономистов несколько (возможно, одного) экономиста, сидящих подряд, слева и справа от которых сидят представители других профессий. При этом если нет менеджера или бухгалтера, рядом с которым сидят два экономиста, то каждый человек поднял руку не более одного раза, а тогда общее количество поднявших руку людей равно удвоенному количеству групп, т.е. четно. А по условию их 45. Противоречие.

Задание 4. (12 баллов)

Решите уравнение $x^2 + y^2 + 1 = xy + x + y$.

Решение

$$x^2 + y^2 + 1 = xy + x + y \quad \Leftrightarrow \quad (x-y)^2 + (x-1)^2 + (y-1)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$x = y = 1.$$

Ответ: $x = y = 1$.

Задание 5. (12 баллов)

Известно, что $5a + 3b + 2c = 0$ и $a \neq 0$. Докажите, что уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет два различных корня.

Решение.

Данное в условии равенство можно переписать в виде:

$$5a + 3b + 2c = 0 \Leftrightarrow a + b + c + 4a + 2b + c = 0\ .$$

А это равенство запишем в виде $f(1) + f(2) = 0$, где $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Таким образом, либо $f(1) = f(2) = 0$ и числа 1 и 2 являются корнями данного уравнения, либо эти значения имеют разные знаки, что также означает, что график функции $f(x)$ пересекает ось абсцисс в двух различных точках.

Задание 6. (14 баллов)

Определите знак числа

$$A = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \ldots + \frac{1}{2012} + \frac{1}{2013} - \frac{1}{2014} - \frac{1}{2015} + \frac{1}{2016}.$$

Знаки расставлены так: “+” перед первой дробью, затем идут два “–” и два “+” по очереди. Перед последней дробью стоит “+”.

Решение

Разобьем все числа на группы по четыре числа:

$$\left(\frac{1}{4k+1} - \frac{1}{4k+2} - \frac{1}{4k+3} + \frac{1}{4k+4}\right).$$

Сумма чисел в каждой группе положительная:

$$\left(\frac{1}{4k+1} - \frac{1}{4k+2} - \frac{1}{4k+3} + \frac{1}{4k+4}\right) > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4k+1} - \frac{1}{4k+2} > \frac{1}{4k+3} - \frac{1}{4k+4} \Leftrightarrow \frac{1}{(4k+1)(4k+2)} > \frac{1}{(4k+3)(4k+4)}.$$

Следовательно, и число A положительное.

Ответ: $A > 0$

Задание 7. (14 баллов)

Обнаружилось, что на закрытии торгов курс акций некоторой компании в течении года каждый раз увеличивался или уменьшался ровно на n % по отношению к предыдущему закрытию. Существует ли такое натуральное значение n, при котором цена акций на закрытии торгов в течении года дважды принимала одно и то же значение?

Решение.

После k увеличений цены и l уменьшений цены на n % цена будет такой:

$$P\left(1+\frac{n}{100}\right)^k\left(1-\frac{n}{100}\right)^l,$$

где P – начальная цена акций. Если предположить, что цена дважды принимает одно и то же значение, что получится

$$\left(1+\frac{n}{100}\right)^k\left(1-\frac{n}{100}\right)^l=1$$

или

$$(100+n)^k(100-n)^l=100^{k+l}.$$

Правая часть этого равенства делится на 10, поэтому и n должно быть кратно 10. Предположим, что n не кратно 4, тогда $100\pm n$ тоже не кратно 4, поэтому левая часть кратна 2^{k+l} и не кратна 2^{k+l+1}, а правая часть делится на 4^{k+l} . Получили противоречие. Следовательно, n кратно 4. Аналогично, можно показать, что n кратно 25. Поэтому n делится на 100, что невозможно, поскольку цена не может уменьшиться более, чем на 100%.

Ответ: не существует.

Задание 8. (16 баллов)

Пусть все фирмы страны имеют определенный ранг, который является натуральным числом. При слиянии двух фирм рангов m и n получается новая фирма ранга $(m + n)$. Прибыль полученной фирмы будет на $m\cdot n$ больше суммы прибылей фирм ее образующих. Прибыль фирмы первого ранга равна 1 д.е. Существует ли ранг, при котором прибыль фирмы будет равна 2016 д.е.?

Решение.

Пусть p_n – прибыль фирмы ранга n. Тогда по условию задачи

$$p_{m+n}=p_m+p_n+mn.$$

Заметим, что для любого n

$$p_n = p_{n-1} + p_1 + (n-1)\cdot 1 = p_{n-1} + 1 + n - 1 = p_{n-1} + n.$$

Докажем, что $p_n = 1 + 2 + \ldots + n$.

Используем метод математической индукции.

1) База индукции: $p_1 = 1$.

2) Пусть $p_k = 1 + 2 + \ldots + k$. Докажем, что $p_{k+1} = 1 + 2 + \ldots + k + (k+1)$.

Действительно, $p_{k+1} = p_k + (k+1) = (1 + 2 + \ldots + k) + (k+1)$.

Следовательно, $p_n = 1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Для того, чтобы фирма имела прибыль равную 2016 д.е., ее ранг должен удовлетворять равенству

$$\frac{n(n+1)}{2} = 2016.$$

Последнее уравнение имеет натуральное решение n = 63.

Ответ: да, это ранг равный 63.

Критерии оценки олимпиадных заданий по математике

Правильное и полное решение задачи оценивается указанными в условии баллами.

Полным считается решение, содержащее

- правильную последовательность всех его шагов;
- верное обоснование всех ключевых моментов;
- безошибочные чертежи, рисунки, схемы;
- правильно выполненные вычисления и преобразования.

За погрешности и ошибки, допущенные при выполнении задания, с каждой задачи снимается определенное количество баллов, зависящее от характера допущенных ошибок.

К недочетам относятся описки, негрубые вычислительные ошибки, не влияющие на правильность дальнейшего хода рассуждений.

Шкала оценивания заданий

Качество выполнения задания	**Оценка**	**Максимальное число баллов за задание**			
		10	**12**	**14**	**16**

		Баллы			
Полное решение	+	10	12	14	16
Решение с недочетом/недочетами	+.	8	10	12	14
Решение, содержащее верную общую схему решения, в котором отсутствуют некоторые обоснования.	±	7	9	11	12
Найдена идея решения, но оно не доведено до конца. При этом выполнена некоторая существенная часть задания	+/2	5	6	7	8
Решение в целом неверное или незаконченное, но содержит определенное продвижение в верном направлении	∓	2	2	3	3
Остальные случаи	–/ 0	0	0	0	0

Всероссийская олимпиада школьников
«Миссия выполнима. Твое призвание-финансист!»

ЗАДАНИЯ, РЕШЕНИЯ, КРИТЕРИИ
ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ (ОЧНЫЙ) ЭТАП

Математика 8-9 класс, 2015/2016 учебный год

Задание 1. (10 баллов)

Пять карточек лежат на столе, как показано на рисунке.

K	8	T	7	4

На каждой из карточек на одной стороне написано некоторая буква, а на другой стороне – натуральное число. Петр сказал: «Если на одной стороне карты написана гласная буква, то на другой стороне этой карты написано четное число». Перевернув одну карту, Катя показала, что Петр ошибается. Какую карту перевернула Катя?

Решение

Чтобы показать, что Петр неправ, Катя должна найти карточку с нечетным номером на одной стороне, и гласной на другой стороне. Единственная карта, которая может иметь это свойство – карта номер 4, на которой написана цифра 7.

Ответ: четвертую карту.

Задание 2. (10 баллов)

Известно, что график функции $f(x) = x^2 - 2016x + 2015$ проходит через две различные точки с координатами (a, c) и (b, c). Найдите сумму $a + b$.

Решение

По условию задачи

$$f(a) = a^2 - 2016a + 2015 = f(b) = b^2 - 2016b + 2015 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad a^2 - b^2 = 2016a - 2016b \quad \Leftrightarrow \quad (a-b)(a+b) = 2016(a-b) \quad \Leftrightarrow \quad a+b = 2016.$$

Ответ: 2016.

Задание 3. (12 баллов)

В школе учатся 1200 школьников, у каждого из которых каждый день по пять уроков. Любой учитель этой школы проводит в день 4 урока. Сколько учителей работает в школе, если в каждом классе ровно 30 учеников?

Решение

Поскольку у каждого школьника в день по 5 уроков, то если бы в классе был один ученик, то общее число уроков в день было бы равно $5 \times 1200 = 6000$. Так как в классе 30 учеников, то количество уроков, которые проводятся в школе каждый день равно $\frac{6000}{30} = 200$. Следовательно, число учителей в школе равно $\frac{200}{4} = 50.$

Ответ: 50.

Задание 4. (12 баллов)

Рассматривается последовательность чисел $x_1, x_2, \ldots, x_{2015}$. При этом

$$x_n = \begin{cases} 7, & \text{если } n \text{ делится на 9 и 32;} \\ 9, & \text{если } n \text{ делится на 7 и 32;} \\ 32, & \text{если } n \text{ делится на 7 и 9;} \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Найдите сумму всех членов данной последовательности.

Решение

Поскольку $7 \cdot 9 \cdot 32 = 2016$, то

$$x_n = \begin{cases} 7, & \text{если } n = 9 \cdot 32 \cdot k, \text{где } k = 1, \ldots, 6; \\ 9, & \text{если } n = 7 \cdot 32 \cdot k, \text{где } k = 1, \ldots, 8; \\ 32, & \text{если } n = 7 \cdot 9 \cdot k, \text{где } k = 1, \ldots, 31; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Искомая сумма равна

$$7 \cdot 6 + 9 \cdot 8 + 32 \cdot 31 = 1106.$$

Ответ:1106.

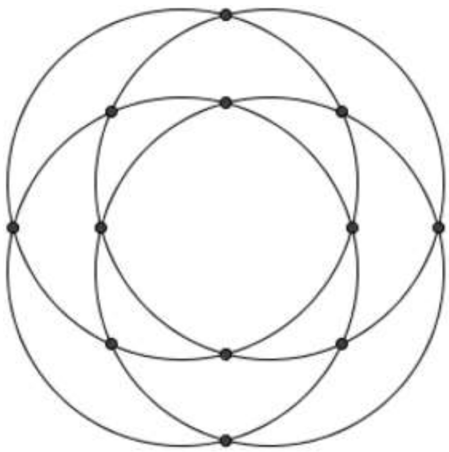
Задание 5. (12 баллов)

На плоскости расположены четыре различных окружности. Назовем точкой пересечения точку, в которой пересекаются не менее двух окружностей. Найдите наибольшее возможное число точек пересечения четырех окружностей.

Решение

Любые две окружности, могут пересекаться не более чем в двух точках. Из четырех окружностей можно выбрать 6 различных пар окружностей. Следовательно, точек пересечения не может быть больше 12.

Ниже на рисунке представлен случай, когда точек пересечения ровно 12.



<u>Ответ</u>: 12.

Задание 6. (14 баллов)

Известно, что $2016 + a^2 + ac < ab$. Докажите, что уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет два различных корня.

Решение

Из условия следует, что $a \neq 0$, иначе получим неверное неравенство $2016 < 0$. Далее условие задачи перепишем в виде:

$$a^2 - ab + ac = a(a - b + c) < -2016 < 0$$

или

$$a(a - b + c) = a \cdot f(-1) < 0,$$

где $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Если $a > 0$, то ветви параболы направлены вверх и $f(-1) < 0$, и данное уравнение имеет два различных корня. Аналогично при $a < 0$.

Задание 7. (14 баллов)

При анализе банковских счетов обнаружилось, что остатки средств на каждом из них больше 10 рублей. При этом нашлась группа клиентов, каждый из которых имеет на своем счете одинаковую денежную сумму. Эта сумма является числом, состоящим из одних единиц. Если сложить все денежные средства на счетах данной группы клиентов, то полученная сумма также будет представляться числом, состоящим из одних единиц. Найдите, при каком наименьшем числе клиентов в группе это возможно, если в группе больше одного человека

Решение

Данная задача эквивалентна следующей.

Найдите наименьшее натуральное число m, для которого найдутся натуральные числа n и k, такие что $n > k > 1$ и $\underbrace{11...1}_{n} = \underbrace{11...1}_{k} \cdot m$.

Очевидно, что $m > 9$. Если $m = \overline{ab}$, где $a \geq 1$, то равенство $\underbrace{11...1}_{n} = \underbrace{11...1}_{k} \cdot \overline{ab}$ означает, что $b = 1$. Но в этом случае, независимо от a вторая цифра справа в числе $\underbrace{11...1}_{k} \cdot \overline{ab}$ равна $a + 1$, и это не может быть 1. Таким образом, $m \geq 100$. Ясно, что $n = 100$ не удовлетворяет условию потому, что $\underbrace{11...1}_{k} \cdot 100 = \underbrace{11...1}_{k}00$.

С другой стороны, $n = 101$ подходит, т.к. $101 \cdot 11 = 1111$.

Ответ: 101.

Задание 8. (16 баллов)

На конференцию приехали несколько человек. Докажите, что их можно разместить в двух конференц-залах так, чтобы у каждого из них в своем зале имелось четное число знакомых. (Один из залов можно оставить пустым.)

Решение

Проведем решение индукцией по количеству участников конференции. База индукции проверяется непосредственно.

Предположим, что для n участников утверждение задачи верно.

Пусть на конференцию приехали $n + 1$ участников. Если каждый из них имеет четное число знакомых, что можно оставить одну из комнат пустой и требование задачи будет выполнено. Поэтому будем считать, что некоторый участник A имеет нечётное количество знакомых $B_1, B_2, \ldots, B_{2к+1}$.Попросим участника A на время удалиться с конференции. Кроме того, заставим любых двух его знакомых познакомиться между собой, если они прежде не были знакомы, и, напротив, временно прервать знакомство, если они знали друг друга. Полученную компанию из n человек можно, по предположению индукции, разместить в двух комнатах так, чтобы у каждого было четное число знакомых в своей комнате.

Не умаляя общности, можно считать, что участники $B_1, B_2, \ldots, B_{2s}$ попали в первую комнату, а B_{2s+1}, B_{2s+2}, …, $B_{2к+1}$ - во вторую ($0 \leq s \leq k$). Теперь позовем обратно изгнанного А и подселим его в первую комнату – он будет знать там четное число людей. При этом количество знакомых у участников $B_1, B_2, \ldots, B_{2s}$ станет нечетным. Наконец, вернем все знакомства между B_i ($1 \leq i \leq 2k + 1$) в первоначальное состояние. Каждое приобретенное или потерянное знакомство меняет количество знакомых на единицу. Поэтому у каждого из $B_1, B_2, \ldots, B_{2s}$ количество знакомых среди людей этого набора поменяет четность (и станет четным), а у каждого из B_{2s+1}, B_{2s+2}, …, $B_{2к+1}$ по-прежнему останется четным. У других участников, кроме A и B_i, наборы знакомых всё это время вообще не менялись. Поэтому полученное размещение всех участников по двум комнатам удовлетворяет условию задачи.

Критерии оценки олимпиадных заданий по математике

Правильное и полное решение задачи оценивается указанными в условии баллами.

Полным считается решение, содержащее

- правильную последовательность всех его шагов;
- верное обоснование всех ключевых моментов;
- безошибочные чертежи, рисунки, схемы;
- правильно выполненные вычисления и преобразования.

За погрешности и ошибки, допущенные при выполнении задания, с каждой задачи снимается определенное количество баллов, зависящее от характера допущенных ошибок.

К недочетам относятся описки, негрубые вычислительные ошибки, не влияющие на правильность дальнейшего хода рассуждений.

Шкала оценивания заданий

Качество выполнения задания	Оценка	Максимальное число баллов за задание			
		10	**12**	**14**	**16**
		Баллы			
Полное решение	+	10	12	14	16
Решение с недочетом/недочетами	+.	8	10	12	14
Решение, содержащее верную общую схему решения, в котором отсутствуют некоторые обоснования.	±	7	9	11	12
Найдена идея решения, но оно не доведено до конца. При этом выполнена некоторая существенная часть задания	+/2	5	6	7	8
Решение в целом неверное или незаконченное, но	∓	2	2	3	3

содержит определенное продвижение в верном направлении					
Остальные случаи	–/ 0	0	0	0	0

Всероссийская олимпиада школьников
«Миссия выполнима. Твое призвание-финансист!»

ОТБОРОЧНЫЙ (ЗАОЧНЫЙ) ЭТАП

Математика 11 класс, 2015/2016 учебный год

ЗАДАНИЕ 1. (9 БАЛЛОВ)

Олимпиадные задания по математике проверяют 3 преподавателя. Все работы они договорились разделить в пропорции 1:2:3. Так получилось, что они приходили за работами в разное время и каждый был уверен, что пришел первым. Сколько работ осталось не проверенными, если всего было 216 работ?

ЗАДАНИЕ 2. (9 БАЛЛОВ)

В некоторой стране используются монеты только достоинством 8, 9 и 10 тугриков. Покупая подарок дочери, отец заплатил монетами ровно 100 тугриков, отдав продавцу более 11 монет. Сколько монет достоинством 8 тугриков заплатил отец?

ЗАДАНИЕ 3. (9 БАЛЛОВ)

Корабли «Арабелла», «Испаньола» и «Сифанта» периодически заходят в один и тот же порт. «Арабелла» заходит в порт каждый третий день, «Испаньола» –каждый четвертый день, а «Сифанта» – каждый пятый день. Все три корабля были в порту 31 декабря 2014 года. Сколько дней в 2015 году в порту будет хотя бы один из них?

ЗАДАНИЕ 4. (10 БАЛЛОВ)

На стороне AD параллелограмма $ABCD$ взята точка P так, что AP:PD=5:2. Точка O – точка пересечения отрезка BP и диагонали AC. Во сколько раз площадь параллелограмма $ABCD$ больше площади треугольника OCP.

ЗАДАНИЕ 5. (10 БАЛЛОВ)

Все сотрудники фирмы работают в одном из двух отделов. Средняя заработная плата всех сотрудников фирмы составляет 40 000 рублей, средняя заработная плата сотрудников первого отдела – 37000 рублей, а второго отдела – 42 000 рублей. Определите какое наименьшее количество сотрудников может работать в каждом из отделов, если заработная плата каждого сотрудника кратна 10 000.

ЗАДАНИЕ 6. (10 БАЛЛОВ)

2016 сотрудников банка пришли на юбилей, и их рассадили за один круглый стол. Известно, что зарплаты сидящих рядом различаются на 2 или 3 доллара. Какой наибольшей может быть разница зарплат двух сотрудников, если известно, что все сотрудники пришли на юбилей, а все зарплаты различны?

ЗАДАНИЕ 7. (10 БАЛЛОВ)

К числу 2017 вконец приписали цифру ноль, а затем между цифрами получившегося числа вписали еще две цифры так, чтобы полученное число делилось на 2015. Найдите результат деления получившегося числа на 2015.

ЗАДАНИЕ 8. (11 БАЛЛОВ)

Прямая $y = kx + b$ проходит через точку $A(2;4)$ и пересекает параболу $y = x^2 - 5x$ в точках, сумма квадратов абсцисс которых наименьшая. Найти параметры k и b.

ЗАДАНИЕ 9. (11 БАЛЛОВ)

Функция $f(x)$ обладает следующими свойствами:

1. $f(3x) = 3f(x)$ для всех положительных x;
2. $f(x) = \begin{cases} \frac{4}{5}x - \frac{4}{5}, & \text{при } x \in \left[1; \frac{9}{4}\right], \\ 4 - \frac{4}{3}x, & \text{при } x \in \left(\frac{9}{4}; 3\right]. \end{cases}$

Найдите наименьшее целое положительное x, для которого выполняется неравенство $f(x) > f(2015)$.

ЗАДАНИЕ 10. (11 БАЛЛОВ)

Дана система уравнений с четырьмя неизвестными $\begin{cases} xy + uv = 13, \\ xv - yu = 13. \end{cases}$

Сколько различных решений в целых числах имеет эта система?

Всероссийская олимпиада школьников
«Миссия выполнима. Твое призвание-финансист!»

ОТБОРОЧНЫЙ (ЗАОЧНЫЙ) ЭТАП

Математика 10 класс, 2015/2016 учебный год

ЗАДАНИЕ 1. (9 БАЛЛОВ)

Николай вышел из школы, которая находится между его домом и стадионом, где у него запланирована тренировка. Иван может пойти туда пешком или дойти до дома и поехать на стадион на велосипеде. В обоих случаях дорога занимает 40 минут. Известно, что на велосипеде Иван едет в 5 раз быстрее, чем ходит пешком. Во сколько раз расстояние от школы до стадиона больше, чем расстояние от школы до дома?

ЗАДАНИЕ 2. (9 БАЛЛОВ)

В ожидании снижения процентных ставок первый банк установил следующие ставки по годовому депозиту: первые 3 месяца действует ставка 14%, следующие 6 месяцев – 9%, последние 3 месяца – 8%. При этом в каждый период проценты начисляются только на начальную сумму, положенную на депозит. Второй банк установил по годовому депозиту единую ставку на весь срок. Сергеев положил одинаковые суммы в каждый из этих банков. Определите, какую ставку предлагает своим вкладчикам второй банк, если через год после начисления процентов у Сергеева на вкладе во втором банке оказалось средств на 1% больше, чем в первом.

ЗАДАНИЕ 3. (9 БАЛЛОВ)

Множество A состоит из 2015 наименьших натуральных чисел, делящихся на 4, а множество B – из 2015 наименьших натуральных чисел, делящихся на 6. Множество C состоит из чисел, которые являются элементами обоих множеств. Сколько чисел в множестве C?

ЗАДАНИЕ 4. (10 БАЛЛОВ)

Средняя оценка за экзамен в двух подгруппах составляет ровно 4, средний балл в первой подгруппе равен 3,6, а средний балл во второй подгруппе – 4,2. Какое наименьшее число студентов может быть в каждой из подгрупп?

ЗАДАНИЕ 5. (10 БАЛЛОВ)

Пусть M – это множество $(x;y)$ решений системы $\begin{cases} 2x-|y-4|=10 \\ 2|x-8|+|y-4|=6 \end{cases}$.

A и B – две точки множества M, наиболее удаленные друг от друга. Вычислите площадь фигуры, ограниченной отрезком AB и точками множества M.

ЗАДАНИЕ 6. (10 БАЛЛОВ)

Сколько существует различных неравнобедренных треугольников, все стороны которых равняются целым числам, а наибольшая сторона имеет длину 2016?

ЗАДАНИЕ 7. (10 БАЛЛОВ)

В 1995 году число сотрудников корпорации «Вега» было полным квадратом некоторого натурального числа. За следующие 10 лет сотрудников стало на 150 человек больше. Это число на 9 больше, чем квадрат другого натурального числа. В 2015 году число сотрудников «Веги» снова оказалось равно полному квадрату натурального числа. Сколько человек работало в корпорации в 1995 году, если за последние 10 лет число ее сотрудников также увеличилось на 150 человек?

ЗАДАНИЕ 8. (11 БАЛЛОВ)

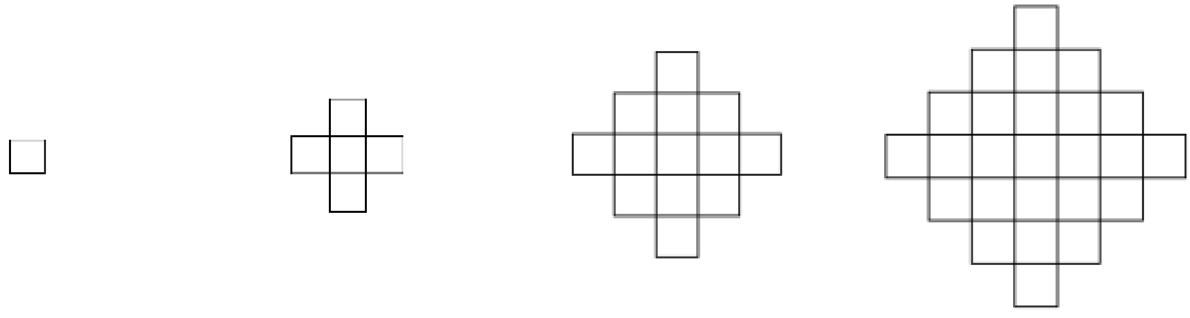
Y и N – натуральные числа. При этом $Y > 25$, а $Y + N < 100$. Если в числе $25 + N$ переставить цифры, то получится Y. Сколько существует различных упорядоченных пар (N, Y)?

ЗАДАНИЕ 9. (11 БАЛЛОВ)

$(1-x)(1+2x)(1-3x)...(1+14x)(1-15x)=1+ax+bx^2+...$ Чему равно b?

ЗАДАНИЕ 10. (11 БАЛЛОВ)

На рисунке представлены четыре первые фигуры последовательности фигур $\{F_n\}$. Все фигуры состоят из одинаковых квадратов и имеют площади 1, 5, 13 и 25 соответственно. Чему равна площадь фигуры F_{100}?



Всероссийская олимпиада школьников
«Миссия выполнима. Твое призвание-финансист!»

ОТБОРОЧНЫЙ (ЗАОЧНЫЙ) ЭТАП

Математика 8-9 класс, 2015/2016 учебный год

ЗАДАНИЕ 1. (9 БАЛЛОВ)

За свою работу Иван получает 1500 рублей в день. Если работа выполнена отлично, то ему дополнительно выплачивается ежедневная премия в размере 500 рублей. В октябре за 23 рабочих дня Иван получил 41000 рублей. Сколько дней в октябре Иван получал премию?

ЗАДАНИЕ 2. (9 БАЛЛОВ)

В равнобедренный треугольник ABC вписана окружность радиуса 2. Вторая окружность радиуса 1 касается этой окружности и боковых сторон треугольника. Третья окружность касается второй окружности и также боковых сторон треугольника. Во сколько раз площадь первой окружности больше площади третьей окружности?

ЗАДАНИЕ 3. (9 БАЛЛОВ)

Рейтинг теннисиста определяется путем деления количества матчей, которые он выиграл, на количество сыгранных им матчей. Перед очередным турниром рейтинг теннисиста был равен 0,6. На турнире он одержал победу в четырех матчах из шести. В итоге после турнира его рейтинг превысил 0,604. Какое наибольшее число матчей мог выиграть теннисист до данного турнира?

ЗАДАНИЕ 4. (10 БАЛЛОВ)

На блюде лежат яблоки и сливы. Общее количество плодов более 14 штук. Если количество слив удвоить и добавить 18 яблок, то слив на блюде будет меньше, чем яблок. Удвоенное же количество яблок меньше количества слив. Сколько яблок и сколько слив лежит на блюде?

ЗАДАНИЕ 5. (10 БАЛЛОВ)

В данной дроби $\frac{Ф \cdot И \cdot Н \cdot А \cdot Н \cdot С \cdot И \cdot С \cdot Т}{Э \cdot Т \cdot А \cdot П}$ разным буквам соответствуют разные цифры, а точка означает умножение. Какое наименьшее натуральное значение может принимать данная дробь?

ЗАДАНИЕ 6. (10 БАЛЛОВ)

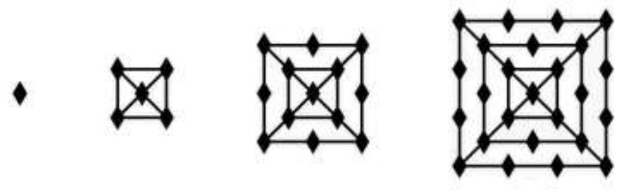
Художник решил пронумеровать свои картины. По ошибке один из номеров он использовал дважды. В итоге сумма всех номеров оказалась равной 2015. Какой номер художник использовал дважды?

ЗАДАНИЕ 7. (10 БАЛЛОВ)

Найдите сумму значений параметра a, при которых уравнение $\left(a^{2}-3a-10\right)x^{2}+(a+2)x+2=0$ имеет ровно одно решение.

ЗАДАНИЕ 8. (11 БАЛЛОВ)

На рисунке представлены четыре первые фигуры последовательности фигур $\{F_n\}$.



Первая фигура содержит 1 ромб, вторая – 5 ромбов и т.д. Сколько ромбов содержит фигура F_{20}?

ЗАДАНИЕ 9. (11 БАЛЛОВ)

Девятизначное число содержит все цифры от 1 до 9. При этом любые две подряд идущие цифры составляют двузначное число, которое делится либо на 7, либо на 17. Найдите это число.

ЗАДАНИЕ 10. (11 БАЛЛОВ)

В шахматном турнире каждый участник сыграл ровно одну партию против каждого из остальных шахматистов. Победитель партии получает 1 очко, а проигравший – 0 очков. Если партия заканчивается вничью, то оба шахматиста получают 1/2 очка. После завершения турнира оказалось, что каждый шахматист ровно половину очков, получил в партиях с десятью шахматистами, которые заняли последние десять мест. Сколько шахматистов участвовало в турнире?