Оценочный бланк олимпиадных заданий по математике

Код участника: 713130

Номер задания		1	2	3	4	5	6	7	8
Полученные баллы	Первый проверяющий	10	10	12	12	6	14	34	16
	Второй проверяющий	10	10	12	12	6	14	4	16
	Итого	10	10	12	12	6	14	4	16
Сумма баллов (оценка)		84							

Члены жюри:

Подпись — В.Б. [illegible] — Фамилия И.О.

Подпись — Волкова В.С. — Фамилия И.О.

Подпись — Кочерова А.С. — Фамилия И.О.

Всероссийская олимпиада школьников «Миссия выполнима. Твое призвание-финансист!»

ПО МАТЕМАТИКЕ 11 класс

Заключительный (очный) этап 2017/2018 учебный год

713130

Код участника

Вариант I

~~*Задание 1. (10 баллов)*~~

Даны последовательность чисел $x_1, x_2, \ldots$, такая, что $x_1 = 79$ и $x_n = \dfrac{n}{x_{n-1}}$ для всех $n > 1$. На сколько нулей оканчивается число равное произведению $x_1 x_2 \ldots x_{2018}$?

~~*Задание 2. (10 баллов)*~~

Найдите наименьшее значение функции $f(x) = |x| + 2|x-1| + 3|x-2| \ldots + 11|x-10|$

~~*Задание 3. (12 баллов)*~~

Сколько различных корней имеет уравнение $f\left(f\left(f(x)\right)\right) = 1$, если $f(x) = x - \dfrac{2}{x}$?

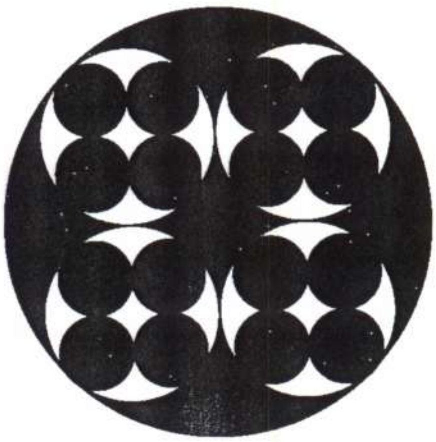
~~*Задание 4. (12 баллов)*~~

Сотрудники фирмы делятся на трудяг и лентяев. В 2016 году средняя зарплата трудяг превышала в два раза среднюю зарплату лентяев. Повысив свою квалификацию, трудяги в 2017 году стали получать на 50% больше, а зарплата лентяев не изменилась. При этом часть лентяев уволили в конце 2016 года. Средняя зарплата всех сотрудников в 2017 году стала на 20% больше, чем была в 2016 году. Найдите сколько процентов от общего числа сотрудников составляли в 2017 году трудяги, если в 2016 году их было 10%.

713130

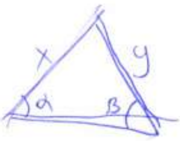
Задача 5. (12 баллов)

На первом шаге на листе бумаги была изображена единичная окружность и ограниченный ею круг закрашен черной краской. На каждом из последующих шагов для каждой из окружностей, изображенных на предыдущем шаге, рисуются четыре новые внутренне касающиеся ее окружности равных радиусов. Эти четыре окружности внешне касаются друг друга. Круги, ограниченные новыми окружностями, закрашиваются белой краской, если номер шага четное число, или черной краской, если номер шага нечетен. На рисунке изображен результат трех шагов. Описанный процесс продолжается до бесконечности. Найдите площадь белой области.



Задание 6. (14 баллов)

Действительные числа a и b таковы, что $\left(a+\sqrt{1+a^2}\right)\left(b+\sqrt{1+b^2}\right)=1$. Найдите сумму $a+b$.



Задание 7 (14 баллов)

Назовем положительное число a близким сверху к положительному числу b, если a превосходит b, но не больше чем на 1%. Докажите, что если в треугольнике радианная мера одного из углов близка сверху к радианной мере другого угла, то найдутся две стороны этого треугольника такие, что длина одной из них близка сверху к длине другой.

Задача 8. (16 баллов)

В алфавите языка альфов три буквы *А*, *Л* и *Ф*. Все слова этого языка можно построить, применяя последовательно следующие правила к любому слову из этого языка:

(1) поменять порядок букв в слове на противоположный

(2) заменить две последовательные буквы так: *ЛА* → *ФФ*, *АФ* → *ЛЛ*, *ФЛ* → *АА*, *ЛЛ* → *АФ*, *ФФ* → *ЛА* или *АА* → *ФЛ*.

Известно, что *ЛЛАФАЛАФФАЛАФФФАЛАФФФФАЛЛ* – это слово из языка альфов. Есть ли в языке альфов слово *ЛФАЛФАЛФАЛФАЛАФЛАФЛАФЛАФЛ*?

713130

Чистовик.

на 8.

Пусть А = 1, П = 2, Ф = 3.

Тогда первое число:

2213121331213331213333122,

При этом сумма цифр в нем равна 52.

Второе число:

2312312312312132132132132

В нем сумма цифр 50.

Рассмотрим возможные операции:

(1) Не влияет на сумму цифр, но позволяет делать замены вида $xy \Leftrightarrow zz \Leftrightarrow yx \Leftrightarrow zz$

(2) ПА ⟺ ФФ ⟺ 2,1 ⟺ 3,3 } сумма цифр изменяется на 3

АП ⟺ ФФ ⟺ 1,2 ⟺ 3,3 } сумма цифр изменяется на 3.

АФ ⟺ ПП ⟺ 1,3 ⟺ 2,2

ФА ⟺ ПП ⟺ 3,1 ⟺ 2,2 } сумма цифр не изменяется

ПФ ⟺ АА ⟺ 2,3 ⟺ 1,1

ФП ⟺ АА ⟺ 3,2 ⟺ 1,1 } сумма цифр изменяется на 3

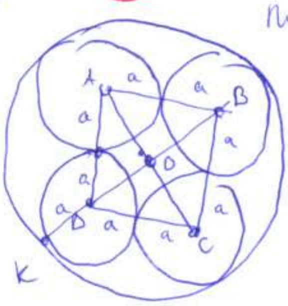
Таким образом, из слова с суммой 52 нельзя получить число с суммой 50.

Поэтому слова ПФАЛФААФАЛФАЛАФЛАФЛАФЛАФЛ нет в языке альфов.

+

Задача 5

+/2



Пусть есть окружность с радиусом r.

В нее вписаны 4 окружности с радиусом a.

Т.к. если 2 окр. касаются, то линии центров проходят через т. касания, ABCD - квадрат, т. O - его центр.

$$r = KD + DO = a + a\sqrt{2} = a(1+\sqrt{2})$$

$$a = \frac{r}{1+\sqrt{2}} = (\sqrt{2}-1)r, \quad r_0 = 1$$

Найдем сумму белых частей:

$16\cdot(\sqrt{2}-1)^4\pi$ — $64(\sqrt{2}-1$ и т.д.

$$S = 4\left((\sqrt{2}-1)^2\pi - 4\cdot(\sqrt{2}-1)^4\pi + 4^2(\sqrt{2}-1)^6\pi - 4^3(\sqrt{2}-1)^8\pi + \dots\right)$$

При этом сумма положительных частей - сумма геом. прогрессии,

$$b = (\sqrt{2}-1)^2\pi, \quad q = 16(\sqrt{2}-1)^4 = (2\sqrt{2}-2)^4, \quad q<1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S^+ = \frac{b}{1-q} = \frac{(\sqrt{2}-1)^2\pi}{1-(2\sqrt{2}-2)^4}$$

Сумма отрицательных членов - также равна сумме геом. прогрессии, где $b = 4\cdot(\sqrt{2}-1)^4\pi$, $q = 16(\sqrt{2}-1)^4$

Аналогично S^+, $S^- = \dfrac{4(\sqrt{2}-1)^4\pi}{1-(2\sqrt{2}-2)^4}$

$$S = 4(S^+ - S^-) = 4\left(\frac{(\sqrt{2}-1)^2\pi - 4(\sqrt{2}-1)^4\pi}{1-(2\sqrt{2}-2)^4}\right) = \frac{4\pi\left((3-2\sqrt{2}) - 4(17-12\sqrt{2})\right)}{1-(2\sqrt{2}-2)^4} =$$

$$= \frac{4\pi(3-2\sqrt{2}-68+48\sqrt{2})}{1-(272-24\cdot 8\sqrt{2})} = \frac{4\pi(-65+46\sqrt{2})}{24\cdot 8\sqrt{2}-271} =$$

$$= \boxed{\frac{4\pi(46\sqrt{2}-65)}{192\sqrt{2}-271}}$$

Задача 4.

Пусть в 2016 году трудяг x, лентяев $9x$.

Каждый лентяй получает ω, каждый трудяга 2ω.

Тогда $\omega_{ср.}^{2016} = \dfrac{\cancel{8}\omega\cdot 9x + 2\omega\cdot x}{10x} = \left(\dfrac{11\omega}{10}\right)$

В 2017 году з/п трудяг стала 3ω, их число x.

Пусть уволили a лентяев, теперь их $(9x-a)$, их з/п ω.

Тогда $\omega_{ср}^{2017} = \dfrac{3\omega\cdot x + (9x-a)\omega}{10x - a}$

По условию $1{,}2\,\omega_{ср}^{2016} = \omega_{ср}^{2017}$

$$\frac{12}{10}\cdot\frac{11}{10}\cancel{\omega} = \frac{\cancel{\omega}(3x+9x-a)}{10x-a}$$

$$\frac{132}{100} = \frac{12x-a}{10x-a}$$

$$1320x - 132a = 1200x - 100a$$

$$120x = 32a$$

$$60x = 16a$$

$$30x = 8a$$

$$15x = 4a$$

$$a = \frac{15x}{4}$$

Значит трудяг: $\dfrac{x}{x+9x-\frac{15}{4}x} = \dfrac{1}{\frac{40}{4}-\frac{15}{4}} = \dfrac{4}{25} = \dfrac{16}{100} = 16\%$

+

713130

Задача 3.

$f(x) = x - \frac{2}{x}$

$f(f(f(x))) = 1$

Пусть $f(f(x)) = t$

$f(t) = t - \frac{2}{t} = 1$

$\frac{t^2-2}{t} = 1$

$t^2 - t - 2 = 0$

$t = -1 \vee t = 2$

Пусть $f(x) = a$

$f(a) = \frac{a^2-2}{a} = -1$

$a^2 - 2 + a = 0$

$a = 1 \vee a = -2$

$f(a) = \frac{a^2-2}{a} = 2$

$a^2 - 2a - 2 = 0$

$D = 4 + 8 = 12$

$a = 1 + \sqrt{3} \vee a = 1 - \sqrt{3}$

$\frac{x^2-2}{x} = 1$

$\boxed{x = -1} \vee \boxed{x = 2}$

$\frac{x^2-2}{x} = -2$

$x^2 + 2x - 2 = 0$

$D = 12$

$\boxed{x = -1 + \sqrt{3}} \vee \boxed{x = -1 - \sqrt{3}}$

$x^2 - x(1+\sqrt{3}) - 2 = 0$

$D = (4 + 2\sqrt{3}) + 8$

$\boxed{x = \frac{1 + \sqrt{3} \pm \sqrt{12 + 2\sqrt{3}}}{2}}$

$x^2 - x(1-\sqrt{3}) - 2 =$

$D = (4 - 2\sqrt{3}) + 8$

$\boxed{x = \frac{1 - \sqrt{3} \pm \sqrt{12 -}}{2}}$

Таким образом, всего 8 корней.

Задача 2.

$f(x) = |x| + 2|x-1| + 3|x-2| + \dots + 11|x-10|$

Пусть $x \geq 10$

$f(x) = x(1 + 2 + \dots + 11) - (2 + 6 + 12 + 20 + 30 + 42 + 56 + 72 + 90 + 110)$ $\nearrow(x)$

$f(x)_{min} = 10 \cdot 66 - 440 = 660 - 440 = 220$

Пусть $x \in [9; 10)$

$f(x) = x(55) - 330$ $\nearrow(x)$

$f(x)_{min} = 9 \cdot 44 - 220 = 396 - 220 = 176$

Пусть $x \in [8; 9)$

$f(x) = 24x - 40$ $\nearrow(x)$

$f(x)_{min} = 8 \cdot 24 - 40 = 192 - 40 = 152$

Пусть $x \in [7; 8)$

$f(x) = 6x + 104$ $\nearrow(x)$

$f(x)_{min} = 6 \cdot 7 + 104 = 146$

Пусть $x \in [6; 7)$

$f(x) = -10x + 216$ $\searrow(x)$

$f(x)_{min} = -70 + 216 = 146$

$f(7) = 7 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 5 + 4 \cdot 4 + 5 \cdot 3 + 6 \cdot 2 + 7 \cdot 1 + 8 \cdot 0 + 9 \cdot 1 + 10 \cdot 2 + 11 \cdot 3 =$

$=$

Пусть $x \in [5;6]$

$f(x) = -24x + 300 \downarrow (x)$

$f(x)_{min} = -120 - 24 + 300 = 166$

Пусть $x \in [4;5]$

$f(x) = -36x + 360 \downarrow (x)$

$f(x)_{min} = -150 - 30 + 360 = 180$

Пусть $x \in [3;4]$

$f(x) = -46x + 400 \downarrow (x)$

$f(x)_{min} = -160 - 24 + 400 = 216$

Пусть $x \in [2;3]$

$f(x) = -54x + 424 \downarrow (x)$

$f(x)_{min} = -150 - 12 + 424 = 262$

Пусть $x \in [1;2]$

$f(x) = -60x + 436 \downarrow (x)$

$f(x)_{min} = -120 + 436 = 316$

Пусть $x \in [0;1]$

$f(x) = -64x + 440 \downarrow (x)$

$f(x)_{min} = 376$

Пусть $x \leq 0$

$f(x) = -66x + 440 \downarrow (x)$

$f(x)_{min} = 440$

Таким образом, минимальное значение функции $f(x) = 146$

Задача 1.

$x_1, \ldots, x_{2018}$ $x_1 = 79$ $x_n = \frac{n}{x_{n-1}}$

Разобьем числа на пары $x_1 \cdot x_2$, $x_2 \cdot x_3$, …, $x_{2017} \cdot x_{2018}$

$x_{n-1} \cdot x_n = \frac{x_{n-1} \cdot n}{x_{n-1}} = n$

Таким образом произведение $(x_1 \cdot x_2) \cdot \ldots \cdot (x_{2017} \cdot x_{2018}) = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2018 =$

~~Заметим что если число~~

$= 2^{1009} \cdot 1009!$

При этом среди чисел от 1 до 1009 всего 201 число, кратное 5, из них 40 кратны 5^2, 8 кратны 5^3, 1 кратно 5^4.

Кол-во нулей в числе $1009! \cdot 2^{1009} = p$, где 5^p содержится в данном числе.

1 число кратно 5^4, 7 кратны 5^3, 32 кратны 5^2, 161 кратно 5^1 если рассм. наиб. степень.

Значит всего нулей: $1 \cdot 4 + 7 \cdot 3 + 32 \cdot 2 + 161 = \boxed{250}$

+

713130

Задача 6.

Пусть $y = b + \sqrt{1+b^2}$, $b \in R$

$y' = 1 + \frac{2b}{2\sqrt{1+b^2}} = 1 + \frac{b}{\sqrt{1+b^2}}$

$y' = 0 \quad \frac{b}{\sqrt{1+b^2}} = -1$

$-b = \sqrt{1+b^2}$, $b < 0$

$b^2 = 1 + b^2$

$0 = 1$ - невозможно

$\xrightarrow{\qquad\qquad\qquad} b$

$y' \quad +$

$y \quad \nearrow$

Значит $y = b + \sqrt{1+b^2}$ монотонно возрастает по b.

Пусть существует пара a, b таких, что:

$(a + \sqrt{1+a^2})(b + \sqrt{1+b^2}) = 1$

Зафиксируем a, $a + \sqrt{1+a^2} = x$, $x = const$

$b + \sqrt{1+b^2} = \underbrace{\frac{1}{x}}_{\text{число}}$

Т.к. (по доказанному) $y(b) \nearrow$, у них всего одна т. пересечения, тоесть каждому a удовлетворяет не более ~~1~~ одного b.

Аналогично доказываем, что каждому b удовлетворяет не более одного b.

Пусть $a = -b$

Тогда: $(\sqrt{1+b^2} - b)(\sqrt{1+b^2} + b) = 1 + b^2 - b^2 = 1 \quad \forall b \in R$

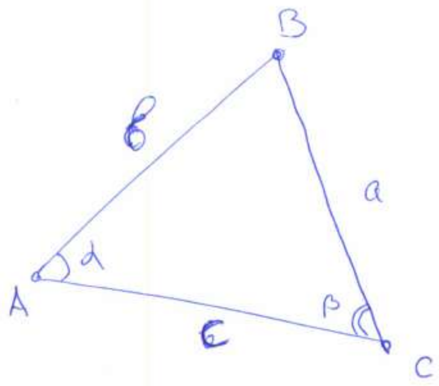
Значит все пары $a = -b$ удовлетворяют условию, других пар нет (т.к. доказана биекция a, b).

$\boxed{a + b = -b + b = 0}$

+

Задание 7.

Пусть есть треугольник ABC.



Из условия следует, что α близко сверху к β (в радианной мере).

По тео. sin:

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b}$$

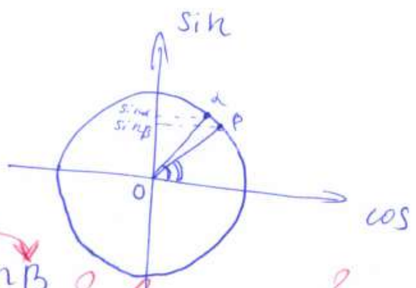
$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{a}{b}$$

Из того, что α близко сверху к β следует, что:

$$\begin{cases} \alpha > \beta \\ \alpha \leq 1{,}01\beta \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} \sin\alpha > \sin\beta \\ \sin\alpha \leq 1{,}01\sin\beta \end{cases}$$



? Почему?

∓

Значит, $\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$, a близко сверху к b (ч и т д)

$$(a+\sqrt{\cancel{1}+a^2})(b+\sqrt{1+b^2})=1$$

$$ab+a\sqrt{\cancel{b}\,1+b^2}+b\sqrt{1+a^2}+\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)}=1$$

$a=0,\ b=0$

Если $a>0$, $b>0$

$(a+\sqrt{1+a^2})(b+\sqrt{1+b^2})>1$ $\varnothing$

$a>0$, $\sqrt{1+a^2}>1$, $b>0$, $\sqrt{1+b^2}>1$

$a<0,\ b<0$

$a+\sqrt{1+a^2}$

$a<0$

$|a|<\sqrt{1+a^2}$ $\Leftrightarrow$ $|b|<\sqrt{1+b^2}$

$a^2<1+a^2$

$0<1$

$a=0 \Rightarrow b=0$

$b<0,\ a>0$

$(a+\sqrt{1+a^2})(b+\sqrt{1+b^2})$

$(a+b)=x$

$x^2=a^2+b^2+2ab$ $\qquad ab=\dfrac{(a+b)^2-a^2-b^2}{2}$

$\sqrt{x}=\sqrt{a+b}$

$\sqrt{a^2+a^2b^2}$ $\qquad \sqrt{b^2+a^2b^2}$

$A=1$ $\qquad \sqrt{a^2b^2+a^2+b^2+1}$

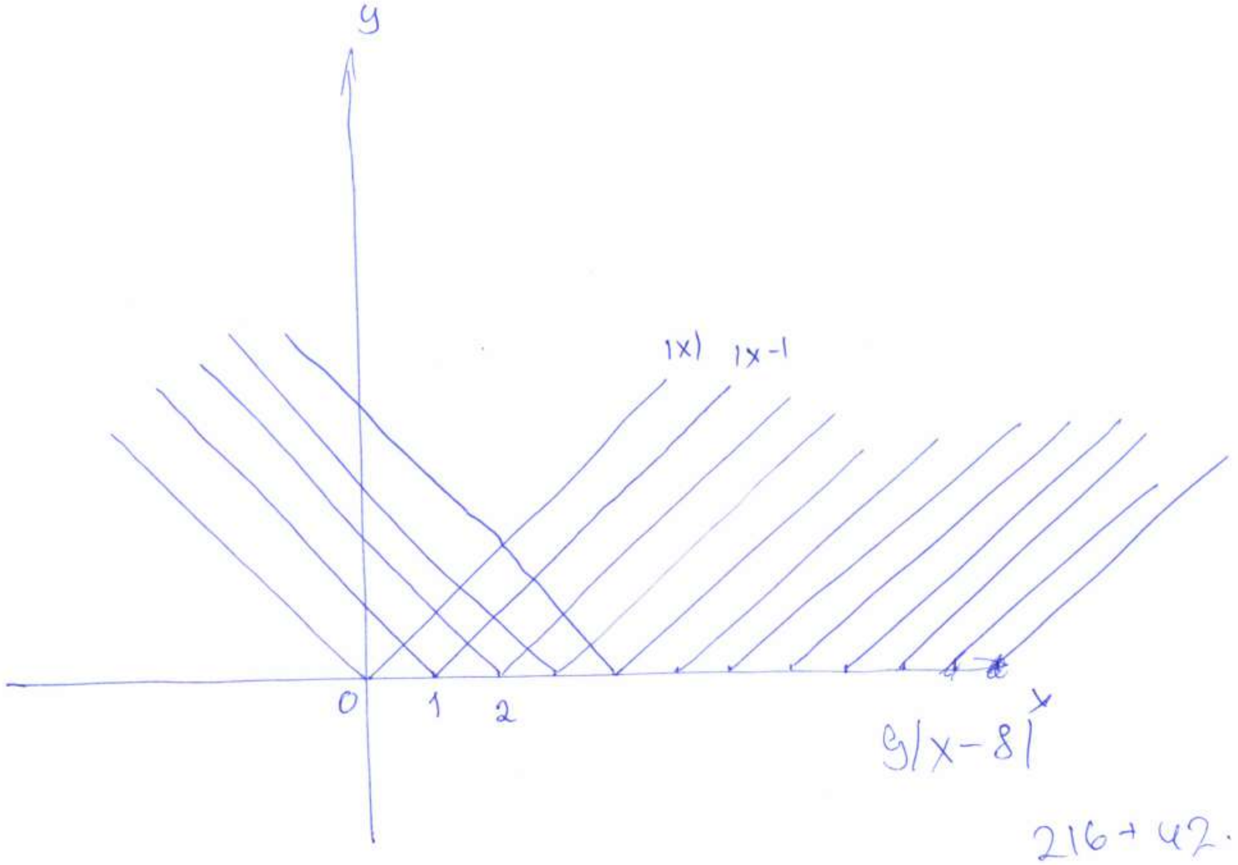
ΛA ⟷ ФФ AФ ⟷ ΛΛ ФΛ ⟷ AA

AΛ ⟷ ФФ ФA ⟷ ΛΛ ΛФ ⟷ AA

* ΛΛAФAΛAФФAΛAФФФAΛAФФФФAΛΛ

ΛФAΛФAΛФAAФAΛAФΛAФΛAФΛAФΛ

713130



$216+42\cdot2=$

$6\cdot7=42$

$72\cdot2$

144

$396-220$

$50 \quad 176$

$104+112$

$216+84=300$

$\frac{11}{2}\cdot12=$

66

$220-180=$

$=40$

0 0

~~Хотя бы одно~~ + −

$\left(a+\sqrt{1+a^2}\right)\left(b+\sqrt{1+b^2}\right)=1$

$a<0$

$b+\sqrt{1+b^2}=\dfrac{1}{a+\sqrt{1+a^2}}$ $\left(\overset{<0}{a}+\underset{0}{\sqrt{1+a^2}}\right)$

$+ 2a$

$1+a^2$

$1009 : 5 = 201$

$x = const$

$X\left(b+\sqrt{1+b^2}\right)=1$

$\boxed{0}$

$b+\sqrt{1+b^2}=\dfrac{1}{X}$

2 5

4

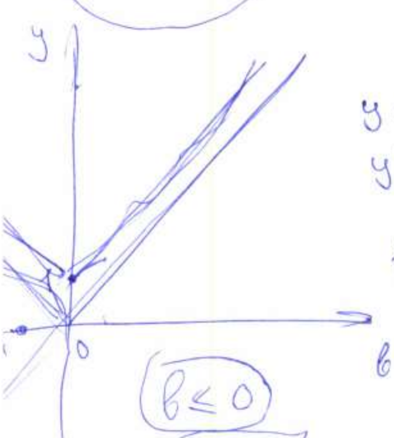
6

8

$\sqrt{26}>5$

$y^2-4=1$

$y=\sqrt{5}$



$y=\sqrt{1+b^2}$

$y^2=1+b^2$

$y^2-b^2=1$

$(y-b)(y+b)=1$

$y'=\dfrac{2b}{2\sqrt{1+b^2}}=1$

$1009 : 125$

800 200

2^{409}

$10=2\boxed{5}$

$b=\sqrt{1+b^2}$

$b^2=1+b^2$

$(b\le 0)$

$-b=\sqrt{1+b^2}$

$(b)^2=$

$b>0$

5 10 15 20 25

10 30 50

100

1,25

5, 10, …, 1005

$[201 : 5] = 40$

201 :

$4+21+64+161$

225

625 246

125 250 375 500 625

713130

Пусть А = 1　　АЛ, ЛА ⟺ ФФ
Л = 2　　1,2 ⟺ 33 (±3)
Ф = 3　　2,3 ⟺ 11 (±3)
　　　　　1,3 ⟺ 22 (±0)

$\underbrace{22}\underbrace{131}\underbrace{21}\underbrace{33}\underbrace{121}\underbrace{333}\underbrace{121}\underbrace{333}\underbrace{312}2$

$7 \cdot 2 + 8 + 30 = 14 + 8 + 30 = 52$

$\underbrace{231}\underbrace{231}\underbrace{231}\underbrace{231}\underbrace{213}\underbrace{213}\underbrace{213}\underbrace{213}2$

$9 \cdot 2 + 8 + 8 \cdot 3 = 18 + 32 = 50$

$\begin{cases} a > b \\ a \leq 1{,}01 b \end{cases}$　　$a > -b$, $a, b \geq 0$

$(a + \sqrt{1 + a^2})(-a + \sqrt{1 + a^2}) = 1$

$(\sqrt{1 + a^2})^2 - a^2 = 1$

$1 + \cancel{a^2} - \cancel{a^2} = 1$

Черновик.

$-\sqrt{3} \pm \sqrt{12 \mp 2\sqrt{3}}$

$x_n = \frac{n}{x_{n-1}}$ $\quad x_1 = 79$

$\sqrt{3} \pm \sqrt{12 + 2\sqrt{3}}$

$x_1 \cdot \ldots \cdot x_{2018}$ нужно

$\pm\sqrt{3} \pm \sqrt{2} \cdot \sqrt{6 \pm \sqrt{3}}$

$x_1 \cdot x_2 = \frac{2}{x_1} \cdot x_1 = 2$ $\quad x_3 \cdot x_4 = \cancel{x_3} \cdot \frac{4}{\cancel{x_3}}$

$2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2016 \cdot 2018$

$f(x) = |x| + 2|x-1| + 3|x-2| + \ldots + 11|x-10|$

$0 \quad 1 \quad 2 \quad \ldots \quad 10$

$x > 10$

$f(x) = \ldots$

$\cancel{\frac{\sqrt{3}}{2}} \pm$

$f(x) = x - \frac{2}{x} = \frac{x^2-2}{x}$

$f(f(x) = \left(\frac{x^2-2}{x}\right) - \frac{2x}{\left(\frac{x^2-2}{\cancel{x}}\right)} = \frac{\left(\frac{x^2-2}{x}\right)^2 - 2}{\left(\frac{x^2-2}{x}\right)} =$

$= \frac{(x^2-2)^2 - 2x^2}{x(x^2-2)}$

$f(f(f(x))) = \left(\frac{(x^2-2)^2 - 2x^2}{x(x^2-2)}\right)$

Пусть $f(f(x)) = t$ $\qquad$ Пусть $f(t) = a$

$f(t) = 1$ $\quad \frac{t^2-2}{t} = 1$ $\qquad \frac{a^2-2}{a} = -1 \lor \frac{a^2-2}{a} = 2$

$t^2 - 2 = t$ $\qquad a^2 + a - 2 = 0$ $\quad a^2 - 2a - 2 = 0$

$t^2 - t - 2 = 0$ $\qquad a = 1 \lor a = -2$ $\quad D = 4 + 8 = 12$

$t = -1 \lor t = 2$ $\qquad a = 1 \pm \sqrt{3}$

$\frac{x^2-2}{x} = 1$ $\quad x = -1$ $\quad x^2 - 2 \mp 2x = 0$ $\qquad$ Еще 4 корня

$x = 2$ $\quad x = -1 \pm \sqrt{3}$

160 + 32

713130

$2\omega_{ср.л} = \overset{\circ}{\omega}_{ср.тр.} \to \omega'_{ср.тр.} = 1{,}5\, \overset{\circ}{\omega}_{ср.тр} \to \overset{1}{\omega}_{ср.тр.} = 3\omega_{ср.л.}$

Пусть L

2016 $0{,}1L$ тр. $0{,}9L$ лен. 2017 $0{,}1L$ тр. $0{,}9L - x$

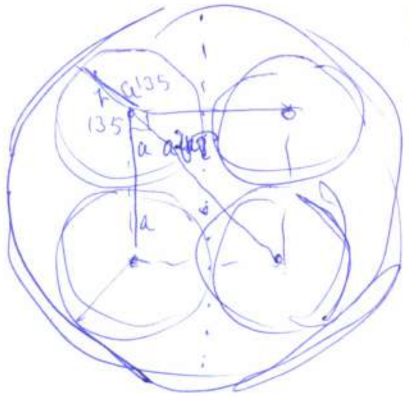
$2A$ $9A$ $3A$ $9A - \cdot$

$\omega_{ср.} = \frac{11A}{L}$

$(8 + 4 - 8\sqrt{2})^2$

$(12 - 8\sqrt{2})^2$

$(144 + 64\cdot 2 - 12\cdot 8\cdot 2\sqrt{2}$



S_1 π

$a + a\sqrt{2} = r$

$a(1+\sqrt{2}) = r$

$a = \frac{r}{1+\sqrt{2}} = \frac{(-1+\sqrt{2})r}{-1} = (\sqrt{2}-1)r$

$p = \frac{128\, b}{1-q}$

$4\big((\sqrt{2}-1)^2\pi - 4(\sqrt{2}-1)^4\pi + 4\cdot 4(\sqrt{2}-1)$

$17 \quad 12\sqrt{2}$

$\left(\frac{17}{12}\right)^2 \quad 2$

$17 - 12\sqrt{2}$

$\frac{17^2}{}$

$\frac{289}{36\cdot 2} \quad 1$

$\frac{289}{72} > 1$

$1 \to \underset{a}{(\sqrt{2}-1)} \to \underset{a^2}{(\sqrt{2}-1)^2} \dots$

$4\pi \cdot \big(a^2 - 4(a^2)^2 + 4\cdot 4(a^3)^2\pi -$

$- 4\cdot 4\cdot 4(a^4)^2\pi + \dots -$

$4\pi \cdot \big(a^2 - 4a^4 + 16a^6 -$

$- 64a^8 \big)$

$a^2 \to 16a^6 \to 16\cdot 16\, a^{10}$

$p = \frac{(\sqrt{2}-1)^2}{1 - (16\cdot(\sqrt{2}-1)^4} =$

$= \frac{3 - 2\sqrt{2}}{1 - 16(9 - 12\sqrt{2} + 8)} =$

$= \frac{3 - 2\sqrt{2}}{1 - 16\cdot 17 + 16\cdot 12\sqrt{2}} =$

Оценочный бланк олимпиадных заданий по математике

Код участника: 74 01 0005

Номер задания		1	2	3	4	5	6	7	8
Полученные баллы	Первый проверяющий	5	10	12	6	12	14	4	16
	Второй проверяющий	5	10	12	6	12	14	4	16
	Итого	5	10	12	6	12	14	4	16
Сумма баллов (оценка)		79							

Члены жюри:

[подпись] Подпись	Александрова И.А. Фамилия И.О.
[подпись] Подпись	Волкова Е.С Фамилия И.О.
Подпись	Фамилия И.О.

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМА, ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ-ФИНАНСИСТ!»

74010005

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

$f(x)=|x|+2|x-1|+3|x-2|+4|x-3|+5|x-4|+6|x-5|+7|x-6|+8|x-7|+9|x-8|+10|x-9|+11|x-10|$

№2 $f(x)=|x|+2|x-1|+3|x-2|+\dots+11|x-10|$

1. Если $x<0$ $f(x)=k_1x+b_1$, где $k_1=-1-2-\dots-11<0$, то есть функция убывает.

2. Если $x\in[0;1]$ $f(x)=k_2x+b_2$, $k_2=1-2-3-\dots-11$, то есть функция убывает.

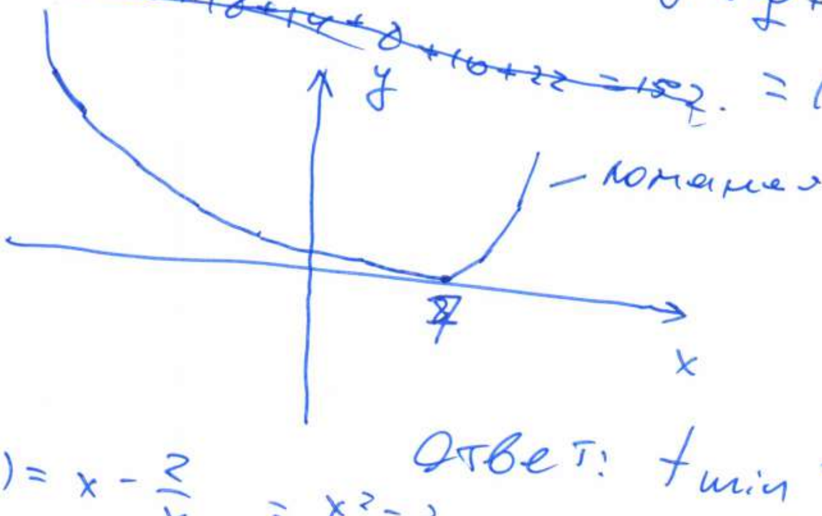
⋮

3. Если $x\in[6;7]$ $f(x)=k_8x+b_8$ $k_8=1+2+3+\dots-8-9-10-11=\frac{7\cdot8}{2}-38=-10$ т.е $f(x)$ убывает

4. Если $x\in(7;8]$ $f(x)=k_9x+b_9$ $k_9=\frac{8\cdot9}{2}-30=6$ т.е функция возрастает.

Значит минимум достигается при $x=7$ т.к. $(-\infty;7]$ $f\downarrow$ $[7;\infty)$ $f\uparrow$

$f(7)=7+2\cdot6+3\cdot5+4\cdot4+5\cdot3+6\cdot2+7\cdot1+8\cdot0+9\cdot1+10\cdot2+11\cdot3=$
~~$=8+14+18+20+20+18+14+8+10+22=152$~~ $=146$



Ответ: $f_{min}=f(7)=146$

№3 $f(x)=x-\frac{2}{x}=\frac{x^2-2}{x}$

$f(x)=1 \Rightarrow x-\frac{2}{x}=1$ $x^2-x-2=0 \Rightarrow$ $\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=2\end{array}\right.$

~~Знать условие можно через~~

2

74010005

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

Значит условие можно переформулировать так: сколько решений имеет $\left[\begin{array}{l} f(f(x))=-1 \\ f(f(x))=2 \end{array}\right.$

Действительно, тогда $f(f(f(x)))=f(-1)=1$ или $f(f(f(x)))=$ $=f(2)=1$.

Решим $f(x)=-1$ $x-\frac{2}{x}=-1$ $x^2+x-2=0$ $\left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-2 \end{array}\right.$

Решим $f(x)=2$ $x-\frac{2}{x}=2$ $x^2-2x-2=0$

$x=1\pm\sqrt{3}$. Таким образом, кол-во корней $f(f(f(x)))=1$ совпадает с кол-вом корней

$\left[\begin{array}{l} f(x)=1+\sqrt{3} \\ f(x)=1-\sqrt{3} \\ f(x)=1 \\ f(x)=-2 \end{array}\right.$ (!!!)

Действительно, тогда $\left[\begin{array}{l} f(f(x))=-1 \\ f(f(x))=2 \end{array}\right.$

Заметим, что уравнение $f(x)=a$ имеет два корня при любом действ a.

$x-\frac{2}{x}=a$ Пусть $x\neq0$ $x^2-ax-2=0$ $D=a^2+8>0$.

Значит (!!!) имеет 8 корней.

Ответ: 8 корней.

и б) Заметим, что $(a+\sqrt{1+a^2})(\sqrt{1+a^2}-a)=1=$
$=(a+\sqrt{1+a^2})(b+\sqrt{1+b^2})$ Ясно, что Пусть $a+\sqrt{1+a^2}\neq0$. Действительно $\sqrt{a^2+1}=-a$ $a<0$
$a^2+1=a^2$ $1\neq0$.

Значит $\sqrt{1+a^2}-a=\sqrt{1+b^2}+b$

3
74010005

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

(*).

$a+b=\sqrt{1+a^2}-\sqrt{1+b^2}$ $\quad (a+b)(\sqrt{1+a^2}+\sqrt{1+b^2})=$

$=(\sqrt{a^2+1}+\sqrt{b^2+1})(\sqrt{a^2+1}-\sqrt{b^2+1})=a^2-b^2=(a+b)(a-b)$.

Домножим на (−1). Перенесем в одну часть

$(a+b)(a-b-\sqrt{1+a^2}-\sqrt{1+b^2})=0$.

$\left[\begin{array}{l} a+b=0 \\ a-b-\sqrt{1+a^2}-\sqrt{1+b^2}=0 \ (!) \end{array}\right.$

Докажем, что (!) неразрешим. Сложим (*)+(!).

$2a=2\sqrt{1+a^2}$ $\quad a=\sqrt{a^2+1}$ $\Rightarrow \begin{cases} a\geq 0 \\ a^2=a^2+1 \end{cases}$ $\quad 0=1$ противоречие

Значит $a+b=0$. Ответ: 0.

№1 Заметим, что попарно новое n. $x_n\cdot x_{n-1}=n$. Будем брать и т.д. Таким пар будет 1000. $n_1=2$ $\quad x_2\cdot x_1=2$. $n_2=4$ $\quad x_3\cdot x_4=4$. $n_3=6$ $\quad n_i=2i$

$x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_{2017}=n_1\cdot n_2\cdot\ldots\cdot n_{1009}=2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2018$.

Значит кол-во нулей чисел, оканч. на 0 + удвоенное кол-во чисел, оканчив на два 0 + утроен. кол-во чисел, оканч на 3 нуля при условии, что числа $\in[1;2018]$.

от 1 до 100] 11 чисел, оканч на 0. ⇒ от 1 до 999

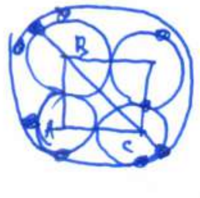
$11\cdot 9=99$ чисел, оканч. на 0. + (1000) заканчивается на 3 „0". То есть от 1 до 1000

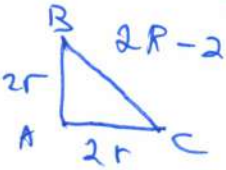
в произведении будет 102 „0".

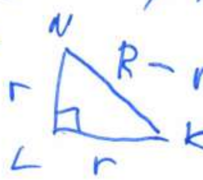
ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

от 1 до 99 9 чисел, оканчив на 0.
от 1 до 999 $9\cdot10=90$ чисел, оканч на 0.
от 1 до 999 9 чисел, оканчив на 00.
то есть от 1 до 999 "108 нулей".
Аналогично от 1001 до 1999 "108 нулей"
Ещё "6 нулей" это 1000 и 2000 и "1 ноль" это 2010.
$K=108+108+6+1=223$ Ответ: 223 нуля на конце.

№5







Используем Тh Пифагора.

$r^2+r^2=(R-r)^2$ $2r^2=R^2-2Rr+r^2$

$r^2+2Rr-R^2=0$ $D/4=R^2+R^2=2R^2$

$r=-R\pm\sqrt{2}R$ (имеет геом смысл только корень $r=R(\sqrt{2}-1)>0$). $r_1=(\sqrt{2}-1)\cdot 1$ $r_2=(\sqrt{2}-1)^2$

$\sum_{i=1}^{\infty} S_i=4\pi r_1^2-16\pi r_2^2+64\pi r_3^2+\dots$ $S_i=4^i\pi r_i$ $r_i=(\sqrt{2}-1)^i$

это сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии

$0<q=-4(\sqrt{2}-1)^2<-1$ (проверено непосредственно на калькуляторе)

четыре нов. и i-й радиус.

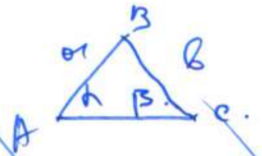
$$S=\frac{4\pi(\sqrt{2}-1)^2}{1+4(\sqrt{2}-1)^2}$$

Ответ: $\frac{4\pi(\sqrt{2}-1)^2}{1+4(\sqrt{2}-1)^2}$

$2(\sqrt{2}-1)\overset{?}{\gtrless}1$
$3-2\sqrt{3}\overset{?}{=}\frac{1}{4}$
$\frac{11}{4}\overset{?}{\gtrless}\sqrt{12}$ $\frac{121}{4}\overset{?}{\gtrless}12$

Значит
$-4(\sqrt{2}-1)<-1$
$\sqrt{2}-1<1$
$-4(\sqrt{2}-1)^2<-1$

№7



$\beta < \alpha < 1{,}01\beta.$

Используем Th синусов

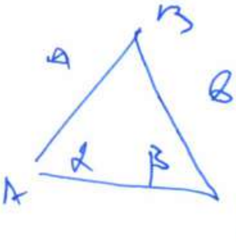
$$\frac{a}{\sin\beta} = \frac{b}{\sin\alpha}$$

$$b = a \cdot \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = a \cdot \frac{\sin(\beta+\alpha)}{\sin\beta} = a \cdot \sin\beta\cos\alpha + \cos\beta\sin$$

 5
74010005

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

№7



$\beta<\alpha<0,01\beta$

Используем Т. синусов.

$$\frac{a}{\sin\beta}=\frac{b}{\sin\alpha}\quad b=a\cdot\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=$$

$$=a\cdot\frac{\sin(\beta+\Delta)}{\sin\beta}=a\cdot\frac{\sin\beta\cos\Delta+\sin\Delta\cos\beta}{\sin\beta}.$$

т.к ~~tg~~ $0<\Delta<\frac{\pi}{2}\cdot 0,01 \Rightarrow$ при радианном исчислении $\sin\Delta\to 0$; $\cos\Delta\to 1 \Rightarrow$ выражение в числителе стремится к $\sin\beta \Rightarrow$ дробь стремится к 1. $\Rightarrow b\to a$.

№8 Пусть А=1; Я=2; Ф=3. Операции: $21\leftrightarrow 33$, $13\leftrightarrow 22$, $32\leftrightarrow 11$.

Можно ли с их помощью преобразовать $2213121331213331213333122$ $(=S_1)$ в $2312312312312132132132132$ $(=S_2)$?

Заметим, что после каждой операции сохраняется остаток от деления на 3. 21 и 33 дают оба ~~оста~~ остаток 0 при делении на 3. 13 и 22 оба дают остаток 2. А значит, чтобы данное преобразование было возможно у начальной и конечной строчки должны быть одинаковые остатки при делении на 3. 32 и 11 оба дают остаток 1.

Посмотрим на сумму цифр и остаток от деления на 3 в первой строке. $S_1=10\cdot 3+2\cdot 7+8\cdot 1=10\cdot 3+22=\underbrace{10\cdot 3+7\cdot 3}_{\text{делится на 3}}+1$ (остаток 1).

Посмотрим на $S_2=8\cdot 3+2\cdot 9+8=\underbrace{8\cdot 3+2\cdot 9+6}_{\text{делится на 3}}+2$ (остаток 2). Поскольку операция поменять местами цифры (1) не меняет остатки, то данное противоречие показывает, что $S_1\to S_2$ невозможно. $\Rightarrow$ слова S_2 не существует. Ответ: нет этого слова.

6

74010005

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

№4 $\cancel{\frac{W_T^{2016}}{T_{2016}}}=$ $W_T^{2017} = 1,5\, W_T^{2016}$ 1 год, а не степень.

$\cancel{W_T^{2016}}$ $T_{2016} = T_{2017}$ $\frac{W_T^{2016}}{T_{2016}} = 2\frac{W_\Lambda^{2016}}{\Lambda_{2016}}$

$\Lambda_{2016} \neq \Lambda_{2017}$
$>$

$$\frac{W_T^{2017} T_{2017} + W_\Lambda^{2017}\cdot \Lambda_{2017}}{T_{2017} + \Lambda_{2017}} = 1,2 \cdot \frac{W_T^{2016}\cdot T_{2016} + W_\Lambda^{2016}\Lambda_{2016}}{T_{2016} + \Lambda_{2016}}$$

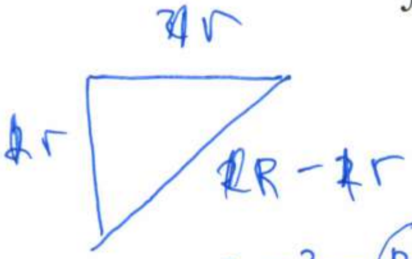
$T_{2016} = 0,1\,(T_{2016} + \Lambda_{2016})$ $9\,T_{2016} = \Lambda_{2016}$

$\frac{W_T^{2016}}{T_{2016}} = \frac{2\,W_\Lambda^{2016}}{9\,T_{2016}}$ $9\,W_T^{2016} = 2\,W_\Lambda^{2016}$

$\cancel{1,2\cdot \frac{9}{2}W_\Lambda}$ $1,2\cdot \frac{W_T^{2016}\cdot T_{2016} + \frac{81}{2}W_T^{2016} T_{2016}}{10\,T_{2016}} =$

$= \frac{1,2\cdot 83}{20}\, W_T^{2016}$

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ



$2r^2 = R^2 - 2Rr + r^2$

$r^2 + 2Rr - R^2 = 0$

$D/4 = R^2 + R^2 = 2R^2$

$r = -R + \sqrt{2}R = R(\sqrt{2} - 1)$

$r_1 = \sqrt{2} - 1$

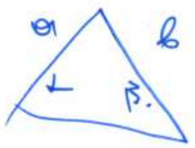
$r_2 = (\sqrt{2} - 1)^2$

$r_3 = (\sqrt{2} - 1)^3$

$S = 4\pi r_1^2 - 16\pi r_2^2 + 64\pi r_3^2 + \ldots$

$q = -4(\sqrt{2} - 1)^2$

$$S = \frac{4\pi(\sqrt{2}-1)^2}{1 + 4(\sqrt{2}-1)^2}$$



$$\frac{a}{\sin\beta} = \frac{b}{\sin\alpha}$$

$f(x) = \cos x$

$f(x + \Delta x) = \cos(x + \Delta x)$

$\Delta x < 2\pi \cdot 0{,}01 = 0{,}02\pi$

$\frac{df}{dx} = \sin x$ $\quad \cos x \cos\Delta x - \sin x \cdot \sin\Delta x$

$$\frac{a}{\sin\beta} = \frac{b}{\sin(\beta + 0{,}01\beta)}$$

$$\frac{a}{\sin\beta} \quad \frac{b}{\sin\beta \underbrace{\cos 0{,}01\beta}_{1} - \underbrace{\sin 0{,}01\beta}_{0} \cos\beta}$$

Λ φ/φ φ A   ΛΛa → AφAφ AφΛΛ

Λ φ φ φφ

~~AAφA~~ ΛΛAφA

AφAφa

ΛΛaφ

Λ φφφ

Λ φφφAΛa

Λ φΛaφ

Λ φ

ΛΛ

Λ φAφ

22131

ΛΛAφ

21 ↔ 33

AφAφ

13 ↔ 22

ΛΛΛX

32 ↔ 11

Λ φφφ

Λ φΛA

2213121331213331213333122

2312312312312132132132132

233312

~~232332~~   23212

233333
2321333
22
231323
11 33
22

3233

ΛΛA

AφA   ~~Aa~~ Λφφ

74010005

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

$x_2 = \frac{2}{79}$

$x - \frac{2}{x} = 1 - \sqrt{3}$ $x^2 + (\sqrt{3}-1)x - 2 = 0$

$x_3 = \frac{3 \cdot 79}{2}$

$\underbrace{(a + \sqrt{1+a^2})}_{k}\underbrace{(b + \sqrt{1+b^2})}_{l} = 1$

$x_4 = \frac{4 \cdot 2}{3 \cdot 79}$

$(b + \sqrt{1+b^2})(\sqrt{1+b^2} - b) = 1$

$x_1 \cdot x_2 = 2$

$(a + \sqrt{1+a^2})(\sqrt{1+a^2} - a) = 1$

$x_3 \cdot x_4 =$

$(\sqrt{1+a^2} - a)(\sqrt{1+b^2} - b) = 1$

2/4

$kl = 1$

$\frac{1}{kl} = 1$

$9 \cdot 10$

$b + \sqrt{1+b^2} = \sqrt{1+a^2} - a$

$a + b = \sqrt{1+a^2} - \sqrt{1+b^2}$

$\cancel{a^2} + b^2 + 2ab = 2 + a^2 + b^2 - 2\sqrt{\ldots}$

$ab = 1 - \sqrt{\ldots}$

~~$ab + (a+b)$~~

$ab + a\sqrt{1+b^2} + b\sqrt{1+a^2} + \sqrt{\ldots} = 1 + a\sqrt{1+b^2} + b\sqrt{1+a^2} =$

$ab + \sqrt{\ldots} = 1$

$9 \cdot 10 + 9 \cdot 2 = 108$

$b + \sqrt{1+b^2} = \sqrt{1+a^2} - a$

$9 \cdot 3 + 9 \cdot 19$

$(a+b)(\sqrt{1+a^2} + \sqrt{1+b^2}) = (a+b)(a-b)$

$a - b = \sqrt{1+a^2} + \sqrt{1+b^2}$

$2a = \sqrt{1+a^2}$

$$\frac{\left(\frac{x^2-2}{2}\right)^2-2}{x} = \frac{\frac{x^4-4x^2+4}{4}-2}{x} = \frac{x^4-4x^2-4}{4x}$$

$$x-\frac{2}{x}-\frac{2}{x-\frac{2}{x}} = x-\frac{2}{x}-\frac{2x}{x^2-2} = \frac{x^2-2}{x}-\frac{2x}{x^2-2}$$

$7 + 2\cdot 6 + 3\cdot 5 + 4\cdot 4 + 5\cdot 3 + 6\cdot 2 + 7\cdot 1 + 8\cdot 0 + 9\cdot 1 + 10\cdot 2 + 11\cdot 3$

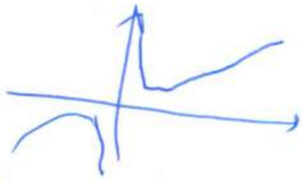
$8 + 2\cdot 7 + 3\cdot 6 + 4\cdot 5 + 5\cdot 4 + 6\cdot 3 + 7\cdot 2 + 8\cdot 1 + 9\cdot 0 + 10 + 22$

$6 + 2\cdot 5 + 3\cdot 4 + 4\cdot 3 + 5\cdot 2 + 6\cdot 1 + 7\cdot 0 + 8\cdot 1 + 9\cdot 2 + 10\cdot 3 + 11\cdot 4$

$x-\frac{2}{x}$

$$\frac{x^4-4x^2+4-2x^2}{(x^2-2)x} = \frac{x^4-6x^2+4}{(x^2-2)x}$$

$$\frac{df}{dx} = 1+\frac{2}{x^2} \neq 0$$



$\frac{x^2-2}{x}$

$$\frac{\left(\frac{x^2-2}{x}\right)^2-2}{\frac{x^2-2}{x}} = \frac{\frac{x^4-4x^2+4}{x^2}-2}{\frac{x^2-2}{x}} =$$

$$= \frac{x^4-6x^2+4}{(x^2-2)x}$$

$f(x) = 1$

$x-\frac{2}{x} = 1$

$x^2-x-2=0$

$x=-1$

$x=2$

$x-\frac{2}{x} = -1$

$x^2+x-2=0$

$x=1$

$x=-2$

$x-\frac{2}{x} = 2$

$x^2-2x-2=0$

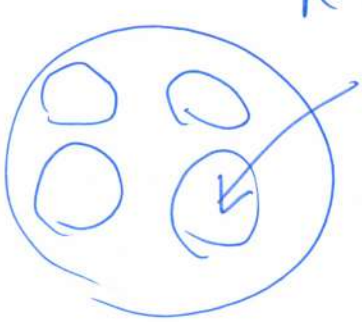
$x = 1 \pm \sqrt{3}$

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

АФА 16%

КАКОЙ

Г?



T_{2016} Λ_{2016}

$x \Rightarrow T''_{2017}$ Λ_{2017}

$W_{T_{2016}}$ $W_{\Lambda_{2016}}$

$W_{T_{2017}}$ $W''_{\Lambda_{2017}}$

$w_T = 2w_\Lambda$

$w'_T = 1{,}5 w_T$

$T = 0{,}1(T+$

$W_{T2017} = 1{,}5\, W_{T2016}$

$x \cdot w_{T2017} + \Lambda_{2017} \cdot W_{\Lambda 2017} =$

$1{,}2(x \cdot W_{T2016} + \Lambda_{2016} \cdot W_{\Lambda 2016})$

Трудяги $T_{2016} = T_{2017} = x$. их зп 1,5a

лентяи $\overset{2017}{y}$ $\overset{2016}{z}$ зп лентяев t и a.

$x = 0{,}1(x+z)$

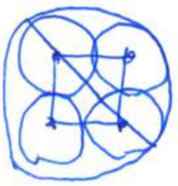
$\frac{1{,}5a \cdot x + t \cdot y}{x+y} = 1{,}2$

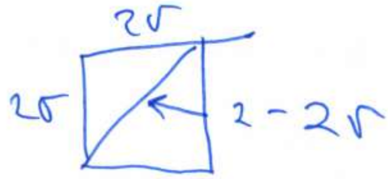
$= \frac{1{,}2(ax + tz)}{x+z}$

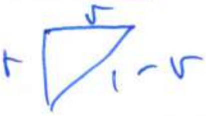
У маленьких ?

$1{,}5ax^2 + txy + 1{,}5axz + tyz = 1{,}2ax^2 + 1{,}2txz +$

$+ 1{,}2axy + 1{,}2tyz$







$2r^2 = r^2 - 2r + 1$

$r^2 + 2r - 1 = 0$

$\boxed{r = \sqrt{2} - 1}$

$2r^2 = R^2 - 2Rr + r^2$

$R^2 - 2Rr - r^2 = 0$

$r^2 + 2rR - R^2 = 0$

$D/4 = R^2 + R^2 = 2R^2$

$r = -1 + R\sqrt{2} =$

$= R\sqrt{2} - 1$

$S_{1\sigma} = 4 \cdot \pi r_\sigma^2$

$4\pi(\sqrt{2} - 1)^2 -$

$4\pi r_1^2 - 4 \cdot 4\pi r_2^2 + 4 \cdot 4 \cdot 4\pi r_3^2 \dots$

$r_1 = \sqrt{2} - 1$

$r_2 = (\sqrt{2} - 1)\sqrt{2} - 1 = 1 - \sqrt{2}$

$(\sqrt{2} - 1)\sqrt{2} - 1 = 1 - \sqrt{2}$

$\cancel{r_3 = (1 - \sqrt{2})\sqrt{2} - 1 = \sqrt{2} - 3}$

$\cancel{r_3 = (1 - \sqrt{2})\sqrt{2} - 1}$

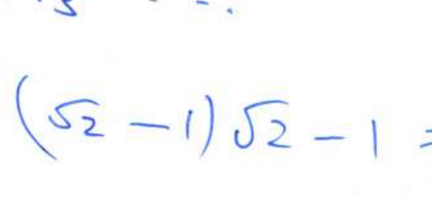
$r_3 = (\sqrt{2} - 1)(1 - \sqrt{2}) + 1 = -3 + 2\sqrt{2} + 1 = 2(\sqrt{2} - 1)$

$r_4 = 2(3 - 2\sqrt{2}) = 6 - 4\sqrt{2}$

$r_5 =$

$r_1 = \sqrt{2} - 1$

$\cancel{r_2 = 2 - \sqrt{2} - 1 = 2 - \sqrt{2} - 1}$



$3 - 2\sqrt{2} + \cancel{3 - 2\sqrt{2}} = R^2 - 2R(\sqrt{2} - 1) + \cancel{3 - 2\sqrt{2}}$

$R^2 - 2R(\sqrt{2} + 1) + 2\sqrt{2} - 3 = 0$

$D/4 = (\sqrt{2} + 1)^2 + 3 - 2\sqrt{2} = 6$

$R = \cancel{\sqrt{2} + 1 \pm \sqrt{6}}$

$\sqrt{6} + \sqrt{2} + 1$

 14010005

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

221312

233312 22 ост 1.

$10-\cancel{3}+2\cdot 7+8$

$8\cdot 3+\cancel{2\cdot 9}+8$ ост 2

$$\frac{w_T^{2016}}{T_{2016}} = \frac{2w_\Lambda^{2016}}{\Lambda_{2016}}$$

$$w_T^{2017} = 1{,}5\, w_T^{2016}$$

$$T_{2016} = T_{2017}$$

$$\Lambda_{2016} \neq \Lambda_{2017}$$

$$\frac{w_T^{2017}\cdot T_{2017} + w_\Lambda^{2017}\cdot \Lambda_{2017}}{T_{2017}+\Lambda_{2017}} = T_{\neq} = 1{,}2\ \frac{w_T^{2016}\cdot T_{2016} + w_\Lambda^{2016}\cdot \Lambda_{2016}}{T_{2016}+\Lambda_{2016}}$$

$$T_{2016} = 0{,}1\,(T_{2016}+\Lambda_{2016})$$

$$9\,T_{2016} = \Lambda_{2016}$$

Оценочный бланк олимпиадных заданий по математике

Код участника: 201002

Номер задания		1	2	3	4	5	6	7	8
Полученные баллы	Первый проверяющий	10	0	12	12	12	14	0	16
	Второй проверяющий	10	0	12	12	12	14	0	16
	Итого	10	0	12	12	12	14	0	16
Сумма баллов (оценка)		76							

Члены жюри:

Подпись — Волкова Е.С.
Фамилия И.О.

Подпись — Александрова И.А.
Фамилия И.О.

Подпись
Фамилия И.О.

2010002

Чистовик

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМА. ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ-ФИНАНСИСТ!»

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

6.

$(a+\sqrt{1+a^2})(b+\sqrt{1+b^2})=1.$

Заметим, что $(a+\sqrt{1+a^2})(-a+\sqrt{1+a^2})=1$, т.к. эти скобки можно раскрыть как разность квадратов. Тогда получаем, что $-a+\sqrt{1+a^2}=b+\sqrt{1+b^2}$. $a+b=\sqrt{1+a^2}-\sqrt{1+b^2}$. Возведем обе части в квадрат. $a^2+b^2+2ab=1+a^2+1+b^2-2\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)}$. Тогда $\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)}=1-ab$.

Раскроем скобки в начальном уравнении:

$(a+\sqrt{1+a^2})(b+\sqrt{1+b^2})=ab+a\sqrt{1+b^2}+b\sqrt{1+a^2}+\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)}=1$ Заменим $\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)}$ на $1-ab$.

Получим $a\sqrt{1+b^2}=-b\sqrt{1+a^2}$. Возведем обе части в квадрат:

$a^2+a^2b^2=b^2+a^2b^2$, т.е. $a^2=b^2$, значит $a=\pm b$. Предположим, что $a=b$.

Тогда из $a\sqrt{1+b^2}=-b\sqrt{1+a^2}$ получаем, что $a\sqrt{1+a^2}=-a\sqrt{1+a^2}$, т.е. $a=0$, тогда $b=0$. Подставив $a=b=0$ получаем равенство. Проверим $a=-b$.

$(a+\sqrt{1+a^2})(-a+\sqrt{1+a^2})=-a^2+1+a^2=1$. Значит $a+b=0$

+

Ответ: 0

Рассмотрим произведение двух последовательных членов последовательности:

$x_k\cdot x_{k+1}=x_k\cdot\frac{k+1}{x_k}=k+1$. Тогда заменим в ~~сгруппируем~~ $x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot\ldots x_{2018}$ $x_1\cdot x_2$ на 2, $x_3\cdot x_4$ на 4, $x_5\cdot x_6$ на 6 и т.д. Получим $x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot\ldots\cdot x_{2018}=2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot\ldots2018$.

Так как $10=5\cdot2$, то рассмотрим кол-во пятерок, входящих в разложение данного числа. На 5 делятся числа 10, 20, 30, 40.. 2010, т.е 201 число. На 25 делятся 50, 100, 150, 200.. 2000, т.е. 40 чисел. На 125 делятся 250, 500, 750, 1000.. 2000, т.е. 8 чисел. На 625 делится только 1250. Тогда в это число входит $201+40+8+1=250$ пятерок. Двоек в этом числе хотя бы 2018, т.к. каждое число $\vdots 2$. Тогда получаем, что данное число оканчивается на 250 нулей.

Ответ: 250 нулей.

+

2010002

Чистовик

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМА. ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ-ФИНАНСИСТ!»

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

4. Пусть Т-зарплата трудовиков, тогда Λ- зарплата лентяев. По условию $T = \cancel{1,5\Lambda}\ 2\Lambda$. Так же пусть X - кол-во трудяг, T' - зарплата трудяг в 2017г, y - кол-во лентяев в 2016г, y' - кол-во лентяев в 2017. По условию $T' = 1,5T = 3\Lambda$. Так же т.к. трудяг 10% в 2016г, то $y = 9x$. Тогда составим уравнение.

$$1,2 \cdot \frac{xT + y\cdot\Lambda}{x+y} = \frac{x\cdot T' + y'\Lambda}{x+y'}. \quad \frac{xT+y\Lambda}{x+y} = \frac{x\cdot 2\Lambda + 9x\Lambda}{10x} = \frac{2\Lambda+9\Lambda}{10} = \frac{11}{10}\Lambda$$

Тогда $\frac{xT'+y'\Lambda}{x+y'} = \frac{x\cdot 3\Lambda + y'\cdot\Lambda}{x+y'} = \frac{11\cdot 1,2\Lambda}{10} \Rightarrow 30x + 10y' = 13,2x + 13,2y'$.

$$16,8x = 3,2y'$$

$$5,25x = y'$$

Тогда $\frac{x}{x+y'} = \frac{x}{6,25x} = \frac{1}{6,25} = 0,16$, т.е. 16%

(+)

Ответ: 16%.

8. Заметим, что мы можем поменять местами любые две близстоящие буквы. Если они одинаковые, то ничего не делаем. Если они разные, то смотрим можно ли их сейчас поменять на 2 одинаковые. Если да, то меняем, затем меняем порядок букв слова, меняем опять эти 2 буквы и снова меняем порядок букв в слове. Например если было слово ФАФ, ~~на~~ и мы хотим поменять ФА, то $\overbrace{ФА}Ф \to Ф\overbrace{АФ} \to Ф\overbrace{ΛΛ} \to ΛΛФ \to АФ\cancel{А}$.
При этом все остальные ~~слово~~ буквы не меняются. Если мы можем переставить любые две соседние буквы, то мы можем поменять абсолютно любые две буквы местами. Тогда смотрим на первое слово. В нем 7 букв Λ, 10 букв Ф, 8 букв А. Во втором слове 8 букв А, 9 букв Λ, 8 букв Ф.
Заметим, что второе слово можно превратить в слово из 25 Λ. ~~Пусть~~ ~~разные~~ Тогда если из 1 слова можно получить слово из 25 Λ, то условие задачи

страница 2.

Запрещается делать пометки, раскрывающие авторство работы

201CCC2

Чилатовиц

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМА. ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ-ФИНАНСИСТ!»

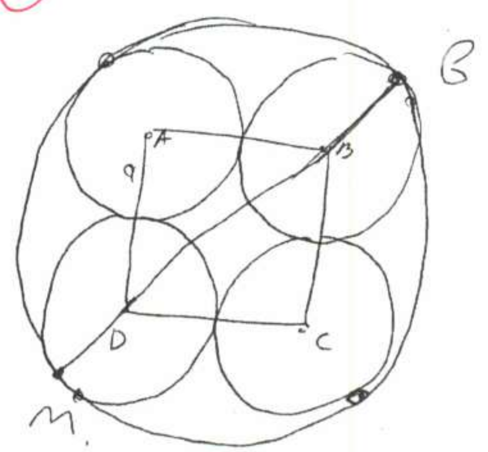
ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

выполнится, если нет, то нет. Для того, чтобы получить все буквы Л, нужно чтобы в какой-то момент кол-во букв А и Ф было поровну. Тогда пусть между большим и меньшим из них в какой-то момент $=k$. Тогда если мы меняем большее на 2 другие буквы, то разность стает $|k-3|$, если меняем меньшее на 2 другие, то разность стает $k+3$, если мы меняем буквы Л, то разность не меняется. Тогда т.к. нам нужна разность в $k=0$, то в какой-то момент k должно быть кратно 3. Но изначально $k=2$, т.е. k всегда будет давать остатки 1 и 2 по модулю 3, значит ~~их~~ в языке альфов этого слова нет.

Ответ: нет

+

5. ~~Пусть~~ Рассмотрим окружность, внутри которой лежат другие 4 две окружности. Пусть A, B, C, D - их центры, G и M - точки касания двух окружностей с большой (см. рисунок). Тогда в силу симметрии M, D, B, G лежат на одной прямой.



Пусть радиус меньшей окружности a. Тогда $AD=2a$, тогда $DB=2a\sqrt{2}$, тогда $GM=2a\sqrt{2}+2a$. Тогда радиус большой окружности $a\sqrt{2}+a$. Тогда маленькие окружности составляют от большой $\left(\frac{(a\sqrt{2}+a)^2\pi}{4a^2\pi}\right)^{-1}=\left(\frac{(\sqrt{2}+1)^2}{4}\right)^{-1}$ часть $=\frac{4}{3+2\sqrt{2}}$ часть. ~~Тогда площадь белой~~ области ~~равна~~ $\cancel{\pi\left(1-\left(1-\frac{4}{\sqrt{3}+2}+\frac{16}{(\sqrt{3}+2)^2}-\frac{64}{(\sqrt{3}+2)^3}+\frac{4^4}{(\sqrt{3}+2)^4}\right)\right)}$. Пусть $\frac{4}{3+2\sqrt{2}}=a$.

страница 3.

2010002

Чистовик

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «МИССИЯ ВЫПОЛНИМА. ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ-ФИНАНСИСТ!»

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

~~Тогда~~ $\cancel{\pi(1-a+a^2-a^3+a^4\ldots) = \pi(1+(a^2-a)+(a^4-a^3)+\ldots)=}$

$\cancel{=\pi(1+a(a-1)+a^3(a-1)+a^5(a-1)\ldots) = \pi(1+(a-1)(a+a^3+a^5+\ldots)a)) =}$

$\cancel{=\pi(1-(a-1)(a+a^3+a^5\ldots) = \pi-1+(1-a)(a+a^3+a^5\ldots)}$

$\cancel{\pi(1-(a-1)(a+a^3+a^5\ldots)) = \pi-(a-1)(a+a^3+a^5\ldots) =}$

$\cancel{=\pi+(1-a)(a+a^3+\ldots)}$

~~Тогда~~ $\cancel{S_{бел} = \pi - \pi\cdot a^2 - \pi\cdot a^4 - \pi\cdot a^6 - \pi\cdot a^8}$

$S_{черн} = \pi - \pi a + \pi a^2 - \pi a^3 + \pi a^4\ldots$, тогда $S_{бел} =$

$= \pi a - \pi a^2 + \pi a^3 - \pi a^4 = \pi(a-a^2+a^3-a^4\ldots) = \pi(a(1-a)+a^3(1-a)\ldots) =$

$= \pi(1-a)(a+a^3+a^5+\ldots)$, где $a = \frac{4}{3+2\sqrt{2}}$

Ответ: $\pi(1-a)(a+a^3+a^5\ldots)$, где $a = \frac{4}{3+2\sqrt{2}}$ или $\frac{\pi\cdot a}{(a+1)}$ +

$\cancel{\frac{\pi a}{(a+1)}}$

страница 4

Запрещается делать пометки, раскрывающие авторство работы

2010002

Чистовик

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМА. ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ-ФИНАНСИСТ!»

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

3. Заметим, что если $f(f(x)) = a$, то $f(f(f(x))) = a - \frac{2}{a} = 1$. Тогда

$a^2 - 2 - a = 0$

$D = 1 + 8 = 9$

$a_1 = \frac{1+3}{2} = 2$

$a_2 = \frac{1-3}{2} = -1$.

Т.е. $f(f(x)) = 2$ или $f(f(x)) = -1$. Рассмотрим оба случая.

1) $f(f(x)) = -1$.

Пусть $f(x) = b$.

Тогда $f(f(x)) = b - \frac{2}{b} = -1$.

Тогда $b^2 - 2 + b = 0$

$D = 1 + 8 = 9$

$b_1 = \frac{-1-3}{2} = -2$

$b_2 = \frac{-1+3}{2} = 1$.

Тогда $f(x) = 1$ либо $f(x) = -2$.

Пусть $x - \frac{2}{x} = 1$

$x^2 - 2 = x$

$D = 1+8 = 9$

$x_1 = \frac{1+3}{2} = 2$

$x_2 = \frac{1-3}{2} = -1$.

Пусть $x - \frac{2}{x} = -2$.

Тогда $x^2 + 2x - 2 = 0$

$D = 4 + 8 = 12$

$x_1 = \frac{-2+\sqrt{12}}{2} = -1 + \sqrt{3}$

$x_2 = \frac{-2-\sqrt{12}}{2} = -1 - \sqrt{3}$.

2) $f(f(x)) = 2$

Тогда Пусть $f(x) = c$.

$c - \frac{2}{c} = 2$

$c^2 - 2 - 2c = 0$

$D = 4 + 8 = 12$

$c_1 = \frac{2+\sqrt{12}}{2} = 1 + \sqrt{3}$

$c_2 = \frac{2-\sqrt{12}}{2} = 1 - \sqrt{3}$

Тогда $f(x) = 1+\sqrt{3}$ или $f(x) = 1-\sqrt{3}$.

Пусть $x - \frac{2}{x} = 1+\sqrt{3}$.

Тогда $x^2 - 2 - (1+\sqrt{3})x = 0$.

Пусть $x - \frac{2}{x} = 1-\sqrt{3}$

Тогда $x^2 - 2 - (1-\sqrt{3})x$

Заметим, что у этих двух уравнений ни один корень не может совпадать с корнями уравнений, написанных левее, т.к. свободной коэф. и старший у них одинаковые и тогда по т. Виетта второй корень должен быть таким же. Тогда осталось проверить совпадают ли корни у $x - \frac{2}{x} - (1+\sqrt{3})x = 0$ и $x^2 - 2 - (1-\sqrt{3})x$. Дискриминанты у этих уравнений положительны, значит они оба имеют по 2 корня. Тогда по аналогии по т. Виетта ни один из этих корней совпадать не может. Тогда всего у $f(f(f(x)))$ 8 корней.

Ответ: 8.

(+)

Запрещается делать пометки, раскрывающие авторство работы

2010002

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМА. ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ-ФИНАНСИСТ!»

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

ЛЛАФАЛАФФАЛАФФФАЛАФФФФАЛЛ
ЛФАЛФАЛФ,АЛФАЛАФЛАФЛАФЛАФЛ

ЛФФФ... А Ф

ФАЛФАЛФ

ЛЛ

ЛАФ

ФАЛ →

ФАЛ → ЛЛЛ

ФАЛ → ЛАФ → ЛЛЛ → ЛАФ

ФЛАФ ЛЛЛЛ

ЛАФ → ФФФ → ЛАФ

ФАЛАФЛ АФФФА

АФ

ЛФАЛ → ЛЛАФ

ФАЛФА
АЛАФ

7Л
8А
10Ф

ЛЛЛЛ

ЛЛАФ

АФ
ЛЛ

7Л 8А 10Ф

ЛЛЛЛ

1. ЛФАЛ → ЛЛЛЛ ↔ ЛЛАФ ↔ ФА АФАЛЛ

2. ФААФ → ФЛЛЛ ↔ ФА ЛЛЛФ → ЛАФФ ↔

ФЛАФ ААAФ ФАЛ АЛА ФА → АФ

ЛАФ → ЛЛЛ

9Л 8Ф 8А

7Л 8А 10Ф

7Л 9Ф 9А

7Л 8А 10Ф

7Л 8А 10Ф

9Л - 7 - 8 2 +1 +1
8Ф - 9 - 10 8
8А - 9 - 7 8

АФ → ЛЛ
ФЛ → АА

8Л 9А 8Ф

9Л 8Ф 8А

2 → 1, 5, const

1 2 2

ФА ФФ ФЛА

ЛЛЛЛ
АФЛЛ

7Л 8 9
8А 9 10
10Ф 8 8

8А
9Л → 25Л
8Ф

-1 -1 +2

a b c
a-1 b-1 c+2
const +3 +3

2: const, разн 1, разн 1

1: const, разн 1, разн

ФЛАФ
ФЛЛЛ
↔
ЛЛЛФ
ЛАФФ
↔
ФФФАЛ

АА
ФЛФ
ЛАФ

Запрещается делать пометки, раскрывающие авторство работы

2010002

Черновик

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМА. ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ-ФИНАНСИСТ!»

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

$b=1 \quad q=2$

$1+2\cdot 4 \quad 8 \quad 16 \quad 32 \ldots 64$

$128-1 \quad b$

$\pi\left(a^2-1\cdot\pi^2-\frac{1\cdot 4}{\sqrt3+2}+\frac{16}{\sqrt3+2}-\frac{64}{\sqrt3+2}+\ldots\right.$

$\pi\cdot 1-\frac{4}{\sqrt3+2}+\frac{4\cdot4}{(\sqrt3+2)(\sqrt3+2)}-\frac{4\cdot4\cdot4}{(\sqrt3+2)^2}$

$b \quad bq \quad bq^2 \quad bq^3\ldots$

$b(1+q^2+q^3+q^4\ldots)$

$1-a+a^2-a^3+a^4-a^5+a^6\ldots$

$b=1 \quad q=3$

$1+(a^2-a)+(a^4-a^3)\ldots$

$1+\frac12+\frac14+\frac18\ldots=2$

$1+3+9+27$

$1+a(1-a)+a^3(1-a)+(1-a)(a^5\ldots)$

$\frac{b(q}{1-q}$ b

$0{,}57$ $0{,}18\ldots$

$1+(1-a)(a+a^3+a^5+\ldots$ $5{,}41$

$\pi-\frac{\pi\cdot4}{}$ $0{,}907\ldots$ $bq^{n+1}-b=b(q^{n+1}-1)$

$\pi(1-a+a^2-a^3+a^4-a^5\ldots$

$(\sqrt2+1)^2=1+2+2\sqrt2$

$\pi(1-a+a^2(1-a)+a^4(1-a)\ldots)=$ 707

$2a\sqrt2+2a$

$=\pi(1-a)(1+a^2+a^4+$

$\frac47+\left(\frac47\right)^3+\left(\frac47\right)^5$ $(a\sqrt2+a)^2=$

$|x|+2|x-1|+3|x-2|K+11|x-10|$

$=a^2 2+a^2+2a\sqrt2=$

$\frac47\left(\frac47\right)^3$ $=3a^2+2a\sqrt2$

$20+24+30+26=100$

$b+bq+bq^2+bq^2\ldots$

$30+\ldots+\underbrace{22+12}_{34}=$

$q=\frac{16}{49}$ $\frac{16}{9+8+2\sqrt2}=\frac{16}{17+12\sqrt2}$

$64+\ldots$

$\frac{\frac{4}{3+2\sqrt2}}{1-\left(\frac{4}{3+\sqrt2}\right)^2}$

$\frac{b}{1-q}$

$1+\frac12+\frac14+\frac18=$

$0{,}666$ $0{,}03$ $1+0{,}3\ldots0{,}01$

$\frac{a}{1-a^2}$

Запрещается делать пометки, раскрывающие авторство работы

2010002

Черновик

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМА. ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ-ФИНАНСИСТ!»

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

А Л Ф   ЛА → ФФ   АФ → ЛЛ   ФЛ → АА   ЛЛ → АФ   ФФ → ЛА

a $(a\sqrt{2}+2a)$

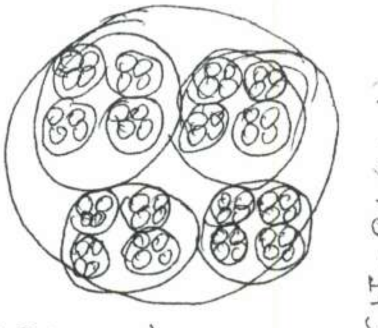
ЛА ⟺ ФФ
АА ⟺ ФЛ
АФ ⟺ ЛЛ

ЛЛ АФАЛАФФ А[illegible]ЛАФФФ АЛАФФФФ АЛЛ
ЛФ АЛФАЛФАЛФАЛА ФЛ АФЛАФЛАФЛ

$\pi(a\sqrt{2}+2a)^2 \approx 4a^2\pi$

25 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21
Л Л А Ф А Л А Ф Ф А Л А Ф Ф Ф А Л А Ф Ф Ф
Л Ф А Л Ф А Л Ф А Л Ф А Л А Ф Л А Ф Л А Ф

22 23 24 25
Ф А Л Л
Л А Ф А

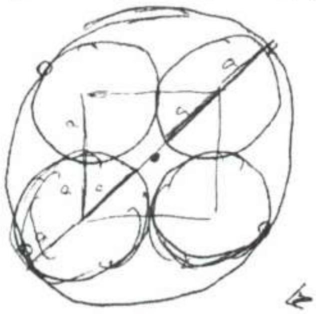


$\frac{1}{3+\sqrt{2}}$

0,57 =

4,73

$\frac{1}{3}+\frac{1}{\sqrt{2}}$



$\left(x-\frac{2}{x}\right)$ $f(x)$ $f(f(f(x)))$

$f(x) = x - \frac{2}{x}$

← ФА

$x - \frac{2}{x} = \frac{x^2-2}{x}$

$f(f(x)) = x - \frac{2}{x} - \frac{2}{x-\frac{2}{x}} =$

$x_1, x_2 \dots x_{2012}$ x_k $x_{k+1} = \frac{k+1}{x_k}$

$x_1 = 79$

$x_2 = \frac{2}{79}$ $2+1+\sqrt{2} = 3+\sqrt{2}$

$x_3 = \frac{3}{2} \cdot 79$ $\frac{1}{3+\sqrt{2}}$

$\frac{(x^2-2)^2-2x^2}{(x^2-2)x} =$

$\frac{1250}{1} = x - \frac{2}{x} - \frac{2x}{x^2-2} =$

5 25 125 625

$y = \frac{x^2-2}{x} - \frac{2x}{x^2-2}$

$y - \frac{2}{y}$

$x_k \cdot x_{k+1} = k+1$

$2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot \dots 1009\ 2018.$ $\frac{y^2-2}{y} - \frac{2y}{y^2-2} =$

10 20 30 40 50 60 70 80 90 100   −201.

50 100 150 200 .. 2000   40

~~150 300 450 600 750 900 1050 1200 1350~~
~~1500 1650 1800 1950 2100~~ − 14

250 500 750 1000 1250 1500 1750 2000 − 8

1750

241 + 9 · 250 нулей

50 100
150 200
250 300
350 400
450 500
550 600
650 700
750 800
850 900
950 1000

$\frac{2a+4a^2+4a^2\sqrt{2}}{4a^2} =$

$x^2-2-(1-\sqrt{3})x$
$(1-\sqrt{3})^2+8 = 1+3-2\sqrt{3}+8 = 12-2\sqrt{3}$

Запрещается делать пометки, раскрывающие авторство работы

2010002

Черновик

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМА. ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ-ФИНАНСИСТ!»

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

$T = 1{,}5n$
$T' = 1{,}5^2 n$

ср зар. $= \frac{x \cdot T + y \cdot n}{x+y} = \frac{9x \cdot n + x \cdot T}{10x} = \frac{9n+T}{10} = \frac{9n+1{,}5}{10} = \frac{10{,}5n}{10}$

$x + y = 100\%$

$9x = y$

$f(x \quad f(f(x)) \quad x - \frac{2}{x} + \frac{2}{x-\frac{2}{x}} + \frac{2}{x-\frac{2}{x}+\frac{2}{x-\frac{2}{x}}}$

$\frac{x \cdot T' + y' n}{x+y'} = \frac{x \cdot 1{,}5^2 n + y' n}{x+y'} = 1{,}2 \frac{10{,}5n}{10}$

$\frac{x \cdot 1{,}5^2 + y'}{x+y'} = 1{,}2\frac{10{,}5}{10}$

$\frac{x^2-2}{x} + \frac{2}{\frac{x^2-2}{x}} + \frac{2}{\frac{x^2-2}{x}+\frac{2}{\frac{x^2-2}{x}}} =$

$27x + 12y' = 10{,}5x + 10{,}5y'$

$16{,}5x =$

$= \frac{x^2-2}{x} + \frac{2x}{x^2-2} + \frac{2}{\frac{x^2-2}{x}+\frac{2x}{x^2-2}} =$

$\frac{x \cdot 1{,}5^2 + y'}{x+y'} = \frac{12{,}6}{10}$

$x = \frac{2{,}6y'}{2{,}4} = \frac{13}{12}y'$

$15x + 10y' = 12{,}6x + 12{,}6y'$

$2{,}4x = 2{,}6y'$

$\frac{\frac{13}{12}y'}{\frac{13}{12}y' + 1y'} = \frac{13}{13+12} = \frac{13}{25}\% = 0{,}52\%$

52%

$= \frac{(x^2-2)^2 + 2x^2}{x(x^2-2)} + \frac{2}{\frac{(x^2-2)^2+2x^2}{x(x^2-2)}} =$

$a = -\frac{2}{a}$

$a + \frac{2}{a} \qquad a^2 = 2$

$= \frac{(x^2-2)^2+2x^2}{x(x^2-2)} + \frac{2x(x^2-2x)}{(x-2)^2+2x^2}$

Запрещается делать пометки, раскрывающие авторство работы

2010002

Черновик

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМА. ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ-ФИНАНСИСТ!»

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

$f(x)$

$\left(x-\frac{2}{x}\right)$

$f(f(x)) = \left(x-\frac{2}{x} - \frac{2}{x-\frac{2}{x}}\right)$

$f(f(f(x))) = \left(x-\frac{2}{x} - \frac{2}{x-\frac{2}{x}}\right) - \frac{2}{x-\frac{2}{x} - \frac{2}{x-\frac{2}{x}}}$

$\frac{\frac{\pi}{2}+x}{1{,}00\dots2} + \frac{\pi}{2}+x$

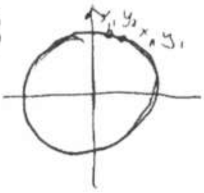
$\sin\frac{\pi}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\sin\pi = 1$

$\sqrt{2}$ 1,565

$\sin(x+1{,}8) = \sin x\cos 1{,}8 + \cos x \sin 1{,}8$

$x-\frac{2}{x} = 1$

1.8



$x^2-2=x$

$\left(x-\frac{2}{x}\right) - \frac{2}{x-\frac{2}{x}} = 2$

$x^2-2-x=0$

3.11.

$a^2-2-2a=0$

$D=(-1)+4\cdot 2=9$

$x-\frac{2}{x} - \frac{2}{x-\frac{2}{x}} = -1.$

$D = 4-4(-2) = \sqrt{12}$

$x_1 = \frac{1+3}{2} = 2$ $\frac{4}{3.73}$

$a = \frac{2\pm\sqrt{12}}{2} = 1\pm\sqrt{3}$

$x_2 = \frac{1-3}{2} = -1$

$a-\frac{2}{a} = 2$

$x-\frac{2}{x} = 1\pm\sqrt{3}$ $\sqrt{x_1^2+y_1^2} \to \sqrt{x_2+y_2}$

$a^2-2+1a=0$

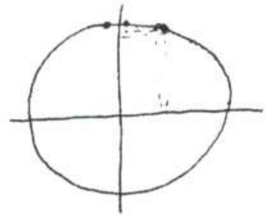
$a^2-2-2a=0$

$D = 4-4\cdot(-2) = 9$

$D = 4+4\cdot 2 = 12$

$x^2-2-x-\sqrt{3}x=0$

$D = (1-\sqrt{3})+$



$a-\frac{2}{a} = 1$

$a = f(f(x))$

$z-\frac{2}{z} = 2$

$z-\frac{2}{z} = -1$

$a^2-2=a$

$D=1+8=9$

$z^2-2-2z=0$

$z^2-2=-z$

$a_1 = \frac{1+3}{2} = 2$

$z^2-2+z=0$

$a_2 = \frac{1-3}{2} = -1.$

$D = 4+8 = 12$

$D = 1+8 = 9$

$x-\frac{2}{x} = 1$

$z_1 =$

$\frac{a}{\sin a} = \frac{b}{\sin\beta}$

$z_1 = \frac{-1+3}{2} = 1.$

$x-\frac{2}{x} = -2$

$z_2 =$

$z_2 = \frac{-1-3}{2} = -2$

$x^2-2=x$

расд → рас β,

то $a \to b$

$D = 1+8 =$

$\frac{\sin a}{\sin\beta} = \frac{a}{b}$

меньший угол с $\frac{\pi}{2}$

$\left(\frac{\pi}{2}+x\right) + \frac{\frac{\pi}{2}+x}{1{,}01} =$

$= \frac{\frac{1{,}01\pi}{2}+1{,}01x+\frac{\pi}{2}+x}{1{,}01}$

$0{,}505\pi + 2{,}01x + \frac{\pi}{2}$

$1{,}05\pi + 2{,}01x$

$(1+3+9+27)^5 = 40$

2

81

3-

$2+6+18+54+\dots$

$= 3+6+18+54 =$

$= 3(2+2\cdot3+\dots)$

$b+bq+bq^2+bq^3\dots$

$b(q+1)+bq^2(q+1)+\dots$

$b(q+1)(b+bq+bq^2+bq^4+\dots)$

$b(q+1)(q+q^2q^2+\dots)$

Запрещается делать пометки, раскрывающие авторство работы

2010002

Мериковия

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «МИССИЯ ВЫПОЛНИМА. ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ-ФИНАНСИСТ!»

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

$\frac{(a\sqrt{2}+2a)^2}{4a^2} = \frac{2a^2+4a^2+4a^2\sqrt{2}}{4a^2} = \frac{1+2+2\sqrt{2}}{2} = \frac{3+2\sqrt{2}}{2} = 1,5+\sqrt{2}$

1 $Тр \cdot 1,5 = Л \cdot 1,5$ ср ↑ не 20% 10% тр 9 раз $y = 9x$ ↑2

2 $тр \cdot 1,5 = Л \cdot 1,5^2$

$$\frac{X \cdot T + y \cdot Л}{X+y} = 1,2\,\frac{X \cdot T' + y' \cdot Л}{X+y'}$$

k [k+3; k-3 если k>1; const

$$\frac{X \cdot T + 9X \cdot Л}{10X} = 1,2\,\frac{9XT' + y'Л}{9X+y'}$$

$T = Л \cdot 1,5$

2 - [1 - [5 - [1 [4

$$\frac{T+9Л}{10} = \frac{1,2 \cdot (9xT' + y'Л)}{x+y'}$$

$$\frac{10,5Л}{10} = \frac{1,2(9 \cdot x \cdot 1,5^2 Л + y'Л)}{x+y'} = \frac{Л(1,2 \cdot 9 \cdot 1,5^2 + 1,2 \cdot y')}{x+y'}$$

$$\frac{10,5}{10} = \frac{24,3+1,2y'}{x+y'}$$

8 9

7 10 8

7 8 9

$10,5x + 10,5y' = 243 + 12y'$ $y' = y-2$

$10,5x = 243 + 1,5y'$

1 → 4

2 →

$7x = 162 + y'$ $\frac{X}{X+y'} =$

$7x = 63y$ $162 + y' = 63y = 63y' + m$

$162 + y' = 63y' + m$

~~162 - m = 62y'~~

$x = \frac{\cancel{162+y'}}{7} + y'$

$$\frac{\frac{162+y'}{7}}{\frac{162+y'}{7}+y'} = \frac{162+y'}{162+y'+7y'} = \frac{162+y'}{162+8y'}$$

Запрещается делать пометки, раскрывающие авторство работы

2010002

Черновик

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМА. ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ-ФИНАНСИСТ!»

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

$x_1, x_2, x_3 \dots x_n \quad x_1 = 79 \quad x_n = \frac{n}{x_{n-1}}$

$x_1 = 79 \quad x_2 = \frac{2}{79} \quad x_3 = \frac{79}{2} \cdot 3 \quad x_4 = \frac{4 \cdot 2}{79 \cdot 3}$

$(a + \sqrt{1+a^2})(b + \sqrt{1+b^2}) = 1 \quad a+b-?$

$\cancel{a^2} + ab + a\sqrt{1+b^2} + \sqrt{1+a^2}\, b + \sqrt{(1+a^2)(1+b^2)} = 1$

1) $b, a \le 1$ Если $a, b > 0$, то $a = b = 0$.

Если $a>0$, то $b<0$. Если $a<0$, то $b>0$.

$b \le \sqrt{1+b^2} \qquad b^2 < 1+b^2 \Downarrow \pm b < \sqrt{1+b^2}$

$a + \sqrt{1+a^2} \ge 2\sqrt{a\sqrt{1+a^2}}$

$(-a + \sqrt{1+a^2})(a + \sqrt{1+a^2}) =$

$= -a^2 - a\sqrt{1+a^2} + a\sqrt{1+a^2} + 1 + a^2 = 1.$

$-a + \sqrt{1+a^2} = b + \sqrt{1+b^2}$

$\sqrt{1+a^2} - \sqrt{1+b^2} = b + a$

$(1+\cancel{a^2}) - (1+\cancel{b^2}) - 2\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)} = \cancel{b^2} + \cancel{a^2} + 2ab$

$2 - \cancel{2}\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)} = \cancel{2}ab$

$-\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)} = ab$

$(1+a^2)(1+b^2) = a^2 b^2$

$a + \sqrt{1+a^2} = \pm 1 \qquad a^2 + \cancel{1} + a^2 + 2a\sqrt{1+a^2} = \cancel{1}$

$a^2 + 1 + a^2$

$\cancel{2}a^2 = -\cancel{2}a\sqrt{1+a^2} \quad a = 0$

$a = -\sqrt{1+a^2}$

$a^2 = 1 + a^2$

$-k+D \quad k+D$

$-k-D \quad k-D$

$(\sqrt{1+a^2} - \sqrt{1+b^2})^2$

$(1+\cancel{a^2}) + 1 + \cancel{b^2} - 2\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)} =$

$= \cancel{a^2} + 2ab + \cancel{b^2}$

$\cancel{2} - \cancel{2}\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)} = \cancel{2}ab$

$1 - \sqrt{(1+a^2)(1+b^2)} = ab$

$a = b = 0.$

$ab + a\sqrt{1+b^2} + \sqrt{1+a^2}\, b + \sqrt{(1+b^2)(1+a^2)} = 1$

$-a + \sqrt{1+a^2} = b + \sqrt{1+b^2}$

возрас.

$\sqrt{1+a^2} - \sqrt{1+b^2} = b - a$

$2 + a^2 + b^2 - 2\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)} = \cancel{a^2} + \cancel{b^2} + 2ab$

$1 - \sqrt{(1+a^2)(1+b^2)} = ab$

$1 - ab = \sqrt{(1+a^2)(1+b^2)}$

$a\sqrt{1+b^2} + \sqrt{1+a^2}\, b = 0$

$a\sqrt{1+b^2} = -b\sqrt{1+a^2}$

$a^2 + a^2 b^2 = b^2 + b^2 a^2$

$a^2 = b^2$

$a = \pm b$

$(1-\sqrt{3})^2 = 1 + 3 + 8 + 2\sqrt{3} = 12 + 2\sqrt{3}$

$1-\sqrt{3} = -1 + \cancel{\sqrt{3}} + a$

$2 = a$

$-k - D = k + D$

$-2k = 2D$

Запрещается делать пометки, раскрывающие авторство работы

Оценочный бланк олимпиадных заданий по математике

Код участника: 7801 0002

Номер задания		1	2	3	4	5	6	7	8
Полученные баллы	Первый проверяющий	10	10	12	12	0	14	0	16
	Второй проверяющий	10	10	12	12	0	14	0	16
	Итого	10	10	12	12	0	14	0	16
Сумма баллов (оценка)		74							

Члены жюри:

Подпись — Фамилия И.О.: Александрова И.А.

Подпись — Фамилия И.О.: Кочерова А.С.

Подпись — Фамилия И.О.: В.Б. [illegible]

Всероссийская олимпиада школьников
«Миссия выполнима.
Твое призвание-финансист!»

ПО МАТЕМАТИКЕ 11 класс

Заключительный (очный) этап
2017/2018 учебный год

78 01 0002

Код участника

Вариант I

Задание 1. (10 баллов)

Даны последовательность чисел $x_1, x_2, \ldots$, такая, что $x_1 = 79$ и $x_n = \frac{n}{x_{n-1}}$ для всех $n > 1$. На сколько нулей оканчивается число равное произведению $x_1 x_2 \ldots x_{2018}$?

Задание 2. (10 баллов)

Найдите наименьшее значение функции $f(x) = |x| + 2|x-1| + 3|x-2| \ldots + 11|x-10|$

Задание 3. (12 баллов)

Сколько различных корней имеет уравнение $f\left(f\left(f(x)\right)\right) = 1$, если $f(x) = x - \frac{2}{x}$?

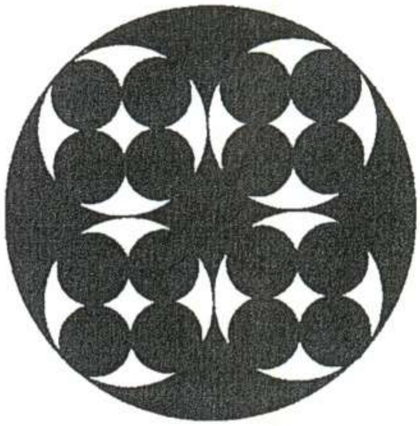
Задание 4. (12 баллов)

Сотрудники фирмы делятся на трудяг и лентяев. В 2016 году средняя зарплата трудяг превышала в два раза среднюю зарплату лентяев. Повысив свою квалификацию, трудяги в 2017 году стали получать на 50% больше, а зарплата лентяев не изменилась. При этом часть лентяев уволили в конце 2016 года. Средняя зарплата всех сотрудников в 2017 году стала на 20% больше, чем была в 2016 году. Найдите сколько процентов от общего числа сотрудников составляли в 2017 году трудяги, если в 2016 году их было 10%.

78010002

Задача 5. (12 баллов)

На первом шаге на листе бумаги была изображена единичная окружность и ограниченный ею круг закрашен черной краской. На каждом из последующих шагов для каждой из окружностей, изображенных на предыдущем шаге, рисуются четыре новые внутренне касающиеся ее окружности равных радиусов. Эти четыре окружности внешне касаются друг друга. Круги, ограниченные новыми окружностями, закрашиваются белой краской, если номер шага четное число, или черной краской, если номер шага нечетен. На рисунке изображен результат трех шагов. Описанный процесс продолжается до бесконечности. Найдите площадь белой области.



Задание 6. (14 баллов)

Действительные числа a и b таковы, что $\left(a+\sqrt{1+a^2}\right)\left(b+\sqrt{1+b^2}\right)=1$. Найдите сумму $a+b$.

Задание 7 (14 баллов)

Назовем положительное число a близким сверху к положительному числу b, если a превосходит b, но не больше чем на 1%. Докажите, что если в треугольнике радианная мера одного из углов близка сверху к радианной мере другого угла, то найдутся две стороны этого треугольника такие, что длина одной из них близка сверху к длине другой.

Задача 8. (16 баллов)

В алфавите языка альфов три буквы *А*, *Л* и *Ф*. Все слова этого языка можно построить, применяя последовательно следующие правила к любому слову из этого языка:

(1) поменять порядок букв в слове на противоположный

(2) заменить две последовательные буквы так: *ЛА* → *ФФ*, *АФ* → *ЛЛ*, *ФЛ* → *АА*, *ЛЛ* → *АФ*, *ФФ* → *ЛА* или *АА* → *ФЛ*.

Известно, что *ЛЛАФАЛАФФАЛАФФФАЛАФФФФАЛЛ* – это слово из языка альфов. Есть ли в языке альфов слово *ЛФАЛФАЛФАЛФАЛАФЛАФЛАФЛАФЛ*?

7801 0002

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «МИССИЯ ВЫПОЛНИМА, ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ-ФИНАНСИСТ!»

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

Задание 1

Запишем произведение $79 \cdot \frac{2}{79} \cdot \frac{3}{\left(\frac{2}{79}\right)} \cdot \frac{4}{\left(\frac{3}{\left(\frac{2}{79}\right)}\right)} \cdots \frac{2018}{x_{2017}}$

Будем сокращать так: у членов посл. с четными номерами будем сокращать знаменатель с предыд. членом ($x_{n-1} \cdot \frac{n}{x_{n-1}}$ где n - четн.). Тогда имеем:

$\cancel{79} \cdot \frac{2}{\cancel{79}} \cdot \cancel{\frac{3}{\left(\frac{2}{79}\right)}} \cdot \frac{4}{\cancel{\left(\frac{3}{\left(\frac{2}{79}\right)}\right)}} \cdots \frac{2018}{\cancel{x_{2017}}}$ Наше произв.

превратилось в произв. всех четных чисел от 2 до 2018.

Количество нулей в конце записи числа - это степень 10 в разложении числа. Будем считать отдельно 2 и 5 (т.к $2 \cdot 5 = 10$)

Посчитаем степень двойки:

Всего множителей 1009 и каждый из них кратен двум. => 1009 двоек в разлож.

Так же каждый второй кратен 4 (т.к если разделить все числа на 2 каждый второй кратен 2 ($2 \cdot 2 = 4$)) -> еще 504 двойки

Так же каждый четвертый кратен 8 (если раздел. все числа на 2 то каждый 4 кратен 4 ($4 \cdot 2 = 8$)) -> еще 252 двоек

Так же каждый восьмой кратен 16 (аналогичн. пред. при делении на 2 каждый восьмой кратен 8 ($8 \cdot 2 = 16$) => еще 126 двоек

Каждый 16 кратен 32 (при дел. на 2 каждого числа кажд. 16 кратен 16 ($16 \cdot 2 = 32$)) => еще 63 двойки

Каждый 32 кратен 64 (при дел на 2 каждого числа кажд. 32 кратен 32 ($32 \cdot 2 = 64$) -> еще 31 двойка

Каждый 64 кратен 128 (при дел на 2 каждого числа кажд. 64 кратен 64 ($64 \cdot 2 = 128$) -> еще 15 двоек

Запрещается делать пометки, раскрывающие авторство работы

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМА, ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ-ФИНАНСИСТ!»

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

аналогично каждый 128 кратен 256 → еще 7 двоек
каждый 256 кратен 512 → еще 3 двойки
каждый 512 кратен 1024 → еще 1 двойка
Итого: $1009 + 504 + 252 + 126 + 63 + 31 + 15 + 7 + 3 + 1 = 2011$
Теперь посчитаем 5:
т.к. 5 и 2 - взаимопросты мы можем все множ поделить на 2 и делим на 5 не изм. Тогда имеем числа от 1 до 1009.
Среди них каждое пятое кратно пяти: 201 пятерка
каждое 25 кратно 25 → еще 40 пятерок
каждое 125 кратно 125 → еще 8 пятерок
каждое 625 кратно 625 → еще 1 пятерка
итого: $201 + 40 + 8 + 1 = 250$ пятерок.
Значит в разлож числа есть 5^{250} и 2^{2011} → есть 10^{250}
Ответ: 250 нулей. +

Задание 2 +

Найти наим. значение $f(x) = |x| + 2|x-1| + 3|x-2| + 4|x-3| + 5|x-4| + 6|x-5| + 7|x-6| + 8|x-7| + 9|x-8| + 10|x-9| + 11|x-10|$.

~~Нарисуем график функции~~
~~1) расставим на оси х точки обнуления модулей~~
1) раскроем модули на промежутках.

1) $x \geq 0 \wedge x < 1$
$x - 2x + 2 - 3x + 6 - 4x + 12 - 5x + 20 - 6x + 30 - 7x + 42 - 8x + 56 - 9x + 72 - 10x + 90 - 11x + 110 = -64x + 44$
2) $x \geq 1 \wedge x < 2$
$-60x + 436$
3) $x \geq 2 \wedge x < 3$
$-54x + 424$
4) $x \geq 3 \wedge x < 4$
$-46x + 400$
5) $x \geq 4 \wedge x < 5$
$-36x + 360$
6) $x \geq 5 \wedge x < 6$
$-24x + 300$
7) $x \geq 6 \wedge x < 7$
$-10x + 216$
8) $x \geq 7 \wedge x < 8$
$6x + 104$
9) $x \geq 8 \wedge x < 9$
$+24x - 40$
10) $x \geq 9 \wedge x < 10$
$+44x - 220$
12) $x \geq 10$ $66x - 440$
11) $x < 0$ $-66x + 440$

78 01 0002

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМА, ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ-ФИНАНСИСТ!»

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

при раскрытии видно, что коэф перед x пос. увеличивается; пока он <0 функция убывает (т.к она на промеж. области функц. вида $y=kx+b$, которая убыв при $k<0$) => минимальное знач. она будет принимать в точке, в которой коэф. перед x станов. >0 и она начин. возрастать, это точка 7 => миним. знач. функция приним при $x=7$ => $f(x)_{min} = 146 = f(7)$ (после $x=7$ функция ↑, а до ↓)

Задание 3

$$f\left(f\left(x-\frac{2}{x}\right)\right)=1$$

$$\Updownarrow$$

$$f\left(x-\frac{2}{x}-\frac{2}{\left(x-\frac{2}{x}\right)}\right)=1 \iff x-\frac{2}{x}-\frac{2}{\left(x-\frac{2}{x}\right)}-\frac{2}{\left(x-\frac{2}{x}-\frac{2}{\left(x-\frac{2}{x}\right)}\right)}=1$$

$$\iff \frac{\left(x-\frac{2}{x}\right)^2-2}{\left(x-\frac{2}{x}\right)}-\frac{2}{\left(\frac{\left(x-\frac{2}{x}\right)^2-2}{\left(x-\frac{2}{x}\right)}\right)} \iff \frac{\left(x-\frac{2}{x}\right)^2-2}{x-\frac{2}{x}}-\frac{2\left(x-\frac{2}{x}\right)}{\left(x-\frac{2}{x}\right)^2-2}=1$$

пусть $\dfrac{\left(x-\frac{2}{x}\right)^2-2}{x-\frac{2}{x}}=t$ тогда $t-\dfrac{2}{t}=1$

т.к $t=0$ - не реш => домножим на t => $t^2-t-2=0$

$t=-1; 2$

$$\frac{\left(x-\frac{2}{x}\right)^2-2}{x-\frac{2}{x}}=-1 \quad \text{или} \quad 2$$

1) $\dfrac{\left(x-\frac{2}{x}\right)^2-2}{x-\frac{2}{x}}=-1 \quad \Big|\cdot x-\frac{2}{x}\neq 0$ (ОДЗ)

$$\left(x-\frac{2}{x}\right)^2-2=-\left(x-\frac{2}{x}\right) \quad \text{пусть} \quad \left(x-\frac{2}{x}\right)=z$$

Запрещается делать пометки, раскрывающие авторство работы

7801 0002

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМА, ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ-ФИНАНСИСТ!»

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

тогда $z^2 - 2 = -z$ $\quad z^2 + z - 2 = 0$ $\quad z = 1; -2$

тогда

$x - \frac{2}{x} = 1$ или -2

1.1) $x - \frac{2}{x} = 1$ $\quad | \cdot x \neq 0$ (одз)

$x^2 - x - 2 = 0$

$\boxed{x = -1; 2}$ (2 корня)

1.2) $x - \frac{2}{x} = -2$ $\quad | \cdot x \neq 0$ (одз)

$x^2 + 2x - 2 = 0$

$D = 4 + 8 = 12$

$x_{1,2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{3}}{2} = \boxed{-1 \pm \sqrt{3}}$ (2 корня)

2) $\frac{\left(x - \frac{2}{x}\right)^2 - 2}{x - \frac{2}{x}} = 2$ $\quad | \cdot x - \frac{2}{x} \neq 0$ (одз)

$\left(x - \frac{2}{x}\right)^2 - 2 = 2\left(x - \frac{2}{x}\right)$

пусть $x - \frac{2}{x} = k$

$k^2 - 2 = 2k$ $\quad k^2 - 2k - 2 = 0$

$D = 4 + 8 = 12$

$k = -1 \pm \sqrt{3}$

+

2.1) если $k = -1 + \sqrt{3}$

тогда $x - \frac{2}{x} = \cancel{1} -1 + \sqrt{3}$ $\quad | \cdot x \neq 0$ (одз)

$x^2 + x - \sqrt{3}x - 2 = 0$

$D = 1 - 2\sqrt{3} + 3 + 8 = 12 - 2\sqrt{3}$

$\boxed{x = \frac{\sqrt{3} - 1 \pm \sqrt{12 - 2\sqrt{3}}}{2}}$ (оба $\neq 0$) (2 корня)

2.2) если $k = -1 - \sqrt{3}$

тогда $x - \frac{2}{x} = -1 - \sqrt{3}$ $\quad | \cdot x \neq 0$ (одз)

$x^2 + x + \sqrt{3}x - 2 = 0$ $\quad D = 1 + 2\sqrt{3} + 3 + 8 = 12 + 2\sqrt{3}$

$\boxed{x_{1,2} = \frac{-1 + \sqrt{3} \pm \sqrt{12 + 2\sqrt{3}}}{2}}$ (оба $\neq 0$) (2 корня)

Запрещается делать пометки, раскрывающие авторство работы

78 01 0002

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМА, ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ-ФИНАНСИСТ!»

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

Ответ: 8 корней

Задание 4

пусть T - кол-во трудяг, L - кол-во лентяев,
c - зарплата лентяев.

~~Тогда~~ $\cancel{\frac{2c\cdot T + cL}{T+L}}$ ~~- ср. зарплата в 2016~~

$\frac{T}{T+L} = \frac{1}{10} \Rightarrow L = 9T$ пусть k - отн. кол-во трудяг в 2017 году к кол-ву трудяг в 2016

Тогда $\frac{2cT + 9cT}{10T} \cdot \frac{120}{100} = \frac{3cT + k\cdot 9\cdot c\cdot T}{T + k\cdot 9T}$

Найти: $\frac{T}{T+k\cdot 9\cdot T} = \frac{1}{1+9k}$

~~Выражение~~ $c \neq 0$

$$\frac{2\cancel{c}\cancel{T} + 9\cancel{c}\cancel{T}}{10\cancel{T}} \cdot \frac{12\cancel{0}}{100} = \frac{11\cancel{c}\cdot 12}{100} = \frac{3\cancel{c}\cancel{T} + 9k\cdot\cancel{c}\cdot\cancel{T}}{\cancel{T} + k\cdot 9\cdot\cancel{T}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{11\cdot 12}{100} = \frac{3+9k}{1+9k} \quad \text{т.к. } k \geq 0 \Rightarrow \Big| \cdot (1+9k)\cdot 100$$

$11\cdot 12(1+9k) = 100(3+9k)$

$11\cdot 3(1+9k) = 25(3+9k)$

$11(1+9k) = 25(1+3k)$

$11 + 99k = 25 + 75k$

$24k = 14$

$k = \frac{14}{24} = \frac{7}{12}$ ~~пусть y - процент лентяев в 2017~~

~~тогда~~

$\cancel{\frac{T}{10T} = \frac{1}{10}}$ $\frac{T}{T + \frac{7}{12}9T} = \frac{T}{T + \frac{7}{4}\cdot 3T} = \frac{1}{1 + \frac{21}{4}} = \frac{4}{25} \Rightarrow$

$\Rightarrow 16\%$ Ответ: 16%

+

Запрещается делать пометки, раскрывающие авторство работы

78 01 0002

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМА, ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ-ФИНАНСИСТ!»

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

Задание 8

Присвоим буквам цифры: А=0; Λ=1; Ф=2

Тогда будем считать слово числом:

(1) операция не меняет остаток при делении числа на 3 (остаток при дел. на три числа сравним с остатком при делении на 3 суммы его цифр)

(2) 10 → 22 (~~Ф~~ ΛА → ФФ) не меняет остаток числа при дел на 3 (ост суммы цифр при дел на 3 числа не меняется)

02 → 11 (АФ → ΛΛ) аналогично пред.

21 → 00 (ФΛ → АА) аналогично пред

11 → 02 (ΛΛ → АФ) аналогично пред.

22 → 10 (ФФ → ΛА) аналогично пред

00 → 21 (АА → ФΛ) аналогично пред.

Из этого следует, что остаток числа при делении на 3 неизменен. при выполн. данных операций Однако при переводе первого слова получаем число кратное 3, а при переводе второго получаем числ имеющ. остаток 1 при дел на 3 → противореч

Ответ: Нет

(+)

Задание 6

~~Раскроем скобки:~~

$\cancel{ab + a\sqrt{1+b^2} + b\sqrt{1+a^2} + \sqrt{(1+b^2)(1+a^2)} = 1}$

$\cancel{\sqrt{(1+b^2)(1+a^2)} = 1 - ab - a\sqrt{1+b^2} - b\sqrt{1+a^2}}$

$\cancel{1 \geq ab \quad a\sqrt{1+b^2} \quad b\sqrt{1+a^2}}$

~~Возведем в квадрат:~~

$\cancel{1 + a^2 + b^2 + b^2a^2 = 1 + a^2b^2 + a^2 + a^2b^2 + b^2 + a^2b^2 - 2ab - 2a\sqrt{1+b^2}}$

$\cancel{-2b\sqrt{1+a^2} + 2a^2b\sqrt{1+b^2} + 2ab^2\sqrt{1+a^2} + 2ab\sqrt{1+b^2}\sqrt{1+a^2}}$

$\cancel{2a^2b^2 - 2ab - 2a\sqrt{1+b^2} - 2b\sqrt{1+a^2} + 2a^2b\sqrt{1+b^2} + 2ab^2\sqrt{1+a^2}}$

$\cancel{+2ab\sqrt{(1+b^2)(1+a^2)} = 0}$

78010002

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМА, ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ-ФИНАНСИСТ!»

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

$(a+\sqrt{1+a^2})(b+\sqrt{1+b^2})=1$

$a+\sqrt{1+a^2}=\frac{1}{b+\sqrt{1+b^2}}$ домножим на сопряженное $(b-\sqrt{1+b^2})$

$a+\sqrt{1+a^2}=-b+\sqrt{1+b^2}$ (1)

аналогично

$-a+\sqrt{1+a^2}=b+\sqrt{1+b^2}$ (2)

Вычтем из 1 2 ->

$2a=-2b \Rightarrow a=-b$

$\Rightarrow a+b=$ ~~...~~ $(-b)+b=0$

Ответ: 0

+

№7 −

Запрещается делать пометки, раскрывающие авторство работы

Оценочный бланк олимпиадных заданий по математике

Код участника: 2010001

Номер задания		1	2	3	4	5	6	7	8
Полученные баллы	Первый проверяющий	10	10	12	2	2	14	7	16
	Второй проверяющий	10	10	12	2	2	14	7	16
	Итого	10	10	12	2	2	14	7	16
Сумма баллов (оценка)		73							

Члены жюри:

Подпись — Кочерова А.С.

Фамилия И.О.

Подпись — Волкова Е.С.

Фамилия И.О.

Подпись

Фамилия И.О.

2010001

Чистовик

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМА. ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ-ФИНАНСИСТ!»

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

6. (продолжение)

По условию $f(a)\cdot f(b)=1$. Заметим, что

$f(-a)=\frac{1}{f(a)}$, т.к. $(a+\sqrt{1+a^2})(-a+\sqrt{1+a^2})=$

$=(\sqrt{1+a^2})^2-a^2=1+a^2-a^2=1$. $\Rightarrow f(b)=f(-a)\Rightarrow b=-a\Rightarrow$

$\Rightarrow a+b=a-a=0$. +

Ответ: 0.

8. Пусть $\#\Lambda(s)$, $\#A(s)$, $\#\Phi(s)$ – количества букв Λ, A, Φ в слове S соответственно. Тогда для каждого слова рассмотрим тройку чисел $f(s)$ (s – слово) состоящую из чисел $\#\Lambda(s)-\#A(s)$; $\#A(s)-\#\Phi(s)$; $\#\Phi(s)-\#\Lambda(s)$.

Понятно, что правило №1 не меняет значения этой тройки. Рассмотрим замену $\Lambda A\to\Phi\Phi$. +

Пусть при этом из слова S мы получим слово s'. Тогда

$$\#\Phi(s')=\#\Phi(s)+2 \qquad \#\Lambda(s')-\#A(s')=\#\Lambda(s)-\#A(s)$$
$$\#\Lambda(s')=\#\Lambda(s)-1 \Rightarrow \#A(s')-\#\Phi(s')=\#A(s)-\#\Phi(s)-3$$
$$\#A(s')=\#A(s)-1 \qquad \#\Phi(s')-\#\Lambda(s')=\#\Phi(s)-\#\Lambda(s)+3$$

Значит тройка $f(s)$ равна $f(s')$ по модулю 3. Аналогичные рассуждения можно провести с другими правилами, так как в них также уменьшается кол-во 2-ух букв на 1 и увеличивается кол-во 1-ой буквы на 2 или наоборот. Посчитаем тройки у первого слова и у второго.

201С001

Миниатюрист

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМА. ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ-ФИНАНСИСТ!»

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

2. $f(x) = |x| + 2|x-1| + 3|x-2| + 11|x-10|$.

Рассматривая значение $f(x)$ на промежутках $(-\infty; 0)$, $[0; 1)$, $[1; 2)$, $[2; 10)$, $[10; +\infty)$ и раскрывая модули будем получать линейные функции на отрезках; а линейная функция на отрезке либо не имеет наибольшего значения, либо достигает его на конце отрезка. Значит, либо $f(x)$ не имеет минимума, либо достигает его при одном из ~~…~~ значений абсцисс $x = 0$; $x = 1$; $x = 2$; $x = 10$.

Заметим, что $f(x) \geq 0$, т.к. значение модуля неотрицательно, значит $f(x)$ имеет минимум.

$x = 0$

$f(0) = 0 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 11 \cdot 10 = 2 + 6 + 110 = 118$

$x = 1$

$f(1) = 1 + 0 + 3 \cdot 1 + 11 \cdot 9 = 1 + 3 + 99 = 103$

$x = 2$

$f(2) = 2 + 2 \cdot 1 + 0 + 11 \cdot 8 = 2 + 2 + 88 = 92$

$x = 10$

$f(10) = 10 + 2 \cdot 9 + 3 \cdot 8 + 0 = 10 + 18 + 24 = 52$

Ответ: 52.

+

Запрещается делать пометки, раскрывающие авторство работы

2010001 Чистовик

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМА. ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ-ФИНАНСИСТ!»

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

1. $x_1 x_2 \ldots x_{2018}$ Каждое x с четным индексом заменим как $x_n = \frac{n}{x_{n-1}}$. Получим, что

$$x_1 x_2 \ldots x_{2018} = x_1 \cdot \frac{2}{x_1} \cdot x_3 \frac{4}{x_3} \cdot \ldots \cdot x_{2017} \cdot \frac{2018}{x_{2017}} =$$

$$= 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2018 = 2^{1009} \cdot 1009!$$

Найдем степень вхождения числа 5 в число 1009!. Оно равно $V_5(1009!) = \left\lfloor \frac{1009}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1009}{5^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1009}{5^3} \right\rfloor + \ldots =$

$= 201 + 40 + 8 + 1 + 0 + 0 + \ldots = 250$. Заметим, что $2^{1009} \cdot 1009! \vdots 10^{250}$, но не делится на 10^{251}, значит оно содержит ровно 250 нулей +

Ответ: 250.

6. Рассмотрим функцию $f(x) = x + \sqrt{1+x^2}$ определенную при всех x. Найдем ее производную.

$f'(x) = \left(x + (1+x^2)^{\frac{1}{2}}\right)' = 1 + \frac{1}{2}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x = 1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ +

Докажем, что $f'(x) > 0 \ \forall x$. При $x \geq 0$ $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \geq 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow f'(x) > 0$. Пусть $x < 0$. Заметим, что тогда

$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} > \frac{x}{\sqrt{x^2}} = \frac{x}{|x|} = -1 \Rightarrow 1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} > 0$. Значит, $f(x)$ - всюду возрастающая функ-я, а значит она не может принимать одно значение более 1-ого раза

Запрещается делать пометки, раскрывающие авторство работы

2010001

чистовик

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМА. ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ-ФИНАНСИСТ!»

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

3. Пусть $f(x) = a$

$$x - \frac{2}{x} = a \iff \begin{cases} x^2 - 2 = ax \\ x \neq 0 \end{cases} \iff x^2 - ax - 2 = 0$$

Заметим, что для любого a ур-е $x^2 - ax - 2 = 0$ имеет ровно 2 различных корня, т.к.

$$D = a^2 - 4\cdot(-2) = a^2 + 8 > 0.$$

Причем они оба не равны 0.

Значит, $\exists!\, y_1, y_2$ $(y_1 \neq y_2)$ такие, что $f(y_1) = 1$ и $f(y_2) = 1$. Тогда изначальное ур-е $f(f(f(x))) = 1$ эквивалентно паре ~~[illegible]~~ ур-й:

$$\left[\begin{array}{l} f(f(x)) = y_1 \\ f(f(x)) = y_2 \end{array}\right.$$

Аналогично существует ровно 2 различных числа y_3, y_4 таких, что $f(y_3) = y_1$ и $f(y_4) = y_1$ и сущ ровно 2 разл. y_5, y_6 таких, что $f(y_5) = y_2$ и $f(y_6) = y_2$. Тогда можно заменить пару ур-й на 4-ку ур-й:

$$\left[\begin{array}{l} f(x) = y_3 \\ f(x) = y_4 \\ f(x) = y_5 \\ f(x) = y_6 \end{array}\right.$$

Заметим, что y_3, y_4, y_5, y_6 различны, так как если (не умоляя общности) $y_3 = y_5$, то $y_1 = f(y_3) = f(y_5) = y_2$. Противоречие.

Аналогично получим, что это объединение ур-й имеет ровно 8 различных корней.

Ответ: 8.

Запрещается делать пометки, раскрывающие авторство работы

2010001

Черновик

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМА. ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ-ФИНАНСИСТ!»

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

$T \quad Л \qquad S_T \quad S_Л$

$$\frac{S_T}{T} = 2\,\frac{S_Л}{Л} \qquad \frac{S_T'}{T'} = \frac{S_T \cdot 1{,}5}{T}$$

$$\frac{S_Л'}{Л'} = \frac{S_Л}{Л}$$

$$T = 0{,}1 \cdot (T + Л)$$

$$T - 0{,}1T = 0{,}1Л$$

$$\frac{S_T' + S_Л'}{T' + Л'} = 1{,}2 \cdot \frac{S_T + S_Л}{T + Л}$$

$$0{,}9T = 0{,}1Л$$

$$T = \frac{0{,}1}{0{,}9}Л = \frac{Л}{9}$$

$$\frac{S_T}{\cancel{T}} = \frac{2S_Л}{9\cancel{T}} \qquad \frac{S_T'}{\cancel{T}} = \frac{S_T \cdot 1{,}5}{\cancel{T}}$$

$$Л = 9T$$

$$\frac{S_T' + S_Л'}{\cancel{10T} \; T + Л'} = $$

$$\frac{S_Л'}{Л'} = \frac{S_Л}{9T} = \qquad S_T = \frac{2}{9}S_Л$$

$$= 1{,}2\,\frac{S_T + S_Л}{10T}$$

$$S_T' = 1{,}5 \cdot S_T = \frac{1{,}5 \cdot 2}{9}S_Л =$$

$$2S_Л' = \frac{2S_Л Л'}{9T} = \frac{S_T Л'}{T} \qquad = \frac{1}{3}S_Л$$

$$S_Л' = \frac{S_T Л'}{2T}$$

$$T + \frac{Л'}{3} = \frac{1{,}2 \cdot 11}{30}(T + Л') =$$

$$\frac{\cancel{S_Л}}{3} + \frac{\cancel{S_Л} Л'}{9T} \Big/ (T + Л') = 1{,}2\,\frac{\cancel{S_Л}\frac{11}{9}}{10T}$$

$$= \frac{\cancel{1{,}2 \cdot 11}}{10}(T + Л')$$

201 1009
+9
+40 201
=250 40

$$\frac{\frac{1}{3} + \frac{Л'}{9T}}{T + Л'} = 1{,}2\,\frac{11}{90T}$$

$$\frac{T}{3} + \frac{Л'}{9} = \left(\frac{1{,}2 \cdot 11}{90}\right)(T + Л')$$

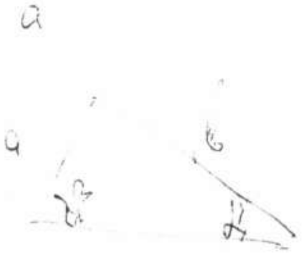
Запрещается делать пометки, раскрывающие авторство работы

2010001

Черновик

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМА. ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ-ФИНАНСИСТ!»

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

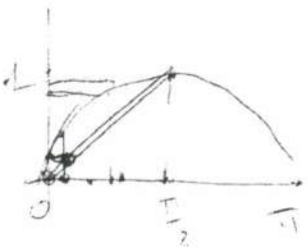


$\beta > \alpha$

$\beta \le \alpha \cdot 1{,}01$

$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$

$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{a}{b}$ $\quad \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{b}{a} \overset{?}{<} 1{,}01$



$\frac{\beta}{\alpha} < 1{,}01$

$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} < 1{,}01$ $\quad \frac{\sin(\alpha+\Delta)}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha\cos\Delta + \sin\Delta\cos\alpha}{\sin\alpha} =$

$\Delta < \frac{\alpha}{100}$ $\quad = \cos\Delta + \sin\Delta \operatorname{ctg}\alpha \overset{?}{<} 1{,}01$

$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ $\quad \cos\frac{\alpha}{100} + \sin\frac{\alpha}{100}\operatorname{ctg}\alpha \overset{?}{<} 1{,}01$

$1 \to 0{,}9$

$\frac{1}{100} - \sin\left(\frac{\pi}{200}\right)$ Λ A Φ

$\cos\frac{\alpha}{100} + \frac{\sin\frac{\alpha}{100}\cos\alpha}{\sin\alpha} \overset{?}{<} 1{,}01$

< 1

~~ΛA → ΦΦ~~ $\quad$ ΛA ↔ ΦΦ

AΦ → ΛΛ

ΦΛ → AA $\quad$ AΦ ↔ ΛΛ

ΛΛ → AΦ $\quad$ ΦΛ ↔ AA $\boxed{\sin\frac{\alpha}{100} \overset{?}{<} \frac{\sin\alpha}{100}}$

~~ΦΦ → AA~~

$0 \overset{?}{<} \left(\frac{\sin\alpha}{100} - \sin\frac{\alpha}{100}\right)' =$ AA ↔ ΦΛ $\quad 100\sin\frac{\alpha}{100} < \sin\left(100\cdot\frac{\alpha}{100}\right)$

$= \frac{\cos\alpha}{100} - \frac{\cos\frac{\alpha}{100}}{100}$

$\cos\alpha = \cos\frac{\alpha}{100}$

$-2 \quad +1 \quad +1$

Λ	A	Φ		Λ	A	Φ
7	8	10	$\overset{?}{\longrightarrow}$	9	8	8
1	2			1	0	
	3			1		

Запрещается делать пометки, раскрывающие авторство работы

2010001

Черновик

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМА. ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ-ФИНАНСИСТ!»

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

$x=0$

$0+2\cdot1+3\cdot2+11\cdot10=2+6+110=118$

$x=1$

$1+2\cdot0+3\cdot1+11\cdot9=1+3+99=103$

$x=2$

$2+2\cdot1+3\cdot0+11\cdot8=2+2+88=92$

$x=10$

$10+2\cdot9+3\cdot8+0=10+18+24=28+24=52$

$$\frac{\sqrt{2}\cdot(2-\sqrt{2})}{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}=\frac{2\sqrt{2}-2}{4-2}=\frac{2\sqrt{2}-2}{2}=\sqrt{2}-1$$

$x-\frac{2}{x}=a$

$x^2-2=xa$

$x^2-ax-2=0$

$D=a^2+4\cdot2.$

$x_{1,2}=\frac{a\pm\sqrt{a^2+8}}{2}$

Запрещается делать пометки, раскрывающие авторство работы

2010001

черновик

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМА. ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ-ФИНАНСИСТ!»

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

$|x| + 2|x-1| + 3|x-2| \dots + 11|x-10|$

$7\ 8 \qquad x_1 \quad x_2 = \frac{2}{x_1} \quad x_3 = \frac{3}{x_2}$

$2 \cdot 4 \quad 6 \dots \cdot 2018$

$f(f(f(x))) = 1 \qquad f(x) = x - \frac{2}{x} = 1$

$\left(x - \frac{2}{x} x^{-1}\right)' = 1 - 2\cdot(-1)\cdot x^{-2} =$

$x = 2 \qquad = 1 + 2x^{-2} = 1 + \frac{2}{x^2} > 0$

$x - \frac{2}{x} = 2 \qquad x - \frac{2}{x} = 1 \qquad -\frac{1}{3} \to -\frac{1}{2}$

$\pi r^2 = \pi$

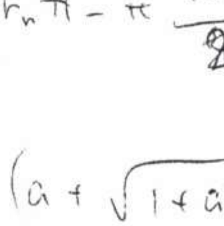
$x^2 - 2 = 2x \qquad x^2 - 2 = x$

2 шаг $r_n\pi - 4\cdot\pi\left(\frac{\sqrt{2}r_n}{4}\right)^2$

$x^2 - 2x - 2 = 0 \qquad x^2 - x - 2 = 0$

$D = 4 + 4\cdot 2 = 12 \qquad D = 1 + 4\cdot 2 = 9$

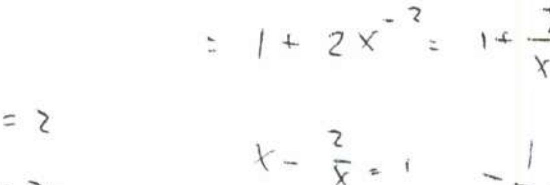
$x = \frac{2 \pm \sqrt{12}}{2} = 1 \pm \sqrt{3} \qquad x = \frac{1 \pm 3}{2} = 2; -1$



$\frac{\sqrt{2}\frac{r}{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}r}{4} \qquad \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$ пусть $b < 0$

$\frac{b}{\sqrt{1+b^2}} > \frac{b}{|b|} = -1$

$r_n\pi - \pi\frac{r_n^2}{2} \qquad \frac{5}{64}$



$\left(a + \sqrt{1+a^2}\right)\left(b + \sqrt{1+b^2}\right) = 1$

$\left(b + \sqrt{1+b^2}\right)' = 1 + \left((1+b^2)^{\frac{1}{2}}\right)' = \qquad \left(a + \sqrt{1+a^2}\right)\left(-a + \sqrt{1+a^2}\right) =$

$= 1 + \frac{1}{2}(1+b^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2b = 1 + \frac{b}{\sqrt{1+b^2}} > 0 \qquad = 1 + a^2 - a^2 = 1$

Запрещается делать пометки, раскрывающие авторство работы

2010001

Черновик

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМА. ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ-ФИНАНСИСТ!»

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

$$\cos\frac{\alpha}{100} + \frac{\sin\frac{\alpha}{100}\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$-\frac{\sin\frac{\alpha}{100}}{100} - \frac{\sin\frac{\alpha}{100}}{\sin^2\alpha} + \frac{\cos\frac{\alpha}{100}\cos\alpha}{100\sin\alpha} = 0$$

$$\frac{\sin\frac{\alpha}{100}\sin\alpha}{100} + \frac{\sin\frac{\alpha}{100}}{\sin\alpha} = \frac{\cos\frac{\alpha}{100}\cos\alpha}{100}$$

$$\frac{\sin\frac{\alpha}{100}\sin\alpha}{\cos\frac{\alpha}{100}} + \frac{\sin\frac{\alpha}{100}\cdot 100}{\sin\alpha\cos\frac{\alpha}{100}} = \cos\alpha$$

$$\cos\frac{\alpha}{100} + \frac{\sin^2\frac{\alpha}{100}}{\cos\frac{\alpha}{100}} + \frac{\sin^2\frac{\alpha}{100}\cdot 100}{\sin^2\alpha\cos\frac{\alpha}{100}} =$$

$$\frac{\cos^2\alpha\cos\frac{\alpha}{100}}{100}$$

$-128+132$ и

$(-16-12\sqrt{2})$ $+$ $0-$ ... $<0.$

1,4142135 $\quad$ 176 $\quad$ 192

$(\sqrt{2}-1)^4_2$

$=((\sqrt{2}-1)^2)^2=$

$$\frac{}{100} \quad \frac{\sin\frac{\alpha}{100}}{\sin\alpha}$$

256 − 288

$1-(17-12\sqrt{2})=$ $\quad$ $=(2+1-2\sqrt{2})^2=(3-2\sqrt{2})^2=$

$=-16+12\sqrt{2}$ $\quad$ $=9+8-12\sqrt{2}$

Запрещается делать пометки, раскрывающие авторство работы

2010001

Черновик

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМА. ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ-ФИНАНСИСТ!»

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

$$\left(\frac{\sin\frac{t}{100}\cos t}{\sin t}\right)' = -\frac{\sin\frac{t}{100}}{\sin^2 t} + \frac{\cos\frac{t}{100}\cdot\cos t}{100\sin t} = 0$$

$$\left(\frac{\cos t}{\sin t}\right)' = \frac{-\sin t\sin t - \cos t\cos t}{\sin^2 t} = -\frac{1}{\sin^2 t}$$

$$= \frac{\sin\frac{t}{100}}{100} - \frac{\sin\frac{t}{100}}{\sin t} + \frac{\cos\frac{t}{100}\cos t}{100} = 0$$

$$\frac{\cos\frac{t}{100}\cos^2 t}{100} \overset{?}{<} \frac{1}{100}$$

$$\frac{S_T}{T} = \frac{2S_n}{n}$$

$$S_n' = S_n \qquad \frac{S_n'}{n'} = \frac{S_n}{n}$$

$$S_T' = 1{,}5\,S_T$$

$$\frac{S_T'+S_n'}{T'+n'} = \frac{S_T+S_n}{T+n}\cdot 1{,}2$$

$$\frac{\frac{1}{3}+1}{T+n'} = \left(\frac{\frac{2}{9}+1}{10T}\right)\cdot 1{,}2$$

$$n = 9T$$

$$\frac{4}{3(T+n')} = \frac{11\cdot 12}{900T}$$

$$\frac{T}{T+n'}$$

$$\frac{1}{T+n'} = \frac{11\cdot 3}{300T} = \frac{11}{100T}$$

$$100T = 11T + 11n'$$

$$89T = 11n'$$

$$T = \frac{11}{89}n'$$

$$\frac{11}{89}n' + n' = 1$$

$$\frac{1}{9} \quad \frac{8}{9} \quad \frac{11}{100} \quad \frac{89}{100}$$

Запрещается делать пометки, раскрывающие авторство работы

2010001

Чернівці

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМА. ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ-ФИНАНСИСТ!»

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

$\cos\Delta + \sin\Delta\ \mathrm{ctg}\,\alpha \le 1{,}01$

$\mathrm{ctg}\,\alpha$

$\cos\Delta + \sin\Delta\ \mathrm{ctg}\,100\Delta \le 1{,}01$

$100\Delta \le \alpha$

$\cos\Delta + \sin\Delta\ \mathrm{ctg}\,100\Delta \le 1{,}01$

$-\sin\Delta + \cos\Delta\ \mathrm{ctg}\,100\Delta = \frac{\sin\Delta}{\sin^2 100\Delta}\cdot 100$

$\cos\Delta\ \mathrm{ctg}\,100\Delta = \frac{\sin\Delta}{\sin^2 100\Delta}\cdot 100$

$\cos\Delta\cos 100\Delta = \frac{\sin\Delta}{\sin 100\Delta}\cdot 100$

$\frac{\sin^2\Delta\cdot 100}{\sin^2 100\Delta\cos\Delta}$

$\frac{\sin\frac{\alpha}{100}}{\cancel{100}} + \frac{100\sin\frac{\alpha}{100}}{\sin\alpha} = \frac{\cos\frac{\alpha}{100}\cos\alpha}{\cancel{100}}$

$101\cos\alpha = \mathrm{tg}\frac{\alpha}{100} + \mathrm{tg}\frac{\alpha}{100}\cdot\frac{100}{\sin\alpha} =$

$\frac{\sin\frac{\alpha}{100}}{\cos\frac{\alpha}{100}}\left(1+\frac{100}{\sin\alpha}\right) + \frac{\sin\frac{\alpha}{100}\cos\alpha}{\sin\alpha} = \mathrm{tg}\left(\frac{\alpha}{100}\right)\left(1+\frac{100}{\sin\alpha}\right)$

Запрещается делать пометки, раскрывающие авторство работы

2010001

Чистовик

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМА. ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ-ФИНАНСИСТ!»

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

7. Пусть угол β больший вершины и углу α, а напротив углов α и β лежат стороны a и b соответственно

по теореме синусов:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} \Rightarrow \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{b}{a}$$

Нам достаточно доказать, что $1 < \frac{b}{a} \le 1{,}01$. Т/о, что $\frac{b}{a} > 1$ очевидно, так как $\beta > \alpha$, а значит сторона напротив b больше стороны напротив α.

Докажем, что $\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} \le 1{,}01$. Пусть $\beta - \alpha = \Delta > 0$. Заметим, что α и Δ лежат в $[0; \frac{\pi}{2})$

Тогда $\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{\sin(\alpha+\Delta)}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha\cos\Delta + \sin\Delta\cos\alpha}{\sin\alpha} =$

$= \cos\Delta + \frac{\sin\Delta\cos\alpha}{\sin\alpha} \le$ (т.к. ~~$\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$~~ $\sin x$ – возраст. функция на $[0;\frac{\pi}{2}]$) то $\sin(\alpha+\frac{\alpha}{100}) \ge \sin(\alpha+\Delta)$ $\le \cos\frac{\alpha}{100} + \frac{\sin(\frac{\alpha}{100})\cos\alpha}{\sin\alpha}$ Пусть $f(\alpha) = \frac{\sin(\frac{\alpha}{100})\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

$\alpha + \alpha/100$ может уже не быть в $[0; \pi/2]$

Тогда нам достаточно доказать $f(\alpha) \le \frac{1}{100}$ при $\alpha \in [0; \frac{\pi}{2}]$

$f'(\alpha) = -\frac{\sin\frac{\alpha}{100}}{\sin^2\alpha} + \frac{\cos\frac{\alpha}{100}\cos\alpha}{100\sin\alpha}$. Пусть для α_1 $f(\alpha_1) = 0$.

Почему

Тогда $\frac{\sin\frac{\alpha_1}{100}}{\sin^2\alpha_1} = \frac{\cos\frac{\alpha_1}{100}\cos\alpha_1}{100\sin\alpha_1}$, $\Rightarrow \cos\frac{\alpha_1}{100} + \frac{\sin\frac{\alpha_1}{100}\cos\alpha_1}{\sin\alpha_1} =$

$= \cos\frac{\alpha_1}{100} + \frac{\cos^2\alpha_1\cos\frac{\alpha}{100}}{100} \le 1 + \frac{1}{100} = \frac{101}{100}$

$\frac{+}{2}$

Запрещается делать пометки, раскрывающие авторство работы

2010001

Чистовик

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМА. ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ-ФИНАНСИСТ!»

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

7 (продолжение)

Заметим, что при $\alpha > \alpha_1$ $f(\alpha)$ убывает, а при $\alpha < \alpha_1$ $f(\alpha)$ возрастает, значит $f(\alpha) < f(\alpha_1)$.

Значит, для любого α из $[0; \frac{\pi}{2}]$ $\cos\frac{\alpha}{100} + \frac{\sin\frac{\alpha}{100}\cos\alpha}{\sin\alpha} < \frac{101}{100}$.

ч.т.д.

Запрещается делать пометки, раскрывающие авторство работы

2010001 Чистовик

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМА. ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ-ФИНАНСИСТ!»

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

4. Пусть $S_Т$ – сумма зарплат трудоголиков, $S_Л$ – сумма зарплат лентяев, Т – кол-во труд, Л – кол-во лентяев, а буквы со штрихами обозначают значения параметров в 2017 году. Запишем все условия.

(1) $\frac{S_Т}{Т} = \frac{2S_Л}{Л}$

(2) $S_Т' = 1,5 \cdot S_Т$

(3) $\frac{S_Т' + S_Л'}{Т + Л'} = \left(\frac{S_Т + S_Л}{Т + Л}\right) \cdot 1,2$

(4) $Л = 9Т$

(5) $S_Л' = S_Л$

Из (1) и (4) получим:

$$\frac{S_Т}{Т} = \frac{2S_Л}{9Т} \Rightarrow S_Т = \frac{2}{9} S_Л \quad (6)$$

Из (2) и (6) получим:

$$S_Т' = 1,5 \cdot S_Т = \frac{2}{9} S_Л \cdot 1,5 = \frac{S_Л}{3} \quad (7)$$

Из (3), (6), (7), (4) получим:

$$\frac{\frac{S_Л}{3} + S_Л}{Т + Л'} = \left(\frac{\frac{2}{9} S_Л + S_Л}{Т + 9Т}\right) \cdot 1,2$$

$$\frac{\frac{1}{3} + 1}{Т + Л'} = \left(\frac{\frac{2}{9} + 1}{10Т}\right) \cdot 1,2 \Rightarrow \frac{4}{3(Т + Л')} = \left(\frac{11}{90Т}\right) \cdot 1,2 = \frac{11 \cdot 12}{900Т}$$

$$\frac{1}{Т + Л'} = \frac{11 \cdot 3}{300Т} = \frac{11}{100Т} \Rightarrow (Т + Л') \cdot 11 = 100Т \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 11Т + 11Л' = 100Т \Rightarrow 11 + 11\frac{Л'}{Т} = 100 \Rightarrow 11\frac{Л'}{Т} = 89 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 11\left(\frac{Л'}{Т} + 1\right) = 100 \Rightarrow 11\left(\frac{Л' + Т}{Т}\right) = 100 \Rightarrow \frac{Т}{Л' + Т} = \frac{11}{100}$$

Ответ: 11 процентов.

Запрещается делать пометки, раскрывающие авторство работы

2010001 Чистовик

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМА. ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ-ФИНАНСИСТ!»

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

8 (продолжение)

$\#\Lambda(1) = 7$ $\qquad$ $\#\Lambda(2) = 9$

$\#A(1) = 8$ $\qquad$ $\#A(2) = 8$

$\#\Phi(1) = 10$ $\qquad$ $\#\Phi(2) = 8$

$f(1)$: $\qquad$ $f(2)$:

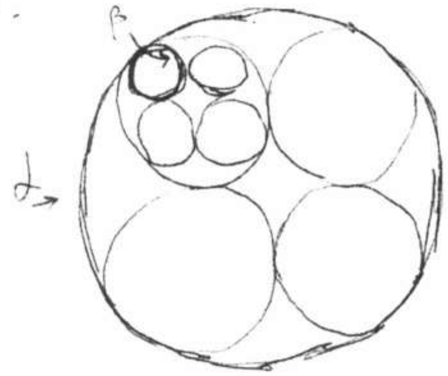
$(-1; -2; 3)$ $\qquad$ $(1; 0; -1)$

Как мы видим $\#\Lambda(1) - \#A(1) \not\equiv \#\Lambda(2) - \#A(2) \pmod 3$

Значит, из этого слова нельзя получить 2-ое, а значит этого слова нет в алфавите.

Ответ: нет.

5.



Пусть площадь равна S. Пусть исходная окружность α, а окружность нарисованная на 3-ем шаге ~~и~~ ~~~~ это β (см. рис.) Обе они изначально окрашены в черный цвет. Пусть r_β – радиус окружности β. Рассмотрим произвольную гомотетию с коэффициентом $\frac{1}{r_\beta}$, такую, что она переводит окружность β в β'. Заметим, что у β' и α равные радиусы, а значит равны площади фигур внутри них образованные черным цветом. Значит, площадь фигуры образованной

2010001

Чистовик

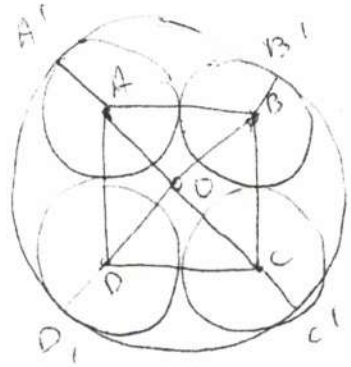
ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМА. ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ-ФИНАНСИСТ!»

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

5 (продолжение)

черного цветка внутри β равна $S\cdot\left(\frac{r_в}{1}\right)^2 = Sr_в^2$.

Найдем $r_в$.



Рассмотрим окружность и 4 окружности на след. рис. Пусть радиус большой a, а радиус маленькой b. Пусть центры – A, B, C, D, O. Точки касания A', B', C', D'. (см. рис.)

Заметим, что O, A, A'; O, B, B'; O, C, C'; O, D, D' – лежат на одной прямой. При этом $OA = OB = OC = OD = a-b$

Заметим, что $AB = BC = CD = DA = 2b \Rightarrow ABCD$ – квадрат.

$\Rightarrow AB = \sqrt{2}\,OA \Rightarrow 2b = \sqrt{2}(a-b) \Rightarrow b = \frac{\sqrt{2}a}{2+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}a(2-\sqrt{2})}{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})} =$

$= \frac{(2\sqrt{2}-2)a}{4-2} = (\sqrt{2}-1)a.$

$\Downarrow$

$r_в = (\sqrt{2}-1)^2$

Тогда запишем равенство:

$$S = \pi\cdot 1^2 - 4\pi(\sqrt{2}-1)^2 + 16S\left((\sqrt{2}-1)^2\right)^2$$

$$S\left(1-16(\sqrt{2}-1)^4\right) = \pi\left(1-4(\sqrt{2}-1)^2\right)$$

$$S = \frac{\pi\left(1-4(\sqrt{2}-1)^2\right)}{1-16(\sqrt{2}-1)^4} = \frac{\pi\left(1-4(3-2\sqrt{2})\right)}{1-16(17-12\sqrt{2})} = \frac{\pi(-11+8\sqrt{2})}{-271+192\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{\pi(-11+8\sqrt{2})(-271-192\sqrt{2})}{(-271+192\sqrt{2})(-271-192\sqrt{2})} = \cancel{\frac{\pi(-8+4\sqrt{2})}{-32}} = \cancel{\frac{\pi(4-\sqrt{2})}{8}}$$

7

Запрещается делать пометки, раскрывающие авторство работы

Оценочный бланк олимпиадных заданий по математике

Код участника: 713 144

Номер задания		1	2	3	4	5	6	7	8
Полученные баллы	Первый проверяющий	10 Воф	10 Шм	9 Шм	12 Воф	0 Шм	14 Воф	14? Мел	0 Мел
	Второй проверяющий	10 [signature]	10 [signature]	9 [signature]	12 [signature]	0 [signature]	14 [signature]	11 [signature]	0 Ан
	Итого	10	10	9	12	0	14	11	0
Сумма баллов (оценка)		65							

Члены жюри:

Подпись — В. Б. Шм — Фамилия И.О.

Подпись — Кочерова А.С. — Фамилия И.О.

Подпись — Волкова Е.С. — Фамилия И.О.

Всероссийская олимпиада школьников «Миссия выполнима. Твое призвание-финансист!»

ПО МАТЕМАТИКЕ 11 класс

Заключительный (очный) этап 2017/2018 учебный год

713144

Код участника

Вариант II

Задание 1. (10 баллов)

Даны последовательность чисел $x_1, x_2, \ldots$, такая, что $x_1 = 29$ и $x_n = \dfrac{n}{x_{n-1}}$ для всех $n > 1$. На сколько нулей оканчивается число равное произведению $x_1 x_2 \ldots x_{1012}$?

Задание 2. (10 баллов)

Найдите наименьшее значение функции $f(x) = |x+1| + 2|x+2| + 3|x+3| \ldots + 10|x+10|$.

Задание 3. (12 баллов)

Сколько различных корней имеет уравнение $f\left(f\left(f(x)\right)\right) = 2$, если $f(x) = x - \dfrac{1}{x}$?

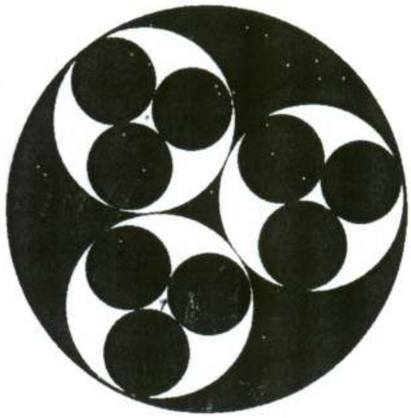
Задание 4. (12 баллов)

Сотрудники фирмы делятся на трудяг и лентяев. В 2016 году средняя зарплата трудяг превышала в два раза среднюю зарплату лентяев. Повысив свою квалификацию, трудяги в 2017 году стали получать на 50% больше, а зарплата лентяев не изменилась. При этом часть лентяев уволили в конце 2016 года. Средняя зарплата всех сотрудников в 2017 году стала на 20% больше, чем была в 2016 году. Найдите сколько процентов от общего числа сотрудников составляли в 2017 году трудяги, если в 2016 году их было 10%.

Задача 5. (12 баллов)

713144

На первом шаге на листе бумаги была изображена единичная окружность и ограниченный ею круг закрашен черной краской. На каждом из последующих шагов для каждой из окружностей, изображенных на предыдущем шаге, рисуются три новые касающихся ее внутренним образом окружности равных радиусов. Эти три окружности касаются друг друга внешним образом. Круги, ограниченные новыми окружностями, закрашиваются белой краской, если номер шага четное число, или черной краской, если номер шага нечетен. На рисунке изображен результат трех шагов. Описанный процесс продолжается до бесконечности. Найдите площадь белой области.



Задание 6. (14 баллов)

Действительные числа a и b таковы, что $\left(a+\sqrt{1+a^2}\right)\left(b+\sqrt{1+b^2}\right)=1$. Найдите сумму $a+b$.

Задание 7. (14 баллов)

Назовем положительное число a близким сверху к положительному числу b, если a превосходит b, но не больше чем на 0,5%. Докажите, что если в треугольнике радианная мера одного из углов близка сверху к радианной мере другого угла, то найдутся две стороны этого треугольника такие, что длина одной из них близка сверху к длине другой.

Задача 8. (16 баллов)

В алфавите языка альфов три буквы *А*, *Л* и *Ф*. Все слова этого языка можно построить, применяя последовательно следующие правила к любому слову из этого языка:

(1) поменять порядок букв в слове на противоположный

(2) заменить две последовательные буквы так: *ЛА* → *ФФ*, *АФ* → *ЛЛ*, *ФЛ* → *АА*, *ЛЛ* → *АФ*, *ФФ* → *ЛА* или *АА* → *ФЛ*.

Известно, что *ЛЛАФФФФАЛАФФФАЛАФФАЛАФАЛЛ* – это слово из языка альфов. Есть ли в языке альфов слово *ЛФАЛФАЛАФЛАФЛАФЛАФЛАФЛАФЛ*?

№1 Чистовик

713144

1) Заметим, что $x_{n-1} \cdot x_n = n$

Тогда разобьём последовательность на пары:

$$\underbrace{x_1 \cdot x_2}_{2} \quad \underbrace{x_3 \cdot x_4}_{4} \quad \dots \quad \underbrace{x_{1011} x_{1012}}_{1012}$$

Получилось 506 чисел.

„0" есть у числа тогда, когда оно кратно 10.
$\Downarrow$
$\vdots 2$ и $\vdots 5$

Произведение чисел точно кратно 2^{506} (как минимум)
Сколько же пятёрок в разложении произведения?
Каждое пятое получившееся число кратно пяти - 101 таких
Каждое 25-е ещё раз кратно пяти, таких 20
Каждое 125 ещё раз кратно пяти, таких 4
625-х нет.

$$506 > 101 + 20 + 1 = 125$$
$\Downarrow$
125 нулей

Ответ: 125.

N3

$g(x) = f(f(f(x))) = 2$ Сколько корней - ?

$f(f(x)) = t$
$\Downarrow$
$t - \frac{1}{t} = 2$

$t^2 - 2t - 1 = 0$

$t_1 = 1 + \sqrt{2}$

$t_2 = 1 - \sqrt{2}$

I. $f(f(x)) = 1 + \sqrt{2}$

II $f(f(x)) = 1 - \sqrt{2}$

$f(x) = m$

I. $m - \frac{1}{m} = 1 + \sqrt{2}$

$m^2 - (1+\sqrt{2})m - 1 = 0$

$D = (1+\sqrt{2})^2 + 4 = 1 + 2\sqrt{2} + 2 + 4 = 7 + 2\sqrt{2}$

$m_1 = \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt{7 + 2\sqrt{2}}}{2}$ $m_2 = \frac{1 + \sqrt{2} - \sqrt{7 + 2\sqrt{2}}}{2}$

II

. . .

Таким образом ~~[illegible]~~ при ~~[illegible]~~ каждом наложении вложенного кол-во корней увеличивается в 2 раза, при этом корни не становятся

„0",
„1",
„$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$",
и
„$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$",
„−1",
„$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$",
„$\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$"

Эти нельзя по ОДЗ: 1 и −1 дадут 0, а внешняя ф-я не может существовать при „0", 0 не может быть аргументом ф-и $x-\frac{1}{x}$, а остальные дают „1" или „−1".

$\Downarrow$

$\boxed{\text{max 8 корней}}$

наблюдение верное, но обоснование отсутствует

№4

Средняя зарплата в 2016:

$$\frac{2t\cdot x + t\cdot K}{x+K} = \frac{11}{10}\cdot t$$

Средняя зарплата в 2017:

$$\frac{3t\cdot x + t\cdot K\cdot c}{x+K\cdot c} = \frac{(3+9\cdot c)\cdot t}{(1+9\cdot c)}$$

x – кол-во трудяг

K – кол-во лентяев

t – зарплата лентяев

$K\cdot c$ – кол-во лентяев после увольнения

$K = 9\cdot x$

Зарплата трудяг:

$2t \to 3t$

Соотношение:

$$1{,}2\cdot\frac{11}{10}\cdot t = \frac{(3+9\cdot c)}{(1+9\cdot c)}t$$

$$\frac{6\cdot 11}{5\cdot 10} = \frac{3+9\cdot c}{1+9\cdot c}$$

$$66+66\cdot 9\cdot c = 150 + 50\cdot 9\cdot c$$

$$16\cdot 9\cdot c = 84$$

$$9\cdot c = \frac{21}{4}$$

$$3\cdot c = \frac{7}{4}$$

$$c = \frac{7}{12}$$

Ищем:

$$\frac{x}{x+K\cdot c}\cdot 100\% = \frac{x}{x+9\cdot\frac{7}{12}\cdot x}\cdot 100\% = \frac{1}{1+\frac{21}{4}} = \frac{4}{25}\cdot 100\% = 16\%$$

$\boxed{\text{Ответ: } 16\%}$

P

№2

$$f(x)=|x+1|+2|x+2|+3|x+3|+4|x+4|+5|x+5|+6|x+6|+7|x+7|+$$
$$+8|x+8|+9|x+9|+10|x+10|$$

Функция линейна на отрезках:

$[-1;+\infty]$ - возрастает

$[-2;-1]$

$[-3;-2]$

$[-4;-3]$

$[-5;-4]$

$[-6;-5]$ < $[-7;-6]$

$[-7;-8]$

$[-8;-9]$

$[-9;-10]$

$[-\infty;-10]$ - возрастает

На каждом из них она либо возрастает, либо убывает, на бесконечности возрастает

⇓

искать min надо в точках „излома", т.к. какой-нибудь край отрезка будет всегда меньше всех значений на отрезке.

$f(-1)=2\cdot1+3\cdot2+4\cdot3+5\cdot4+6\cdot5+7\cdot6+8\cdot7+9\cdot8+$
$+10\cdot9$

$f(-2)=1+0+3\cdot1+4\cdot2+5\cdot3+6\cdot4+7\cdot5+$
$+8\cdot6+9\cdot7+10\cdot8$

$f(-3)=2+2+0+4\cdot1+5\cdot2\ \dots\ 10\cdot7$

$f(-8)=7+2\cdot6+3\cdot5+4\cdot4+5\cdot3+6\cdot2+7\cdot1+0+9+10$

$f(-9)=8+2\cdot7+3\cdot6+4\cdot5+5\cdot4+6\cdot3+7\cdot2+8\cdot1+$
$+0+10\cdot1$

$f(-4)=3+2\cdot2+3\cdot1+4+5\cdot0+6\cdot2+7\cdot3+8\cdot4+9\cdot5+10\cdot6$

$f(-10)=9+2\cdot8+3\cdot7+4\cdot6+5\cdot5+6\cdot4+7\cdot3+8\cdot2+$
$+9\cdot1+0$

$f(-5)=4+2\cdot3+3\cdot2+4+0+6+7\cdot2+3\cdot8+9\cdot4+5\cdot10$

~~f(-10) минимален, т.к. при переходе от f(-n) к f(-n-1)~~

$f(-6)=5+2\cdot4+3\cdot3+4\cdot2+5\cdot1+0+7+8\cdot2+9\cdot3+10\cdot4$

$f(-7)=6+2\cdot5+3\cdot4+4\cdot3+5\cdot2+6\cdot1+0+8+9\cdot2+10\cdot3$

$f(-1)>f(-2)>f(-3)>f(-4)>f(-5)>f(-6)>f(-7)<f(-8)<f(-9)<f(-10)$

$\Downarrow$

$f(-7)$ - min; $f(-7) = 112$

$\boxed{\text{Ответ: } 112}$

~~№6~~ №7

1) Угол α близок сверху к β, $\alpha > \beta$

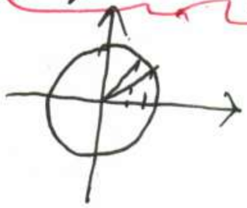
(Рассмотрим сначала случай $\alpha \leq \frac{\pi}{2}$)

Если это так, то

$\sin\alpha > \sin\beta \quad (\alpha \leq \frac{\pi}{2})$

2) При этом из замечательного предела следует:

$$\begin{cases} \alpha - \sin\alpha > \beta - \sin\beta \\ \frac{\pi}{2} > \alpha > \beta \end{cases}$$ д-во!!



+.

$\Downarrow$

$\sin\alpha - \sin\beta < \alpha - \beta \Rightarrow$ $\sin\alpha$ тоже близок сверху к $\sin\beta$

$\sin\alpha = (1+k)\sin\beta$

$k < 0{,}005$

3) Из теоремы синусов:

$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} \Rightarrow a \cdot \sin\beta = b \cdot \sin\alpha$

$\Downarrow$

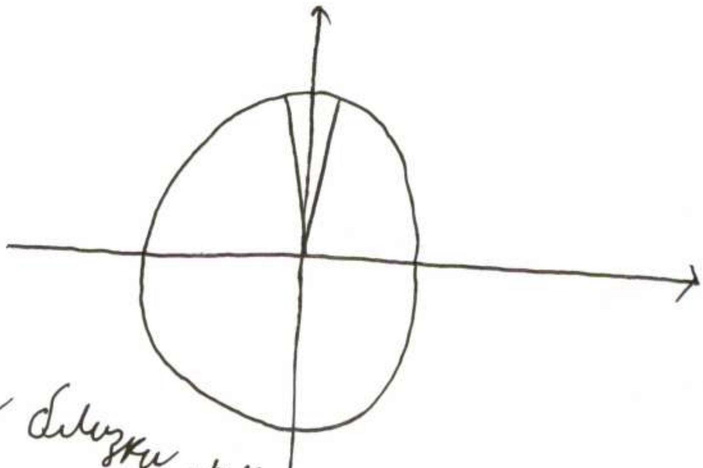
$a = b(1+k)$

$\Downarrow$

Мы нашли две стороны, связанные близостью сверху.

4) Теперь рассмотрим вариант $\alpha > \frac{\pi}{2}$

$\beta < \frac{\pi}{2}$



4) Тут синусы близки, т.к. при отклонении α от $\frac{\pi}{2}$ в бо́льшую сторону $\sin\alpha$ уменьшается, а $\min \sin\beta$ растёт, в случае $\alpha = \frac{\pi}{2}$ всё выполняется по первому рассуждению и выполняется и при $\alpha > \frac{\pi}{2}$

$\sin\alpha > \sin\beta$.

Может случиться так, что $\sin\alpha < \sin\beta$, тогда получим, что

$\sin\alpha = \sin(\pi-\alpha)$, а $\sin\beta = \sin(\pi-\beta)$

$\pi-\alpha < \pi-\beta$, но они всё ещё близки $\Rightarrow$ близость синусов выполняется

$\sin(\pi-\alpha) < \sin(\pi-\beta)$

$\pi-\alpha < \pi-\beta$

как в случае с

$\alpha > \beta$

$\sin\alpha > \sin\beta$.

$\Leftarrow$

всегда сможем применить теорему синусов, всегда сможем достроить рассуждение от градусной меры до синуса.

чистовик

713144

№ 6

$$\boxed{\left(a+\sqrt{1+a^2}\right)\left(b+\sqrt{1+b^2}\right)=1} \quad a+b-?$$

$$1=1$$

$$1+a^2-a^2=1$$

$$(1+a^2)-a^2+a\sqrt{1+a^2}-a\sqrt{1+a^2}=1$$

пав

$$\left(\sqrt{1+a^2}\right)^2-a^2+a\sqrt{1+a^2}-a\sqrt{1+a^2}=1$$

$$\left(a+\sqrt{1+a^2}\right)\left(-a+\sqrt{1+a^2}\right)=1$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases}\left(a+\sqrt{1+a^2}\right)\left(b+\sqrt{1+b^2}\right)=1\\ \left(a+\sqrt{1+a^2}\right)\left(-a+\sqrt{1+a^2}\right)=1\end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\left(b+\sqrt{1+b^2}\right)}{\left(-a+\sqrt{a^2+1}\right)}=1$$

$$b+\sqrt{1+b^2}=-a+\sqrt{a^2+1}$$

$$(b+a)+\sqrt{1+b^2}=\sqrt{a^2+1}$$

$$(b+a)^2+2(b+a)\sqrt{1+b^2}+1+b^2=a^2+1$$

$$b^2+2ab+\cancel{a^2}+b^2-\cancel{a^2}=-2(b+a)\sqrt{1+b^2}$$

~~$b^2+ab=-(b+a)\sqrt{1+b^2}$~~

~~$b^2=-\sqrt{1+b^2}$~~

$$b(b+a)=-(b+a)\sqrt{1+b^2} \Rightarrow \boxed{b+a=0,\ \text{что и требовалось найти}}$$

$b\neq-\sqrt{1+b^2}$ т.к. $b^2\neq 1+b^2$

$0\neq 1$

Ответ: $b+a=0$

№5

Сторона $\triangle ABC$ − a

$\triangle ABC$ − равносторонний

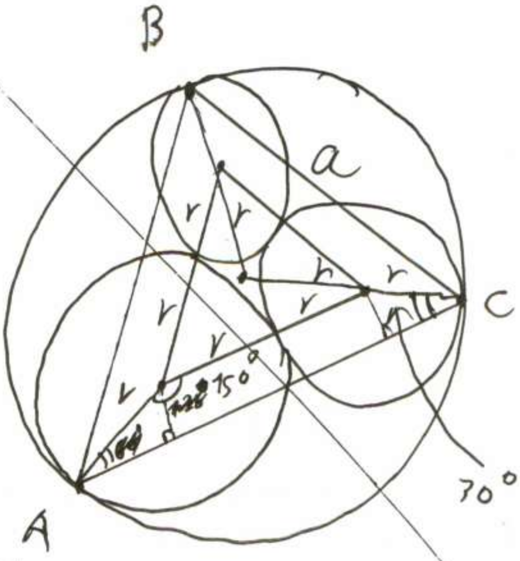
$\Downarrow$

$\angle A = 60^\circ$

$\Downarrow$

$a = 2R \cdot \sin 60^\circ = \sqrt{3} R$

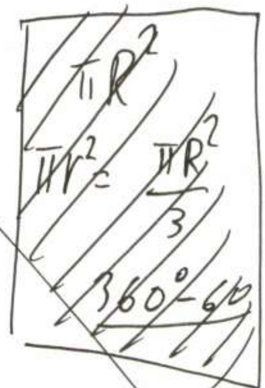
радиус большой окр-ти



$AC = a = 2r + 2 \cdot \cos 30^\circ \cdot r = (2+\sqrt{3}) r$

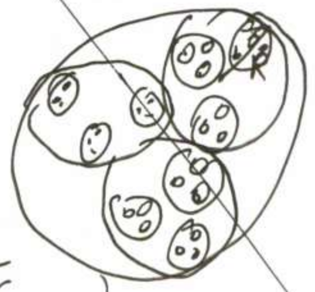
$\Downarrow$

$r = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} R$



Площадь белого цвета:

$S = 3\pi R^2 - 9\left(\frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right)^2 \pi R^2 = \ldots$



$= 3\pi R^2 \left(1 - \frac{9}{4+4\sqrt{3}+3} + \frac{81}{(2+\sqrt{3})^4} - \frac{9^3}{(2+\sqrt{3})^6} \ldots\right)$

$S = 3\pi R^2 \left(1 - \frac{9}{(2+\sqrt{3})^2} + \frac{9^2}{(2+\sqrt{3})^4} - \frac{9^3}{(2+\sqrt{3})^6} \ldots \frac{9^\infty}{(2+\sqrt{3})^{2\cdot\infty}}\right)$

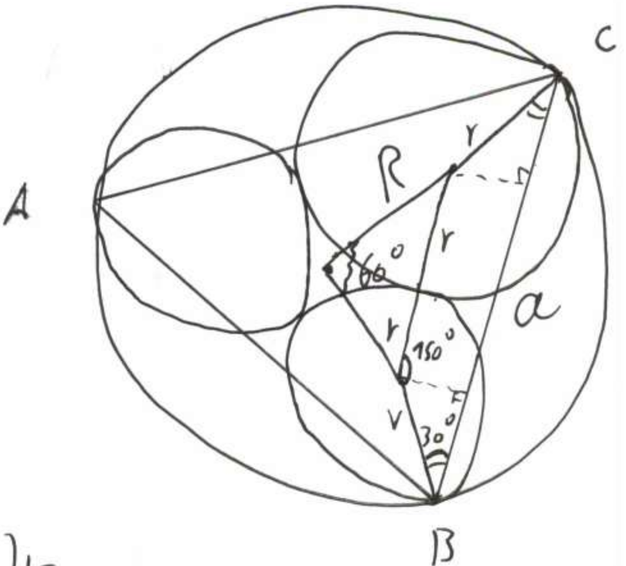
№5

$\triangle ABC$ – равносторонний

$BC = a$

$R = \dfrac{a}{\sin 60^\circ \cdot 2}$

$R = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$

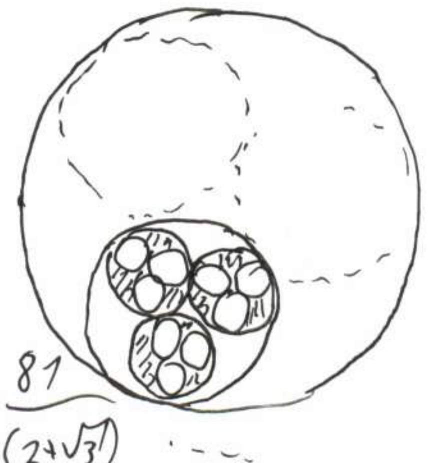


$a = 2r + 2\cdot\cos 30^\circ \cdot r = (2+\sqrt{3})r$

$r = \dfrac{a}{(2+\sqrt{3})}$

$\Downarrow$

$r = \dfrac{\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})} R$ – так соотносятся радиусы малой и большой окр-ти.



Мы по очереди прибавляем и вычитаем площади кругов:

$3\pi R^2 - 3\pi R^2 \cdot \dfrac{9}{(2+\sqrt{3})^2} + 3\pi R \cdot \dfrac{81}{(2+\sqrt{3})} \dots$

Это бесконечная, убывающая геометрическая прогрессия с $a_0 = 3\pi R^2$ и $b = -\dfrac{9}{(2+\sqrt{3})^2}$

Представим это как две прогрессии с $a_{0_1} = 3\pi R^2$ и $a_{0_2} = -3\pi R^2 \cdot \dfrac{9}{(2+\sqrt{3})^2}$ и $b = \dfrac{9}{(2+\sqrt{3})^2}$

Применяем формулу* для нахождения суммы:

$S_{общ} = S_1 + S_2 =$

* формулу суммы беск уб. последовательности, потом складываем посл-ти.

Черновик:

№1

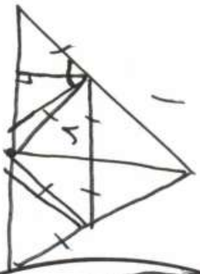
$x_{n-1} \cdot x_n = n$ м.к. $x_n = \frac{n}{x_{n-1}}$

$\Downarrow$

Разобьём на пары $x_1 \cdot x_2$; $x_3 \cdot x_4$

$\downarrow$ $\downarrow$

2 4



Все числа кратны двум, при этом, 0 получ. из перемножения этих чисел.

Кратных „2" очень много (все), посчитаем кол-во „5".

Всего пар там 506 (1012 : 2)

Каждая пятая: 5 таких там 101

Каждая двадцать пятая несёт в себе доп. пятёрку таких там 20

Каждая 125 несёт в себе доп. пятёрку, таких там 4

625-х нет.

$\Downarrow$

Пятёрок в произведении: $101+20+4 = 125$

Двоек на много 506

$\Downarrow$

Нулей 125

$g(x) = f(f(f(x))) = 2$

$\Downarrow$

$f(f(x)) = t$ $x - \frac{1}{x}$

$t - \frac{1}{t} = 2$

$t^2 - 2t - 1 = 0$; $t \neq 0$

$D = 4+4 = 8$

$t_1 = \frac{2+2\sqrt{2}}{2} = 1+\sqrt{2}$; $t_2 = 1-\sqrt{2}$

$$1{,}2 \cdot \frac{2t\cdot x + t\cdot K}{x+K} = \cdot \frac{3t\cdot x + t\cdot K\cdot c}{x+K\cdot c}$$

$$K = 9\cdot x$$

$$1{,}2 \cdot \frac{(2+9)\,t\cdot x}{10x} = \cdot \frac{(3+9\cdot c)\,t\cdot x}{x(1+9\cdot c)}$$

$$1{,}2\ \frac{11}{10} = \cdot \frac{(3+9\cdot c)}{1+9\cdot c}$$

$$= \cdot \frac{3+9\cdot c}{1+9c}$$

$$\frac{6\cdot 11}{5\cdot 10} = \frac{3\cdot 9\cdot c}{1+9\cdot c}$$

$$66+9\cdot c\cdot 66 = 150 + 50\cdot 9c$$

$$16(9\cdot c) = 84$$

$$9\cdot c = \frac{84}{16} = \frac{21}{4}$$

$$3\cdot c = \frac{7}{4}$$

$$c = \frac{7}{12}$$

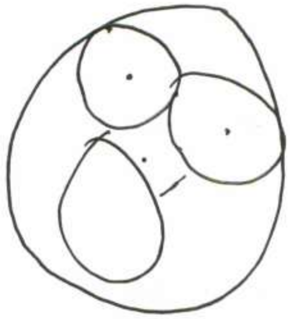
$\frac{1}{3} \cdot \frac{\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{2}}$

$\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}$

$\downarrow$

$\frac{2}{3}$

$3t - 9t^2 + 27t^3 + 81t^4$



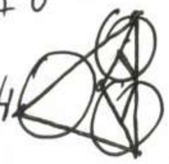
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4},$

$\to 1$

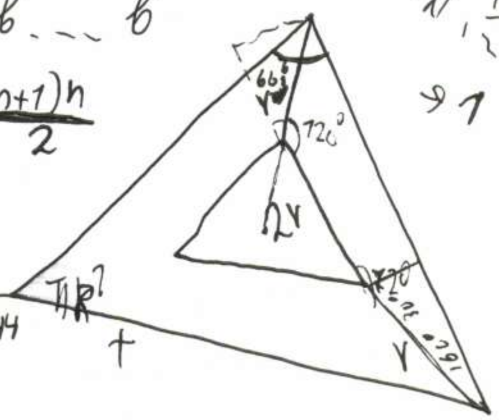
$a_0(1 + b + b^2 + b^3 + b \dots$

$a_0 b + a_0 b^2 + a_0 b^3 + a_0 b^4$



$b^1 \dots b^n$

$b^{\frac{(n+1)n}{2}}$



$a + \sqrt{1+a^2}$

$b + b^2 + b^3 + b^4$

$\pi R^2 - 3 \frac{3}{3+4\sqrt{3}+4}$

πR^2

$a^2 = 1 + a^2$

$a \cdot ($

0

$\pi R^2 (3t - 9t^2 + 27t^3 - 81t^4)$

$2R = \frac{a}{\sin 60^\circ} = 2R = \frac{2a}{\sqrt{3}}$

$R = \frac{a}{\sqrt{3}}$

$b^{(n+1)\frac{n}{2}}$

$\cos 30^\circ$

$(\sqrt{3}+2)r = a$

$(a + \sqrt{1+a^2})(b + \sqrt{1+b^2}) = 1$

$(a^2 + 2a\sqrt{1+a^2} + 1 + a^2)(b^2 + 2b\sqrt{1+b^2} + 1 + b^2) = 1$

$r = \frac{a}{\sqrt{3}+2}$

$\frac{b^n - 1}{a_0}$

$a + \sqrt{1+a^2} = \frac{1}{b + \sqrt{1+b^2}}$

$\frac{-1}{a_0}$

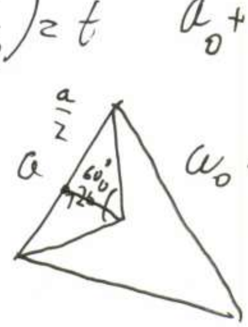
$r = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+2} R$

$ab + a\sqrt{1+b^2} + b\sqrt{1+a^2} + \sqrt{1+a^2}\sqrt{1+b^2} = 1$

$\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+2}\right)^2 = t$

$a_0 + \frac{a_0}{b}$

$ab = 1 - a\sqrt{1+b^2} \pm b\sqrt{1+a^2} \pm (\dots)$



$a_0 \frac{b+1}{b}$

$\frac{b-1}{}$

$\frac{3}{3+4\sqrt{3}+4} = t$

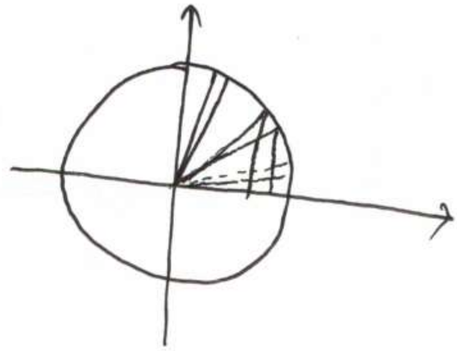
$\frac{a}{2\sin 60^\circ} = \frac{a}{\sqrt{3}}$

$\frac{b^n - 1}{a}$

№7

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$$ Если углы близки, то и синусы близки;

При малом угле $\sin(\alpha) = \alpha$



$\sin(\alpha)$

$$\frac{\sin(\alpha + 0{,}005\alpha)}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha\cos(0{,}005\alpha) + \cos\alpha\sin(0{,}005\alpha)}{\sin\alpha}$$

$\cos(0{,}005\alpha) + \operatorname{ctg}\alpha \sin(0{,}005\alpha)$

$10+16+9+7+16+27+40$

$66+25+23+27$

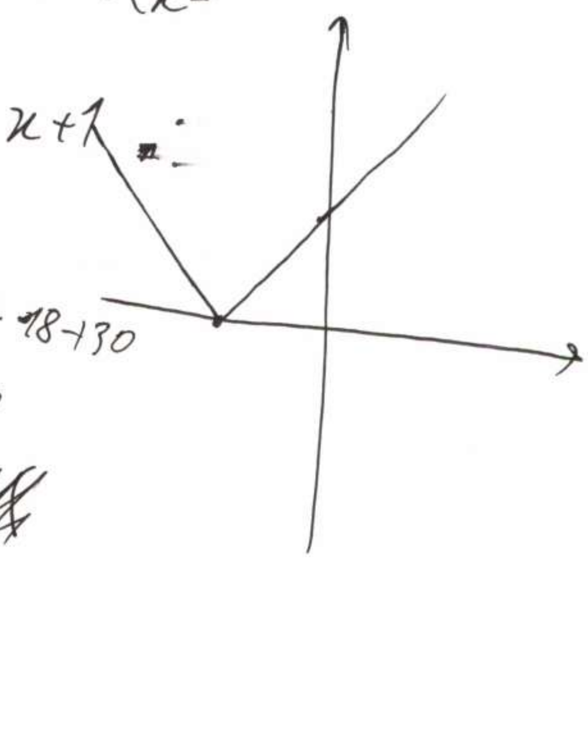
$f(x) = |x+1| + 2|x+2| + 3|x+3|$

$f(-n) = 1|1-n|$

$f(x) = f(x-$

$f(-n) \to f(n-1) =$ для $62+50$ 112

$32+24+26+30$



$6+10+12+12+10+6+8+18+30$

$7+12+15+20+15+12+7+9+10$

$30+20+24+14+19$

$74+\frac{5}{3}$

107

f

$$b=-a$$

$$(a+\sqrt{1+a^2})(\cancel{b}-a+\sqrt{1+a^2})=1$$

$$-a^2 \cancel{+} -a\sqrt{1+a^2}+a\sqrt{1+a^2}+1+a^2=1$$

$$x-\frac{1}{x}-\frac{1}{x-\frac{1}{x}}-\frac{1}{x-\frac{1}{x}-\frac{1}{x-\frac{1}{x}}}=2$$

$$x-\frac{1}{x}\left(x-\frac{1}{x}-\frac{1}{x-\frac{1}{x}}\right)-\frac{1}{x-\frac{1}{x}}\left(x-\frac{1}{x}-\frac{1}{x-\frac{1}{x}}\right)=3$$

$$\left(x-\frac{1}{x}\right)^2-1-1+\left(\frac{1}{x-\frac{1}{x}}\right)^2=3$$

$$\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+\left(\frac{1}{x-\frac{1}{x}}\right)^2=5$$

$$x-\frac{1}{x}=0$$

$$x=\frac{1}{x}$$

$$x\neq 0$$

$$x\neq 1$$

$x-\frac{1}{x}=1$	$x-\frac{1}{x}=-1$
$x^2-x-1=0$	$x^2+x-1=0$
$D=1+4=\cancel{\sqrt{5}}$	$D=1+4$
$x_1=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$	$\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$
$x_2=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

$$t^2+\frac{1}{t^2}$$

$$\frac{t^4+1}{t^2}=5$$

t

$$\left(x-\frac{1}{x}\right)^4+1=5\left(x-\frac{1}{x}\right)^2$$

$$t^4-5t^2+1=0$$

$$D=25-4=21$$

$$t_1^2=\frac{5-\sqrt{21}}{2}$$

$$t_2^2=\frac{5+\sqrt{21}}{2}$$

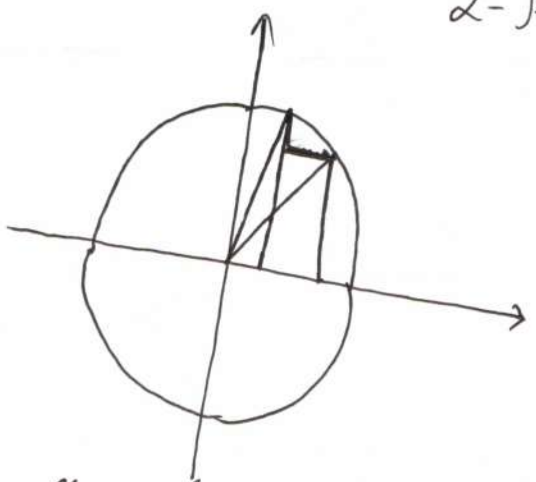
$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$$

α близка к β $\sin\alpha$ близок к β

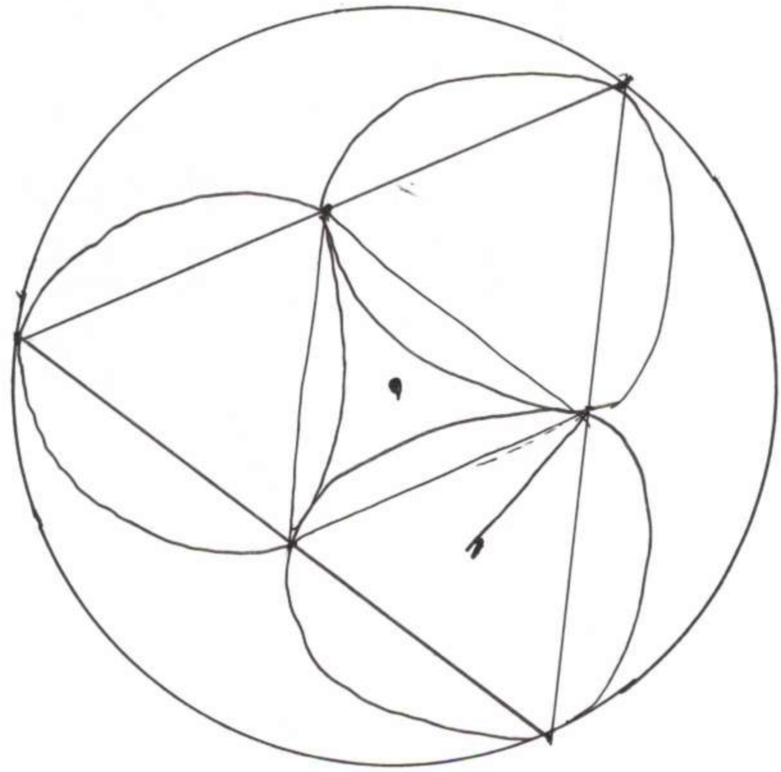
$$\alpha - \sin\alpha > \beta - \sin\beta$$

$$\alpha - \beta$$

$$\sin\alpha - \sin\beta <$$



чем больше α, тем больше



Оценочный бланк олимпиадных заданий по математике

Код участника: 611147

Номер задания		1	2	3	4	5	6	7	8
Полученные баллы	Первый проверяющий	10	10	12	12	2	14	4	0
	Второй проверяющий	10	10	12	12	2	14	4	0
	Итого	10	10	12	12	2	14	4	0
Сумма баллов (оценка)		64							

Члены жюри:

Подпись — Юдовский Т.В. — Фамилия И.О.

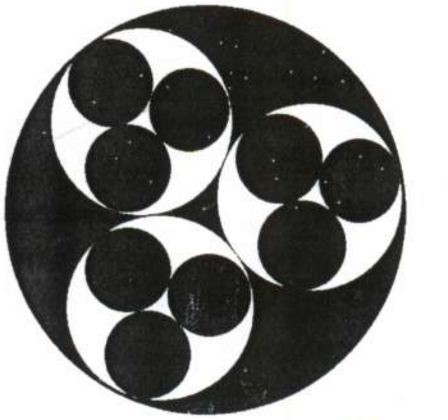
Подпись — Волкова Е.С. — Фамилия И.О.

Подпись — Кочерова А.С. — Фамилия И.О.

6 11147

Задача 5. (12 баллов)

На первом шаге на листе бумаги была изображена единичная окружность и ограниченный ею круг закрашен черной краской. На каждом из последующих шагов для каждой из окружностей, изображенных на предыдущем шаге, рисуются три новые касающихся ее внутренним образом окружности равных радиусов. Эти три окружности касаются друг друга внешним образом. Круги, ограниченные новыми окружностями, закрашиваются белой краской, если номер шага четное число, или черной краской, если номер шага нечетен. На рисунке изображен результат трех шагов. Описанный процесс продолжается до бесконечности. Найдите площадь белой области.



~

Задание 6. (14 баллов)

Действительные числа a и b таковы, что $\left(a+\sqrt{1+a^2}\right)\left(b+\sqrt{1+b^2}\right)=1$. Найдите сумму $a+b$.

+

Задание 7. (14 баллов)

Назовем положительное число a близким сверху к положительному числу b, если a превосходит b, но не больше чем на 0,5%. Докажите, что если в треугольнике радианная мера одного из углов близка сверху к радианной мере другого угла, то найдутся две стороны этого треугольника такие, что длина одной из них близка сверху к длине другой.

Задача 8. (16 баллов)

В алфавите языка альфов три буквы *А*, *Л* и *Ф*. Все слова этого языка можно построить, применяя последовательно следующие правила к любому слову из этого языка:

~~АФ~~ АФ ; АЛ;

(1) поменять порядок букв в слове на противоположный

(2) заменить две последовательные буквы так: *ЛА* → *ФФ*, *АФ* → *ЛЛ*, *ФЛ* → *АА*, *ЛЛ* → *АФ*, *ФФ* → *ЛА* или *АА* → *ФЛ*.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25

Известно, что *ЛЛАФФФАЛАФФФАЛАФФАЛАФАЛЛ* – это слово из языка альфов.

ЛФАЛФАЛФА

Есть ли в языке альфов слово *ЛФАЛФАЛАФЛАФЛАФЛАФЛАФЛАФЛ*? → ~~Это слово получаем~~

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25

1) 7 → Л ; 8 → А ; 10 → Ф ?

2) 9 → Л ; 8 → А ; 8 → Ф

ЛФАЛ → ЛАФЛ → .

ЛЛАФ.

ЛААА → АААЛ → ~~АЛАА~~ ~~АФЛА~~ ← АФЛЛ

→ ЛЛФА → АФФА → АФФА → АЛАА → ААЛА → ФЛЛА → АЛ~~А~~ЛФ

ФГОБУ ВО «Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации»

Всероссийская олимпиада школьников «Миссия выполнима. Твое призвание-финансист!»

ПО МАТЕМАТИКЕ 11 класс

Заключительный (очный) этап 2017/2018 учебный год

6 11147

Код участника

Вариант II

385

55+85+145+100=

55+85+145+100

295+100=

(1+4)+(9+16)+25+(36+49)+(64+81)+100= 395

= 5+25+25+85+145+100=

Задание 1. (10 баллов)

Даны последовательность чисел $x_1, x_2, \ldots$, такая, что $x_1 = 29$ и $x_n = \dfrac{n}{x_{n-1}}$ для всех $n > 1$. На сколько нулей оканчивается число равное произведению $x_1 x_2 \ldots x_{1012}$? +

Задание 2. (10 баллов)

Найдите наименьшее значение функции $f(x) = |x+1| + 2|x+2| + 3|x+3| \ldots + 10|x+10|$. ~ +

Задание 3. (12 баллов)

Сколько различных корней имеет уравнение $f\left(f\left(f(x)\right)\right) = 2$, если $f(x) = x - \dfrac{1}{x}$? +

Задание 4. (12 баллов)

283-91=112 275-150=125

Сотрудники фирмы делятся на трудяг и лентяев. В 2016 году средняя зарплата трудяг превышала в два раза среднюю зарплату лентяев. Повысив свою квалификацию, трудяги в 2017 году стали получать на 50% больше, а зарплата лентяев не изменилась. При этом часть лентяев уволили в конце 2016 года. Средняя зарплата всех сотрудников в 2017 году стала на 20% больше, чем была в 2016 году. Найдите сколько процентов от общего числа сотрудников составляли в 2017 году трудяги, если в 2016 году их было 10%. ~

Чистовик 611147

№1.

$x_n = \frac{n}{x_{n-1}} \Rightarrow x_n \cdot x_{n-1} = \frac{n}{x_{n-1}} \cdot x_{n-1} = n$

Тогда $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_{1012} = 2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 1012$ Так как здесь все четные числа до 1012, то это произведение принимает вид $2^k \cdot 5^m \cdot x$, где $m<k$

а $x \not\vdots 2$ $x \not\vdots 5$ $\Rightarrow$ количество нулей равно m.

1) Чисел делящихся на 5 здесь 101. (10, 20 — 1010)

2) Чисел делящихся на 25 здесь 20 (50, 100 — 1000)

3) Чисел делящихся на 125 здесь 4 (250, 500, 750, 1000)

4) А чисел делящихся на 5^i, где $i>3$ уже нет.

$\Rightarrow m = 101 + 20 + 4 = 125$

Ответ: 125

(Числа дел. только на 5 здесь $101-20=81$ и они добавляют по одному нулю к произв.
На 25 дел. чисел $20-4=16$ и они дают по 2 нуля
А на 125 4 числа и они дают по 3 нуля
$81 + 32 + 12 = 125$)

+

№3

$f(f(f(x))) = 2$; $f(x) = x - \frac{1}{x} \Rightarrow f\left(f\left(x - \frac{1}{x}\right)\right) = f\left(x - \frac{1}{x} - \frac{1}{x - \frac{1}{x}}\right) =$

$= x - \frac{1}{x} - \frac{1}{x - \frac{1}{x}} - \frac{1}{x - \frac{1}{x} - \frac{1}{x - \frac{1}{x}}} = 2$ Пусть $y = x - \frac{1}{x}$ $y \neq 1$ $x \neq 1$

$y - \frac{1}{y} - \frac{1}{y - \frac{1}{y}} = 2$ Пусть $t = y - \frac{1}{y}$; $t - \frac{1}{t} = 2$

$t^2 - 2t - 1 = 0$; $t = 1 \pm \sqrt{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y - \frac{1}{y} = 1 + \sqrt{2} \\ y - \frac{1}{y} = 1 - \sqrt{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y^2 - (1+\sqrt{2})y - 1 = 0 \\ y^2 - (1-\sqrt{2})y - 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 1 + \sqrt{2} \pm \sqrt{7+2\sqrt{2}} \\ y = 1 - \sqrt{2} \pm \sqrt{7-2\sqrt{2}} \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 1 + \sqrt{2} + \sqrt{7+2\sqrt{2}} \\ y = 1 + \sqrt{2} - \sqrt{7+2\sqrt{2}} \\ y = 1 - \sqrt{2} + \sqrt{7-2\sqrt{2}} \\ y = 1 - \sqrt{2} - \sqrt{7-2\sqrt{2}} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - \frac{1}{x} = \_\_\_ \\ x - \frac{1}{x} = \_\_\_ \\ x - \frac{1}{x} = \_\_\_ \\ x - \frac{1}{x} = \_\_\_ \end{array}\right.$

И каждое из этих 4 уравнений имеет 2 корня

$\Rightarrow$ Корней 8

Ответ: 8.

+

№4

Пусть n - кол-во трудяг; $m = 9n$ - кол-во лентяев; x - сред. зарп. лентяев;
y - ~~...~~ количество уволенных лентяев.

Тогда в 2016 средняя зарплата всех равнялась

$$\frac{2xn + xm}{n+m} = \frac{11xn}{10n} = \frac{11}{10}x$$

В 2017 г.

$$\frac{\frac{3}{2}\cdot 2xn + x(m-y)}{x+m-y} = \frac{x(3n+9n-y)}{10n-y} = \frac{6}{5}\cdot\frac{11}{10}x = \frac{33}{25}x$$

(т.к. зарплата лентяев не изменилась, а трудяг увеличилась в $\frac{3}{2}$)

Нам нужно найти $\frac{n}{n+m-y} = \frac{n}{10n-y}$ - сколько проц. от общего числа сотруд. сост. в 2017 году трудяги

$$\frac{x\cdot(12n-y)}{10n-y} = \frac{33}{25}x \Rightarrow 1 + \frac{2n}{10n-y} = \frac{33}{25} \Rightarrow \frac{n}{10n-y} = \frac{33-25}{25\cdot 2} = \frac{8}{50} = 0{,}16$$

Ответ: 16 %

+

№6

$(a+\sqrt{1+a^2})(b+\sqrt{1+b^2}) = 1$ $\qquad a+b-?$

$y = a+\sqrt{1+a^2}$; $y' = 1+\frac{a}{\sqrt{1+a^2}} = \frac{\sqrt{1+a^2}+a}{\sqrt{1+a^2}}$; $\sqrt{1+a^2} = -a \Rightarrow \begin{cases} 1+a^2 = a^2 \\ a<0 \end{cases}$

Не выполняется при любых $a \Rightarrow$ эта функц. монотонно возрастает.

Заметим, что при $a = -b$: $(\sqrt{1+b^2}-b)(\sqrt{1+b^2}+b) = 1+b^2-b^2 = 1$

равенство всегда выполняется при любых b $\Rightarrow a+b = -b+b = 0$

Ответ: 0.

±

№5

Пусть $R_1, R_2, \ldots R_n$ - радиусы кругов которые дорисовывают на каждом шаге. Т.к. они все „рисуются" одинаковым образом, они все составляют геом. прогрессию $R, Rq, Rq^2, \ldots Rq^{n-1}$

Будем считать белую площадь на каждом из шагов.

1) 0 2) $3\pi R_1^2$ 3) $3\pi R_1^2 - 3^2\pi R_2^2$ 4) $3\pi R_1^2 - 3^2\pi R_2^2 + 3^3\pi R_3^2$

В общем виде:

$$S = 3\pi R^2 + 3^2\pi R^2\cdot q + 3^3\pi R^2\cdot q^2 + \ldots 3^n\pi R^2\cdot q^{n-1}, \text{ где } q = -\frac{R_2^2}{R_1^2}$$

$-\frac{1}{3} < q < 0$ $\qquad S = 3\pi R^2(1+3q+(3q)^2+\ldots) = 3\pi R^2\cdot\frac{(3q)^n-1}{3q-1} = 3\pi R^2(3q-1)$

Т.к. бесконечная геом. прогрессия. Итак, q - это отношение квадрата радиуса $\Rightarrow$

самого первого нарисованного круга к единичному радиусу квадрату

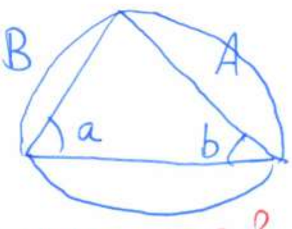
611147

№7

$b < a < 1{,}05 b$

$1 \text{ рад} = \frac{360^\circ}{2\pi}$

$2R = \frac{B}{\sin b} = \frac{A}{\sin a}$



$B = 2R\sin b$; $A = 2R \sin a$

т.к $b < a < 1{,}05 b \Rightarrow B < A < 1{,}05 B$ откуда это?

а значит стороны A и B близки

№2

$f(x) = |x+1| + 2|x+2| + 3|x+3| + \ldots + 10|x+10|$

1) $x > -1$; $f(x) = 55x + 385 > 385 - 55$

2) $x \in (-2;-1]$ $f(x) = 54x + 384 - x - 1 = 53x + 383 > 383 - 106$

3) $x \in (-3;-2]$ $f(x) = 51x + 379 - 2x - 4 = 49x + 375 > 375 - 147$

4) $x \in (-4;-3]$ $f(x) = 46x + 366 - 3x - 9 = 43x + 357 > 357 - 172$

5) $x \in (-5;-4]$ $f(x) = 39x + 341 - 4x - 16 = 35x + 325 > 325 - 175$

6) $x \in (-6;-5]$ $f(x) = 30x + 300 - 5x - 25 = 25x + 275 > 275 - 150$

7) $x \in (-7;-6]$ $f(x) = 19x + 239 - 6x - 36 = 13x + 203 > 203 - 91$

8) $x \in (-8;-7]$ $f(x) = 6x + 154 - 7x - 49 = 105 - x > 105 + 7 \geq 112$

9) $x \in (-9;-8]$ $f(x) = -14x - 23 > 143$

10) $x \in (-10;-9]$ $f(x) = -17x - 18x - 23 - 162 = -35x - 185 > 315 - 185$

11) $x < -10$ $f(x) = -55x - 385 > 550 - 385$

=> ~~Ответ: 1~~ min значение достигается при $k = -7$

$6 + 10 + 12 + 12 + 10 + 6 + 0 + 8 + 18 + 30 = 112$

Ответ: 112

Черновик 611147

$x_n = \frac{n}{x_{n-1}}$; $x_n \cdot x_{n-1} = n$ => $x_1 x_2 \ldots x_{1012} = 2 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 10 \cdot \ldots \cdot 1012$

Т.к. здесь каждое число четное то дел на 5 меньше чем дел на 2

=> 0 будет зависеть от кол-ва 5. А их

10; 20; 30; 40, 50, 60, ... 100, ... 150, ... 200; 250 ...

Ну чисел дел хоть на одну 5 здесь 101.

Чисел дел хоть на 25 здесь 20

На 125 4

А на 625 уже нет => число будет иметь вид $5^{125} \cdot k$ $k \not\vdots 5$

=> Ответ 125 нулей?

№2

$f(x) = |x+1| + 2|x+2| + 3|x+3| + \ldots + 10|x+10| = |y - \frac{9}{2}| \ldots + 2|y-\frac{7}{2}| + 3|y-\frac{5}{2}| + 4|y-\frac{3}{2}| + 5|y-\frac{1}{2}| + 6|y+\frac{1}{2}| + 7|y+\frac{3}{2}| \ldots 10|y+\frac{9}{2}|$

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

$\ldots 9 + 2 \cdot 8 + 3 \cdot 7 + \ldots + 9 = 18 + 16 + 21 +$

$-7x$ $\quad -18x + 16x = -5x$ $\quad -35$

$\ldots - 16 - 5x - 25 - 6x - 36 + 8x + 64 + 9x + 81 \ldots + 100 =$

№3

$f(f(f(x))) = 2$; $f(x) = x - \frac{1}{x}$; $f(f(f(x))) = f(f(x - \frac{1}{x})) = f(x - \frac{1}{x} - \frac{1}{x - \frac{1}{x}}) =$

$f(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{x}$

$x - \frac{1}{x} = 2$

$x^2 - 2x - 1 = 0$

$\frac{D}{4} = \sqrt{2}$;

$x = 1 \pm \sqrt{2}$

Пусть $x - \frac{1}{x} = y$; $f(f(f(x))) = y - \frac{1}{y} - \frac{1}{y - \frac{1}{y}} = 2$

$t = y - \frac{1}{y}$

$t - \frac{1}{t} = 2$; $t^2 - 2t - 1 = 0$ $\quad t = 1 \pm \sqrt{2}$; $\quad y - \frac{1}{y} = 1 \pm \sqrt{2}$

№3

$\cancel{z = x - \frac{1}{x}}$ $f(f(x-\frac{1}{x})) = f(x - \frac{1}{x} - \frac{1}{x-\frac{1}{x}}) = x - \frac{1}{x} - \frac{1}{x-\frac{1}{x}} -$

$- \frac{1}{x - \frac{1}{x} - \frac{1}{x-\frac{1}{x}}} = y - \frac{1}{y} - \frac{1}{y - \frac{1}{y}} = t - \frac{1}{t} = 2$ $y \neq 1$

$t^2 - 2t - 1 = 0$; $t = 1 \pm \sqrt{2}$; $\left[\begin{array}{l} y - \frac{1}{y} = 1 + \sqrt{2} \\ y - \frac{1}{y} = 1 - \sqrt{2} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y^2 - y - \sqrt{2}y - 1 = 0 \\ y^2 - y + \sqrt{2}y - 1 = 0 \end{array}\right.$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} D = (1+\sqrt{2})^2 + 4 = 7 + 2\sqrt{2} \\ D = 7 - 2\sqrt{2} \end{array}\right. \Rightarrow$ $\begin{array}{l} y = \frac{1+\sqrt{2} \pm \sqrt{7+2\sqrt{2}}}{2} \\ y = \frac{1 - \sqrt{2} \pm \sqrt{7-2\sqrt{2}}}{2} \end{array} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x - \frac{1}{x} = \frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{7+2\sqrt{2}}}{2} \\ x - \frac{1}{x} = \_\_\_ \\ x - \frac{1}{x} = \_\_\_ \\ x - \frac{1}{x} = \_\_\_ \end{array}\right.$

По идее 8 корней

Ответ: 8

№4

$\cancel{T \quad \Lambda}$ $\Rightarrow$ $T = \Lambda$; $4a$; $4b$ ~~$a \cdot T + b \cdot \Lambda =$~~

2016 г. $t_1\ t_2\ t_3 \_\_\_ t_n$ и $l_1\ l_2\ l_3 \_\_\_ l_m$ $\frac{n}{m+n} = \frac{1}{10}$, $m = 9n$

$\frac{t_1 + t_2 \_\_\_ + t_n}{n} = 2 \frac{l_1 + \_\_\_ l_m}{m}$ (1)

2017 г. $\frac{3}{2} \cdot \frac{t_1 + t_2 + \_\_\_ + t_n}{n}$; Зарплата трудяг ; $\frac{l_1 + \_\_\_ + l_x}{x}$ Зарплата лент.

$\frac{\frac{3}{2} \cdot (t_1 + t_2 + \_\_\_ + t_n) + l_1 + \_\_\_ + l_x}{n + x} = \frac{6}{5} \cdot \left(\frac{t_1 + \_\_\_ + t_n + l_1 + \_\_\_ + l_m}{n+m}\right)$

Из (1) $\cancel{\frac{t_1 + \_\_\_ t_n}{n} = \frac{2}{9n}(l_1 + \_\_\_ l_m)}$;

$\frac{t_1 + t_2 + \_\_\_ + t_n}{n} = 2 \frac{l_1 + \_\_\_ l_m}{9n}$; $t_1 + \_\_\_ + t_n = \frac{2}{9}(l_1 + \_\_\_ + l_m)$

$\frac{\frac{11}{9}(l_1 + \_\_\_ l_m)}{10n} \cdot \frac{6}{5} = \frac{11}{75}(l_1 + \_\_\_ + l_m) = \frac{4}{3}(l_1 + \_\_\_ + l_m) - \frac{l_{x+1} + \_\_\_ l_m}{n+x}$

611147

$$\frac{11}{75n}(l_1+\_\_+l_m)=\frac{\frac{4}{3}(l_1+\_\_+l_m)-(l_{x+1}\_\_l_m)}{n+x}$$

$\frac{n}{n+x}$ - ?

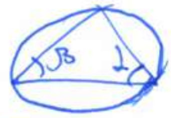
$$\frac{11}{75n}S=\frac{\frac{4}{3}S-(l_{x+1}+\_\_+l_m)}{n+x}$$

№2

№7

$a>b$; $a<b\cdot1{,}05$

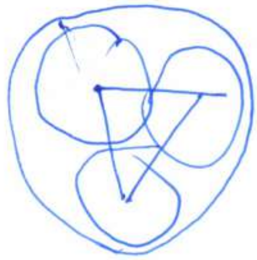
$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\gamma}$



$\sqrt{1+a^2}+a \Rightarrow 0$

№5

$S=\pi R^2$;



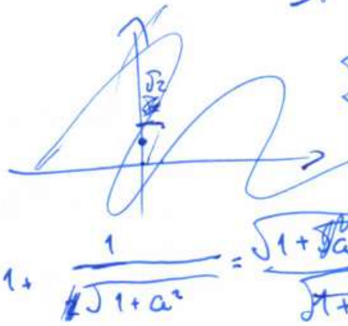
$a>\sqrt{1+a^2}$

№6

$$(a+\sqrt{1+a^2})(b+\sqrt{1+b^2})=1 \qquad a+b-?$$

$$a+\sqrt{1+a^2}=\frac{1}{b+\sqrt{1+b^2}}$$

$\downarrow$



$\sqrt{1+a^2}+a$

~~Это монотонно возрастает~~

$$y'=1+\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}=\frac{\sqrt{1+a^2}+1}{\sqrt{1+a^2}}$$ Монотонно возр.

При $a=-b$ $\quad(\sqrt{1+b^2}-b)(\sqrt{1+b^2}+b)=1+b^2-b^2=1$ ч.т.д

$\Rightarrow$ $a+b=0$

№8

А, Л, Ф $\qquad$ 12 → 00 $\qquad$ 20 → 11 $\qquad$ 01 → 22

ЛА = ФФ ; АФ = ЛЛ ; ФЛ = АА

$|y-\frac{9}{2}| + 2|y-\frac{7}{2}| + \_\_\_ 5|y-\frac{1}{2}| + 6|y+\frac{1}{2}| + \_\_\_ + 10|y+\frac{9}{2}|$

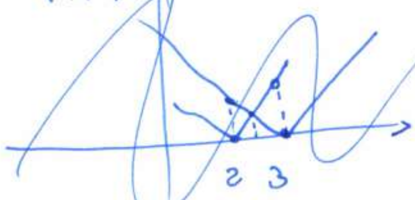
$\left(10|y+\frac{9}{2}| + |y-\frac{9}{2}|\right) + \left(9|y+\frac{7}{2}| + 2|y-\frac{7}{2}|\right) + \_\_\_ + (6|y+\frac{1}{2}| + 5|y-\frac{1}{2}|)$

$|x-2| + |x-3| = 1$? ФФАЛ ЛААЛ

ФФФФФ =>

~~1+4+9+16+25+~~ ЛАФФ

~~1+3+24~~



На $(y > \frac{9}{2})$ это ЛФАЛ-? $10y + 10y + 10y + \_\_\_ =$

~~На $\frac{9}{2} > y > \frac{7}{2}$~~

~~На $\frac{9}{2} > y > \frac{7}{2}$~~ ~~$11y + \_\_\_ = 55y > \frac{9}{2} \cdot 55$~~

~~$(9y + \frac{18}{2}) + 11y + \_\_\_ =$~~

~~$= 44y + 9y + \frac{18}{2} > \frac{18}{2} + \frac{53 \cdot 7}{2}$~~

~~На $\frac{7}{2} > y > \frac{5}{2}$; $(9y + \frac{18}{2}) + 7y +$~~

~~На $x > 10$~~

$55x +$

На $x > -1$ $f(x) = x + 2x + 3x + \_\_\_ + 10x + 1 + 2^2 + 3^2 + \_\_\_ + 100$

На $-1 > x > -2$ $f(x) = -x - 1 + \_\_\_$

На $-2 > x > -3$ $f(x) = -x - 1 - 2x - 2 + \_\_\_$

На ~~$x < -10$~~ $x = 10$

$- x - 2x - 3x - 4x - 5x - 6x - \_\_\_$

$1+4+9+16+25+36+49+64+81+100$ $-45x - 1 - 4 - 9 - 16 - \_\_\_ - 81 =$

$55 + 85 + 145 + 100 = 390$ $= 450 - 1 - 4 - \_\_\_ - 81$?

260 $550 - 390$? $-55 + 1 + 4 + \_\_\_ 81 + 100$

$390 - 55$?

При $x = -10$

3

$450 - 290 = 260$

01114+

30 + 25 + 36 + 49

55 + 85 = 140

24 + 81

105

$(1+4+9+16+25+36+49)+(64+81+100)$

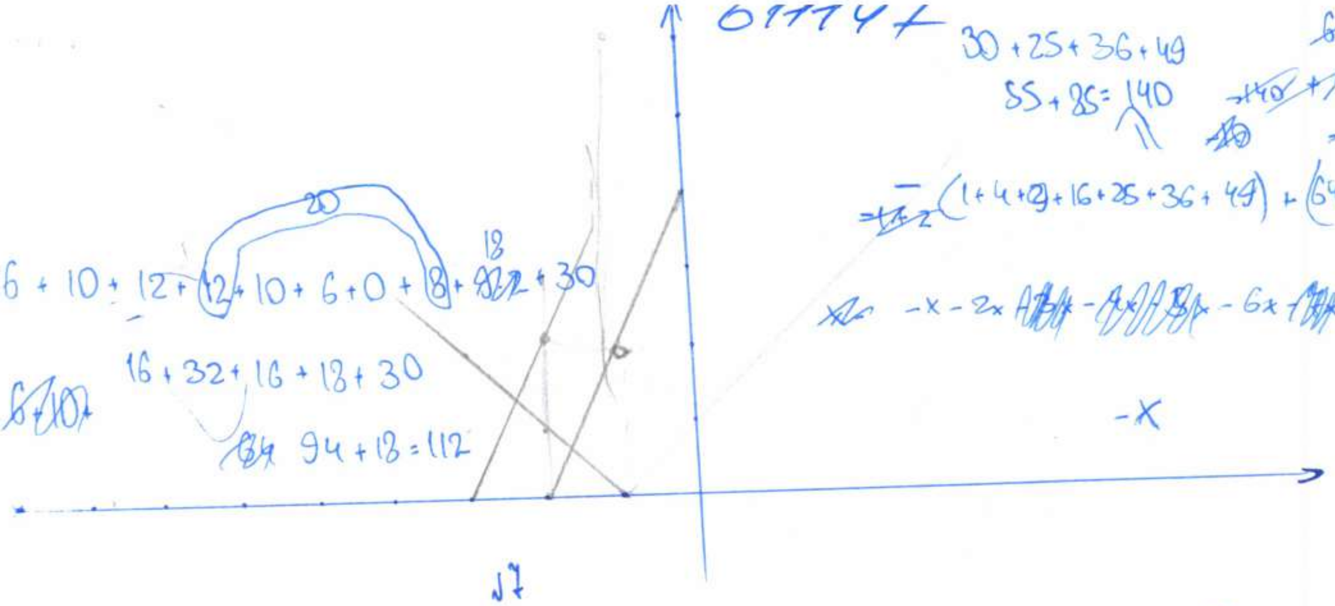
$-x-2x \ldots -6x \ldots +8x$

$-x$

$6+10+12+\underbrace{12+10+6+0+8}_{20}+\overset{18}{\cancel{8}}+30$

$16+32+16+18+30$

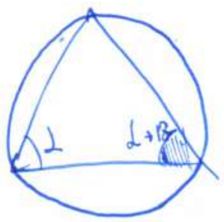
$94+18=112$



№7

$b < a < b\cdot 1{,}05$;

$\frac{A}{\sin\alpha}=2R$



$Рад=\frac{360^\circ}{2\pi}$;

То

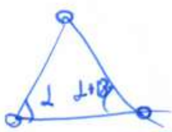
$A=2R\sin\alpha$ $\quad B=2R\sin\beta$

$213-49=$
$=214-50=164$

$\beta<\alpha<\beta\cdot 1{,}05 \Rightarrow \sin\alpha \approx \sin\beta$

$360^\circ\cdot 0{,}05=18^\circ$

164
$-49=115$



№4

$x\in[-9;-10]$;

$2xn+xm=\frac{x(11n)}{10n}$ Всего $\Rightarrow \frac{x\,11}{10}$ ср зарп.

$3xn+x(m-y)=\frac{x(3n+9n-y)}{10n-y}=\frac{6}{5}\cdot\frac{11}{10}x=\frac{33}{25}x$

$\frac{12n-y}{10n-y}=\frac{33}{25}$

ЛАФ $\Rightarrow$ ЛФАЛ

ФАЛ $\Rightarrow$ ФАЛ ЛААФ $\Rightarrow$ ФЛАЛ

$\frac{n}{10n-y}$?

$1+\frac{2n}{10n-y}=\frac{33}{25}$

ЛАФ

$\frac{n}{10n-y}=\frac{4}{25}=\frac{16}{100}$?

ФАЛ ФАЛ

АФЛ Нельзя поменять

16% ?

ЛАЛ

АФЛ ЛАФ

ЛАФ $\to$ ФАЛ

слово ЛАФ

Ни на что нельзя заменить

№4

$\frac{S(t)}{n} = 2\,\frac{S(l)}{9n}$; $m = 9n$; $\frac{3}{2}\frac{S(t)}{n}$; $\frac{S(l) - S(x)}{9n - x}$

$\frac{3}{2}\;\frac{\frac{3}{2}S(t) + S(l) - S(x)}{10n - x} = \frac{6}{5}\,\frac{St + Sl}{10n}$; $\frac{(\frac{3}{2}St + Sl - Sx)50n - 6(St + Sl)(10n - x)}{5\cdot(10n - x)\,10n} =$

$75\,St_n + 50\,Sl_n - 50\,S_x n - 60_n St - 300_n Sl + 6x\,St + 30x\,Sl =$

$15\,St_n - 250\,Sl_n - 50\,S_x n$

$17\cdot 8 - 13 = 80 + 56 - 13 =$; $35\cdot 5 = 175$; $= 80 + 43 = 123$

$16\cdot 8 = 80 + 48 = 128$

№8

$35\cdot 9 = 270 + 45 = 315$

$12 \to 00$; $20 \to 11$; $01 \to 22$

1120000 212000 21200 2120 211

Меняет остаток на 3 на +1

1021021 20120 120 120 12012 01

Значит было совершено 3·n действий раз ниче не поменялось

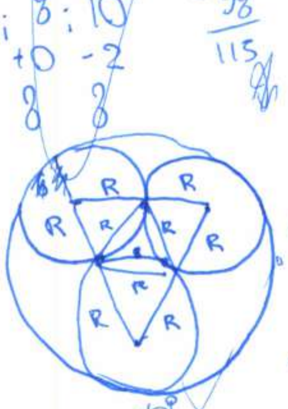
Л	А	Ф
7	8	10
+2	+0	−2
9	8	8

$213 - 98 = 115$

№5

$34 \cdot 9 = 270 + 36 = 306$

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \_\_\_ = \frac{(2^{-n} - 1)}{-\frac{1}{2}} = \frac{-1}{-\frac{1}{2}} =$



$- S = \pi R_n^2 - 3\pi R_{n+1}^2$

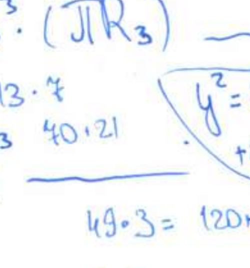
$+ S = \pi R_{n+1} - 3\pi R_{n+2}^2$

$S = 0\,S_{\text{ц}} = \pi R_1^2 - 3\pi R^2$

$\frac{R_n}{R_{n-1}} = \text{const}$

$x^2 = 2R^2 - 2R\cos 150$

$2R^2(1 + \frac{\sqrt{3}}{2})$



$10|x + 10| + |x + 1| =$

$115 + 7 = 122$

$180 - \ldots = 13\ldots$

1) $O \Rightarrow 2) + 3\pi R_1^2$ 3) $- 3^2\cdot(\pi R_2^2)$ 4) $+ 3^3\cdot(\pi R_3^2)$ —

$13\cdot 7 = 40 + 21$

$y^2 = x^2 + R^2 + \sqrt{2}\,xR$

$3\pi R^2 + 3^2\pi R^2\cdot q^4 + 3^3\pi R^2\cdot q^2 + 3^4\pi R^2\cdot q^3$ —

$-1 < q < 0$

$49\cdot 3 = 120 + 27$

$26\cdot 6 = 156$

Это геом прогрессия

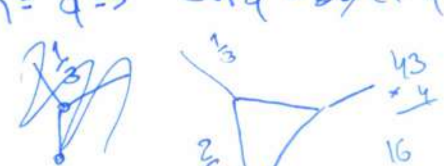
$S = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}$; $3\pi R^2(1 + 3q + 3^2q^2 + \_\_\_) =$

$= 3\pi R^2\cdot\frac{1\cdot((3q)^n - 1)}{3q - 1} = 3\pi R^2\cdot(1 - q)$ $16\cdot 9$ $R = q \Rightarrow 3\pi q^2(1 - q)$

$36\cdot 5 = 180$; $7\cdot 14 =$

$43\cdot 4$

43×4 ; 16



$3\pi R^2 + 3^2\pi R^2\cdot q$; 70

$367 - 16 = 351$

$285 - 36$; $165 - 40$

$\frac{(3q)^n - 1}{3q - 1}$

$115 - 128 = -13$

$213 - 49$; $214 - 126$

$x = -4.$ $-x - 2x - 3x - 4x - 5x - 6x$ | $-7x + 8x + 9x + 1$

Оценочный бланк олимпиадных заданий по математике

Код участника: 613118

Номер задания		1	2	3	4	5	6	7	8
Полученные баллы	Первый проверяющий	10	10	2	12	6	14	0	4
	Второй проверяющий	10	10	6	12	2	14	4	4
	Итого	10	10	6	12	2	14	4	4
Сумма баллов (оценка)		62							

Члены жюри:

Подпись — Волкова Е.С.
Фамилия И.О.

Подпись — Лозовский Т/В
Фамилия И.О.

Подпись — Кочерова А.С.
Фамилия И.О.

Всероссийская олимпиада школьников «Миссия выполнима. Твое призвание-финансист!»

ПО МАТЕМАТИКЕ 11 класс

**Заключительный (очный) этап
2017/2018 учебный год**

613118

Код участника

Вариант I

Задание 1. (10 баллов)

Даны последовательность чисел $x_1, x_2, \ldots$, такая, что $x_1 = 79$ и $x_n = \dfrac{n}{x_{n-1}}$ для всех $n > 1$. На сколько нулей оканчивается число равное произведению $x_1 x_2 \ldots x_{2018}$?

Задание 2. (10 баллов)

Найдите наименьшее значение функции $f(x) = |x| + 2|x-1| + 3|x-2| \ldots + 11|x-10|$

Задание 3. (12 баллов)

Сколько различных корней имеет уравнение $f\left(f\left(f(x)\right)\right) = 1$, если $f(x) = x - \dfrac{2}{x}$?

Задание 4. (12 баллов)

Сотрудники фирмы делятся на трудяг и лентяев. В 2016 году средняя зарплата трудяг превышала в два раза среднюю зарплату лентяев. Повысив свою квалификацию, трудяги в 2017 году стали получать на 50% больше, а зарплата лентяев не изменилась. При этом часть лентяев уволили в конце 2016 года. Средняя зарплата всех сотрудников в 2017 году стала на 20% больше, чем была в 2016 году. Найдите сколько процентов от общего числа сотрудников составляли в 2017 году трудяги, если в 2016 году их было 10%.

Чистовик, первый. 613118

Задание 1.

$x_1 = 79$
$x_n = \frac{n}{x_{n-1}}$

• Заметим, что $x_{n-1} \cdot x_n = \frac{\cancel{x_{n-1}} \cdot n}{\cancel{x_{n-1}}} = n$, т.е. произведение двух последовательных чисел x_{n-1} и x_n дает n.

• $x_1 = 79$
$x_2 = \frac{n}{x_{n-1}} = \frac{2}{x_1} = \frac{2}{79}$ $\quad 79 \cdot \frac{2}{79} = \boxed{2 = x_1 \cdot x_2}$ (проверка правила)

....
$4 = x_3 \cdot x_4$
$6 = x_5 \cdot x_6$
...

Разобьем ряд множителей $x_1, x_2, x_3 \dots, x_{2018}$ на пары x_1 и x_2, x_3 и x_4, ..., x_{2017} и x_{2018}.
Произведение каждой пары множителей x_{n-1} и x_n будет равно n.

Тогда: $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \dots \cdot x_{2018} = \underbrace{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2018}_{\frac{2018}{2} = 1009 \text{ множителей}}$.

Известно, что кол-во нулей в конце числа определяется кол-вом 2 и 5 в ряде множителей того или иного числа т.е.
4 кол-во нулей в конце $\Leftarrow$ $2^{4} \cdot 5^{4} \cdot \underbrace{\dots}_{\not\vdots 10}$ вид изначального числа с 4 нулями
(Например, $200 = 2^{2} \cdot 5^{2} \cdot 2$, в конце 2 нуля, и т.п.)

Т.е. нам необходимо узнать, какие степень двойки и степень пятерки получаются при произведении $(2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2018)$.
$2 \cdot 1 \quad 2 \cdot 2 \quad 2 \cdot 3 \quad 2 \cdot 1009$

$2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2018 = \underline{2 \cdot 1} \cdot \underline{2 \cdot 2} \cdot \underline{2 \cdot 3} \cdot \dots \cdot \underline{2 \cdot 1009} = \underset{\vdots 5}{2^{1009}} \cdot \underbrace{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 1009}_{\text{Узнаем, сколько степеней пятерки в этом произведении}}$

$1 \cdot \dots \cdot 100$)
5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50
1 1 1 1 2 1 1 1 1 2
55, 60, 65, 70, 75, 80, 85, 90, 95, 100
1 1 1 1 2 1 1 1 1 2
24

$5 \cdot 10 \cdot 15 \cdot 20 \cdot 25 \cdot \dots \cdot 1005$

105, 110, 115, 120, 125, 130, 135, 140, 145, 150
1 1 1 1 3 1 1 1 1 2
155, 160, 165, 170, 175, 180, 185, 190, 195, 200.
1 1 1 1 2 1 1 1 1 2
25

см. далее

205, 210, 215, 220, 225, 230, 235, 240, 245, 250
1 1 1 1 2 1 1 1 1 3
255, 260, 265, 270, 275, 280, 285, 290, 295, 300. 25
1 1 1 1 2 1 1 1 1 2

305, 310, 315, 320, 325, 330, 335, 340, 345, 350
1 1 1 1 2 1 1 1 1 2
355, 360, 365, 370, 375, 380, 385, 390, 395, 400 25
1 1 1 1 3 1 1 1 1 2

405, 410, 415, ... 500 25
3

505, 510, 515, 520, 525, 530, 535, 540, 545, 550,
1 1 1 1 2 1 1 1 1 2
555, 560, 565, 570, 575, 580, 585, 590, 595, 600. 24
1 1 1 1 2 1 1 1 1 2

605, 610, 615, 620, 625, 630, 635, 640, 645, 650,
1 1 1 1 4 1 1 1 1 2 26
655, 660, 665, 670, 675, 680, 685, 690, 695, 700.
1 1 1 1 2 1 1 1 1 2

705, 710, 715, 720, 725, 730, 735, 740, 745, 750
1 1 1 1 2 1 1 1 1 3 25
755, 760, 765, 770, 775, 780, 785, 790, 795, 800
1 1 1 1 2 1 1 1 1 2

805, 810, 815, 820, 825, 830, 835, 840, 845, 850,
1 1 1 1 2 1 1 1 1 2 25
855, 860, 865, 870, 875, 880, 885, 890, 895, 900
1 1 1 1 3 1 1 1 1 2

905, 910, 915, 920, 925, 930, 935, 940, 945, 950
1 1 1 1 2 1 1 1 1 2 26
955, 960, 965, 970, 975, 980, 985, 990, 995, 1000, | 1005.
1 1 1 1 2 1 1 1 1 3 | 1

$24 + 25 + 25 + 25 + 25 + 24 + 26 + 25 + 25 + 26 = 50 \cdot 5 = 250$, т.е. см. далее

$2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot 2018 = (5^{250}) \cdot 2^{1009} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \underline{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 11 \cdot \ldots \cdot 1009}$,

613110

$\underbrace{250}_{\text{степеней пятерки}} < \underbrace{1009+}_{\text{степеней двойки}} \rightarrow$ 250 раз в произведении есть перемножение 2 и 5,

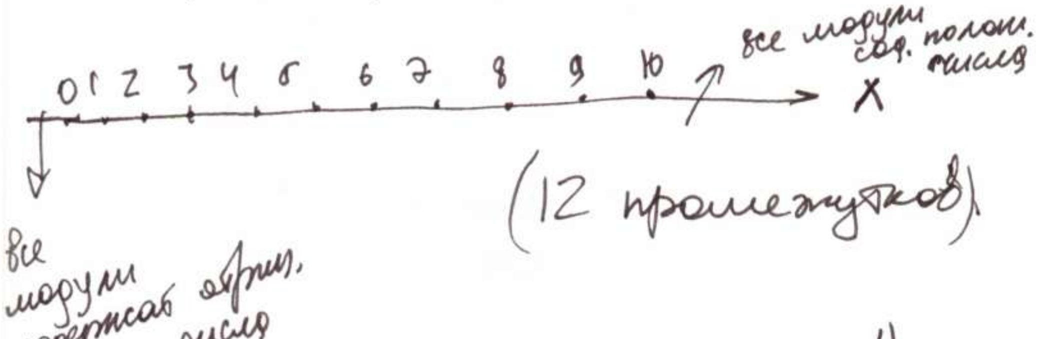
т.е. 250 десяток в произведении,

т.е. 250 нулей в конце.

Ответ: на 250 нулей оканчивается это число.

Задание №2

$$f(x)=|x|+2|x-1|+3|x-2|+4|x-3|+5|x-4|+6|x-5|+7|x-6|+8|x-7|+9|x-8|+10|x-9|+11|x-10|.$$



(12 промежутков)

Рассмотрим крайние промежутки: 1) $x \le 0$.

$$f(x)=-x+2-2x+3\cdot 2-3x+4\cdot 3-4x+\ldots 11\cdot 10-10x=$$

$$=2\cdot 1+3\cdot 2+4\cdot 3+\ldots+11\cdot 10-(x+2x+3x+\ldots+11x)=$$

$$=2+6+12+20+30+42+56+72+90+110-\left(\frac{1+11}{2}\cdot 11\right)x=$$

$$=440-66x,\ x\le 0.$$

(арифм. прогр-я)

Минимум при $x=0$, $f(x)=\underline{440}$

2) $x \ge 10$.

$f(x)=66x-440$. Минимум при $x=10$: $f(x)=660-440=\underline{220}$.

(все знаки меняются относительно первого случая)

3) $9 \le x < 10$ (Из суммы в промежутке $x \ge 10$ мы просто вычитаем посл. слагаем и прибавляем его с инвертированными знаками $\Rightarrow$ вычитаем дважды, будет то же самое)

$$66x-440-11x+110-11x+110=$$

$$=44x-220,\ x\ge 9.$$ Минимум при $x=9$, $f(x)=396-220=\underline{176}$

4) $8 \le x < 9$

$$44x-220-10x+90-10x+90=24x-40.$$

Минимум при $x=8$, $f(x)=24\cdot 8-40=\underline{152}$

5) $7 \le x < 8$

$$24x-40-9x+72-9x+72=6x-40+144=6x+104.$$ Минимум при $x=7$ $f(x)=6\cdot 7+104=\underline{146}$

6) $6 \le x < 7$

$6x+104-8x-8x+56+56=-10x+112+104=216-10x$

Мин. при $x \to 7$, $216-70=$
$=\underline{146}$

7) $5 < x \le 6$

$216-10x-7x-7x+42+42=-24x+216+84=-24x+300.$

Мин. при $x \to 6$, $-24\cdot 6+300=$
$=\underline{156}$

8) $4 \le x \le 5$

$-24x+300-6x-6x+30+30=-36x+360.$ Мин. при $x \to 5$

$f(x)=\underline{180}$

9) $3 \le x < 4$

$-36x+360-5x-5x+20+20=-46x+400.$ Мин. при $x \to 4$,

$f(x)=\underline{216}.$

10) $2 \le x < 3$

$-46x+400-4x-4x+12+12=-54x+424.$ Мин. при $x \to 3.$

$f(x)=\underline{262}$

11) $1 \le x < 2$

$-54x+424-3x-3x+6+6=-60x+436.$ Мин. при $x \to 2.$

$f(x)=\underline{316}$

12) $0 \le x < 1$

$-60x+436-2x-2x+2+2=-64x+440.$ Мин. при $x \to 1.$

$f(x)=\underline{336}$

13) (уже повторяющийся случай, проверим, сходится ли:)

$-64x+440-x-x+0+0=-66x+440=$ то, с чего и начинали.

Минимум равен $\underline{440}$.

Таким образом все случаи разобраны и

минимум получаем при $x=7$, $f(x)=146$.

$(7+2\cdot 6+3\cdot 5+4\cdot 4+5\cdot 3+6\cdot 2+7\cdot 1+8\cdot 0+9\cdot 1+10\cdot 2+11\cdot 3=$
$=7+12+15+16+15+12+7+9+20+33=146)$

Ответ: $146=f(x)_{\text{наим.}}$

Задание
3. $f(f(f(x)))=1$ 613118

$f(x)=x-\frac{2}{x}$

$f(f(x))=f\left(x-\frac{2}{x}\right)=x-\frac{2}{x}-\frac{2}{x-\frac{2}{x}}=\frac{x^2-2}{x}-\frac{2x}{x^2-2}$ Не проверить это.

$f(f(f(x)))=f\left(\frac{x^2-2}{x}-\frac{2x}{x^2-2}\right)=\frac{x^2-2}{x}-\frac{2x}{x^2-2}-\frac{2}{\frac{x^2-2}{x}-\frac{2x}{x^2-2}}=$

$=\frac{(x^2-2)^2-2x^2}{(x^2-2)x}-\frac{2}{\frac{(x^2-2)^2-2x^2}{(x^2-2)x}}=-\frac{2(x^2-2)x}{(x^2-2)^2-2x^2}+\frac{(x^2-2)^2-2x^2}{(x^2-2)x}=1$

Обозначим $\frac{(x^2-2)x}{(x^2-2)^2-2x^2}=a$. Тогда $\frac{(x^2-2)^2-2x^2}{(x^2-2)x}=\frac{1}{a}$.

$-2\cdot a+\frac{1}{a}=1$

$2a+1-\frac{1}{a}=0 \quad |\cdot a$

$2a^2+1-a=0$

$D=1-1\cdot4\cdot2$

Вычисл. ошибка

Переделала задание в конце работы заново.

Задание
4.

а человек всего было на фирме (изначально)

	Трудяги, ср. з/п	Лентяи, ср. з/п
2016	$2x$ (руб) 0,1a человек	X (руб) a−0,1a человек
2017	$2x\cdot1,5=3x$	X a−0,1a−8 человек, где 8 − уволен

По условию задачи, ср. з/п всех сотрудников в 2017 году стало на 20% больше чем было в 2016 году.

1) $\frac{2x\cdot0,1a+x\cdot0,9a}{a}=\frac{0,2ax+0,9ax}{a}=0,2x+0,9x=1,1x$ − ср. з/п в 2016 году.

2) $1,1x\cdot1,2=1,32x$ − ср. з/п в 2017 году

$\times\frac{12}{11}$, $+\frac{12}{12}$, 132

3) $\frac{3x\cdot0,1a+X\cdot(a-0,1a-8)}{(a-8)}=1,32x$

всего на фирме осталось в 2017 г.

$\frac{0,3ax+0,9ax-8x}{(a-8)}=1,32x \Leftrightarrow \frac{1,2a-8}{a-8}=1,32.$ $1,2a-8=1,32a-1,328$

$0,328=0,12a$

$328=12a$

$168=6a$

$88=3a$ $8=\frac{3}{8}a.$

Тогда лентяев в 2017 г. работало: $a-0,1a-\frac{3}{8}a=\frac{9}{10}a-\frac{3}{8}a=\frac{42}{80}a=\frac{21}{40}a.$

см. далее

$\frac{1}{10}a + \frac{21}{40}a = \frac{25}{40}a$ – всего работников.

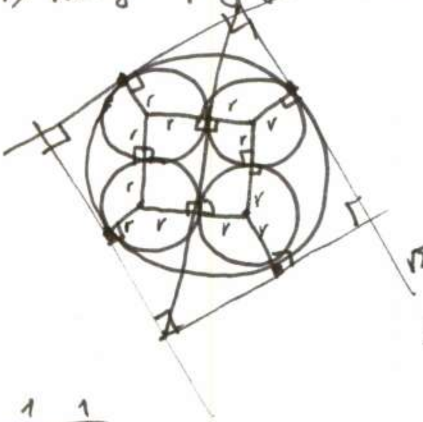
$\frac{1}{10}a \Big/ \frac{25}{40}a = \frac{1\cdot 40}{10\cdot 25} = \frac{40}{250} = \frac{4}{25} = 16\%$ от общего числа сотрудников.

+

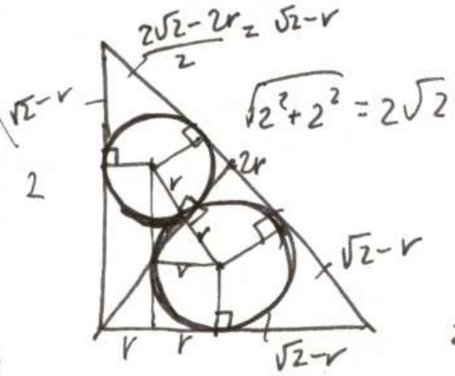
Ответ: 16%.

Задание 5

1) Найдём радиусы окружностей после 1го шага. (когда их 4 в одной)



! [Радиус, опущенный в точку касания, перпендикулярен этой касательной.

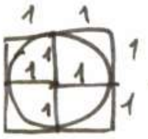


$\sqrt{2^2+2^2} = 2\sqrt{2}$

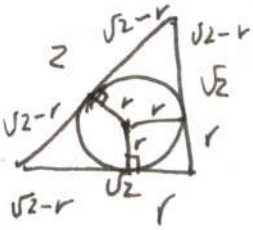
$\frac{2\sqrt{2}-2r}{2} = \sqrt{2}-r$

$\boxed{\pi = S_{\text{первой окружности}},\ \text{т.к. её } R = 1.}$

Отрезки касательных из одной точки к окружности равны



→ квадрат 2x2 описанный вокруг изначальной окружности



$(2\sqrt{2}-2r)^2 = 4$

$8 + 4r^2 - 2\sqrt{2}\cdot 2r\cdot 2 = 4$

$4r^2 + 8 - 8\sqrt{2}r - 4 = 0$

$4r^2 - 8\sqrt{2}r + 4 = 0$

$D = 64\cdot 2 - 4\cdot 4\cdot 4 = 64 = 8^2$

$r = \frac{8\sqrt{2}-8}{2\cdot 4} = \boxed{\sqrt{2}-1}$

$S_{\text{окр}} = \pi R^2,$

$S = \pi\cdot(\sqrt{2}-1)^2 = \pi(2+1-2\sqrt{2})$

$\pi\cdot 1^2 - 4\cdot\pi\cdot(3-2\sqrt{2}) = \pi - 4\pi\cdot 3 + 4\pi\cdot 2\sqrt{2} = 8\pi\sqrt{2} - 11\pi$ – площадь 4х белых окружностей.

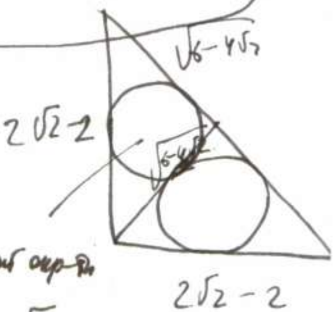
Теперь нам необходимо найти площадь 16 мелких чёрных окружностей, вычесть это число из площади 4х белых и мы получим остаток белой площади. Потом прибавим площади 64 белых и вычтем 256 чёрных, ... и т.д., получится прогрессия.

$(8\pi\sqrt{2} - 11\pi)$ площадь 4х белых.

$8\pi\sqrt{2} - 11\pi - 16\cdot\pi\cdot(\sqrt{6-4\sqrt{2}} + 1 - \sqrt{2})^2 =$

$= 8\pi\sqrt{2} - 11\pi - 16\pi(9 - 6\sqrt{2} + (2-2\sqrt{2})\sqrt{6-4\sqrt{2}}) =$

+ / 2



радиус чёрной окр-ти равен

$\sqrt{6-4\sqrt{2}} + 1 - \sqrt{2}$

Таких окружностей 16.

До конца задачу №5 не довела.

Чистовик второй, продолжение. $\boxed{613118}$

Задание №6

$$(a+\sqrt{1+a^2})(b+\sqrt{1+b^2})=1$$

~~Раскроем скобки.~~

~~$ab+b\sqrt{1+a^2}+a\sqrt{1+b^2}+\sqrt{(1+b^2)(1+a^2)}=1.$~~

Не будем раскрывать скобки, а разделим единицу на один из множителей (ни один из множителей, очевидно, не равен нулю, поэтому делить можем).

$$a+\sqrt{1+a^2}=\frac{1}{b+\sqrt{1+b^2}}$$

$$\Updownarrow$$

$$\sqrt{1+a^2}=\frac{1}{b+\sqrt{1+b^2}}-a$$

$$1+a^2\overset{\Updownarrow}{=}\left(\frac{1}{b+\sqrt{1+b^2}}-a\right)^2$$

$$\Updownarrow$$

$$1+\cancel{a^2}=\frac{1}{(b+\sqrt{1+b^2})^2}+\cancel{a^2}-\frac{2a^{(b+\sqrt{1+b^2}}}{b+\sqrt{1+b^2}}$$ (a^2 ~~сокращает~~ уничтожается)

$$\Updownarrow$$

Остается: $$1=\frac{1-2a(b+\sqrt{1+b^2})}{(b+\sqrt{1+b^2})^2}$$

$$\Updownarrow$$

$$(b+\sqrt{1+b^2})^2=1-2a(b+\sqrt{1+b^2})$$

$$\Updownarrow$$

$$b^2+\cancel{1}+b^2+2\cdot b\cdot\sqrt{1+b^2}=\cancel{1}-2a(b+\sqrt{1+b^2})$$ Единицы уничтожаются

$$\cancel{2}b^2+\cancel{2}b\sqrt{1+b^2}+\cancel{2}a(b+\sqrt{1+b^2})=0$$ Двойки сокращаются.

$$b^2+b\sqrt{1+b^2}+a(b+\sqrt{1+b^2})=0$$

$$b(b+\sqrt{1+b^2})+a(b+\sqrt{1+b^2})=0$$

$$\boxed{(a+b)(b+\sqrt{1+b^2})=0}$$

$$\Downarrow$$

$$\left[\begin{array}{l}a+b=0\\ b+\sqrt{1+b^2}=0\end{array}\right.$$

Если $b+\sqrt{1+b^2}=0$.
$b^2=1+b^2$
$1=0$, а такого не может быть.
Значит, $(b+\sqrt{1+b^2})\neq0$, и $(a+b)=0$.

Ответ: сумма $(a+b)$ равна 0.

Задание №8

Возьмём слово ΛΦΑΛΦΑΛΦΑΛΦΑΛΑΦΛΑΦΛΑΦΛΑΦΛ (то, про которое спрашивается в задаче).

Заменим в нём все сочетания АФ на ΛΛ.

Получится: ΛΦΑΛ ΦΑΛ ΦΑΛ ΦΑΛ ΛΛΛ ΛΛΛ ΛΛΛ ΛΛΛ

Перевернём это слово: ΛΛΛ ΛΛΛ ΛΛΛ ΛΛΛ Λ ΑΦΛ ΑΦΛ ΑΦΛ ΑΦΛ

Снова заменим АФ на ΛΛ:

ΛΛΛ ΛΛΛ ΛΛΛ ΛΛΛ Λ ΛΛΛ ΛΛΛ ΛΛΛ ΛΛΛ

Мы получили слово полностью из букв Λ (25 букв). Если слово, которое нам дано в задаче, как точно присутствующее в кружке, сводится к такому виду, то и слово из букв Λ (т.е. то, про которое спрашивают), также существует. Если же к такому виду его свести нельзя, то слова из букв Λ в кружке нет. ? Почему другого слова нет?

. ΛΛ|ΑΦ|ΑΛ|ΑΦ|ΦΑ|ΛΑ|ΦΦ|ΦΑ|ΛΑ|ΦΦ|ΦΦ|ΑΛΛ. – оно в кружке точно есть.

ΛΛ|ΛΛ|ΑΛ|ΛΛ|ΦΑ|ΛΑ|ΛΑ|ΦΑ|ΛΑ|ΛΑ|ΛΑ|ΑΛΛ

Перевернём слово:

ΛΛ Α ΑΛ ΑΛ ΑΛ ΑΦ ΑΛ ΑΛ ΑΦ ΛΛ ΛΑ ΛΛ ΛΛ

ΛΛ ΦΛΛ ΑΛ ΑΛ ΛΛ ΑΛ ΑΛ ΛΛ ΛΛ ΛΑ ΛΛ ΛΛ

↓ ΦΦ

Перевернём

ΛΛΛ ΛΦΦΛΛ ΛΛ|ΛΑ|ΛΑ|ΛΛ|ΛΑ|ΛΑ|ΛΛΦΛΛ

ΦΦ ΦΦ ΦΦ ΦΦ

+

ΛΛΛΛΦΦ ΛΛΛΛ ΦΦΦΦ ΛΛ ΦΦΦΦ ΛΛΦΛΛ Такое слово в кружке есть. (14 букв Λ и 11 букв Φ)

Из такого слова мы не сможем сделать слово из одних лишь букв Λ. Из условия видно, что буквы Φ не могут заменяться на одни Λ, т.к. соотношения прямого (ΦΦ → ΛΛ) не существует, а путём косвенного (через другие буквы) перехода так же не получится.

почему не получится?

(Например: ΦΦΦΦ → ΛΑΦΦ → ΛΛΛΦ или ΑΑΛΛ. И сколько бы мы не

выйдем опять на А   выйдем на Φ

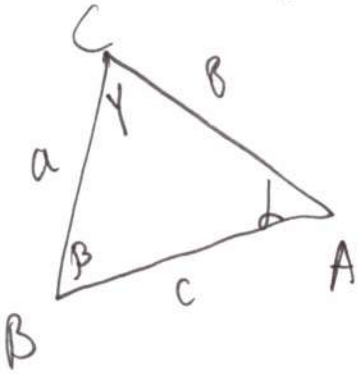
см. далее

613118

Ответ: слова, о котором спрашивается, в языке альфов нет.
(это слово равносильно слову из 25 букв Л, а такое слово составить из другого слова альфов не ~~в~~озможно.)

Задание № 7.

По теореме синусов для треугольника:



$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}\ (=2R).$$

Если радианная мера угла α близка сверху радианной мере угла β, то и $\sin\alpha$ будет близок сверху ~~радианной мере угла~~ синусу β. (т.к. измеряются в радианах).

Нет д-ва.

Тогда: $1<\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta}<1{,}01$

∓

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}$$
$$\Updownarrow$$
$$\frac{a}{b}=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$$
$$\Updownarrow$$

$1<\dfrac{a}{b}<1{,}01$ $\rightarrow$ Сторона a треугольника ABC близка сверху стороне b треугольника ABC.

$\Downarrow$

Доказали, что такие две стороны найдутся.

Задание №3

$$f(f(f(x)))=1$$
$$f(x)=x-\frac{2}{x}$$
$$f(f(x))=f(x)-\frac{2}{f(x)}$$
$$f(f(f(x)))=f(x)-\frac{2}{f(x)}-\frac{2}{f(x)-\frac{2}{f(x)}}=1.$$

см. далее

$$\cancel{x}-\frac{2}{x}-\frac{2}{x-\frac{2}{x}}-\frac{2}{x-\frac{2}{x}-\frac{2}{x-\frac{2}{x}}}=1.$$

$$\frac{x^2-2}{x}-\frac{2}{\frac{x^2-2}{x}}=\frac{x^2-2}{x}-\frac{2x}{x^2-2}=\frac{(x^2-2)^2-2x^2}{(x^2-2)x}=a$$

$$\frac{2}{\frac{x^2-2}{x}-\frac{2}{\frac{x^2-2}{x}}}=\frac{2}{\frac{(x^2-2)^2-2x^2}{x(x^2-2)}}=\frac{2x(x^2-2)}{(x^2-2)^2-2x^2}=$$

$$=2\cdot\frac{x(x^2-2)}{(x^2-2)^2-2x^2}=2\cdot\frac{1}{a}$$

$$a-\frac{2}{a}-1=0 \quad |\cdot a$$

$$a^2-2-a=0$$

$$D=1-4\cdot(-2)\cdot 1=9$$

$$\left[\begin{array}{l} a=\frac{1+3}{2\cdot 1}=2 \\ a=\frac{1-3}{2\cdot 1}=\frac{-2}{2}=-1 \end{array}\right.$$

F

Если $a=2$:

$$\frac{(x^2-2)^2-2x^2}{(x^2-2)x}=2$$

$$(x^2-2)^2-2x^2=2(x^2-2)x$$

$$(x^2-2)^2-2x(x^2-2)-2x^2=0$$

$$x^4+4-2\cdot 2\cdot x^2-2x^3+2x\cdot 2-2x^2=0$$

$$x^4-2x^3-4x^2-2x^2+2x+4=0$$

$$x^4-2x^3-6x^2+2x+4=0$$

4 корня; уравнение 4го степени

Почему

Итого: 8 корней всего.

Ответ: 8 корней имеет уравнение.

не обосновано

Если $a=-1$:

$$\frac{(x^2-2)^2-2x^2}{(x^2-2)x}=-1$$

$$(x^2-2)^2-2x^2=(2-x^2)x$$

$$x^4+4-4x^2-2x^2=2x-x^3$$

$$x^4+x^3-6x^2-2x+4=0$$

$(x=2)$ – корень

$$\begin{array}{l} x^4+x^3-6x^2-2x+4 \;|\; x-2 \\ -(x^4-2x^3) \quad\quad x^3+3x^2-2 \\ \quad 3x^3-6x^2 \\ \quad 3x^3-6x^2 \\ \quad\quad -2x+4 \\ \quad -(-2x+4) \\ \quad\quad 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x^3+3x^2-2 \;|\; x+1 \\ -(x^3+x^2) \quad x^2+2x-2 \\ \quad 2x^2-2 \\ \quad 2x^2+2x \\ \quad -2x-2 \\ \quad -(-2x-2) \\ \quad 0 \end{array}$$

$$(x^3+3x^2-2)(x-2)=0$$

$$(x^2-2x-2)(x+1)(x-2)=0$$

4 корня всего, т.к. уравнение 4го степени

Черновик 673118

(2) $f(x) = |x| + 2|x-1| + 3|x-2| + 4|x-3| + 5|x-4| + 6|x-5| + 7|x-6| +$
$+ 8|x-7| + 9|x-8| + 10|x-9| + 11|x-10|.$

$x \geq 10$.

$x + 2x - 2 + 3x - 6 + 4x - 12 + 5x - 20 + 6x - 30 + 7x - 42 +$
$+ 8x - \cancel{48}\ 56 + 9x - 72 + 10x - 90 + 11x - 110 = 66x - 440$

$66 \cdot 10 - 440 = 660 - 440 = 220.$

$\frac{1+11}{2} \cdot 11 = 6 \cdot 11 = 66$

$9 \leq x < 10$

$66x - 440 = (-1-) + 11x - 110.$
$55x - 330 - 11x + 110 = 44x - 220$

$44 \cdot 9 = 396 - 220 = 176.$

... остальные варианты

(Сумма будет уменьшаться)

(1) $x_1 = 79$

$x_n = \frac{n}{x_{n-1}}$ для всех $n > 1$.

$x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_{2018}$ — ? оканчивается

$x_n \cdot x_{n-1} = \frac{n}{x_{n-1}} \cdot x_{n-1} = n$

$10 = 5 \cdot 2$

$100 = 25 \cdot 4$
$(5 \cdot 2)^2$.

$1000 = 200 \cdot 5 =$
$= 4 \cdot 50 \cdot 5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$

$(x_1 x_2)(x_3 x_4)(x_5 x_6) \ldots (x_{2017} x_{2018})$

2 4 6 2018.

200.

$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5$

Кол-во в произведении наборов $\boxed{5 \cdot 2}$ = кол-ву нулей в конце.

$2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2018$

1 2.

$q \cdot (q+2) \cdot (q+4) \cdot (q+6) \cdot \ldots =$

$= q(q+2\cdot 1) + (q+2\cdot 2) \cdot (q+2\cdot 3) \cdot (q+2\cdot 4) \cdot (q+2\cdot 5) \cdot \ldots$

$\ldots \cdot (q+2\cdot$

$(q^2+2q)(q+4) = (q^3+2q^2+4q^2+8q) = q^3+6q^2+8q$

$(q^3+6q^2+8q)(q+6) = q^4+6q^3+8q^2+6q^3+36$

(6) $(a+\sqrt{1+a^2})(b+\sqrt{1+b^2})=1$ $(a+b)-?$

$ab + b\sqrt{1+a^2} + a\sqrt{1+b^2} + \sqrt{(1+a^2)(1+b^2)} = 1$

$b(a+\sqrt{1+a^2}) = \frac{1}{b+\sqrt{1+b^2}}$

$1+a^2 = \left(\frac{1}{b+\sqrt{1+b^2}} - a\right)^2$

$1+\cancel{a^2} = \left(\frac{1}{b+\sqrt{1+b^2}}\right)^2 + \cancel{a^2} - 2\cdot\frac{a}{b+\sqrt{1+b^2}}$

$1 = \frac{1}{b^2+1+b^2+2b\sqrt{1+b^2}} - \frac{2a}{b+\sqrt{1+b^2}}$

$1 = \frac{1-2a(b+\sqrt{1+b^2})}{2b^2+2b\sqrt{1+b}+1}$

$\cancel{2}b^2+\cancel{2}b\sqrt{1+b^2}+\cancel{1} = \cancel{1}-\cancel{2}a(b+\sqrt{1+b^2})$

$b^2+b\sqrt{1+b^2} = -a(b+\sqrt{1+b^2})$

$b(b+\sqrt{1+b^2}) = -a(b+\sqrt{1+b^2})$

$(b+a)(b+\sqrt{1+b^2})=0$

$\left[\begin{array}{l} a+b=0 \\ b+\sqrt{1+b^2}=0. \end{array}\right.$

$b+\sqrt{1+b^2}=0$

$1+b^2=b^2$

$1=0$. Неверно $\to a+b=0$.

(8) А, Л, Ф.

ЛФАЛФАЛФАЛФАЛАФЛАФЛАФЛАФЛАФ

ФФ ФФ ФФ ФФ

13 А

ЛА → ФФ

АФ → ЛЛ

ФЛ → АА

ЛЛ → АФ

ФФ → ЛА

АА → ФЛ

ЛЛАФАЛАФФАЛАФФАЛАФФФФАЛЛ

ЛЛ ФФФФ ФФФФФ А ФФФФФФ АЛЛ

АФ

ЛЛЛЛ АФФФФ А ФФФФФ А ФФФФ ФФФ ААФ

ЛЛ ЛЛ ЛЛ ФЛ

ЛЛАФ АЛ АФФ АЛАФФФАЛАФФФФАЛЛ

ФФ ЛА АА АА АФ ФЛ

ЛА

ЛЛА

ЛА ЛА АА ЛАЛЛ

ЛЛЛЛЛЛ. ФФФ. ЛЛ. ФФФФ. ЛЛЛ. ФФФФФФЛАФ

$$x_3 = \frac{3}{x_2} = \frac{3}{2/29} = \frac{3 \cdot 29}{2}$$

$$x_4 = \frac{4}{\quad}$$

(5) Изначально:

Чёрное Белое

$272 + 8.$ 280

$32 + 72 + 56 = 104 + 56 = 160.$

(5.) $R = 1.$

$S_{\odot} = \pi R^2 = \pi.$

цун.

$(2\sqrt{2} - 2r)^2 = (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2 = 4$

$4 \cdot 2 + 4r^2 - 2 \cdot \sqrt{2} \cdot 2r \cdot 2$

$8 + 4r^2 - 4 \cdot 2r \cdot \sqrt{2} = 4.$

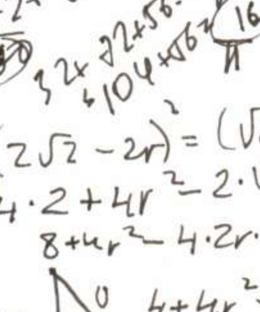
$4 + 4r^2 - 8\sqrt{2}r = 0$

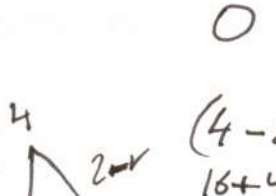
$(4 - 2r)^2 = 2^2 + 2^2$

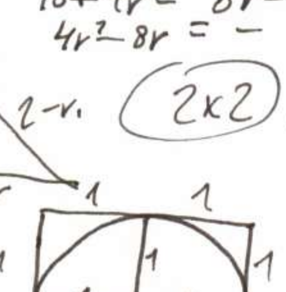
$16 + 4r^2 - 8r = 4 + 4$

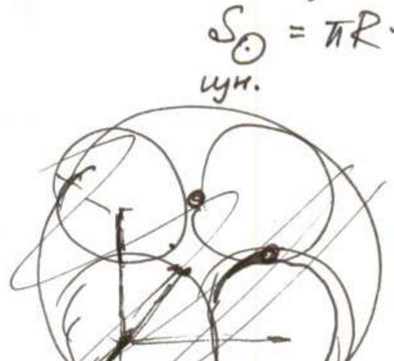
$4r^2 - 8r = -8$

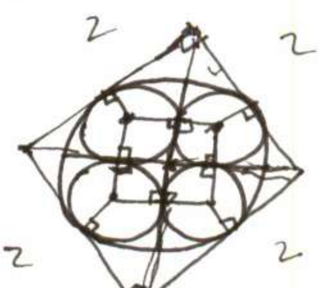
2×2.











$\frac{8\sqrt{2} + 8}{2 \cdot 4} = \sqrt{2} + 1.$

$\sqrt{2} - 1$

$r^2 - 2r = -2$

$r^2 - 2r + 2 = 0$

$4 - 2 \cdot 4 - 1$

$(8\sqrt{2})^2 - 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64 \cdot 2 - 64 = 64.$

$\sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$

$1+2-6-2+4$

$1-2-6+2+4$

$16-2\cdot 8-6\cdot 4+2\cdot 2+4$

$16+2\cdot 8-6\cdot 4-2\cdot 2+4$

$16+16-24-4+4$

$f(x)=x-\frac{2}{x}$

$f(f(x))=f(x)-\frac{2}{f(x)}$

$f(f(f(x)))=f(x)-\frac{2}{f(x)}-\frac{2}{f(x)-\frac{2}{f(x)}}=$

$=2-\frac{2}{x}-\frac{2}{2-\frac{2}{x}}-\frac{2}{2-\frac{2}{x}-\frac{2}{2-\frac{2}{x}}}=$

$=\frac{2x-2}{x}-\frac{2}{\frac{2x-2}{x}}-\frac{2}{\frac{2x-2}{x}-\frac{2}{2-\frac{2}{x}}}=$

$=\frac{2x-2}{x}-\frac{2x}{2x-2}-\frac{2}{\frac{2x-2}{x}-\frac{2}{\frac{2x-2}{x}}}$

$\frac{2x-2}{x}-\frac{2x}{2x-2}=\frac{(2x-2)^2-2x^2}{x(2x-2)}$

$\frac{(2x-2)^2-2x^2}{x(2x-2)}-\frac{2x(2x-2)}{(2x-2)^2-2x^2}$

a $\quad$ $\frac{1}{a}$

$a-\frac{2}{a}=1$

$a^2-2=a$

$a^2-a-2=0$

$D=1-$

$1+1-6-2+4$

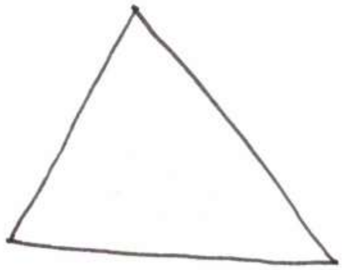
$16-8-6\cdot 4+2\cdot 2+4$

$8-24+4+4.$

$16+8-6\cdot 4-2\cdot 2+4$

$16+8-6\cdot 4-2\cdot 2+4$

$$1 < \frac{a}{b} < 1{,}01$$



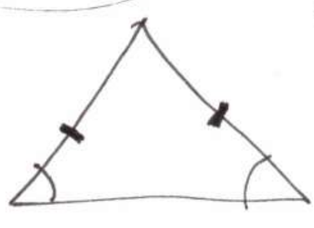
180 градусов

a, b

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$$

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}.$$

$$\frac{\cancel{a}}{\sin\alpha} + \frac{c}{\sin\gamma} = 2R.$$



$$\frac{2}{7} = \frac{4}{14}$$

$$\frac{2}{4} = \frac{7}{14}.$$

$(1-\sqrt{2})^2 + 6 - 4\sqrt{2} + 2(1-\sqrt{2})\sqrt{6-4\sqrt{2}} =$

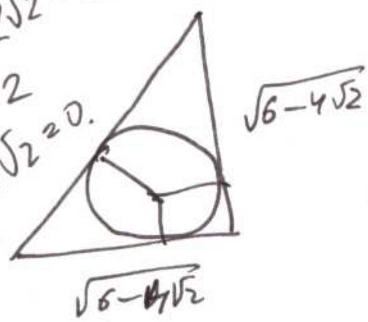
$= 1 + 2 - 2\sqrt{2} + 6 - 4\sqrt{2} + (2-2\sqrt{2})\sqrt{6-4\sqrt{2}} =$

$= 3 + 6 - 6\sqrt{2} + (2 - 2\sqrt{2})\sqrt{6-4\sqrt{2}}$

$f\left(x - \frac{2}{x}\right)$

$x - \frac{2}{x} - \frac{2}{x - \frac{2}{x}}$

$2\sqrt{2} - 2$



$(\sqrt{6-4\sqrt{2}} - r) \cdot 2 = 2\sqrt{2} - 2$

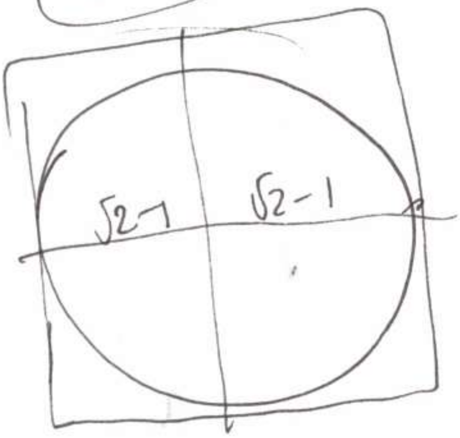
$2\sqrt{6-4\sqrt{2}} - 2r + 2 - 2\sqrt{2} = 0.$

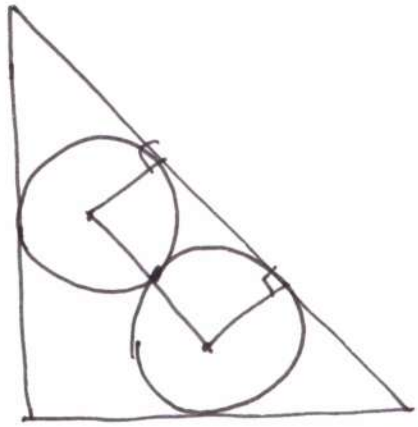
$2r = \sqrt{6-4\sqrt{2}} + 1 - \sqrt{2}$

$x - \frac{2}{x} - \frac{2}{\frac{x^2-2}{x}} = x - \frac{2}{x} - \frac{2x}{x^2-2}$

$2\sqrt{2} - 2$

$64 \cdot 2 - 4 \cdot 4 \cdot 4$





$1{,}4 \times 1{,}4 = 56 + 14 = 1{,}96$

$16 \times 1{,}4 = 64 + 16 = 224$

$4 - 2\sqrt{2}$

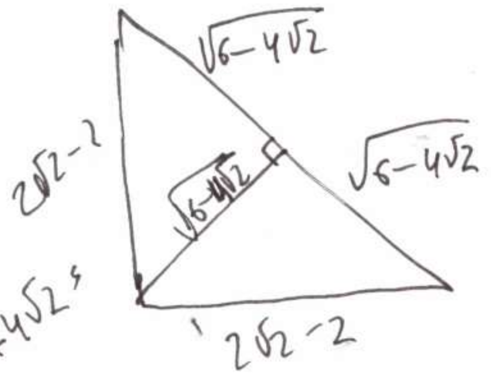
$\sqrt{2} - 2 + \sqrt{2}$

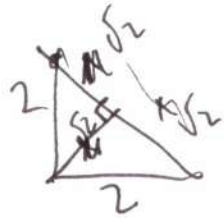
$4 \cdot 2\sqrt{2} - 4$

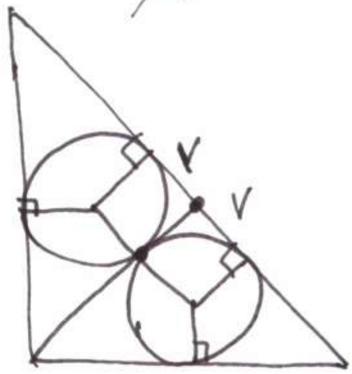
$2\sqrt{2} - 2$

$= 4\sqrt{2} - 4 +$

$+ 4 - 2\sqrt{2}$







$12 - 8\sqrt{2} - 6 + 4\sqrt{2} =$
$= 6 - 4\sqrt{2}$

$4 \cdot 2 + 4 - 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{2} =$

$= 8 + 4 - 8\sqrt{2} = 12 - 8\sqrt{2}$

$4 - 2 = 2$

$12 + 12 - 16\sqrt{2} = 24 - 16\sqrt{2}$

$\sqrt{24 - 16\sqrt{2}} = 2\sqrt{6 - 4\sqrt{2}}$

Оценочный бланк олимпиадных заданий по математике

Код участника: 93010006

Номер задания		1	2	3	4	5	6	7	8
Полученные баллы	Первый проверяющий	10	10	12	0	10	14	4	0
	Второй проверяющий	10	10	12	0	10	14	4	0
	Итого	10	10	12	0	10	14	4	0
Сумма баллов (оценка)		60							

Члены жюри:

Подпись	Маевск[illegible] Фамилия И.О.
Подпись	Кочерова А.С. Фамилия И.О.
Подпись	В. Б. [illegible] Фамилия И.О.

Всероссийская олимпиада школьников «Миссия выполнима. Твое призвание-финансист!»

ПО МАТЕМАТИКЕ 11 класс

Заключительный (очный) этап 2017/2018 учебный год

93010006 47441

Код участника

Вариант I

Задание 1. (10 баллов)

Даны последовательность чисел $x_1, x_2, \ldots$, такая, что $x_1 = 79$ и $x_n = \frac{n}{x_{n-1}}$ для всех $n > 1$. На сколько нулей оканчивается число равное произведению $x_1 x_2 \ldots x_{2018}$?

Задание 2. (10 баллов)

Найдите наименьшее значение функции $f(x) = |x| + 2|x-1| + 3|x-2| \ldots + 11|x-10|$

Задание 3. (12 баллов)

Сколько различных корней имеет уравнение $f\left(f\left(f(x)\right)\right) = 1$, если $f(x) = x - \frac{2}{x}$?

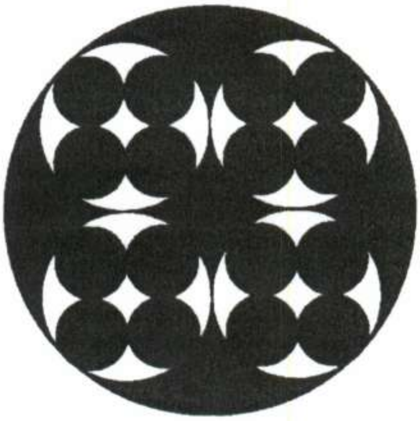
Задание 4. (12 баллов)

Сотрудники фирмы делятся на трудяг и лентяев. В 2016 году средняя зарплата трудяг превышала в два раза среднюю зарплату лентяев. Повысив свою квалификацию, трудяги в 2017 году стали получать на 50% больше, а зарплата лентяев не изменилась. При этом часть лентяев уволили в конце 2016 года. Средняя зарплата всех сотрудников в 2017 году стала на 20% больше, чем была в 2016 году. Найдите сколько процентов от общего числа сотрудников составляли в 2017 году трудяги, если в 2016 году их было 10%.

93 01 0006

Задача 5. (12 баллов)

На первом шаге на листе бумаги была изображена единичная окружность и ограниченный ею круг закрашен черной краской. На каждом из последующих шагов для каждой из окружностей, изображенных на предыдущем шаге, рисуются четыре новые внутренне касающиеся ее окружности равных радиусов. Эти четыре окружности внешне касаются друг друга. Круги, ограниченные новыми окружностями, закрашиваются белой краской, если номер шага четное число, или черной краской, если номер шага нечетен. На рисунке изображен результат трех шагов. Описанный процесс продолжается до бесконечности. Найдите площадь белой области.



Задание 6. (14 баллов)

Действительные числа a и b таковы, что $\left(a+\sqrt{1+a^2}\right)\left(b+\sqrt{1+b^2}\right)=1$. Найдите сумму $a+b$.

Задание 7 (14 баллов)

Назовем положительное число a близким сверху к положительному числу b, если a превосходит b, но не больше чем на 1%. Докажите, что если в треугольнике радианная мера одного из углов близка сверху к радианной мере другого угла, то найдутся две стороны этого треугольника такие, что длина одной из них близка сверху к длине другой.

Задача 8. (16 баллов)

В алфавите языка альфов три буквы *А*, *Л* и *Ф*. Все слова этого языка можно построить, применяя последовательно следующие правила к любому слову из этого языка:

(1) поменять порядок букв в слове на противоположный

(2) заменить две последовательные буквы так: *ЛА* → *ФФ*, *АФ* → *ЛЛ*, *ФЛ* → *АА*, *ЛЛ* → *АФ*, *ФФ* → *ЛА* или *АА* → *ФЛ*.

Известно, что *ЛЛАФАЛАФФАЛАФФФАЛАФФФФАЛЛ* – это слово из языка альфов. Есть ли в языке альфов слово *ЛФАЛФАЛФАЛФАЛАФЛАФЛАФЛАФЛ*?

① | X | X | X | X | X | X | ЛЛ | ФФ | АА | ЛЛ | ФФ | АА

② ААФФЛЛААФФЛЛЛАФЛЛАФЛАФЛ

ЛЛАФАЛАФФАЛАФФФАЛАФФФФАЛЛ

Л ФФ ФА ФФ ЛА АЛ ЛЛ ЛА АЛ ЛЛ ЛА ФА АФ

черновик №1

93010006

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМА, ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ-ФИНАНСИСТ!»

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

№1 $x_1 = 79$ $x_n = \frac{n}{x_{n-1}}$, для всех $n > 1$

На сколько нулей? ~~$x_1 x_2 x_3$~~ Пусть $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \ldots x_{2018} = y$;

$x_1 = 79$

$x_2 = \frac{2}{x_1} = \frac{2}{79}$ — $79 \cdot \frac{2}{79} = 1 \cdot 2$

$x_3 = \frac{3}{x_2} = \frac{3 \cdot 79}{2}$ — $\frac{3 \cdot 79}{2} \cdot \frac{4 \cdot 2}{3 \cdot 79} = 4 = 2 \cdot 2$

$x_4 = \frac{4}{x_3} = \frac{4 \cdot 2}{3 \cdot 79}$

$x_5 = \frac{5}{x_4} = \frac{5 \cdot 3 \cdot 79}{4 \cdot 2}$ — $6 = 2 \cdot 3$

$x_6 = \frac{6}{x_5} = \frac{6 \cdot 4 \cdot 2}{5 \cdot 3 \cdot 79}$

$y = \underbrace{(2 \cdot 1) \cdot (2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 3) \ldots (2 \cdot 1009)}_{1009 \text{ раз}} = 2^{1009} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots 1009 = 2^{1009} \cdot 1009! =$

$= (5 \cdot 1)(5 \cdot 2) \cdot (5 \cdot 3) \cdot (5 \cdot 4) \cdot (5 \cdot 5) \ldots (5 \cdot 201)$ — мы разложили произведение на множители в которых встречается 5

$5 \cdot 10 \cdot 15 \cdot 20 \cdot 25 \ldots 1005 = \frac{201}{5} \cdot 201!$

Далее нужно посчитать пятерки, которые встречаются от 1 до 201:

$\frac{201}{5} = 40$ (целая часть от деления на 5)

$\frac{40}{5} = 8$

$\frac{8}{5} = 1$ (цел. часть) $\Rightarrow$ Итого имеем: $201 + 40 + 8 + 1 = 250$ десяток в конце числа, а, следовательно, и 250 нулей.

Ответ: 250 нулей

№6 $(a + \sqrt{1+a^2})(b + \sqrt{1+b^2}) = 1$. Найти $(a+b)$

Сделаем замену:

$\begin{cases} a + \sqrt{1+a^2} = x \\ b + \sqrt{1+b^2} = \frac{1}{x} \end{cases}$, т.к. $x \cdot \frac{1}{x} = 1$

тогда

(1) $a - x = -\sqrt{1+a^2}$
$(a-x)^2 = 1 + a^2$
$a^2 - 2ax + x^2 = 1 + a^2$
$a = \frac{-1 + x^2}{+2ax}$

(2) $b - \frac{1}{x} = -\sqrt{1+b^2}$
$(b - \frac{1}{x})^2 = 1 + b^2$
$b^2 - \frac{2b}{x} + \frac{1}{x^2} = 1 + b^2$
$b = \frac{(-1 + \frac{1}{x^2})x}{+2}$

$\begin{cases} a = -\frac{1}{2x} + \frac{x}{2} \\ b = -\frac{x}{2} + \frac{1}{2x} \end{cases}$

$a + b = -\cancel{\frac{1}{2x}} + \cancel{\frac{x}{2}} - \cancel{\frac{x}{2}} + \cancel{\frac{1}{2x}} = 0$

Ответ: 0

Запрещается делать пометки, раскрывающие авторство работы

Чистовик №2 93010006

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМА, ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ-ФИНАНСИСТ!»

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

№3 $f(f(f(x)))=1$, если $f(x)=x-\frac{2}{x}$

1) $f(t_1)=1$

$t_1-\frac{2}{t_1}=1 \,\Big|\cdot t_1$

$t_1^2-2=t_1$

$t_1^2-t_1-2=0$

$D=1+8=9$

$t_1=\frac{1+3}{2}=2$ $t_1=\frac{1-3}{2}=-1$

$t_1=2$ или $t_1=-1$

2а) $t_2-\frac{2}{t_2}=-1$

$t_2^2-2=-t_2$

$t_2^2+t_2-2=0$

$D=9$

$t_2=1$ или $t_2=-2$

2б) $t_2-\frac{2}{t_2}=2$

$t_2^2-2-2t_2=0$

$t_2^2-2t_2-2=0$

$k=-1$ $D_1=1+2=3$

$t_2=1\pm\sqrt{3}$

$x-\frac{3}{x}=1 \vee x-\frac{3}{x}=-2 \vee x-\frac{2}{x}=1+\sqrt{3} \vee x-\frac{2}{x}=1-\sqrt{3}$

(3а) (3б) (3в) (3г)

3а) $x^2-2=x$

$x^2-x-2=0$

$\boxed{x_1=-1 \; x_2=2}$

3б) $x^2-2=-2x$

$x^2+2x-2=0$

$k=1$ $D_1=1+2=3$

$D_1>0$, значит 2 различных корня

$\boxed{x_{34}=-1\pm\sqrt{3}}$

3в) $x^2-2=(1+\sqrt{3})x$

$x^2-(1+\sqrt{3})x-2=0$

$D=(1+\sqrt{3})^2+8=1+2\sqrt{3}+3+8=$

$=12+2\sqrt{3}$

$\boxed{x_{56}=\frac{1+\sqrt{3}\pm\sqrt{12+2\sqrt{3}}}{2}}$

3г) $x^2=2+(1-\sqrt{3})x$

$x^2-(1-\sqrt{3})x-2=0$

$D=(1-\sqrt{3})^2+8=$

$=1-2\sqrt{3}+3+8=12-2\sqrt{3}$

$\boxed{x_{78}=\frac{1-\sqrt{3}\pm\sqrt{12-2\sqrt{3}}}{2}}$

Итого 8 корней

+

Ответ: 8 корней

№2 $f(x)=|x|+2|x-1|+3|x-2|+\ldots+11|x-10|$

$f(x)$ – кусочно-линейная функция на отрезках $(-\infty;0]$, $(0;1]$, …, $(9;10]$, $(10;+\infty)$

Следовательно, минимум линейной функции на одном из концов отрезка

$\Rightarrow$ $\min f(x)$ достигается в одной из точек $-\infty; 0, 1, \ldots, 10, +\infty$, но $\pm\infty$ не подходят

Подставим $0, 1, \ldots, 10$

$f(0)=0+2\cdot1+3\cdot2+4\cdot3+5\cdot4+6\cdot5+7\cdot6+8\cdot7+9\cdot8+10\cdot9+11\cdot10=440$

$f(1)=1+0+3\cdot1+4\cdot2+5\cdot3+6\cdot4+7\cdot5+8\cdot6+9\cdot7+10\cdot8+11\cdot9=1+3+8+15+24+35+48+63+80+99=$

$=376$

$f(2)=$
$f(3)=$
$f(4)=$
$f(5)=$
} числа, больше 156 и меньше 376

$f(6)=6+2\cdot5+3\cdot4+4\cdot3+5\cdot2+6\cdot1+7\cdot0+8\cdot1+9\cdot2+10\cdot3+11\cdot4=6+10+12+12+10+6+8+18+$

$+30+44=156$

$f(7)=7+2\cdot6+3\cdot5+4\cdot4+5\cdot3+6\cdot2+7\cdot1+8\cdot0+9\cdot1+10\cdot2+11\cdot3=7+12+15+16+15+12+7+$

$+9+20+33=68+16+29+33=84+29+33=146$

~~$f(8)=156$~~ ~~112=~~

$f(8)=8+2\cdot7+3\cdot6+4\cdot5+5\cdot4+6\cdot3+7\cdot2+8\cdot1+9\cdot0+10\cdot1+11\cdot2=$

$=\underbrace{8+14+18+20}_{60}+\underbrace{20+18+14+8}_{60}+\underbrace{10+22}_{32}=152$ продолжение на чистовике №3

+

чистовик № 3

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМА, ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ-ФИНАНСИСТ!»

93 01 0006

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

№2 продолжение

$f(9) = 9 + 2\cdot 8 + 3\cdot 7 + 4\cdot 6 + 5\cdot 5 + 6\cdot 4 + 7\cdot 3 + 8\cdot 2 + 9\cdot 1 + 10\cdot 0 + 11\cdot 1 =$

$= 9 + 16 + 21 + 24 + 25 + 24 + 21 + 16 + 9 + 11 = 176$

$f(10) = 10 + 2\cdot 9 + 3\cdot 8 + 4\cdot 7 + 5\cdot 6 + 6\cdot 5 + 7\cdot 4 + 8\cdot 3 + 9\cdot 2 + 10\cdot 1 + 11\cdot 0 =$

$= 10 + 18 + 24 + 28 + 30 + 30 + 28 + 24 + 18 + 10 = 200$

Наименьшее значение функция принимает в $x = 7$

$\min = f(7) = 146$

Ответ: 146

№4

Пусть было 100 сотрудников в 2016 г

x лентяев $\qquad y = 100 - x = 90$ трудяг

Тогда ~~в~~ 120 человек в 2017 г ?

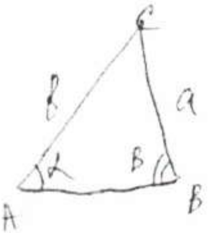
$120 - (150 - 1{,}5x)$ лентяев $\qquad 150 - 1{,}5x$ трудяг

$\frac{150 - 1{,}5x}{120} \cdot 100\% = \frac{15}{120} \cdot 100\% = \frac{1}{8} \cdot 100\% = 0{,}125 \cdot 100\% = $

$= 12{,}5\%$

Ответ: 12,5%

№7



Дано: $\triangle ABC$ - прямоуг. треугольник, ~~со сто~~

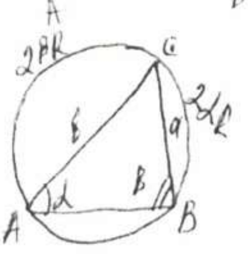
$\beta \le \alpha \le 1{,}01\beta$

Д-ть: $a \le b \le 1{,}01a$

Д-во: 1) По теореме синусов

$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$; $a\sin\beta = b\sin\alpha$

$\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$



2) $b < 2\beta R$

~~a~~ $\alpha < 2\alpha R$

$\frac{a}{b} < \frac{2\alpha R}{2\beta R}$

$\frac{a}{b} < \frac{\alpha}{\beta}$

Поделили нер-ва?

3) $\beta \le \alpha \le 1{,}01\beta \mid : \beta$

$1 \le \frac{\alpha}{\beta} \le 1{,}01$

$\frac{a}{b} \le 1{,}01$

$a \le 1{,}01b$ ч.т.д

Имеем по пункту 1): $b \le a$

$\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$, т.к по условию $1{,}01\beta \ge \alpha \ge \beta$, то

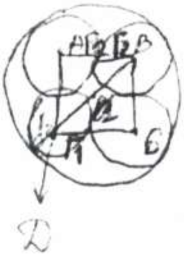
$\sin\alpha \ge \sin\beta \Rightarrow \frac{a}{b} \ge 1 \Rightarrow a \ge b$

Чистовик №4 93 01 0006

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМА, ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ-ФИНАНСИСТ!»

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

№5



$r_1 = 1 \cdot r_2$ центр большой окр O_1

1) $O_1 D = r_1 - r_2$, где $r_1 = 1$

$ABCD$ - квадрат $\Rightarrow O_1 D = R - \frac{a}{\sqrt{2}}$, где $a = AB = 2\sqrt{2}$

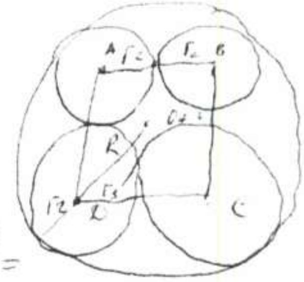
$\Rightarrow O_1 D = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$

$r_1 - r_2 = \sqrt{2} \cdot r_2$

$r_1 = (1+\sqrt{2}) r_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow r_2 = \frac{r_1}{(\sqrt{2}+1)} = \frac{r_1(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}^2 - 1^2} = r_1(\sqrt{2}-1) \Rightarrow r_2 = \sqrt{2}-1$

+.



$\cancel{r_3 = \ldots}$

$r_3 = r_2(\sqrt{2}-1) = r_1^2(\sqrt{2}-1)^2 = (\sqrt{2}-1)^2$

2 шаг) $S_{\text{бел. круг}} = \pi r_2^2 = \pi(\sqrt{2}-1)^2$

$S_{\text{бел. фиг}} = 4\pi r_2^2 = 4\pi(\sqrt{2}-1)^2 =$

$S_{\text{бел. фиг}} = 4 S_{\text{бел. круг}}$

3 шаг) $S_{\text{черн. круг}} = \pi r_3^2 = \pi(\sqrt{2}-1)^4$

$S_{\text{черн. ф}} = 4^2\pi r_3^2 = 4^2\pi(\sqrt{2}-1)^4$

Останавлива $S_{\text{сеу}} = S_{\text{бел.ф}} - S_{\text{черн.ф}} = 4\pi(\sqrt{2}-1)^2 - 4^2\pi(\sqrt{2}-1)^4$

Всего $S_0 = 4\pi(\sqrt{2}-1)^2 - 4^2\pi(\sqrt{2}-1)^4 + 4^3\pi(\sqrt{2}-1)^8 - 4^4\pi\sqrt{2-1}^{16}$.

Бесконечная геом. прогресс. $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \pi(-1)^{n+1} 4^n (\sqrt{2}-1)^{2^n} = S_0}$

$b_1 = 4\pi(\sqrt{2}-1)^2$ $\quad q = \frac{b_2}{b_1} = 4(\sqrt{2}-1)^2$

$b_2 = 4^2\pi(\sqrt{2}-1)^4$

$S_0 = \frac{b_1}{1-q} = \frac{4\pi(\sqrt{2}-1)^2}{1-4(\sqrt{2}-1)^2} = \frac{4\pi(\sqrt{2}-1)^2}{(1-2\sqrt{2}+2)(1+2\sqrt{2}-2)} = \frac{4\pi(2-2\sqrt{2}+1)}{(3-2\sqrt{2})(2\sqrt{2}-1)} = \frac{4\pi}{2\sqrt{2}-1}$?

Ответ: $S_0 = \frac{4\pi}{2\sqrt{2}-1}$

В решении имеется ошибка, не повлиявшая на общую верность решения.

№8

~~АФАА ФА АФАА ФА~~

АФАЛФАЛФАЛФАЛФАЛФАЛФАЛФАЛФАЛФАЛФА → АФАЛФАЛФАЛФАЛФАЛ ЛЛФФАА ЛЛФФАА →

→ АА ФФ ЛЛ АА ФФ ЛЛ ЛАФЛ ЛА ФА ЛАФЛ - изначальное слово

Ответ: Да, есть такое слово

−

Неверно

Запрещается делать пометки, раскрывающие авторство работы

~~Чистовик~~ Черновик № 1 9301 0006

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМА, ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ-ФИНАНСИСТ!»

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

$x_1, x_2, \ldots$ $x_1 = 79$ $x_n = \frac{n}{x_{n-1}}$, $n \geq 1$

$x_1 x_2 \ldots x_{2018} = ?$

$x_2 = \frac{2}{x_1} = \frac{2}{79}$

$x_3 = \frac{3}{\frac{2}{79}} = 3 \cdot \frac{79}{2} = \frac{237}{2}$

$x_4 = \frac{4}{\frac{237}{2}} = 4 \cdot \frac{2}{237} = \frac{8}{237}$

$x_5 = \frac{5}{\frac{8}{237}} = 5 \cdot \frac{237}{8} = \frac{5 \cdot 237}{8}$

$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot \ldots x_{2018} = 79 \cdot \frac{2}{79} \cdot \frac{3 \cdot 79}{2} \cdot \frac{8}{3 \cdot 79} \cdot \frac{5 \cdot 237}{8} \ldots x_{2018}$

$x_6 = \frac{6}{\frac{5 \cdot 237}{8}} = \frac{6 \cdot 8}{5 \cdot 237}$

$\left(\cancel{79} \cdot \frac{2}{\cancel{79}}\right)\left(\frac{3 \cdot \cancel{79}}{\cancel{2}} \cdot \frac{8}{3 \cdot \cancel{79}}\right) \cdot \frac{5 \cdot \cancel{237}}{\cancel{8}} \cdot \frac{6 \cdot 8}{5 \cdot \cancel{237}} \ldots x_{2017} \cdot x_{2018} =$

$x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_5 \quad x_6$

$x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 = 48$

$x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 \ldots x_{2017} \cdot x_{2018} = 2018 \cdot 2020$

$$\begin{array}{r} 2018 \\ \times\ 2020 \\ \hline 4036 \\ +\ 4036 \\ \hline 4076360 \end{array}$$

② $f(f(f(x))) = 1$, $f(x) = x - \frac{2}{x}$

$f(1) = 1 - \frac{2}{1} = -1$

$f(f(f(1))) = 1$

$f(f(-1)) = 1$

$f(-1) = -1 + \frac{2}{1} = 1$

$f(1) = 1$

④ 2016 (Т) Всего сотрудников (Д)

ср. зарп. $2x$ $101x$ x уволили 4

2017 ср. зарплата $3x$ x

ср. зарплата $1{,}2(3x) = 3{,}6x$

Всего $0{,}1k$ $0{,}9k$ 2016 год

Уволили 0 $0{,}9k - y$

Ср. зарп. $2x$ x

ср. зарп. $2x \cdot \frac{1}{2}$ x

ср. зарп. $3x \cdot 1{,}2 = 3{,}6x$

Сотрудники 1 $0{,}9k - y$ $0{,}9k - y$

$+4|x-3| + 5|x-4| + 6|x-5| + 7|x-6| + \ldots + 9|x-8| + 10|x-9| +$

③ $f(x) = |x| + 2|x-1| + 3|x-2| \ldots + 11|x-10|$

Очевидно, что наименьшее значение скорее всего в каком-то из модулей

$f(10) = 10 + 2 \cdot 9 + 3 \cdot 8 + 4 \cdot 7 + 5 \cdot 6 + 6 \cdot 5 + 7 \cdot 4 + 8 \cdot 3 + 9 \cdot 2 + 10 \cdot 1 + 11 \cdot 0 =$
$= 10 + 18 + 24 + 28 + 30 + 30 + 28 + 24 + 18 + 10 = 2 \cdot 100 - 20$

$f(9) = 9 + 2 \cdot 8 + 3 \cdot 7 + 4 \cdot 6 + 5 \cdot 5 + 6 \cdot 4 + 7 \cdot 3 + 8 \cdot 2 + 9 \cdot 1 + 10 \cdot 0 + 11 \cdot 1 =$
$= 9 + 16 + 21 + 24 + 25 + 24 + 21 + 16 + 9 + 11 = 140 + 36 = 176$

$f(7) = 7 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 5 + 4 \cdot 4 + 5 \cdot 3 + 6 \cdot 2 + 7 \cdot 1 + 8 \cdot 0 + 9 \cdot 1 + 10 \cdot 2 + 11 \cdot 3 = 7 + 12 + 15 + 16 + 15 + 12 + 7 + 9 + 20 + 33 = 68 + 16 + 29 + 33 = 84 + 29 + 33 = 113 + 33 = 146$

$f(6) = 6 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 3 + 5 \cdot 2 + 6 \cdot 1 + 7 \cdot 0 + 8 \cdot 1 + 9 \cdot 2 + 10 \cdot 3 + 11 \cdot 4 =$
$6 + 10 + 12 + 12 + 10 + 6 + 8 + 18 + 30 + 44 = 56 + 18 + 11 + 44 = 94 + 18 + 44 = 138 + 18 = 156$

Наименьшее значение функция принимает при $x = 7$

$f(7) = 146$

$f(1) = 1 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 6 + 4 \cdot 5 + 5 \cdot 4 + 6 \cdot 3 + 7 \cdot 2 + 8 \cdot 1 + 9 \cdot 0 + 10 \cdot 1 + 11 \cdot 2 =$
$8 + 14 + 18 + 20 + 20 + 18 + 14 + 8 + 10 + 22 = 152$

Запрещается делать пометки, раскрывающие авторство работы

Черновик № 2

93 01 0006

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМА. ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ-ФИНАНСИСТ!»

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

(3) $f(f(f(x)))=1$, если $f(x)=x-\frac{2}{x}$

1) $f(t_1)=1$

$t_1-\frac{2}{t_1}=1 \mid \cdot t_1$

$t_1^2-2=t_1$

$t_1^2-t_1-2=0$

$D=1+8=9$

$t_1=\frac{1+3}{2}=2$ $t_1=\frac{1-3}{2}=-1$

$t_1=2$ или $t_1=-1$

2а) $t_2-\frac{2}{t_2}=-1$

$t_2^2-2=-t_2$

$t_2^2+t_2-2=0$

$D=9$

$t_2=\frac{-1+3}{2}=1$ $t_2=-2$

$t_2=1$ или $t_2=-2$

2б) $t_2-\frac{2}{t_2}=2$

$t_2^2-2-2t_2=0$

$t_2^2-2t_2-2=0$

$k=-1$ $D_1=1+2=3$

$t_2=1\pm\sqrt{3}$

$x-\frac{2}{x}=1 \cup x-\frac{2}{x}=-2 \cup x-\frac{2}{x}=1+\sqrt{3} \cup x-\frac{2}{x}=1-\sqrt{3}$

(3а) (3б) (3в) (3г)

3а) $x^2-2=x$

$x^2-x-2=0$

$\boxed{x_1=-1 \quad x_2=2}$

3б) $x^2-2=-2x$

$x^2+2x-2=0$

$k=1$ $D_1=1+2=3$

$D_1>0$, значит 2 различных корня

$\boxed{x_{3,4}=-1\pm\sqrt{3}}$

3в) $x^2-2=(1+\sqrt{3})x$

$x^2-(1+\sqrt{3})x-2=0$

$D=(1+\sqrt{3})^2+8=$

$=1+2\sqrt{3}+3+8=$

$=12+2\sqrt{3}$

$\boxed{x_{5,6}=\frac{1+\sqrt{3}\pm\sqrt{12+2\sqrt{3}}}{2}}$

3г) $x^2=2+(1-\sqrt{3})x$

$x^2-(1-\sqrt{3})x-2=0$

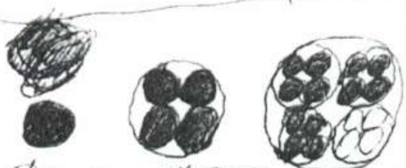
$D=(1-\sqrt{3})^2+8=$

$=1-2\sqrt{3}+3+8=12-2\sqrt{3}$

$\boxed{x_{7,8}=\frac{1-\sqrt{3}\pm\sqrt{12-2\sqrt{3}}}{2}}$

Ответ: 8 корней

(5)



Далее нужно посчитать пятерки, которые встречаются от 1 до 201.

$201/5=40$ (целая часть от деления на 5)

$40/5=8$ (целая часть)

$8/5=1$ (целая часть)

Итого имеем

$201+40+8+1=250$ десяток в конце только

Ответ: 250 нулей в конце числа

(4) Пусть 100 семей в 2016 г.

x - семей

$y=(100-x)$ трудящ.

$\boxed{y=90}$ 100 семей в 2017 г.

$(150-1,5x)$ трудящ.

$120-(150-1,5x)$ - y-семьи

$\frac{150-1,5x}{120}\cdot 100\%=$

$=\frac{15}{120}\cdot 100\%=$

$=\frac{1}{8}\cdot 100\%=$

$=0,125\cdot 100\%=12,5\%$

Ответ: 12,5 % трудящ.

$a>b$

(6) $(a+\sqrt{1+a^2})(b+\sqrt{1+b^2})=1$ Найти $(a+b)$

Замена $\begin{cases} a+\sqrt{1+a^2}=x \\ b+\sqrt{1+b^2}=\frac{1}{x} \end{cases}$ т.к. $x\cdot\frac{1}{x}=1$

Тогда

(1) $a-x=-\sqrt{1+a^2}$

$(a-x)^2=1+a^2$

$a^2-2ax+x^2=1+a^2$

$a=\frac{-1+x^2}{2x}$

(2) $b-\frac{1}{x}=-\sqrt{1+b^2}$

$(b-\frac{1}{x})^2=1+b^2$

$b^2-\frac{2b}{x}+\frac{1}{x^2}=1+b^2$

$b=\frac{(-1+\frac{1}{x^2})x}{2}$

$\begin{cases} a=-\frac{1}{2x}+\frac{x}{2} \\ b=-\frac{x}{2}+\frac{1}{2x} \end{cases}$

$a+b=-\frac{1}{2x}+\frac{x}{2}-\frac{x}{2}+\frac{1}{2x}=0$

Ответ: 0

Запрещается делать пометки, раскрывающие авторство работы

чертеж №3

93 01 0006

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМА, ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ-ФИНАНСИСТ!»

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

№7

$\beta \le \alpha \le 1{,}01\beta$

Д-ть $b \le a \le 1{,}01b$

или $a \le b \le 1{,}01a$

1) По теореме синусов

$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} =$

$a \sin\beta = b\sin\alpha$

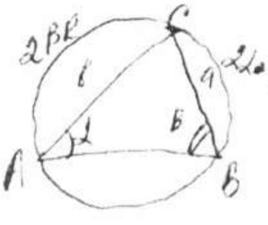
$\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$

$\sin\alpha = \frac{h}{b}$

$\sin\beta = \frac{h}{a}$

если $a \ge b$, то

$\sin\beta \le \sin\alpha$



2) $b < 2\beta R$

$a < 2\alpha R$

$\frac{a}{b} < \frac{2\alpha R}{2\beta R}$

$\frac{a}{b} < \frac{\alpha}{\beta}$

3) $\beta \le \alpha \le 1{,}01\beta \mid :\beta$

$1 \le \frac{\alpha}{\beta} \le 1{,}01$

$\frac{a}{b} \le 1{,}01$

$a \le 1{,}01b$ ч.т.д.

иначе по пункту 1) $b \le a$

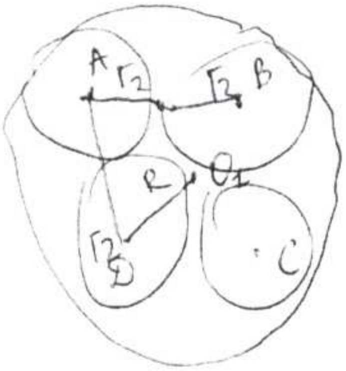
$\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$, т.к. по усл. $1{,}01\beta \ge \alpha \ge \beta$, то $\sin\alpha \ge \sin\beta \Rightarrow \frac{a}{b} \ge 1 = \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha}$

№8 А, Л, Ф

(1) промеж. порядок

(2) ЛА → ФФ, АФ → ЛЛ, ФА → АА, ЛЛ → АФ, ФФ → ЛА, АЛ → ФЛ

ЛЛ А ФАЛ А ФФАЛА ФФ ФАЛАФФ ФФ АЛЛ



Запрещается делать пометки, раскрывающие авторство работы

Оценочный бланк олимпиадных заданий по математике

Код участника: 713149

Номер задания		1	2	3	4	5	6	7	8
Полученные баллы	Первый проверяющий	7 Вол	8 Лис	~~[illegible]~~ 12 Лис	12 Вол	12 Лис	11 Вол	0 Кочерова	0 Кочерова
	Второй проверяющий	7	~~[illegible]~~ 5	12	12	12	11	0	0
	Итого	7	~~[illegible]~~	12	12	12	11	0	0
Сумма баллов (оценка)		~~58~~ 59							

Члены жюри:

Подпись	Фамилия И.О.
[signature]	Кочерова А.С.
[signature]	В.Б. Лисин
[signature]	Волкова Е.С.

ФГОБУ ВО «Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации»

Всероссийская олимпиада школьников «Миссия выполнима. Твое призвание-финансист!»

ПО МАТЕМАТИКЕ 11 класс

Заключительный (очный) этап
2017/2018 учебный год

713 149

Код участника

Вариант I

Задание 1. (10 баллов)

Даны последовательность чисел $x_1, x_2, \ldots$, такая, что $x_1 = 79$ и $x_n = \dfrac{n}{x_{n-1}}$ для всех $n > 1$. На сколько нулей оканчивается число равное произведению $x_1 x_2 \ldots x_{2018}$?

Задание 2. (10 баллов)

Найдите наименьшее значение функции $f(x) = |x| + 2|x-1| + 3|x-2| \ldots + 11|x-10|$

Задание 3. (12 баллов)

Сколько различных корней имеет уравнение $f\big(f\big(f(x)\big)\big) = 1$, если $f(x) = x - \dfrac{2}{x}$?

Задание 4. (12 баллов)

Сотрудники фирмы делятся на трудяг и лентяев. В 2016 году средняя зарплата трудяг превышала в два раза среднюю зарплату лентяев. Повысив свою квалификацию, трудяги в 2017 году стали получать на 50% больше, а зарплата лентяев не изменилась. При этом часть лентяев уволили в конце 2016 года. Средняя зарплата всех сотрудников в 2017 году стала на 20% больше, чем была в 2016 году. Найдите сколько процентов от общего числа сотрудников составляли в 2017 году трудяги, если в 2016 году их было 10%.

713149

Чистовик.

№1.

$x_1=79$

$x_n=\frac{n}{x_{n-1}}$

Рассмотрим произведение $x_{2n-1}\cdot x_{2n}=\frac{(2n-1)}{x_{2n-2}}\cdot\frac{2n}{x_{2n-1}}=2n$

Тогда $\underbrace{x_1x_2}_{2}\underbrace{x_3x_4}_{4}\underbrace{x_5x_6}_{6}\ldots\underbrace{x_{2017}x_{2018}}_{2018}=2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot2018$.

В этом произведении есть числа делящиеся на 10, на 100 и на 1000. На 10 делится $\left[\frac{2018}{10}\right]=201$ число, на 100 $\left[\frac{2018}{100}\right]=20$, на 1000 $\left[\frac{2018}{1000}\right]=2$

Сумма этих трех чисел и будет кол-вом нулей, поскольку среди чисел, делящ. на 10, есть и те, которые делятся на 100, и те, которые делятся на 1000, но те, которые делятся на 100, дают 2 нуля, поэтому их надо считать 2 раза, и мы как раз там считаем их дважды (один раз в числе тех, что делятся на 10, второй – в числе тех, что делятся на 100). Аналогично с теми, что делятся на 1000 – их мы считаем 3 раза. Тогда ответ $201+20+2=223$

Не учтена кратность 25, 125, 625..

Ответ: 223.

1

№3.

$f(x)=x-\frac{2}{x}=\frac{x^2-2}{x}$

$f(f(x))=\frac{\left(\frac{x^2-2}{x}\right)^2-2}{\left(\frac{x^2-2}{x}\right)}=\frac{(x^2-2)^2-2x^2}{(x^2-2)x}=\frac{x^4-4x^2+4-2x^2}{(x^2-2)x}=\frac{x^4-6x^2+4}{(x^2-2)x}=$

$=\frac{x^4-2x^2+4-4x^2}{(x^2-2)x}=\frac{x^2(x^2-2)}{(x^2-2)x}+\frac{4-4x^2}{x(x^2-2)}=x+\frac{4-4x^2}{x(x^2-2)}$

$f(x)=x-\frac{2}{x}=\frac{x^2-2}{x}$

если $f(x)=1$, то $x^2-2-x=0$, т.е $x=-1$, $x=2$

то есть если $f(f(f(x)))=1$, то либо $f(f(x))=2$, либо $f(f(x))=-1$

если $f(x)=2$, то $x^2-2x-2=0$ – два различных корня это уравнение имеет. ($x=1+\sqrt{3}$, $x=1-\sqrt{3}$)

если $f(x)=-1$, то $x^2-2+x=0$, т.е. $x=-2$, $x=1$

если $f(f(x))=2$, то $f(x)=$

—

№4.

	2016	2017
трудяги	x	x
лентяи	$9x$	$9x-y$
з/п трудяг	$a\ (2b)$	$1{,}5a\ (3b)$
з/п лентяев	b	b

ср. з/п трудяг равна a,
ср. з/п лентяев равна b в 2016 г.
$\Downarrow$
$a=2b$

ср. з/п всех в 2016 $= \dfrac{2bx+9bx}{10x} = \dfrac{11}{10}b$

ср. з/п всех в 2017 $= \dfrac{3bx+(9x-y)b}{10x-y} = \dfrac{11}{10}b\cdot 1{,}2$

$$\frac{3x+9x-y}{10x-y}=1{,}32$$

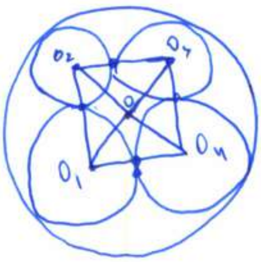
$\dfrac{12x-y}{10x-y}=1{,}32$, $\quad \dfrac{2x}{10x-y}+1=1{,}32$

$\dfrac{2x}{10x-y}=0{,}32$

$\dfrac{x}{10x-y}=0{,}16$, что и нужно было найти

Ответ: 16%

№5



$\Delta OO_2O_3=\Delta OO_2O_1=\Delta OO_1O_4=\Delta OO_3O_4 \Rightarrow$ все они прямоугольные со сторонами $R-r$, $R-r$ и $2r$, если R – радиус большой окружности, а r – маленьких.

Тогда $2(R-r)^2=4r^2$ по т. Пифагора

$2R^2+2r^2-4Rr=4r^2$

$r^2+2Rr-R^2=0$

$D=4R^2+4R^2=8R^2$

$\sqrt{D}=2\sqrt{2}R$

$r_1=\dfrac{-2R+2\sqrt{2}R}{2}=\sqrt{2}R-R$, то есть $\dfrac{r}{R}=\sqrt{2}-1$ на любом шаге

$r_2<0 \Rightarrow$ н.к.

То есть если на первом шаге радиус нарисованной окр-ти 1, то на втором – $\sqrt{2}-1$, на третьем $(\sqrt{2}-1)^2$, на четвертом $(\sqrt{2}-1)^3$ и т.д.

Рассмотрим изменения белой площади по шагам:

1ый шаг 0
2ой шаг $+4\pi(\sqrt{2}-1)^2$
3ий шаг $-16\pi(\sqrt{2}-1)^4$
4ый шаг $+64\pi(\sqrt{2}-1)^6$
5ый шаг $-256\pi(\sqrt{2}-1)^8$ и т.д.

Заметим, что ч С является, V бесконечно убывающей геом. прогрессии

со знаменателем $16(\sqrt{2}-1)^4 = \left(2(\sqrt{2}-1)\right)^4 = (2\sqrt{2}-2)^4$

Посчитаем сумму:

$$\frac{b_1}{1-q} = S = \frac{4\pi(\sqrt{2}-1)^2}{1-16(\sqrt{2}-1)^4} - \frac{16\pi(\sqrt{2}-1)^4}{1-16(\sqrt{2}-1)^4} = \frac{4\pi(\sqrt{2}-1)^2-16\pi(\sqrt{2}-1)^4}{1-16(\sqrt{2}-1)^4} =$$

$$= \frac{\pi\left((2\sqrt{2}-2)^2 - (2\sqrt{2}-2)^4\right)}{1-16(\sqrt{2}-1)^4} = \frac{\pi(2\sqrt{2}-2-12+8\sqrt{2})(2\sqrt{2}-2+12-8\sqrt{2})}{(1-12+8\sqrt{2})(1+12-8\sqrt{2})} =$$

$$= \frac{\pi(10\sqrt{2}-14)(10-6\sqrt{2})}{(8\sqrt{2}-11)(13-8\sqrt{2})}$$ ← Ответ.

+

№6.

$(a+\sqrt{1+a^2})(b+\sqrt{1+b^2})=1.$

~~1) Докажем $a>-b$~~

~~тогда $(a+\sqrt{1+a^2})(b+\sqrt{1+b^2}) = ab+a\sqrt{1+b^2}+b\sqrt{1+a^2}+\sqrt{1+a^2}\sqrt{1+b^2}$~~

~~т.к. $a>-b$, то $ab>-b^2$~~

~~$a>-b \Rightarrow a\sqrt{1+b^2}>-b\sqrt{1+b^2}$~~

~~$a>-b \Rightarrow$~~

~~$a>-b \Rightarrow$~~

a и b - действительные числа. Если и a, и b > 0, то тогда a и b положительными одновременно быть не могут

$a+\sqrt{1+a^2} > 1+a > 1$

$b+\sqrt{1+b^2} > 1+b > 1$ $\Rightarrow$ a и b (т.к. произведение будет > 1)

если a и b < 0, то тогда

~~$a+\sqrt{1+a^2} < |a|+1+a \le 1$, поскольку~~

$a+\sqrt{1+a^2} < a+\sqrt{1+a^2+2|a|} = a+\sqrt{(1+|a|)^2} = a+1+|a| = 1$ если $a<0$

$(1+|a|>0)$

аналогично $b+\sqrt{1+b^2}<1$ если $b<0$

При этом $a+\sqrt{1+a^2} > a+\sqrt{a^2} = a+|a| \geq 0$

$b+\sqrt{1+b^2} > 0$

⇓

если $b,a<0$, то $(a+\sqrt{1+a^2})(b+\sqrt{1+b^2})<1$, т.к. оба множителя >0 и <1.

Значит, a и b разных знаков. или $a=b=0$

Пусть б.о.о. $a>0$, $b<0$, $-b>0$

Докажем $a>-b$. Тогда $(a+\sqrt{1+a^2})(b+\sqrt{1+b^2}) = ab+a\sqrt{1+b^2}+b\sqrt{1+a^2}+\sqrt{1+a^2}\sqrt{1+b^2}$

$$a>-b \Rightarrow \begin{cases} ab > -b^2 \\ a\sqrt{1+b^2} > -b\sqrt{1+b^2} \\ \sqrt{1+a^2} > \sqrt{1+b^2} \end{cases}$$ т.к. $a>-b \Rightarrow a^2>b^2$ (и a, и $-b$ положительно)

Значит, при замене a на $-b$ наше выражение строго уменьшается, а его значение от $a=-b$ равно единице $\Rightarrow$ первоначальное выражение было больше 1

Аналогично в случае $a<-b$ первоначальное выражение будет меньше 1. Значит, единственный возможный случай $a=-b$.

+

N3.

$f(x)=x-\frac{2}{x}$ $\quad f(x)=1 \Rightarrow x-\frac{2}{x}=1 \Rightarrow x^2-x-2=0 \Rightarrow x=2,\ x=-1$

$f(f(f(x)))=1$

$f(f(x))=2$

если $f(x)=2$, то $x-\frac{2}{x}=2$, $x^2-2x-2=0$,
$x=1+\sqrt{3}$
$x=1-\sqrt{3}$

$f(f(x))=-1$

если $f(x)=-1$, то $x-\frac{2}{x}=-1$,
$x^2+x-2=0$
$x=-2$
$x=1$

$f(x)=1+\sqrt{3}$

$x-\frac{2}{x}=1+\sqrt{3}$

$x^2-(1+\sqrt{3})x-2=0$

$D>0$ есть 2 корня

$D=1+2\sqrt{3}+3+8=12+2\sqrt{3}$

$x_1=\frac{1+\sqrt{3}+\sqrt{12+2\sqrt{3}}}{2}$

$x_2=\frac{1+\sqrt{3}-\sqrt{12+2\sqrt{3}}}{2}$

$f(x)=1-\sqrt{3}$

$x-\frac{2}{x}=1-\sqrt{3}$

$x^2-x(1-\sqrt{3})-2=0$

$D=1-2\sqrt{3}+3+8=12-2\sqrt{3}$

$x_1=\frac{1-\sqrt{3}+\sqrt{12-2\sqrt{3}}}{2}$

$x_2=\frac{1-\sqrt{3}-\sqrt{12-2\sqrt{3}}}{2}$

$f(x)=1$

$x-\frac{2}{x}=1$

$x^2-x-2=0$

$x=2$

$x=-1$

$f(x)=-2$

$x-\frac{2}{x}=-2$

$x^2+2x-2=0$

$x=-1-\sqrt{3}$

$x=-1+\sqrt{3}$

Совпадающих корней нет $\Rightarrow$ $f(f(f(x)))=1$ имеет 8 различных корней

Ответ: 8

N2.

$f(x)=|x|+2|x-1|+3|x-2|+\ldots+11|x-10|$

f.

при $x>10$ сумма коэф-ов положительна

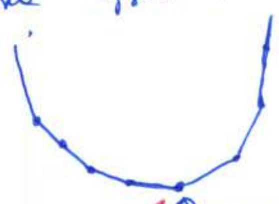
при $10>x>9$ тоже положительна $\quad \frac{9\cdot 8}{2}-21=15$

при $9>x>8$ равна $1+2+\ldots+8+9-10-11=\frac{8\cdot 7}{2}-30=-2$

при $8>x>7$ равна $1+2+\ldots+8-9-10-11=$

далее сумма коэф-ов будет становиться всё меньше, график на отрезке всё круче

Вид графика будет примерно такой:



минимум

$x=7$

Отрезки прямых. Видно, что наименьшее значение эта функция примет в той точке, где отрицательный коэф-нт при x сменится на положительный, то есть в точке $x=8$.

$f(8)=8+14+18+20+20+18+14+8+10+22=120+32=152$

Ответ: 152.

№8.

Используя эти операции, можно менять две стоящие рядом разные буквы местами, ~~если они стоят в неправильном порядке~~ (то есть АЛ можно заменить на ЛА, ФА на АФ, ЛФ на ФЛ (и наоборот)

Таким образом: меняем порядок на противоположный, меняем нужные буквы на две одинаковые, меняем порядок, меняем буквы. (Либо, если порядок уже правильный, меняем две буквы на один-ые, меняем порядок, меняем две один-ые, возвращаем порядок)

Такими операциями можно достичь нужного результата.

неверно, см. д-во. −

№7 −

Черновик

+13/49

$x_1=79$ $\qquad x_2=\frac{2}{79}$

$x_n=\frac{n}{x_{n-1}}$ $\qquad x_3= \frac{3\cdot 79}{2}$

$x_4=\frac{4\cdot 2}{3\cdot 79}$

$x_1x_2x_3x_4=\frac{\cancel{79\cdot 2}\cdot\cancel{3\cdot 79}\cdot 4\cdot 2}{\cancel{79}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{3\cdot 79}}=8$

$x_1x_2x_3=\frac{\cancel{79\cdot 2}\cdot 3\cdot 79}{\cancel{79}\cdot\cancel{2}}=3\cdot 79$

$x_1x_2=2$

$x_nx_{n+1}=\frac{n(n+1)}{x_{n-1}x_n}$ $\qquad x_1x_2x_3\ldots x_n=\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}{x_1x_2x_3\ldots x_{n-1}}$

$x_5=\frac{5\cdot 3\cdot 79}{4\cdot 2}$

$x_6=\frac{6\cdot 4\cdot 2}{5\cdot 3\cdot 79}$

$x_{2n-1}x_{2n}=\frac{2n-1}{x_{2n-2}}\cdot\frac{2n}{x_{2n-1}}=2n-1\cdot 2n\cdot$

$x^2-2x^2+4-4x^2$

$x^2(x^2-2)+4-4x^2$

$4|x-3|$

$5|x-4|$

$f(x)=|x|+2|x-1|+3|x-2|+\ldots+11|x-10|$

$2018:10=$

201

61

$7|x-6$

$8|x-7|$

$9|x-8|$

$x=5$ $\qquad 20+20+2$

$5+8+9+8+5+0+7+16+$

$f(f(x))=\frac{x^2-2}{x}-2\left(\frac{x}{x^2-2}\right)^2$

$D=36-16=20$

$\frac{x^2-2-6x+6}{x^2-2}=1+\frac{6-6x}{x^2-2}$

$f(f(f(x)))=1$ $\qquad f(x)=x-\frac{2}{x}=\frac{x^2-2}{x}$

$f(f(x))=\frac{\left(\frac{x-2}{x}\right)^2-2}{\left(\frac{x^2-2}{x}\right)}=\frac{\frac{x^2-4x+4}{x}-2}{\left(\frac{x^2-2}{x}\right)}=\frac{x^2-4x+4-2x}{x^2-2}=$

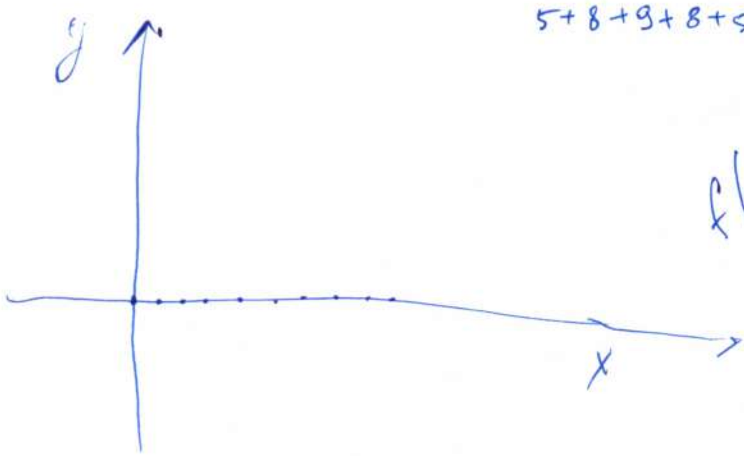
$=\frac{x^2-6x+4}{x^2-2}$

$f(f(f(x)))=1+\frac{6-6\left(\frac{x^2-6x+4}{x^2-2}\right)}{\left(\frac{x^2-6x+4}{x^2-2}\right)^2-2}=1+\frac{6(x^2-2)^2-6(x^2-6x+4)(x^2-2)^2}{x^2-6x+4-2(x^2-2)^2}=1$

$\cancel{6(x^2-2)^2-6(x^2-2)^2=0}$

$(x^2-2)^2(1-x^2-6$

$6(x^2-2)^2-6(x^2-6x+4)(x^2-2)^2=0$



Пусть сотрудников $10x$ в 2016

Трудяги x

лентяи $9y$

$$\frac{S_T}{x} = \frac{2S_\Lambda}{9x} \qquad \frac{S_T + S_\Lambda}{10x} \text{ - ср. з/п всех сотрудников}$$

2017: трудяги x

лентяи $9x - y$

$1{,}5S_T +$

з/п трудяг ~~b~~ a, лентяи b | стала ~~...~~ $3b$, b

$$\frac{ax}{x} = \frac{2b \cdot 9x}{9x}$$

$a = 2b$

$$\frac{2b \cdot x + 9x \cdot b}{10x} = \frac{2b + 9b}{10} = \frac{11}{10}b$$

2016: ср. з/п

$$\frac{11}{10}b \cdot 1{,}2 = \frac{x \cdot 3b + \cancel{9x} (9x-y)b}{10x - y}$$

$$\frac{13{,}2}{10} = \frac{3x + 9x - y}{10x - y}$$

$$1{,}32 = \frac{12x - y}{10x - y} = \frac{10x-y}{10x-y} + \frac{2x}{}$$

$(1-r)^2 + (1-r)^2 = 4r^2$

$1 - 2r + r^2 + 1 - 2r + r^2 = 4r^2$

$2r^2 + 4r - 2 = 0$

$r^2 + 2r - 2 = 0$

$D = 4 + 4 = 8$

$r = \frac{-2 + 2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} - 1$

$\frac{r_2}{r_1} = \sqrt{2} - 1$

$\frac{r_3}{r_2} = \sqrt{2} - 1$

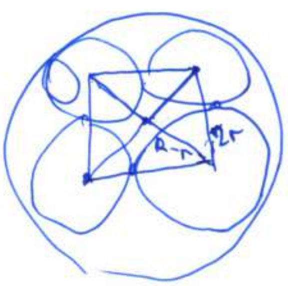
$\frac{r_4}{r_3} = \sqrt{2} - 1$

$\sqrt{2} - 1$

$\frac{r_2}{r_1}$

$4\pi (\sqrt{2} - 1)^2$

$4\pi \cdot \frac{r_2}{r_1} \cdot \frac{r_3}{r_2}$



$2(R-r)^2 = 4r^2$

$2R^2 + 2r^2 - 4Rr = 4r^2$

$2r^2 + 4Rr - 2R^2 = 0$

$r^2 + 2Rr - R^2 = 0$

$D = 4R^2 + 4R^2 = 8R^2$

$\sqrt{D} = 2\sqrt{2}R$

$r = \frac{-2R + 2\sqrt{2}R}{2} = \sqrt{2}R - R =$

$= (\sqrt{2} - 1)R$

$\frac{r}{R} = \sqrt{2} - 1$

второй шаг $+4\pi(\sqrt{2}-1)^2$

третий $-16\pi(\sqrt{2}-1)^3$

четв $+64\pi(\sqrt{2}-1)^4$

пятый $-256\pi(\sqrt{2}-1)^5$

$$16(\sqrt{2}-1)^4 = (2(\sqrt{2}-1))^4 = (2\sqrt{2}-2)^4$$

$$(2\sqrt{2}-2)^2 = 8+4-8\sqrt{2} = 12-8\sqrt{2}$$

$ab + \sqrt{(1+a^2)}\sqrt{1+b^2} + a\sqrt{1+b^2} + b\sqrt{1+a^2} - 1 = 0$

$(a+b)($

$$1-(12-8\sqrt{2})^2 = (1-12+8\sqrt{2})(1+12-8\sqrt{2}) = $$
$$= (8\sqrt{2}-11)(13-8\sqrt{2})$$

$$(2\sqrt{2}-2-12+8\sqrt{2})(2\sqrt{2}-2+12-8\sqrt{2})$$

$$(a+\sqrt{1+a^2})(b+\sqrt{1+b^2}) = 1 \qquad a+b-?$$

$ab + \sqrt{(1+a^2)(1+b^2)} + a\sqrt{1+b^2} + b(\sqrt{1+a^2}) = 1$

$\sqrt{1+b^2}(a$

$\sqrt{1+a^2} > |a| \quad \sqrt{1+b^2} \geq 1$

$\sqrt{1+a^2} \geq 1$

$a=-b$

$a > -b$

$2a \cdot 2b > 1$

$a=-\frac{1}{2}$

$$\sqrt{1+\frac{1}{4}} - \frac{1}{2} = \sqrt{\frac{5}{4}} - \frac{1}{2} = \sqrt{\frac{5}{4}} - \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{\frac{5}{4}-\frac{1}{4}}{\sqrt{\frac{5}{4}}+\sqrt{\frac{1}{4}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{5}{4}}+\frac{1}{2}} < 1$$

$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$\sqrt{1+a^2}$

$y = \sqrt{1+x^2}$

$y^2 = 1+x^2$

$y^2 - x^2 = 1$

$a+\sqrt{1+a^2}$?

$a^2+1+a^2+2a\sqrt{1+a^2}$

$$f(x) = x+\sqrt{1+x^2}$$

$$f'(x) = 1+\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} = 1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = 0$$

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = -1$$

$$-x = \sqrt{1+x^2}$$

$(-b+\sqrt{1+b^2})(\sqrt{1+b^2}+b) = 1$

$1+b^2-b^2 = 1$

$(a+\sqrt{1+a^2})(b+\sqrt{1+b^2})$

При $x<0$:

$x+\sqrt{1+x^2}$

$\sqrt{1+x^2} > \sqrt{x^2} = |x|$

$|x|+x$

$\sqrt{1+a^2}+a < |a|+1+a < 1$

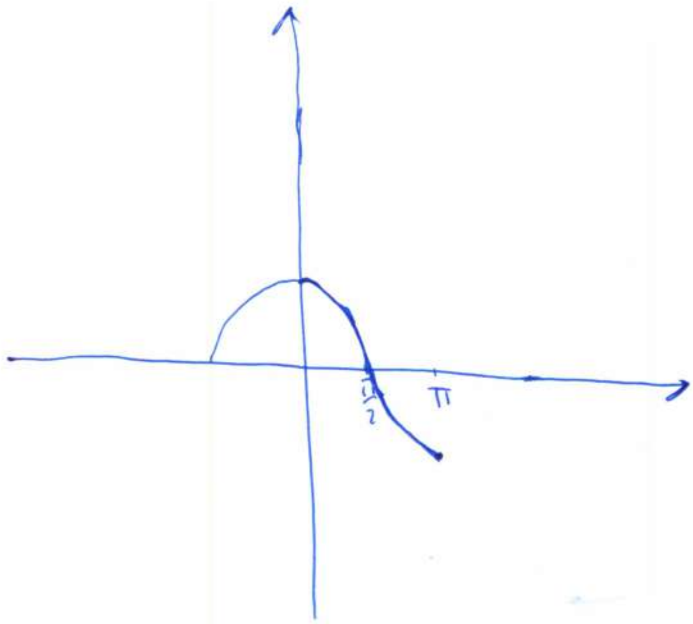
$(|a|+1)^2 = a^2+1+2|a|$

$1+a^2 < a^2+1-2a$

$\sqrt{1+a^2} < \sqrt{(a-1)^2} = |a-1|$

a $\quad 1>1$

$-1>-2$



$\alpha \quad \beta$

$\alpha > \beta$
$\alpha \le 1{,}01\beta$

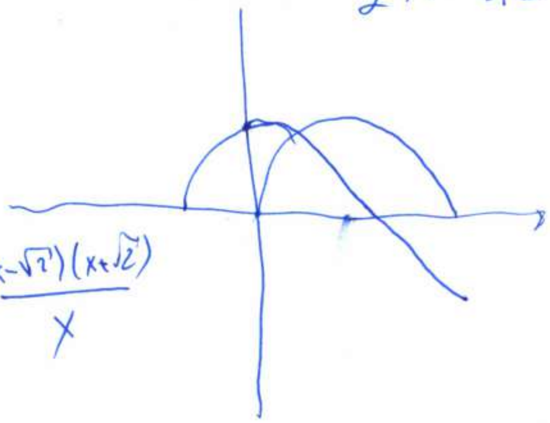
gba [illegible]

$\sin\alpha > \sin\beta$
$\sin\alpha < \sin(1{,}01\beta)$

$1{,}01\beta > \frac{\pi}{2}$

$\alpha > \beta > \frac{\pi}{2{,}02}$

$x - \sqrt{3} + \sqrt{12 - 2\sqrt{5}} = x + \sqrt{3}$



cos

$f(x) = x - \frac{2}{x} = \frac{x^2-2}{x} = \frac{(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})}{x}$

$\alpha > \beta$

$\alpha \le 1{,}01\beta$

$\cos\alpha < \cos\beta$

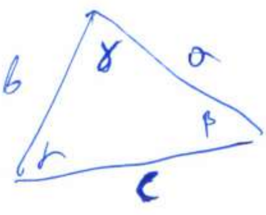
$\cos\alpha$ [illegible] $\cos(1{,}01\beta)$

$x - \frac{2}{x} = 1$

$x^2 - 2 = x$

$x^2 - x - 2 = 0$

$(x-2)(x+1) = 0$



$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$
$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$

$f(x) = 1 \quad$ 2 корня

$f(f(x)) = 1$

$\cancel{c^2} + a^2 - 2ac\cos\beta + a^2 = 2b^2 + \cancel{c^2} - 2bc\cos\alpha$

$a^2 - ac\cos\beta = b^2 - bc\cos\alpha$

$(a-b)(a+b) = c(a\cos\beta - b\cos\alpha)$

$f(f(f(x))) = 1$

$f(f(x)) = 2$

$x - \frac{2}{x} = 2$

$x^2 - 2 - 2x$

$a + b > c$

$a - b < a\cos\beta - b\cos\alpha$

$a(1-\cos\beta) < b(1-\cos\alpha)$

$f(x) = 2$

$\cos\alpha < \cos\beta$

$1 - \cos\beta < 1 - \cos\alpha$

$x^2 + x - 2$

$x - \frac{2}{x} = 2$

$x^2 - 2x - 2$

$D = 4 + 8 = 12$

$\sqrt{D} = 2\sqrt{3}$

$x_1 = \frac{2 + 2\sqrt{3}}{2} = 1 + \sqrt{3}$

$D = 1 + 3 + 2\sqrt{3} + 8 = 12 + 2\sqrt{3}$

№2

$x > 0 \quad x \geq 1 \qquad x - 2x - 3x - 4x - 5x$

$x + 2x + 3x + 4x + 5x + 6x + 7x + 8x - 9x - 10x - 11x$

$\frac{7 \cdot 8}{2} = 28 \qquad \frac{8 \cdot 9}{2} = 32$

ПАФАЛАФФАЛАФФФАЛАФФФФАЛ

ФАЛФАЛФАЛФАЛАФЛАФЛАФЛАФ

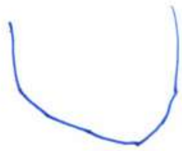
25

$|x| + 2|x-1| + \ldots + 8|x-7| + 9|x-8| + 10|x-9|$
$11|x-10|$

ЛА ↔ ФФ

АФ ↔ АЛ

ФЛ ↔ АА



ААА

АФФФ
ФЛАФ

АЛАФ
ФААФ

ФФАФ
ФААФ

ЛЛ

ЛЛАФАЛАФФАЛАФФФАЛАФФФФАЛЛ
ЛФАЛФАЛФАЛФАЛАФЛАФЛАФЛАФЛ

ЛЛФ →
→А АФ

ЛАА
ААФ
ФФА
ФЛЛ
ААЛ

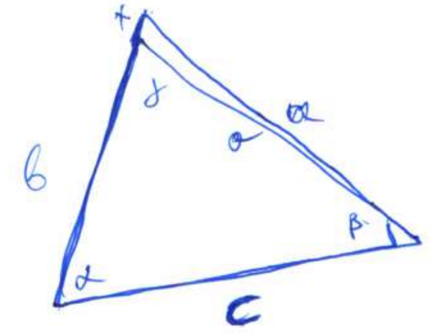
ФЛААА
ФФФАА
ААФФФ
ААЛАФ
ФАЛАА

7.

3·6
4·5

5·4
6·3
7·2

$20 + 18 + 14 + 8 = 38 + 22 = 60$



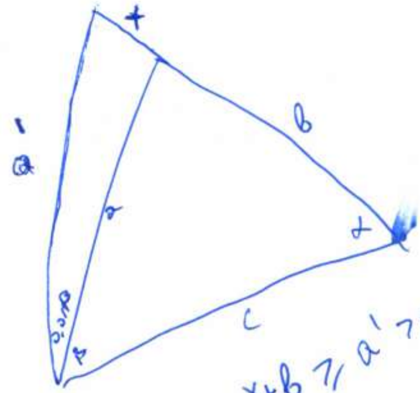
$\alpha > \beta$

$\alpha \leq 1{,}01\beta$

$\sin x - \sin(1{,}01x) = 2\cos(0{,}05x)\cos$

$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$

$(\sin\alpha)' = \cos\alpha$



$x+b \geq a' > a > b$

$x+b = a'^2 + c^2 - 2a'c\cos(1{,}01\beta)$

$b = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$

III

ΛΦΑΦ
ΦΑΛΦ

ΛΦΑ → ΦΑΛ ?

ΦΑΛ

ΛΛ / ΑΛ → ΦΑ
ΑΦ / ΦΑ → ΛΛ

ΛΦ / ΦΛ → ΑΛ

II

ΦΦΑΛ
ΑΛΦΑ

ΦΛΛΛ
ΑΑΛΛ
ΑΛΦΦ
ΑΛΛΦ

ΑΦΛΦΑΛΑΦΦΑΛΑΦΦΦΑ ΛΑΦΦΦΦΑΛΛ
ΑΦΑΦΑΛΦΑΛΦΑΛΛΦΛΑΦΛΑΦΛΑΦΛ

I ΛΛΑ
ΛΦΑ

ΛΦΦ
ΑΦΑ

ΑΦΦΦΑ
ΑΛΦΦΛΛ

Всероссийская олимпиада школьников «Миссия выполнима. Твое призвание-финансист!»

ПО МАТЕМАТИКЕ 11 класс

Заключительный (очный) этап 2017/2018 учебный год

713165

Код участника

Вариант II

Задание 1. (10 баллов)

Даны последовательность чисел $x_1, x_2, \ldots$, такая, что $x_1 = 29$ и $x_n = \dfrac{n}{x_{n-1}}$ для всех $n > 1$. На сколько нулей оканчивается число равное произведению $x_1 x_2 \ldots x_{1012}$?

Задание 2. (10 баллов)

Найдите наименьшее значение функции $f(x)=|x+1|+2|x+2|+3|x+3|\mathrm{K}+10|x+10|$.

Задание 3. (12 баллов)

Сколько различных корней имеет уравнение $f(f(f(x)))=2$, если $f(x)=x-\dfrac{1}{x}$?

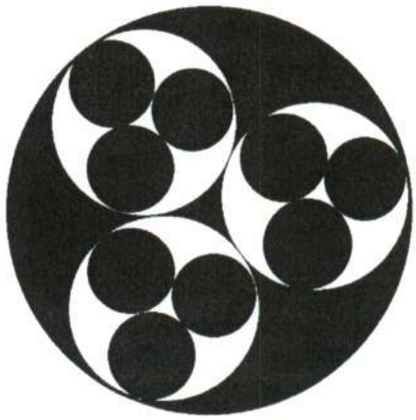
Задание 4. (12 баллов)

Сотрудники фирмы делятся на трудяг и лентяев. В 2016 году средняя зарплата трудяг превышала в два раза среднюю зарплату лентяев. Повысив свою квалификацию, трудяги в 2017 году стали получать на 50% больше, а зарплата лентяев не изменилась. При этом часть лентяев уволили в конце 2016 года. Средняя зарплата всех сотрудников в 2017 году стала на 20% больше, чем была в 2016 году. Найдите сколько процентов от общего числа сотрудников составляли в 2017 году трудяги, если в 2016 году их было 10%.

713165

Задача 5. (12 баллов)

На первом шаге на листе бумаги была изображена единичная окружность и ограниченный ею круг закрашен черной краской. На каждом из последующих шагов для каждой из окружностей, изображенных на предыдущем шаге, рисуются три новые касающихся ее внутренним образом окружности равных радиусов. Эти три окружности касаются друг друга внешним образом. Круги, ограниченные новыми окружностями, закрашиваются белой краской, если номер шага четное число, или черной краской, если номер шага нечетен. На рисунке изображен результат трех шагов. Описанный процесс продолжается до бесконечности. Найдите площадь белой области.



Задание 6. (14 баллов)

Действительные числа a и b таковы, что $\left(a+\sqrt{1+a^2}\right)\left(b+\sqrt{1+b^2}\right)=1$. Найдите сумму $a+b$. 0

Задание 7. (14 баллов)

Назовем положительное число a близким сверху к положительному числу b, если a превосходит b, но не больше чем на 0,5%. Докажите, что если в треугольнике радианная мера одного из углов близка сверху к радианной мере другого угла, то найдутся две стороны этого треугольника такие, что длина одной из них близка сверху к длине другой.

Задача 8. (16 баллов)

В алфавите языка альфов три буквы *А*, *Л* и *Ф*. Все слова этого языка можно построить, применяя последовательно следующие правила к любому слову из этого языка:

(1) поменять порядок букв в слове на противоположный

(2) заменить две последовательные буквы так: *ЛА* → *ФФ*, *АФ* → *ЛЛ*, *ФЛ* → *АА*, *ЛЛ* → *АФ*, *ФФ* → *ЛА* или *АА* → *ФЛ*.

Известно, что *ЛЛАФФФФАЛАФФФАЛАФФАЛАФАЛЛ* – это слово из языка альфов. Есть ли в языке альфов слово *ЛФАЛФАЛАФЛАФЛАФЛАФЛАФЛАФЛ*?

Нет

Оценочный бланк олимпиадных заданий по математике

Код участника: 713165

Номер задания		1	2	3	4	5	6	7	8
Полученные баллы	Первый проверяющий	7	0	6	12	0	14	0	16
	Второй проверяющий	7	0	6	12	2	14	0	16
	Итого	7	0	6	12	2 ~~0~~	14	0	16
Сумма баллов (оценка)		57							

Члены жюри:

Подпись	Фамилия И.О.
	В.Б. [illegible]
	Маевск[illegible]
	Кочерова А.С.

Чистовик 713165

№1 $x_{n-1}\cdot x_n = x_{n-1}\cdot\frac{n}{x_{n-1}} = n$

т.е. ~~сумма~~ произведение любых двух ~~членов~~ соседних членов последовательности будет равно ~~на~~ большему номеру из двух. ($x_1x_2=2$; $x_2x_3=3$ и т.д.)

Т.к. в условии произведение членов с номерами от 1 до 1012, т.е. множителей чётное количество, то будем брать произведения (номера $m=2k-1$, $k\in N$ и $m+1=2k$, т.е. последовательные члены с нечётным, а потом чётным номером. (~~x_1x_2; x_5x_6; $x_{511}x_{512}$ и подобные~~) (x_1x_2; x_3x_4; ...; $x_{1011}x_{1012}$)

В таком случае каждая пара будет давать чётное число от 2 до 10.., значит в произведение из условия можно представить как произведение ~~только~~ всех чётных чисел от 2 до 1012. Нули значит будем брать только из круглых чисел. В первой сотне это 10; 20; 30; 40; 50; 60; 70; 80; 90; 100, т.е. 11 нулей (12 т.к. 50 даст еще 1 ноль) из первой сотни, аналогично до девятой сотни, но в десятой сотне последнее круглое уже четырёхзначное (1000), а значит в десятой сотни 12 нулей, еще один ноль из числа 1010.

$11\cdot 9+12+1=112$ нулей. Ответ: 112.

±

№3

$x-\frac{1}{x}=$ Пусть $f(x)=a$ ~~$a>0$~~, тогда

$x-\frac{1}{x}=a$

$\frac{x^2-ax-1}{x}=0$ → $x\neq 0$

$D=a^2+4>0$

$x=\frac{a\pm\sqrt{a^2+4}}{2}$, т.к. $\frac{a\pm\sqrt{a^2+4}}{2}$ не может быть равен нулю т.к. иначе $\left[\begin{array}{l} a+\sqrt{a^2+4}=0 \\ a-\sqrt{a^2+4}=0 \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} a^2+2=0 \\ 4=0 \end{array}\right.$ Нет решения

т.е. уравнен всегда имеет 2 корня при любом a.

Т.е. $f(x)=2$ будет иметь 2 корня,
тогда $f(f(x))=2$ будет иметь 4 корня,
тогда $f(f(f(x)))=2$ будет иметь $2\cdot 2\cdot 2=8$ корней.

Ответ: 8

+/2

? ? Требует обоснования

№4 Пусть $S_{ч}$ - всего ~~рабочих~~ сотрудников в 2016 году;

$S_{1ч}$ - всего ~~рабочих~~ сотрудников в 2017 году

$x_т$ - ~~процент~~ доля трудяг от всех в 2017 году

$T_р$ - средняя зарплата трудяг в 2016 году.

Тогда $\frac{T}{2}_р$ - средняя зарплата лентяев.

$1{,}5T_р$ - средняя зарплата трудяг в 2017 году

$(1-x)$ - доля лентяев от всех в 2017 году

$0{,}1S$ - всего трудяг в 2016

xS_1 - всего трудяг в 2017

$0{,}9S$ - всего ~~трудяг~~ лентяев в 2016

$(1-x)S_1$ - всего лентяев в 2017.

т.к. общая средняя зарплата выросла на 20%, т.е. в 1,2 раза, то составим и решим уравнение.

$$1{,}2\left(\frac{0{,}1ST+0{,}9S\frac{T}{2}}{S}\right)=\frac{xS_1\cdot 1{,}5T+(1-x)S_1\cdot\frac{T}{2}}{S_1}$$

$$1{,}2\cdot 0{,}55T = 1{,}5Tx+\frac{T}{2}-0{,}5Tx$$

$$0{,}66T = Tx+0{,}5T$$

$$0{,}16T=Tx$$

$x=0{,}16$ или 16% трудяг от общего количества в 2017

Ответ: 16.

№6. Равенство выполняется, если обе скобки левой части взаимнообратные. Пусть $a+\sqrt{1+a^2}=x$, $x\neq0$ по условию,

$\sqrt{1+a^2}=x-a$

$1+a^2=x^2-2ax+a^2$

$x^2-1=2ax$

$a=\frac{x^2-1}{2x}$, в таком случае $b+\sqrt{1+b^2}=\frac{1}{x}$, аналогично

$b=\frac{\frac{1}{x^2}-1}{\frac{2}{x}}$

$b=\frac{1-x^2}{2x}$, тогда

$a+b=\frac{x^2-1}{2x}+\frac{1-x^2}{2x}=0$.

Пример таких чисел при $x=2$, $a=\frac{4-1}{4}=\frac{3}{4}$; $b=-\frac{3}{4}$; $\frac{3}{4}-\frac{3}{4}=0$.

$\left(\frac{3}{4}+\sqrt{1+\frac{9}{16}}\right)\left(-\frac{3}{4}+\sqrt{1+\frac{9}{16}}\right)=2\cdot\frac{1}{2}=1$.

Ответ: 0.

№8 Пусть A - количество букв „А" в слове
L - количество букв „Л" в слове
F - количество букв „Ф" в слове

~~В исходном слове~~

По условию мы можем заменить две разные буквы тремя другими одинаковыми, но не этими же самыми, а третьей.
Аналогично, наоборот,
т.е. при ~~замене~~ любой замене или:
~~A или L~~ A, L или F возрастает на 2, остальные уменьшаются на один;

или:
A, L или F уменьшается на 2, остальные возрастают на один.
В обоих случаях разница между одним из количеств и двумя другими меняется на 3, ~~а между двумя по~~ а между двумя последними разница не меняется, т.е. разница всегда должна быть начальная плюс число кратное.
В исходном слове $A = 8$; $Л = 7$; $Ф = 10$,
а стремимся мы к $A = 8$; $Л = 9$; $Ф = 8$.
А разница между Ф и Л была $10 - 7 = 3$, а стала $8 - 9 = -1$, т.е. изменилась на 4, ~~также со~~ аналогично ~~[illegible]~~ разница между Ф и А изменилась на 2, между Л и А на 2, значит слово составить ~~[illegible]~~, следуя правилам языка, нельзя. Ответ: нет.

~~N~~ №2.

График функции $f(x) = |x+1| + 2|x+2| + 3|x+3| + \dots + 10|x+10|$ представляет из себя ломаную линию. $D(f) = R$. Минимальное значение функции достигается в точке, где общий коэффициент функции из отрицательного переходит в положительный.
Т.к. график ломаная, то ~~[illegible]~~ коэффициент касательной к точке на определ. прямой отрезке ~~звене~~ равен производной и коэффициенту функции этого ~~[illegible]~~ отрезка

~~Т.к.~~ Так, при ~~x~~ $x > -1$,

$k_1 = f'(x) = 1+2+3\cancel{k}+10 = 13+3\cancel{k} = 16 > 0$

при $-2 < x < -1$

$k_2 = f'(x) = -1+2+3\cancel{k}+10 = 11+3\cancel{k} = 14 > 0$

при $-3 < x < -2$

$k_3 = -1-2+3\cancel{k}+10 = 7+3\cancel{k} = 10 > 0$

при $-10 < x < -3$

$k_4 = -1-2-3\cancel{k}+10 = 7-3\cancel{k} = 4 > 0$

и при $x < -10$

$k_5 = -13-3\cancel{k} = -16 < 0$

~~Если $k <$~~ Значит вт. где $|x+10| = 0$ происходит перелом с отрицательного наклона на положительный.

т.е. минимум функции достигается при $x = -10$

$f(-10) = |-10+1| + 2|-10+2| + 3|-10+3| + 10|-10+10| = 9 + 2\cdot 8 + 3\cdot 7 = 9+16+21 = 46.$

Ответ: 46.

−

рассмотрел частный случай $k = 1$

$\frac{3}{4} + \sqrt{1 + \frac{9}{16}}$

$\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{16}} = \frac{3}{4} + \frac{5}{4} = 2$ $-\frac{3}{4} + \frac{5}{4} = \frac{1}{2}$

~~T~~ - ч. зараб. пр. S_1 - ~~кол. т. отм. кол. л.~~

~~P~~ L - ч. зараб. л. S_L - отм кол. л. Sкол. раб

$T = 2L$

~~0,1T~~ $\frac{0{,}15 \cdot T + 0{,}95\frac{T}{2}}{S} = 0{,}1T + 0{,}45T = 0{,}55T$ - ср. зарп. в 2016 г.

$\frac{x^2-1}{2x} = \frac{3}{4}$ $\frac{1-4}{2 \cdot 2} = -\frac{3}{4}$

$a = \frac{x^2-1}{2x}$ $b = \frac{1-x^2}{2x}$

$a+b\, S_1$

$a+b = \frac{x^2-1+1-x^2}{2x} = \frac{0}{2x} = 0$

$\frac{x\, S_1 \cdot 1{,}5T + (1-x)S_1 \frac{T}{2}}{S_1} = 1{,}5xT + (1-x)\frac{T}{2} = 1{,}5xT + \frac{T}{2} - \frac{xT}{2} = xT + \frac{T}{2}$

$a + \sqrt{1+a^2} = x$ $a + \sqrt{1+a^2} = 1$ $a + \sqrt{1+a^2} = 2$

$1 + a^2 = x^2 - 2xa + a^2$ $1 + a^2 = 1 - 2a + a^2$ $1 + a^2 = 4 - 4a + a^2$

$2xa = x^2 - 1$ $xT + \frac{T}{2} = 1{,}2 \cdot 0{,}55T$ $-2a = 0$

$a = \frac{x^2-1}{2x}$ $xT + 0{,}5T = 0{,}66T$

3^3

~~$xT =$~~

$x = 0{,}16$

12, 55, 60, 60, 660

$16 \cdot 16$, 2^4, 2^4

3^6 $b + \sqrt{1+b^2} = \frac{1}{a + \sqrt{1+a^2}}$

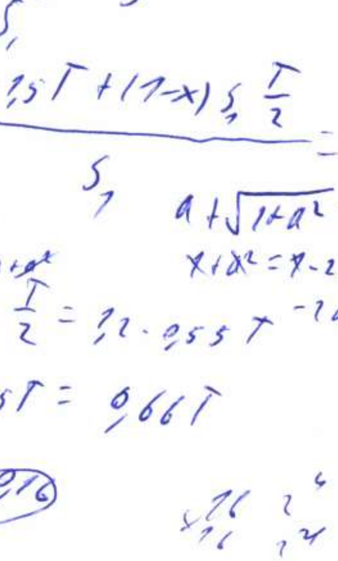
81, 9 $ab + a\sqrt{1+b^2} + b\sqrt{1+a^2} + \sqrt{1+b^2}\sqrt{1+a^2}$

729 $ab + a\sqrt{1+b^2} + b\sqrt{1+a^2} + \sqrt{1+a^2+b^2+a^2b^2}$

$16\sqrt{3}$ $\vee$ 24

$\sqrt{768} > \sqrt{729}$

$\times 256$



$S = \frac{\pi}{3}$

πr^2

$(a + \sqrt{1+a^2})(b + \sqrt{1+b^2}) = 1$

$b = \frac{\frac{1}{x^2} - 1}{2 \cdot \frac{1}{x}} = \frac{\frac{1-x^2}{x^2}}{\frac{2}{x}} = \frac{(1-x^2) \cdot x}{x^2 \cdot 2} = \frac{1-x^2}{2x}$

$1 + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2+\sqrt{3}}{2}$

$a + \sqrt{1+a^2} = 1$

$\sqrt{1+a^2} = 1 - a$

$1 + a^2 = 1 - 2a + a^2$

$\sqrt{2}\ \frac{2+\sqrt{3}}{2}$

$\pi - (4 - 2\sqrt{3})^2 \pi =$

$\pi - 16\pi + 16\sqrt{3}\pi - 12\pi$

$= -27\pi + 16\sqrt{3}\pi$

$r + \frac{2\sqrt{3}}{3} r = 1$

$r\,\frac{3 + 2\sqrt{3}}{3} = 1$

$r = \frac{3}{3 + 2\sqrt{3}}$ $\frac{2}{2+\sqrt{3}}$

$\frac{4 - 2\sqrt{3}}{4 - 3} = 4 - 2\sqrt{3} - r$ мень.

~~πr^2~~

$a^2 - 3a = 0$

$a = 0$

$a - 3 =$

$\pi - \pi\,\frac{4 + 4\sqrt{3} + 3}{4} = 0$

$\pi - \pi - \pi\sqrt{3} - 0{,}75\pi = 0$

$0 + 3$

$\frac{13}{3}$ $\frac{11}{3}$ $\frac{7}{3}$

$-\frac{1}{3}$

$(16\sqrt{3}\pi - 27\pi)R$

$(16\sqrt{3}\pi - 27\pi)R$ ~~$S\pi$~~ $+ 16\sqrt{3}\pi - 27\pi$

$(16\sqrt{3}\pi - 27\pi)(R_1 + R_2 + R_3)$

$(16\sqrt{3}\pi - 27\pi)R$

если $k\ 1 - 3 - 3k \leq 10$ $x + 10 = 0$

$k\ 1 - (-3k) > 10$

$10 > 1 + 2 + 3k$

$\frac{10}{7} > 3k$ $\frac{x}{3} = k$

Черновик 713165

Если $x \geq 1$

$f(x) = x \cdot 1 + 2x \cdot 4 + 3x\,k + 9k + 10x + 100$

$f'(x) = 1 + 2 + 3k + 10$

$\frac{1+2\sqrt{2}+2-1}{1+\sqrt{2}}$

$\frac{x^2-1}{x} = a$

$2 - \frac{1}{2} = 1{,}5$

$\frac{x^2-ax-1}{x} = 0$

$1+\sqrt{2} - \frac{1}{1+\sqrt{2}}$

$\cancel{D = 1^2+4 = 5}$

$D = 1+1 = 2$ $\quad D = a^2+4$

$x - \frac{1}{x} = 2$

$1 \pm \sqrt{2}$ $\quad \frac{a \pm \sqrt{a^2+4}}{2} = a$

$\frac{x^2-1}{x} = 2$

$a = \pm\sqrt{a^2+4}$

$a^2 = a^2+4$

$4 = 0$

$\frac{x^2-2x-1}{x} = 0$

$\frac{x^2-1}{x} = 1+\sqrt{2}$

$\frac{x^2-x-\sqrt{2}x-1}{x} = 0$ $\quad f(f(f(x))) = 2$

$D > 0$

$x - \frac{1}{x} = \frac{x^2-1}{x}$

$\frac{1+2\sqrt{2}+2-2-2\sqrt{2}-1}{1+\sqrt{2}} = 0$

$f(f(x - \frac{1}{x})$

$f(x) = 2$ 2к.

$f(f(x)) = 2$ 4к. $\quad \left(\left(x - \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{\left(x-\frac{1}{x}\right)}\right) - \frac{1}{\left(x-\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{\left(x-\frac{1}{x}\right)}} = 2$

$f(f(f(x))) = 8k.$

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10

$(x^4-3x^2+1)^2 = x^8 - 3x^6 + x^4 - 3x^6 + 9x^4 - 3x^2 + x^4 - 3x^2 + 1 = x^8 - 6x^6 + 11x^4 - 6x^2 + 1$

$D = 9-4 = 5$

$\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$

$\left(\frac{x^2-1}{x} - \frac{x}{x^2-1}\right) - \frac{1}{\frac{x^2-1}{x} - \frac{x}{x^2-1}} = 2$

$\frac{x^4-2x^2+1-x^2}{x^3-x} - \frac{x^3-x}{x^4-3x^2+1} = 0$

$(x^3-x)^2 = x^6 - 2x^4 + x^2$

$\frac{x^8 - 7x^6 + 13x^4 - 7x^2 + 1}{x(x^2-1)(x^4-3x^2+1)}$

$a > b$ $a \leq 1{,}005b$

$\alpha = \frac{180^\circ}{\pi} x$ 180°

$\beta = \frac{180^\circ}{\pi} y$

$\frac{180^\circ}{\pi} x > \frac{180}{\pi} y$

$\frac{180}{\pi} x \leq \frac{180 \cdot 1{,}005}{\pi} y$

$1{,}005 \times 180 = 80400 + 1005 = 180{,}900$

$x > y$

$x \leq 1{,}005y$

7A 9Λ

8A → 8A 9Λ

10Ф 8Ф 7A

9Ф

3Δ = 3 если Δ = 0

ΛΛΛΛ ФФФА ФФФ ФФФА ФФФФА ФФФАΛΛ

ΛΛΛΛФФ ΛΛФФ ФФΛΛ ФФФФ ΛΛФФΛΛΛΛ

ΛФАΛФАΛАФ

ΛАФ
ΛΛΛ
ФАΛ

ΛΛФФ ΛΛФФ
ΛААΛ ΛААΛ
ΛΛФФ ΛΛ

ФФΛΛФФФ Ф | ΛАФΛАФΛ ФΛΛФ
ΛА ΛΛ ФФ Ф
ΛА ФАФΛА
ΛА ФΛΛ ФФ

ФΛАА
ФФФА
АΛФА

ФАΛΛ
ФΛΛФ АΛФФ
~~ФАФФ~~
АААА
АΛФА
АΛΛΛ АΛАФ

Ели $x \geq -1$

$f'(x) = 1 + 2 + 3k + 10$

$+9 + 2 \cdot 8 + 3 \cdot 7 + 10 \cdot 0 =$
$= 9 + 16 + 27 = 52.$

$-2 \leq x < -1$

$-1 + 2 + 3k + 10$

$1 + 2 + 3k + 10 > 0$

$\cancel{1+2}13$

$-3 \leq x < -2$

$-1 - 2 - 3 + 10 = 0$

$x = -10$

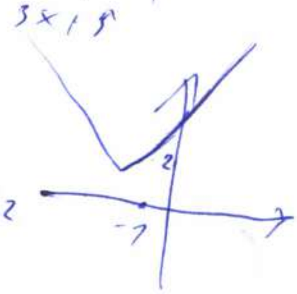
$\cancel{-1-2}\ 3k + 10 \quad -1 - 2 + 3k + 10$

$-1 - 1 + 2x + 14$

$|x+1| + 2|x+2|$

$3x + 5$

$|x+1| + |x+2|$



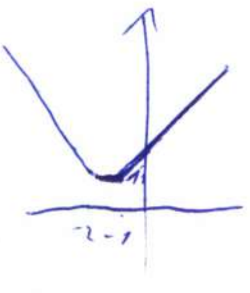
$x \geq -1$

$2x + 3$

$-x - 1 + x + 2$

1

$-2x - 3$



$-1 - 2$

Оценочный бланк олимпиадных заданий по математике

Код участника: 733

Номер задания		1	2	3	4	5	6	7	8
Полученные баллы	Первый проверяющий	5	8	12	12	12	7	0	0
	Второй проверяющий	5	8	12	12	12	7	0	0
	Итого	5	8	12	12	12	7	0	0
Сумма баллов (оценка)		56							

Члены жюри:

Подпись	Фенченко ВГ Фамилия И.О.
Подпись	Александрова ИА Фамилия И.О.
Подпись	Фамилия И.О.

Всероссийская олимпиада школьников
«Миссия выполнима.
Твое призвание-финансист!»

ПО МАТЕМАТИКЕ 11 класс

Заключительный (очный) этап
2017/2018 учебный год

/733

Код участника

Вариант I

Задание 1. (10 баллов)

Даны последовательность чисел $x_1, x_2, \ldots$, такая, что $x_1 = 79$ и $x_n = \frac{n}{x_{n-1}}$ для всех $n > 1$. На сколько нулей оканчивается число равное произведению $x_1 x_2 \ldots x_{2018}$?

Задание 2. (10 баллов)

Найдите наименьшее значение функции $f(x)=|x|+2|x-1|+3|x-2|\ldots+11|x-10|$

Задание 3. (12 баллов)

Сколько различных корней имеет уравнение $f\left(f\left(f(x)\right)\right)=1$, если $f(x)=x-\frac{2}{x}$?

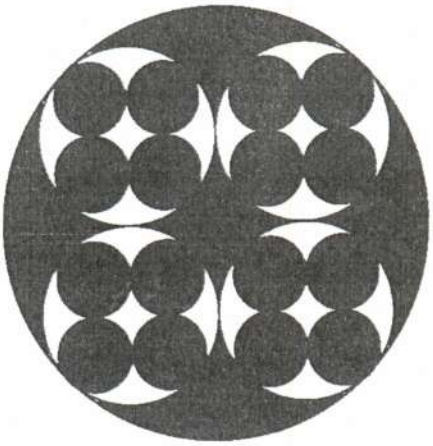
Задание 4. (12 баллов)

Сотрудники фирмы делятся на трудяг и лентяев. В 2016 году средняя зарплата трудяг превышала в два раза среднюю зарплату лентяев. Повысив свою квалификацию, трудяги в 2017 году стали получать на 50% больше, а зарплата лентяев не изменилась. При этом часть лентяев уволили в конце 2016 года. Средняя зарплата всех сотрудников в 2017 году стала на 20% больше, чем была в 2016 году. Найдите сколько процентов от общего числа сотрудников составляли в 2017 году трудяги, если в 2016 году их было 10%.

733

Задача 5. (12 баллов)

На первом шаге на листе бумаги была изображена единичная окружность и ограниченный ею круг закрашен черной краской. На каждом из последующих шагов для каждой из окружностей, изображенных на предыдущем шаге, рисуются четыре новые внутренне касающиеся ее окружности равных радиусов. Эти четыре окружности внешне касаются друг друга. Круги, ограниченные новыми окружностями, закрашиваются белой краской, если номер шага четное число, или черной краской, если номер шага нечетен. На рисунке изображен результат трех шагов. Описанный процесс продолжается до бесконечности. Найдите площадь белой области.



Задание 6. (14 баллов)

Действительные числа a и b таковы, что $\left(a+\sqrt{1+a^2}\right)\left(b+\sqrt{1+b^2}\right)=1$. Найдите сумму $a+b$.

Задание 7 (14 баллов)

Назовем положительное число a близким сверху к положительному числу b, если a превосходит b, но не больше чем на 1%. Докажите, что если в треугольнике радианная мера одного из углов близка сверху к радианной мере другого угла, то найдутся две стороны этого треугольника такие, что длина одной из них близка сверху к длине другой.

Задача 8. (16 баллов)

В алфавите языка альфов три буквы *А*, *Л* и *Ф*. Все слова этого языка можно построить, применяя последовательно следующие правила к любому слову из этого языка:

(1) поменять порядок букв в слове на противоположный

(2) заменить две последовательные буквы так: *ЛА* → *ФФ*, *АФ* → *ЛЛ*, *ФЛ* → *АА*, *ЛЛ* → *АФ*, *ФФ* → *ЛА* или *АА* → *ФЛ*.

Известно, что *ЛЛАФАЛАФФАЛАФФФАЛАФФФФАЛЛ* – это слово из языка альфов. Есть ли в языке альфов слово *ЛФАЛФАЛФАЛФАЛАФЛАФЛАФЛАФЛ*?

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМАЮ, ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ-ФИНАНСИСТ!»

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

Вариант I.

Задание 1.

$x, x_2 \dots x_{2018}$

$x_n = \frac{n}{x_{n-1}}$ $n > 1$

$x_1 = 79$

Решение:

$x_n \cdot x_{n-1} = n$

$x_2 = \frac{2}{79}$

$x_3 = \frac{3 \cdot 79}{2}$

$x_4 = \frac{4 \cdot 2}{3 \cdot 79}$

$\underbrace{(x_1 x_2)}_{2} \underbrace{(x_3 x_4)}_{4} \dots \underbrace{(x_{2017} x_{2018})}_{2018}$

Все четные числа от 2 до 2018

Сколько чисел оканчивается на 0?

10, 20, 30, ... 2010

201 ноль

100, 200, 300 ... 2000

20 нулей

1000, 2000

2 нуля

Итого 223 нуля

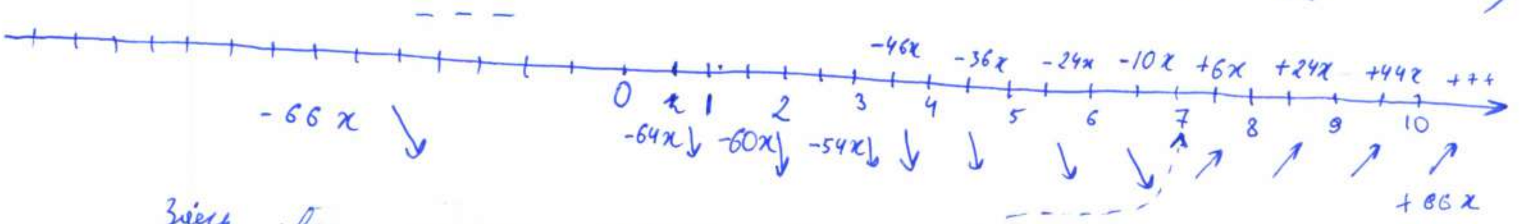
Ответ. 223 нуля

Запрещается делать пометки, раскрывающие авторство работы

Задание 2.

$$f(x) = |x| + 2|x-1| + 3|x-2| \dots + 11|x-10|$$

Расставим нули модулей на ~~числовой~~ числовой оси и в каждой области поставим стрелку (убывание или возрастание функции), а так же коэффициент K перед x ($y = K \cdot x + b$)



Здесь все модули раскрываются, по минимуму

Точка минимума $- x = 7$

$$f(7) = 7 + 2\cdot 6 + 3\cdot 5 + 4\cdot 4 + 5\cdot 3 + 6\cdot 2 + 7\cdot 1 + 8\cdot 0 + 9\cdot 1 + 10\cdot 2 + 11\cdot 3$$

$$= 7 + 2\cdot 12 + 2\cdot 15 + 16 + 8 + 9 + 20 + 33 = 24 + 30 + 40 + 20 + 33 = 90 + 57$$

$$= 147$$

Задание 3.

$f(f(f(x))) = 1$, если $f(x) = x - \frac{2}{x}$

$f(\cancel{x} f(x)) = t$

$t - \frac{2}{t} = 1$

$\frac{t^2 - t - 2}{t} = 0$

$t_1 = 2$; $t_2 = -1$

$f(x) = z$ $\quad t \neq 0$

$z - \frac{2}{z} = 2$ $\qquad z - \frac{2}{z} = -1$

$z - \frac{2}{z} \neq 0$

$\frac{z^2 - 2z - 2}{z} = 0$ $\qquad \frac{z^2 + z - 2}{z} = 0$

$z_1, z_2 = \frac{2 \pm \sqrt{12}}{2}$ $\quad = \frac{z^2 - 2}{z} \neq 0$

$x \neq \pm 2$

$x \neq 0$ $\qquad x - \frac{2}{x} = 1 + \sqrt{3}$

$z \neq \pm 1$ $\quad x - \frac{2}{x} = -2 \longrightarrow$

Значит $a + b = 0$

Ответ: $a + b = 0$

Задание 8.4.

А Трудяги	Лентяи
$0,1$	$0,9$
2016 $2Z$	Z
~~2,8Z~~	

$$Ср3. = 0,2Z + 0,9Z = 1,1Z$$

2017 $\overset{0,1}{3Z}$ $\qquad$ $Z^{0,9-y}$

$$Ср3. = \frac{0,3Z + (0,9-y)\cdot Z}{1-y} = \frac{0,3Z + 0,9Z - y\cdot Z}{1-y} =$$

$$= \frac{1,2Z - yZ}{1-y} = \cancel{1,1Z}\ 1,32Z$$

$$1,2Z - yZ = 1,32Z - 1,32yZ$$

$$0,32yZ = 0,12Z$$

$$y = \frac{12}{32} = \frac{3}{8} = 0,375$$

2017

Т	Л
$0,1$	$0,9 - \frac{3}{8} = 0,525$

$$d = \frac{0,1}{0,1+0,525} = \frac{0,1}{0,625} = 0,16 = 16\%$$

Ответ: 16 %

№3.

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

$x - \frac{2}{x} = 1 \qquad x - \frac{2}{x} = 1 - \sqrt{3}$

$\frac{x^2+2x-2}{x} = 0 \qquad \frac{x^2-(1+\sqrt{3})\cdot x - 2}{x} = 0$

$\frac{x^2-x-2}{x} = 0 \qquad \frac{x^2+(\sqrt{3}-\cancel{1})x-2}{x} = 0$

$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{12}}{2} = -1 \pm \sqrt{3}$

$x_{3,4} = \frac{2\cdot}{11}$

$x_{5,6} = \frac{1+\sqrt{3} \pm \sqrt{4+2\sqrt{3}+8}}{2} = \frac{1+\sqrt{3}\pm\sqrt{12+2\sqrt{3}}}{2}$

$x_{7,8} = \frac{\cancel{x}-\sqrt{3} \pm \sqrt{4-2\sqrt{3}+8}}{2} = \frac{1-\sqrt{3}\pm\sqrt{12-2\sqrt{3}}}{2}$

Ответ: 8 корней

Задание 6.

$(a+\sqrt{1+a^2})(b+\sqrt{1+b^2}) = 1$

$a + \sqrt{1+a^2} = \frac{1}{\sqrt{1+b^2}} ~~//////~~ + b = \frac{\sqrt{1+b^2}-b}{1+b^2-b^2} = \sqrt{1+b^2} - b$

$a+b = \sqrt{1+b^2} - \sqrt{1+a^2}$

Домножим на сопряженное:

$(a+b)(\sqrt{1+b^2}+\sqrt{1+a^2}) = 1+b^2-(1+a^2) = b^2-a^2 = (b-a)(b+a)$

Сократим на $(a+b)$:

$\sqrt{a+b^2} + \sqrt{1+a^2} = b-a$

Но:

$\sqrt{1+b^2} - \sqrt{1+a^2} = \cancel{\sqrt{a1+b^2} - \sqrt{1-a^2}} = b+a$

Значит при ~~умножении~~ сложении и вычитании получим:

$2b = 2\sqrt{1+b^2}$, т.е. $b^2 = 1+b^2$

$2a = -2\sqrt{1+a^2}$, $a^2 = 1+a^2$ — это невозможно

733

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

Задача 5.

$$S_\infty = b^y \cdot \frac{1}{1-q}$$

$$b^y = \frac{4\pi}{(1+\sqrt2)^2}$$

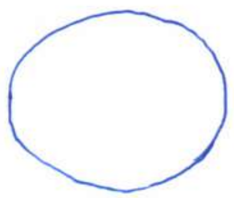
$$S = \frac{4\pi}{(1+\sqrt2)^2} \cdot \frac{1}{1+\frac{4}{1+\sqrt2}} = \frac{4\pi}{(1+\sqrt2)^2} \cdot \frac{(1+\sqrt2)^2}{(1+\sqrt2)^2+4} =$$

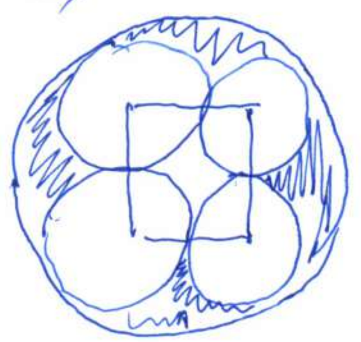
$$= \frac{4\pi}{3+2\sqrt2+4} = \frac{4\pi}{7+2\sqrt2}$$

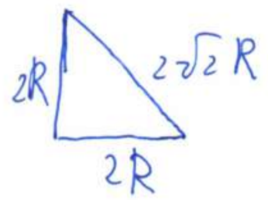
$$S_1 = \pi R^2 = \pi$$

$$S_2 = \pi - 4\pi R^2 = \pi - \pi\frac{4}{(1+\sqrt2)^2} = \pi\left(1-\frac{4}{3+2\sqrt2}\right) = \pi\left(\frac{2\sqrt2-1}{3+2\sqrt2}\right) = \pi\left(\frac{8\sqrt2-11}{9-8}\right)$$

$$= \pi(8\sqrt2-11)$$







$$2R = 2\sqrt2 R + 2R$$

$$R = r(1+\sqrt2)$$

$$r_1 = \frac{R}{1+\sqrt2} = \frac{1}{1+\sqrt2}$$

$$r_2 = \frac{r_1}{1+\sqrt{2}} = \frac{1}{(1+\sqrt{2})^2}$$

$$S_{бел_2} = S_{бел\,1} = 4\pi\left(\frac{1}{1+\sqrt{2}}\right)^2 - \frac{4}{(1+\sqrt{2})^4}$$

$$r_3 = \frac{r_2}{1+\sqrt{2}} = \frac{1}{(1+\sqrt{2})^3}$$

$$S_{бел_3} = 4\pi\left(\frac{1}{(1+\sqrt{2})^2} - \frac{4}{(1+\sqrt{2})^4} + \frac{16}{(1+\sqrt{2})^6}\right)$$

$$S_{бел} = 4\pi\left(\frac{1}{(1+\sqrt{2})^2} - \frac{4}{(1+\sqrt{2})^4} + \frac{16}{(1+\sqrt{2})^6} - \frac{32}{(1+\sqrt{2})^8} + + + \ldots\right)$$

Геометрическая прогрессия $q = -\frac{4}{(1+\sqrt{2})^2}$

$$S_{бел_4} = 4\pi R^2 = \frac{4\pi}{3+2\sqrt{2}} = \frac{4\pi}{(7+\sqrt{2})^2}$$

Ответ

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМАЮ, ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ-ФИНАНСИСТ!»

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

Задание 8.

~~..... АФЛАЛАААЛАЛ ...~~

2) ЛЛЛФАЛФАЛФА ...

ЛЛАФФАЛФАЛФА ...

ЛЛ

ЛЛАФЛЛЛФАЛФА ...

...ЛЛАФАФЛФАЛФА ...

... ЛЛАФААА ФА ЛФА ...

~~АФА~~

ЛЛ

... ЛЛАФАААЛЛЛФА ....

ЛЛ ФФ

ЛЛАФАЛЛФЛ ЛФА

АА, ФФ

ЛЛАФАЛАФФЛФА

АА

ЛЛАФАЛАФФААЛАФ ...

ЛЛ ФФФ

...АФФАЛЛФАФ ....

АА

..... АФФАЛААА ФАФ...

ФФ

... АФФАЛАФЛФАФФЛАФЛАФЛ ..

... АФФАЛАФФФФАЛФЛАФЛАФЛ

АА

...[10] ΛАφφφАΛААφΛАφΛ ...   (3)

$\underbrace{АА}_{φΛ}$

...[10] ΛАφφφАΛАφφφААφΛ

$\underbrace{АА}_{φΛ}\ \underbrace{Аφ}_{АА}$

.....[10] ΛАΛАφφφАΛАφφφφААΛ

Этот набор нельзя привести к виду АΛΛ, поэтому второе слово не может быть получено из первого.

(1) У нас есть такие замены: ΛА → φφ, Аφ → ΛΛ, φΛ → АА, ΛΛ → Аφ, φφ → ΛА или АА → φΛ

так как мы можем менять порядок букв в слове можно получать и такие замены:

АΛ - φφ, φА → φφ, Λφ → АА, дважды поменяв порядок, попробуем второе слово последовательно привести к первому, применяя перестановку....

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

черновик

~~Задача 8.~~
~~Второе слово не может быть построено из первого ...~~

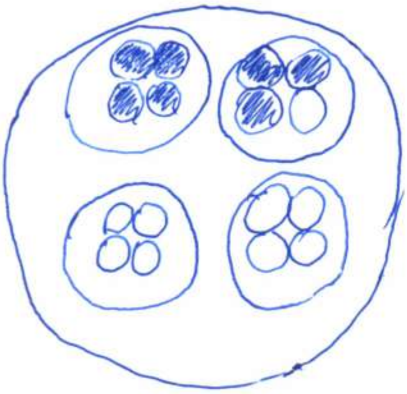
Задача 5.

$$S_\infty = b_1 \cdot \frac{1}{1-q}$$

$$b_1 = \frac{4\pi}{(1+\sqrt{2})^2}$$

$$S_\infty = \frac{4\pi}{(1+\sqrt{2})^2} \cdot \frac{1}{1+\frac{4}{(1+\sqrt{2})^2}} = \frac{4\pi}{(1+\sqrt{2})^2} \cdot \frac{(1+\sqrt{2})^2}{(1+\sqrt{2})^2+4} =$$

$$= \frac{4\pi}{3+2\sqrt{2}+2\sqrt{2}+4} = \frac{4\pi}{7+2\sqrt{2}}$$



$$r_2 = \frac{r_1}{1+\sqrt{2}} = \frac{1}{(1+\sqrt{2})^2}$$

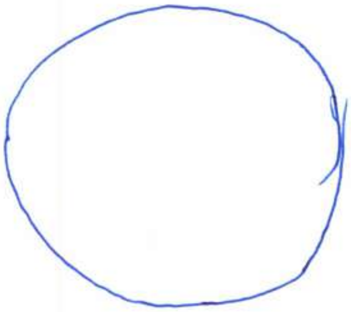
$$S_{бел_2} = S_{бел_1} = 4\pi\left(\frac{1}{1+\sqrt{2}}\right)^2 - \frac{4}{(1+\sqrt{2})^4}$$

$$r_3 = \frac{r_2}{1+\sqrt{2}} = \frac{1}{(1+\sqrt{2})^3}$$

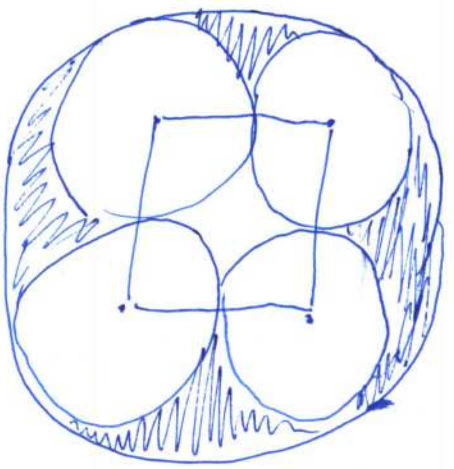
$$S_{бел_3} = 4\pi \cdot \left(\frac{1}{(1+\sqrt{2})^2} - \frac{4}{(1+\sqrt{2})^4} + \frac{16}{(1+\sqrt{2})^6}\right)$$

$$S_{бел} = 4\pi\left(\frac{1}{(1+\sqrt{2})^2} - \frac{4}{(1+\sqrt{2})^4} + \frac{16}{(1+\sqrt{2})^6} - \frac{32}{(1+\sqrt{2})^8} \dots\right)$$

Геометрическая прогрессия $q = -\frac{4}{(1+\sqrt{2})^2}$



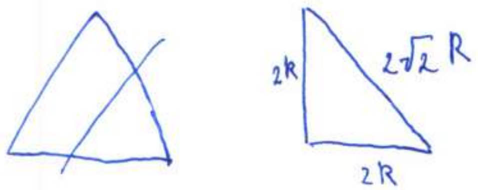
$$S_1 = \pi R^2 = \pi$$



$$S_2 = \pi - 4\pi R^2 = \pi - \pi \cdot \frac{4}{(1+\sqrt{2})^2} = \pi\left(1 - \frac{4}{3+2\sqrt{2}}\right) =$$

$$= \pi\left(\frac{2\sqrt{2}-1}{3+2\sqrt{2}}\right) = \pi\left(\frac{8\sqrt{2}-11}{9-8}\right)$$

$$= \pi\left(8\sqrt{2}-11\right)$$



$$2R = 2\sqrt{2}R + 2R$$

$$R = r(1+\sqrt{2})$$

$$r_1 = \frac{R}{1+\sqrt{2}} = \frac{1}{1+\sqrt{2}}$$

$$S_{бел\,y} = 4\pi R_1^2 = \frac{4\pi}{3+2\sqrt{2}} = \frac{4\pi}{(1+\sqrt{2})^2} = \cancel{4\pi}$$

ответ

Оценочный бланк олимпиадных заданий по математике

Код участника: 612131

Номер задания		1	2	3	4	5	6	7	8
Полученные баллы	Первый проверяющий	7	2	2	6	12	14	11	0
	Второй проверяющий	7	2	2	6	12	14	11	0
	Итого	7	2	2	6	12	14	11	0
Сумма баллов (оценка)		54							

Члены жюри:

Подпись — Волкова Е.С. — Фамилия И.О.

Подпись — Кочерова А.С. — Фамилия И.О.

Подпись — [illegible] Т.В. — Фамилия И.О.

ФГОБУ ВО «Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации»

Всероссийская олимпиада школьников «Миссия выполнима. Твое призвание-финансист!»

ПО МАТЕМАТИКЕ 11 класс

Заключительный (очный) этап 2017/2018 учебный год

612131

Код участника

Вариант II

Задание 1. (10 баллов)

Даны последовательность чисел $x_1, x_2, \ldots$, такая, что $x_1 = 29$ и $x_n = \dfrac{n}{x_{n-1}}$ для всех $n > 1$. На сколько нулей оканчивается число равное произведению $x_1 x_2 \ldots x_{1012}$?

Задание 2. (10 баллов)

Найдите наименьшее значение функции $f(x) = |x+1| + 2|x+2| + 3|x+3| \ldots + 10|x+10|$.

Задание 3. (12 баллов)

Сколько различных корней имеет уравнение $f\left(f\left(f(x)\right)\right) = 2$, если $f(x) = x - \dfrac{1}{x}$?

Задание 4. (12 баллов)

Сотрудники фирмы делятся на трудяг и лентяев. В 2016 году средняя зарплата трудяг превышала в два раза среднюю зарплату лентяев. Повысив свою квалификацию, трудяги в 2017 году стали получать на 50% больше, а зарплата лентяев не изменилась. При этом часть лентяев уволили в конце 2016 года. Средняя зарплата всех сотрудников в 2017 году стала на 20% больше, чем была в 2016 году. Найдите сколько процентов от общего числа сотрудников составляли в 2017 году трудяги, если в 2016 году их было 10%.

Задача 5. (12 баллов)

На первом шаге на листе бумаги была изображена единичная окружность и ограниченный ею круг закрашен черной краской. На каждом из последующих шагов для каждой из окружностей, изображенных на предыдущем шаге, рисуются три новые касающихся ее внутренним образом окружности равных радиусов. Эти три окружности касаются друг друга внешним образом. Круги, ограниченные новыми окружностями, закрашиваются белой краской, если номер шага четное число, или черной краской, если номер шага нечетен. На рисунке изображен результат трех шагов. Описанный процесс продолжается до бесконечности. Найдите площадь белой области.

Задание 6. (14 баллов)

Действительные числа a и b таковы, что $\left(a+\sqrt{1+a^2}\right)\left(b+\sqrt{1+b^2}\right)=1$. Найдите сумму $a+b$.

Задание 7. (14 баллов)

Назовем положительное число a близким сверху к положительному числу b, если a превосходит b, но не больше чем на 0,5%. Докажите, что если в треугольнике радианная мера одного из углов близка сверху к радианной мере другого угла, то найдутся две стороны этого треугольника такие, что длина одной из них близка сверху к длине другой.

Задача 8. (16 баллов)

В алфавите языка альфов три буквы *А*, *Л* и *Ф*. Все слова этого языка можно построить, применяя последовательно следующие правила к любому слову из этого языка:

(1) поменять порядок букв в слове на противоположный

(2) заменить две последовательные буквы так: *ЛА* → *ФФ*, *АФ* → *ЛЛ*, *ФЛ* → *АА*, *ЛЛ* → *АФ*, *ФФ* → *ЛА* или *АА* → *ФЛ*.

Известно, что *ЛЛАФФФФАЛАФФФАЛАФФАЛАФАЛЛ* – это слово из языка альфов. Есть ли в языке альфов слово *ЛФАЛФАЛАФЛАФЛАФЛАФЛАФЛАФЛ*?

612131

1. Чистовик

Т.к. все числа x (начиная со ~~2-ого~~ второго) в знаменателе имеют предыдущее число в последовательности, мы можем сократить эти числа. Тогда останутся в произведении только числители каждого второго числа:

$x_1 x_2 \ldots x_{1012} = 2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 1012$

В этой последовательности на 10 делится: 1012 // 10 = 101 число
на 2 делится: 1012 // 2 = 506 чисел (101 из них делится на 5)
на 5 делится: 1012 // 5 = 202 числа (101 из них делится на 2)

Нули в конце образуют множители, каждый делящийся на 10, а так же пары чисел, в которых 1 число делится на 5, а другое на 2, но оба не делятся на 10.

На 10 делится 101 числа, на 5 (но не на 2) − 405, на 2 (но не на 5) − 101.
min(101, 405) = 101 (кол-во составленных пар)
101+101 = 202

±

Ответ: 202.

2.

$f(x) = 1\cdot|x+1| + 2\cdot|x+\cancel{3}^{2}| + 3\cdot|x+\cancel{4}^{3}| \ldots + 10\cdot|x+10|$

~~Аргумент~~ Каждое слагаемое функции − это порядковое число (от 1 до 10), умноженное на модуль „аргумента слагаемого". Эти аргументы − 10 последовательных чисел.
Для уменьшения минимума аргумента расположим эти 10 последовательных аргументов так, чтобы их сумма (модулей) была минимальна. Для этого 0 должен стоять на 5 или 6 месте. Т.к. ~~последнее число~~ множители расположены по возрастанию, минимальный элемент лучше поставить „дальше". Рассмотрим x=0 в позиции от 6 до 10. Методом перебора получаем x=−7. ~~Наиболее выгодное значение к этому аргументу (поиск минимума) x=−6.~~
f(−7) = 112

Ответ: 112.

Эл

А почему x − целые?

∓

612131

3.

$f(f(f(x)))=2$; $f(x)=x-\frac{1}{x}$; $x\neq 0$

Пусть $f(x)=a$;

$a=x-\frac{1}{x}$; $x^2-ax-1=0$; $D=a^2+4$; $x=\frac{a\pm\sqrt{a^2+4}}{2}$;

$a^2+4>0\ \forall a$, т.е. данное уравнение имеет 2 корня при любом a.

$f(y)=2$, по доказанному – получаем 2-х различных числа y.

$f(f(x))=y$

При каждом „снятии" внешней функции мы получаем 2 числа, удовлетворяющих равенству, т.е. число решений удваивается. Т.к. в равенстве $f(x)$ берется три раза, $2^3=8$.

Ответ: 8. $\frac{+}{2}$ А почему среди этих 8 чисел нет повторяющихся?

4.

Пусть:

$n_{Л1}$ – кол-во лентяев в 2016 X – искомая величина

$n_{Л2}$ – кол-во лентяев в 2017

$n_Т$ – кол-во трудяг

T_1 – зарплата трудяг в 2016

T_2 – зарплата трудяг в 2017

$Л$ – зарплата лентяев

Используя информацию про изменение средней зарплаты, составим ур-ие:

$$\frac{n_Т\cdot T_1+n_{Л1}\cdot Л}{n_Т+n_{Л1}}\cdot 1{,}2=\frac{n_Т\cdot T_2+n_{Л2}\cdot Л}{n_Т+n_{Л2}};$$ Т.к. $T_1=2Л$, $T_2=1{,}5T_1=3Л$:

$$\frac{2n_Т+n_{Л1}}{n_Т+n_{Л1}}\cdot 1{,}2=\frac{3n_Т+n_{Л2}}{n_Т+n_{Л2}};$$ Т.к. $n_{Л1}=9n_Т$:

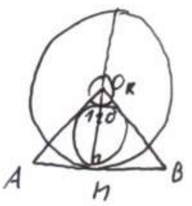
$$\begin{cases}\frac{11}{9}\cdot 1{,}2=\frac{3n_Т+n_{Л2}}{n_Т+n_{Л2}}; \text{ Пусть } \frac{11}{9}\cdot 1{,}2=\frac{132}{90}=\alpha;\\ n_Л=n_Т\frac{\alpha-3}{1-\alpha};\\ X=100\cdot\frac{n_Т}{n_Т+n_{Л2}}=100\cdot\frac{\alpha-1}{2}=\frac{21}{90}\cdot 100=\frac{70}{3}=23\frac{1}{3}\%\end{cases}$$

Ответ: $23\frac{1}{3}\%$. V $\frac{+}{2}$

612131

5.

Рассмотрим окружность радиуса R. Согласно условию вписаны 3 окружности радиуса r. Если провести из центра O_R прямые в точки касания малых окружностей, после чего провести касательную в точке касания большой и малой окружности, получим:



Малая окружность ~~касается~~ вписана в AO_RB по построению. В силу симметрии $AO_R = O_RB$. Высота $O_RH = R$. Пусть $O = O_R$.

$$\begin{cases} AO \cdot \cos 60 = R \\ AO \cdot \sin 60 = AH \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} AO = 2R \\ \cancel{AH =} AO = \frac{2}{\sqrt{3}} AH \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} AO = 2R \\ AH = R\sqrt{3} \end{cases}$$

$S_{AOB} = \frac{1}{2} \cdot R \cdot 2AH = R \cdot R\sqrt{3} = R^2\sqrt{3}$

$p_{AOB} = \dfrac{2R + 2R + R\sqrt{3} + R\sqrt{3}}{2} = (2+\sqrt{3})R$

$S = pr$; $r = \frac{S}{p} = R\frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$;

Пусть $f(R) = R\frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$

$S_\delta = 3 \cdot \pi (f(R))^2 - 9 \cdot \pi (f(f(R)))^2 + \ldots$

Т.к. взятие функции $f(R)$ – это домножение R на $\frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$:

$b_1 = 3\pi R^2 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right)^2$

$q = -3 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right)^2$; $|q| < 1$

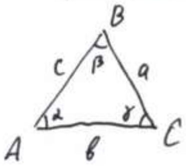
$$S_\delta = \frac{b_1}{1-q} = \frac{3\pi R^2 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right)^2}{1 + 3 \cdot \frac{3}{(2+\sqrt{3})^2}} = \frac{3\pi R^2 \cdot \frac{3}{(2+\sqrt{3})^2}}{\frac{(2+\sqrt{3})^2 + 9}{2+\sqrt{3}}} = \frac{9\pi R^2}{4 + 4\sqrt{3} + 3 + 9} = \frac{9\pi R^2}{16 + 4\sqrt{3}}$$

Ответ: $\frac{9\pi R^2}{16 + 4\sqrt{3}}$.

+

7.

Рассмотрим $\triangle ABC$:

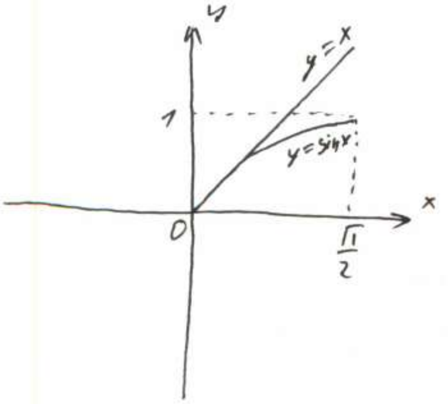


Возьмем, согласно условию, крайний случай: $\alpha \cdot 1{,}005 = \beta$. Пусть $k = 1{,}005$

Согласно т. синусов:

$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$; $\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha \cdot 1{,}005)} = \frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha k)}$

Вспомним графики $y=\sin x$ и $y=x$ (при $x\in(0;\frac{\pi}{2})$): 612131



$(\sin x)' = \cos x$; $\cos x \le 1$ $\forall x$

$x' = 1$

Т.е. $y=\sin(x)$ не может возрастать быстрее, чем $y=x$. Т.к. * при $x=0$

$y=x=0$, $y=\sin(x)=0$, при $x\geq 0$

$\sin(x)\le x$.

Значит, при увеличении аргумента в к раз, sin(x) не может увеличиться более, чем в к раз.

Соответственно: $\sin\alpha k \le \alpha k$ $(\alpha\geq 0)$

$\left|\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha k)}-1\right|\le k$; возвращаясь к равенству:

$\left|\frac{a}{b}-1\right|\le k$

Т.е. a и b различаются не более, чем в к раз.

Что и требовалось доказать.

$\pm$ А если угол $>\pi/2$

6.

$(a+\sqrt{1+a^2})(b+\sqrt{1+b^2})=1$; Пусть $b+\sqrt{1+b^2}=c$

$a+\sqrt{1+a^2}=\frac{1}{c}$; $\sqrt{1+a^2}=\frac{1}{c}-a$; $1+a^2=\frac{1}{c^2}-2\frac{a}{c}+a^2$;

$1=\frac{1}{c^2}-\frac{2a}{c}$; $\cancel{\frac{2a}{c}=\frac{1}{c^2}-1;\ 2a=\frac{1}{c}-c;\ a=\frac{1-c^2}{}}$

$1=\frac{1-2ac}{c^2}$; $c^2=1-2ac$; $2ac=1-c^2$; $a=\frac{1-c^2}{2c}=\frac{1-(b^2+2b\sqrt{1+b^2}+1+b^2)}{2c}=$

$=\frac{-(2b^2+2b\sqrt{1+b^2})}{2(b+\sqrt{1+b^2})}=\cancel{-2(1}-\frac{2b(b+\sqrt{1+b^2})}{2(b+\sqrt{1+b^2})}=-b$;

$a=-b$;

$a+b=-b+b=0$

Ответ: 0. +

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 612131

Черновик

1.

$x_1 = 29;\ \frac{2}{29};\ \frac{3}{\frac{2}{29}};\ \frac{4}{\frac{3}{29}} \dots \frac{1012}{1011}$

101 чисел : 10
506 чисел : 2 (из них: 405 не делится на 5)
202 числа : 5 (из них : 101 не делится на 2)

$\frac{2}{29}\ \frac{3}{\frac{2}{29}}\ \frac{4}{\frac{3}{\frac{2}{29}}}\ \frac{5}{\frac{4}{\frac{3}{\frac{2}{29}}}}\ \frac{6}{\frac{5}{\frac{4}{\frac{3}{\frac{2}{29}}}}}\ \frac{7}{\frac{6}{\frac{5}{\frac{4}{\frac{3}{\frac{2}{29}}}}}}$

$101 + 101 = 202$

$2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \dots 1012$

7

$\boxed{-2}\ \boxed{-8}$

~~$a_1 = 2$~~; $1012!$ $:10$ $:2$ $:5$

$1012 : 10 = 101$, $1012 : 2 = 506$, $1012 : 5 = 202$

Ответ: 202

~~10 + 2~~

$1 \cdot \cancel{8} + 2 \cdot \cancel{7} + \cancel{3 \cdot 6} + \cancel{4 \cdot 5} + 5 \cdot \cancel{4} + 6 \cdot 3 + \cancel{7 \cdot 2} + 8 \cdot 1 + 9 \cdot 0 + 10 \cdot (-1)$

$\cancel{8} + 4 \cdot 7 + \cancel{3 \cdot 12} + \cancel{8 \cdot 5} + \cancel{8} + \cancel{10} =$

$= 26 + 36 + 40 + 28 =$

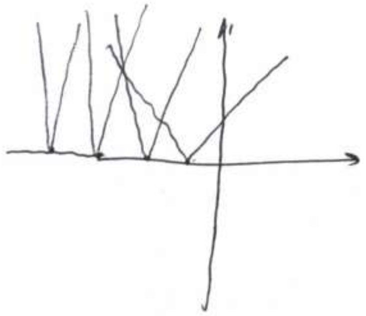
$= 62 + 40 + 28 = 60 + 40 + 30 = 130$

2.

$f(x) = |x+1| + 2|x+2| + 3|x+3| + \dots + 10|x+10|$

$\cancel{1 \cdot 1}\ \ \cancel{2 \cdot 6}\ \ \cancel{3 \cdot 5}\ \ 4 \cdot 4\ \ \cancel{5 \cdot 3}\ \ \cancel{6 \cdot 2}\ \ \cancel{7 \cdot 1}\ \ 8 \cdot 0\ \ 9 \cdot 1\ \ 10 \cdot 2 =$

$= \cancel{11} + \cancel{24} + \cancel{30} + \cancel{16} + 8 + 9 + 20 = 30 + 54 + 37 =$
$= 84 + 37 = 121$



$1 \cdot 9 + 2 \cdot 8 + 3 \cdot 7 + 4 \cdot 6 + 5 \cdot 5 + 6 \cdot 4 + 7 \cdot 3 + 8 \cdot 2 + 9 \cdot 1 + 10 \cdot 0 =$

$1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 4 + 5 \cdot 5 + 6 \cdot 6 + 7 \cdot 7 + 8 \cdot 8 + 9 \cdot 9 + 10 \cdot 10$

$1 \cdot (\ ) + 2 \cdot (\ ) + 3 \cdot (\ ) + 4 \cdot (\ ) + 5 \cdot (\ ) + \dots + 10 \cdot (\ )$

10 последоват. чисел умножаются на 10 пол. чисел.
числа ≥ 0
минимум – если у макс. множителя мин. число (0)

$= \cancel{9 + 9 + 2 \cdot 8 \cdot 2 +}\ 9 \cdot 2 + 16 \cdot 2 + 21 \cdot 2 + 24 \cdot 2 + 25 =$

$= 18 + 32 + 42 + 48 + 25 =$

$= 50 + 90 + 25 = 165$

$\boxed{-6}$

Ответ: 165.

$\cancel{5} + \cancel{8} + \cancel{9} + \cancel{8} + \cancel{8} + \cancel{7} + \cancel{16} + \cancel{27} + 40 = 50 + 16 + 32 + 27 =$
$= 98 + 27 = 125$

3.

$f(f(f(x))) = 2$; $f(x) = x - \frac{1}{x}$; $f(x) = 2$; $2 = x - \frac{1}{x}$; $2x = x^2 - 1$; $x^2 - 2x - 1 = 0$;

$f(f(f(x))) = f(1 \pm \sqrt{2})$

$D = 4 + 4 \cdot 1 = 8$

$f(f(x)) = 1 \pm \sqrt{2}$

$1 \pm \sqrt{2} = x - \frac{1}{x}$; $x(1 \pm \sqrt{2}) = x^2 - 1$;

$x = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$

$f(x) = \frac{(1 \pm \sqrt{2}) \pm \sqrt{(1 \pm \sqrt{2})^2 + 4}}{2}$

$x^2 - x(1 \pm \sqrt{2}) - 1 = 0$

$f(x) = x - \frac{1}{x}$; $f(x) = a$

$D = (1 \pm \sqrt{2})^2 + 4.$

$a = x - \frac{1}{x}$

$x = \frac{(1 \pm \sqrt{2}) \pm \sqrt{(1 \pm \sqrt{2})^2 + 4}}{2}$

$x^2 - ax - 1 = 0$

$D = a^2 + 4$

$x = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + 4}}{2}$

Ответ: 8

$\cancel{-7.5}\ \ -6.5$

$\begin{array}{cccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ \cancel{6.5} & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} = \cancel{25} + 15 + \cancel{12} + \cancel{13} +$ когда ? нужно

$\cancel{6} + \cancel{10} + \cancel{12} + 12 + \cancel{10} + \cancel{6} + \cancel{8} + 18 + \cancel{30} = 50 + 20 + 24 + 18 =$ $19.5 = 50 + 15 + 12.5$

$5.5\ \ 4.5\ \ 3.5\ \ 2.5\ \ 1.5\ \ 1\ \ 0.5\ \ 0.5\ \ 1.5\ \ 2.5 = \cancel{70} + 42 = 112$ $= 65 + 20 - 0.5$

$\cancel{5.5} + \cancel{9} + 9 + 1.5 + \cancel{10} + \cancel{5} + \cancel{2.5} + \cancel{6} + \cancel{3.5} + 4 + \cancel{9} + 4.5 + 15 = \cancel{7} + \cancel{18} + \cancel{15} + \cancel{6} + 6 + 13 + 19.5$

4.

2016: $T_1 = 2Л_1$

2017: $T_2 = 1,5\,T_1$

$n_{Л1}$ – кол-во лепил в 2016

$n_{Л2}$ – кол-во лепилев в 2017

n_T – кол-во трудяг

T_1 – зарплата трудяг в 2016

T_2 – зарплата ~~труд~~ трудяг в 2017

$Л$ – зарплата лепилев

$$\frac{100}{x} = \frac{n_{Л2}}{n_T}$$

$$x = \frac{n_T}{n_{Л2}}\cdot 100$$

$$T_2 = 1,5\cdot 2Л = 3Л$$

$$\begin{cases} T_1 = 2Л \\ T_2 = 1,5T_1 \\ \dfrac{n_T\cdot T_1 + n_{Л1}\cdot Л}{n_T+n_{Л1}}\cdot 1,2 = \dfrac{n_T\cdot T_2 + n_{Л2}\cdot Л}{n_T+n_{Л2}} \\ \cancel{n_T\cdot\frac{100}{10} = n_{Л1}} \\ \cancel{n_T\cdot\frac{100}{x} = n_{Л2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{n_T\cdot 2\cancel{Л} + n_{Л1}\cdot\cancel{Л}}{n_T+n_{Л1}}\cdot 1,2 = \dfrac{n_T\cdot 3\cancel{Л}+n_{Л2}\cdot\cancel{Л}}{n_T+n_{Л2}} \\ \cancel{910n_T = n_{Л1}};\quad 9n_T = n_{Л1} \\ x = \dfrac{n_T}{n_T+n_{Л2}}\cdot 100 \quad \cancel{100\cdot\dfrac{n_T}{n_T+n_{Л2}} - ?} \end{cases}$$

$$\frac{n_T}{n_T+n_{Л1}} = 0,1;$$

$$n_T = 0.1n_T + n_{Л1}\cdot 0.1$$

$$0.9n_T = n_Л\cdot 0.1$$

$$9n_T = n_{Л1}$$

$$\cancel{\tfrac{69}{3} = 23}$$

$$\cancel{\Leftrightarrow \frac{2n_T + n_{Л1}}{n_T+n_{Л1}}\cdot 1,2 = \frac{n_T+n_{Л2}}{n_T+n_{Л2}} \Leftrightarrow \frac{2n_T+9n_T}{n_T+9n_T}\cdot 1,2 = \frac{n_T+n_{Л2}}{n_T+n_{Л2}}},\quad \frac{11}{10}\cdot 1,2 = 1$$

$$\frac{n_T\cdot T_1 + n_{Л1}\cdot Л}{n_T+n_{Л1}}\cdot 1,2 = \frac{n_T\cdot T_2+n_{Л2}\cdot Л}{n_T+n_{Л2}} \Leftrightarrow \left| \begin{matrix} T_1 = 2Л \\ T_2 = 1,5T_1 = 3Л \end{matrix}\right| \Leftrightarrow \frac{n_T\cdot 2\cancel{Л}+n_{Л1}\cdot\cancel{Л}}{n_T+n_{Л1}}\cdot 1,2 = \frac{n_T 3\cancel{Л}+n_{Л2}\cdot\cancel{Л}}{n_T+n_{Л2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2n_T+n_{Л1}}{n_T+n_{Л1}}\cdot 1,2 = \frac{3n_T+n_{Л2}}{n_T+n_{Л2}} \Leftrightarrow \left| 9n_T = n_{Л1}\right| \Leftrightarrow \frac{2\cancel{n_T}+9\cancel{n_T}}{\cancel{n_T}+9\cancel{n_T}}\cdot 1,2 = \frac{3n_T+n_{Л2}}{n_T+n_{Л2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{11}{9}\cdot 1,2 = \frac{3n_T+n_{Л2}}{n_T+n_{Л2}};\quad \left(\frac{11\cdot 12}{9\cdot 10}\right)(n_T+n_{Л2}) = 3n_T+n_{Л2};$$

$$11\cdot 12 = 120+12 = 132$$

$$\alpha n_T + \alpha n_{Л2} = 3n_T + n_{Л2};$$

$$\frac{11}{9}\cdot 1,2 = \frac{11}{9}\cdot\frac{12}{10} = \frac{11\cdot 12}{9\cdot 10} = \alpha$$

$$n_T(\alpha-3) = n_Л(1-\alpha)$$

$$\cancel{n_T = n_Л\frac{1-\alpha}{\alpha-3}},\quad n_Л = n_T\frac{\alpha-3}{1-\alpha}$$

$$100\cdot\frac{n_T}{n_T+n_{Л2}} = \cancel{100\cdot\alpha} = \frac{n_T}{n_T+n_T\cdot\frac{\alpha-3}{1-\alpha}} = 100\cdot\frac{1}{1+\frac{\alpha-3}{1-\alpha}} = \frac{1}{\frac{1-\alpha}{1-\alpha}+\frac{\alpha-3}{1-\alpha}} = \frac{1}{\frac{1-\cancel{\alpha}+\cancel{\alpha}-3}{1-\alpha}} = \frac{1-\alpha}{-2} =$$

$$= \frac{\alpha-1}{2} = \frac{\frac{132}{90}-1}{2} = \frac{\frac{42}{90}}{2} = \frac{42}{180} = \frac{21}{90} = \frac{7}{30}\cdot 100 = \frac{7\cdot 10\cancel{0}}{3\cancel{0}} = \frac{70}{3} = 23\frac{1}{3}$$

Ответ: $23\frac{1}{3}\%$.

~~1~~ ~~2~~ ~~3~~ ~~4~~ ~~5~~ 6 ~~7~~ 8
?

6.

$$(a+\underbrace{\sqrt{1+a^2}}_{\geq 1})(b+\underbrace{\sqrt{1+b^2}}_{\geq 1})=1$$

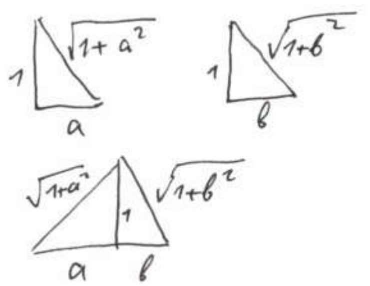
$$\cancel{ab + a\sqrt{1+b^2} + b\sqrt{1+a^2} + \sqrt{(1+a^2)(1+b^2)} = 1}$$

$a=0;\ 0+\sqrt{1+0}=1;\ b=0;\ 1\cdot 1=1$ ~~Да~~ $(0;0)$

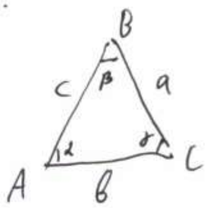
$a=1;\ 1+\sqrt{2}=1+\sqrt{2};\ b+\sqrt{1+b^2}=\frac{1}{1+\sqrt{2}};\ b=-(1+\sqrt{2});\ -1-\sqrt{2}+\sqrt{1+1+2\sqrt{2}+2}=\frac{1}{1+\sqrt{2}};$

$-1-\sqrt{2}+\sqrt{4+2\sqrt{2}}=\frac{1}{1+\sqrt{2}}$

$-1-\sqrt{2}+\cancel{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{}}}+\sqrt{(2)(2+\sqrt{2})}=\frac{1}{1+\sqrt{2}}$

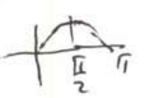


7.



$\alpha \cdot 1.005 = \beta$

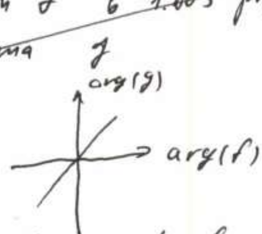
$\alpha \in (0;\pi)$



$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta};\ \frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin(\alpha\cdot 1.005)};$

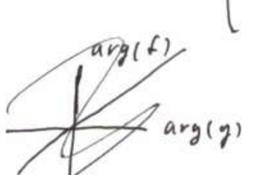
$$a=\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha\cdot 1.005)}\,b$$

~~аргумент f в 1.005 раза больше аргумента g~~



Доказать: $\left|\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha\cdot 1.005)}-1\right|<1.005$

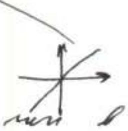
(с. увеличении α в k раз аргумент f увеличивается в k



~~$\sin\alpha \mid \sin\alpha\cdot 1{,}005$~~
~~$\sin\alpha+\beta \mid \sin((\alpha+\beta)\cdot 1.005)$~~
~~$\sin\alpha+\beta \mid \sin(1.005\alpha+1.005\beta)$~~
~~$\sin\alpha+\beta \mid \sin 1.005\alpha\cos 1.005\beta+\sin 1.005\beta\cos 1.005\alpha$~~

$\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

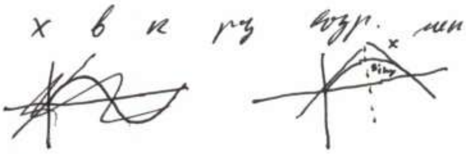
Рассмотрим функцию $\sin x$ ~~при x~~ арг. функции проп. x



Однако $\sin x$ ~~возр~~ при увел. x в k раз возр. меньше, чем в k

$(\sin x)'=\cos x;\ |\cos x|\leq 1;$

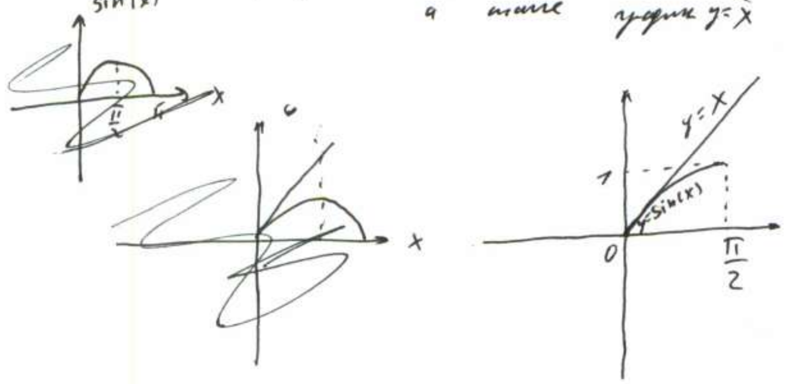
т.е. $\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha k)}<\frac{\alpha}{\alpha k}$



ч.т.д. ■

Вспомним график $y = \sin(x)$ при $x \in (0; \frac{\pi}{2})$:

а также график $y = x$



$(\sin x)' = \cos x \cancel{\leq 1}$; $\cos x \leq 1 \quad \forall x$

$x' = 1$

($\sin x$ не может возрастать ~~быстрее x~~) $\Rightarrow$ при $x \geq 0 \quad \sin x \leq x$

т.е. при увеличении арг. в k раз, $\sin x$ не может увеличится больше, чем в k раз.

Значит $\frac{\sin \alpha}{\cancel{\sin \alpha k}}$ $\sin \alpha k \leq \alpha k$; $\left| \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha k} - 1 \right| \leq K$

~~ΛΛΑΦΑΛΑΦΦΛΑΦΑ ΦΦ~~

ΛΛΑΦΑΛΑΦΦΑΛΑΦΦΦΑΛΑΦΦΦΦΑΛΛ

ΑΛΑΦ → ΑΛΛΑ → ΑΑΦΑ → ΦΛΦΑ

ΑΦΛΦ

ΛΛΑΦΦΦΦΑΛΑΦΦΦΑΛΑΦΦΑΛΑΦΑΛΛ

8.

Α Λ Φ
0 1 2

ΛΦΑΛΦΑΛΑΦΛΑΦΛΑΦΛΑΦΛ ΑΦΛΑΦΛ

$$\begin{cases} 10 \to 22 \\ 02 \to 11 \\ 21 \to 00 \\ 11 \to 02 \\ 22 \to 10 \\ 00 \to 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10 \leftrightarrow 22 \\ 02 \leftrightarrow 11 \\ 21 \leftrightarrow 00 \end{cases}$$

$$\begin{cases} ΛΑ \leftrightarrow ΦΦ \\ ΑΦ \leftrightarrow ΛΛ \\ ΦΛ \leftrightarrow ΑΑ \end{cases}$$

$S_n = \frac{b_1}{1-q}$

$R = 1$

~~123 → 321~~ $012 \to 210 \to 000$

$\searrow 222$

$b_n = b_{n-1} \cdot (-3)$

1102'2220'1022'2010'2201'~~02~~012011

1111'22201112201 1120 1012002

$$\boxed{b_n = (-3)^{n-1} \cdot \left(R \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right)\right)^{2 \cdot (n-1)}}$$

ΑΦΛΛ ΦΦΦ ΑΛΑ ΦΦΦ ΑΛΑ ΦΦ ΑΛΑ ΦΑΑΦ

$R = 1$

$S_n = \pi R^2$

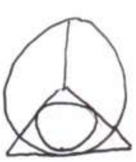
~~ΑΑΑΦΦ~~

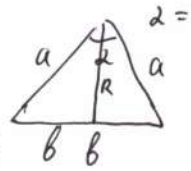
n, R $f(n)$

$r(R) - ?$

5.

R;





$\alpha = 120$

$a \cdot \cos 60 = R$; $a \cdot \frac{1}{2} = R$; $a = 2R$

$a \cdot \sin 60 = b$; $a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = b$; $a = \frac{2}{\sqrt{3}} b$

$2R = \frac{2}{\sqrt{3}} b$;

$S = \frac{1}{2} \cdot R \cdot 2\sqrt{3} \cdot R = R^2\sqrt{3}$ $\quad R = \frac{1}{\sqrt{3}} b$;

$S_4 = \pi R^2 - 3 \cdot (f(R))^2 \cdot \pi + 9 \cdot (f(f(R)))^2 \pi$ $\quad p = \frac{a+a+b+b}{2} = a + b = (2+\sqrt{3})R$ $\quad b = \sqrt{3} R$

$S = pr$; $r = \frac{S}{p} = \frac{R^2\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})R} =$ $\quad a = 2R$

$= R \cdot \frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$

$f(x) = x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$

$f(f(x)) = x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$

$r(R) = R \cdot \frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$

$r(R) = f(x)$

~~$f(R)^2 = R^2 \cdot \frac{3}{(2+\sqrt{3})^2} = R^2 \cdot \frac{3}{4+4\sqrt{3}+3} = R^2 \cdot \frac{3}{2+4\sqrt{3}}$~~

~~$1 - 3 + 9 - 27 \ldots$~~

$S_\Gamma = \pi \cdot (3(f(R))^2 - 9(f(f(R)) + \ldots)$

$\cdot(-3)$

$S = 3\pi f(R)^2 - 9\pi f(f(R))^2 + 27\ldots \qquad f(R) = R \cdot \frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$

$b_1 = 3\pi \cdot \left(R \cdot \frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right)^2 = 3\pi R^2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right)^2$

2
4
6

~~$b_n =$~~

$q = -3 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right)^2$

$S_n = \frac{b_1}{1-q} = \frac{3\pi R^2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right)^2}{1-\left(-3\left(\frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right)^2\right)} = \frac{3\pi R^2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right)^2}{1+3\left(\frac{3}{(2+\sqrt{3})^2}\right)} =$

$= \frac{3\pi \ldots}{1+\frac{9}{(\ldots)^2}} = \frac{\ldots}{\frac{(\ldots)^2+9}{(\ldots)^2}} = \cancel{\frac{3\pi R^2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right)^4}{1}} \quad \frac{3\pi R^2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right)^2 \cdot (2+\sqrt{3})^2}{(2+\sqrt{3})^2+9} =$

$= \frac{3\pi R^2 \cdot 3}{4+4\sqrt{3}+3+9} = \frac{9\pi R^2}{16+4\sqrt{3}}$

Odbor: $\frac{9\pi R^2}{16+4\sqrt{3}}$

$a = \frac{1-(b^2+2b\sqrt{1+b^2}+1+b^2)}{2} =$

$= \frac{2b^2+2b\sqrt{1+b^2}}{2} = b(b+\sqrt{1+b^2})$

$x = -6,5$

$1 \cdot 5,5 + 2\cdot 4,5 + 3 \cdot 3,5 + 4 \cdot 2,5 + 5 \cdot 1,5 + 6 \cdot 0.5 + 7 \cdot 0.5 + 8 \cdot 1.5 + 9 \cdot 2,5 + 10 \cdot 3,5$

~~$5,5 + 9 + 9 + 1,5 + 8 + 2 + 5 + 2,5 + 3 + 3,5 + 8 + 4 + 10 + 4,5 + 3 5 =$~~

~~$= 18 + 7 + 10 + 8 + 8 + 6 + 22 + 4,5 + 35 =$~~

~~$= 25 + 32 + 22 + 4,5 + 35$~~ $= 47 + 67 + 4,5 = 114$

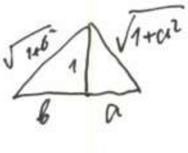
$a+b = b + b(b+\sqrt{1+b^2}) =$

$= b(1+b+\sqrt{1+b^2}) =$

$= b(1+\sqrt{1+b^2}+b)$

$(a+\sqrt{1+a^2})(b+\sqrt{1+b^2}) = 1$

$S = u(1+\sqrt{1+u^2}+u),\ u \in R$

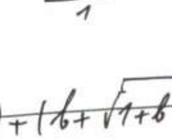


$a + \sqrt{1+a^2} = \frac{1}{b+\sqrt{1+b^2}}$

$\sqrt{1+a^2} = \frac{1}{b\ldots} - a$

$1 + \cancel{a^2} = \frac{1}{b^2+2b\sqrt{1+b^2}+1+b^2} - \frac{2a}{b+\sqrt{1+b^2}} + \cancel{a^2}$

$b + \sqrt{1+b^2} = c$



$S = \frac{1}{2} b$

$1 = \frac{1}{(b+\sqrt{1+b^2})^2} - \frac{2a}{b+\sqrt{1+b^2}},$

$p = \ldots$

~~$2a(b+\sqrt{1+b^2}) + (b+\sqrt{1+b^2})^2 =$~~

$\frac{2a}{b+\sqrt{1+b^2}} + 1 = \frac{1}{(b+\sqrt{1+b^2})}$

$2ac + c^2 = 1$

$2a = 1 - c^2 \ ; \ a = \frac{1-c^2}{2}$

Оценочный бланк олимпиадных заданий по математике

Код участника: 93010001

Номер задания		1	2	3	4	5	6	7	8
Полученные баллы	Первый проверяющий	10	2	12	12	0	14	4	0
	Второй проверяющий	10	2	12	12	0	14	4	0
	Итого	10	2	12	12	0	14	4	0
Сумма баллов (оценка)		54							

Члены жюри:

Подпись — Маевская / — Фамилия И.О.

Подпись — Лидовский ТВ — Фамилия И.О.

Подпись — Александрова И.А. — Фамилия И.О.

Всероссийская олимпиада школьников «Миссия выполнима. Твое призвание-финансист!»

ПО МАТЕМАТИКЕ 11 класс

Заключительный (очный) этап 2017/2018 учебный год

93010001 2624

Код участника

Вариант I

Задание 1. (10 баллов)

Даны последовательность чисел $x_1, x_2, \ldots$, такая, что $x_1 = 79$ и $x_n = \dfrac{n}{x_{n-1}}$ для всех $n > 1$. На сколько нулей оканчивается число равное произведению $x_1 x_2 \ldots x_{2018}$?

Задание 2. (10 баллов)

Найдите наименьшее значение функции $f(x) = |x| + 2|x-1| + 3|x-2| \ldots + 11|x-10|$

Задание 3. (12 баллов)

Сколько различных корней имеет уравнение $f\left(f\left(f(x)\right)\right) = 1$, если $f(x) = x - \dfrac{2}{x}$?

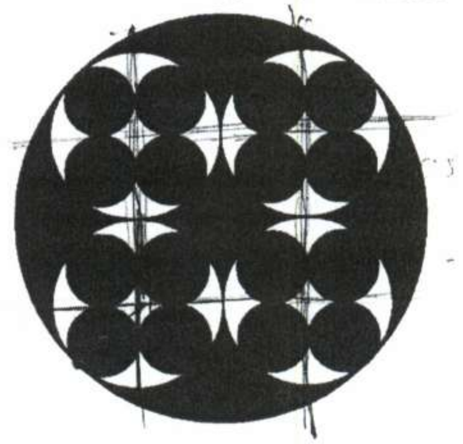
Задание 4. (12 баллов)

Сотрудники фирмы делятся на трудяг и лентяев. В 2016 году средняя зарплата трудяг превышала в два раза среднюю зарплату лентяев. Повысив свою квалификацию, трудяги в 2017 году стали получать на 50% больше, а зарплата лентяев не изменилась. При этом часть лентяев уволили в конце 2016 года. Средняя зарплата всех сотрудников в 2017 году стала на 20% больше, чем была в 2016 году. Найдите сколько процентов от общего числа сотрудников составляли в 2017 году трудяги, если в 2016 году их было 10%.

9301 0001

Задача 5. (12 баллов)

На первом шаге на листе бумаги была изображена единичная окружность и ограниченный ею круг закрашен черной краской. На каждом из последующих шагов для каждой из окружностей, изображенных на предыдущем шаге, рисуются четыре новые внутренне касающиеся ее окружности равных радиусов. Эти четыре окружности внешне касаются друг друга. Круги, ограниченные новыми окружностями, закрашиваются белой краской, если номер шага четное число, или черной краской, если номер шага нечетен. На рисунке изображен результат трех шагов. Описанный процесс продолжается до бесконечности. Найдите площадь белой области.



Задание 6. (14 баллов)

Действительные числа a и b таковы, что $\left(a+\sqrt{1+a^2}\right)\left(b+\sqrt{1+b^2}\right)=1$. Найдите сумму $a + b$.

Задание 7 (14 баллов)

Назовем положительное число a близким сверху к положительному числу b, если a превосходит b, но не больше чем на 1%. Докажите, что если в треугольнике радианная мера одного из углов близка сверху к радианной мере другого угла, то найдутся две стороны этого треугольника такие, что длина одной из них близка сверху к длине другой.

Задача 8. (16 баллов)

В алфавите языка альфов три буквы *А*, *Л* и *Ф*. Все слова этого языка можно построить, применяя последовательно следующие правила к любому слову из этого языка:

(1) поменять порядок букв в слове на противоположный

(2) заменить две последовательные буквы так: *ЛА* → *ФФ*, *АФ* → *ЛЛ*, *ФЛ* → *АА*, *ЛЛ* → *АФ*, *ФФ* → *ЛА* или *АА* → *ФЛ*.

Известно, что *ЛЛАФАЛАФФАЛАФФФАЛАФФФФАЛЛ* – это слово из языка альфов. Есть ли в языке альфов слово *ЛФАЛФАЛФАЛФАЛАФЛАФЛАФЛАФЛ*?

Участник № 1

93010001

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМА, ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ-ФИНАНСИСТ!»

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

Задание 4 Составим таблицу:

Год	Трудяги		Лентяи	
	зарплата на одного	кол-во в долях	зарплата на одного	кол-во в долях
2016	$2y$	$0,1x$	y	$0,9x$
2017	$3y$	zx	y	$(1-z)x$

(~~всех~~ всего x работников, а зарплата 1 лентяя $= y$)

(z - доля трудяг в 2017)

В 2016 зарплата трудяг $= 2y$

В 2017: $2y - 100\%$

$? - 150\% = 3y$

Пусть в 2017 было z трудяг от всего кол-ва работников (z - доля) (к-во zx) (тогда лентяев было: $(1-z)x$)

Составим ур-ие:

Известно, что зарпл. возросла на 20%

В 2016 вся зарпл.: $0,2yx + 0,9yx = 1,1yx$

В 2017 - ?: $1,1yx = 100\%$

$? = 120\% = 1,32yx$

или: $3yzx + y(1-z)x$

Ур-ие: $3yzx + yx(1-z) = 1,32yx$

$3z + 1 - z = 1,32$

$2z = 0,32$

$z = 0,16 \Rightarrow 16\%$

Ответ: 16%

(+)

Задание № 1

$x_1 = 79$

$x_n = \frac{n}{x_{n-1}}$

$P_n = x_1 x_2 \ldots x_n = x_1 \cdot \frac{2}{x_1} \cdots \frac{n}{x_{n-1}}$

т.к. $k = 2018$ - четное, сгруппируем множители:

$\left(x_1 \cdot \frac{2}{x_1}\right)\left(x_3 \cdot \frac{4}{x_3}\right) \ldots \left(x_{2017} \frac{2018}{x_{2017}}\right) \Rightarrow 2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2018 = 2(1009!)$

(т.к. $1009! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 1009$)

Рассмотрим кол-во чисел, в степенях 5 в числе 1009!

$5^1 = \frac{1009}{5} = 201$

$5^2 = \frac{1009}{25} = 40$

$5^3 = \frac{1009}{125} = 8$

$5^4 = 1$

$\Rightarrow$ кол-во кратных только 5^4: 1

только 5^3: $8 - 1 = 7$

только 5^2: $40 - 7 = 33 - 1 = 32$

только 5^1: $201 - 41 = 160$

Запрещается делать пометки, раскрывающие авторство работы

Страница №2 93010001

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМА, ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ-ФИНАНСИСТ!»

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

Необходимо найти 1 число, кратное $16(2^4) = \frac{1009}{16} = 63$ нашлось
7 чисел кратных $8(2^3) = \frac{1009}{8} = 126$
32 числа, кратных $4(2^2) = 252$ - нашлось
161 число, кратное $2(2^1) = 504$ нашлось
Кратно только 16: 63 числа, только 8: 63 числа, только 4: 126 чисел, только 2: 252 числа

Произведение 2 и 5 даст 1 ноль, ~~остальные числа~~ в конечном произведении => посчитаем сколько можно составить пар 2 и 5. Из вычислений выше видим, что двоек хватает в пару ко всем 5 => считаем кол-во пятерок:

Одна 5 в 4 степени + 7 пятерок в 3 + 32 пятерки во 2 + 161 в 1 =
$= 4\cdot 1 + 7\cdot 3 + 32\cdot 2 + 161 = 250$

Ответ: 250

+

Задание №3

$f(x) = x - \frac{2}{x}$

$f(f(x)) = f\left(x - \frac{2}{x}\right) = x - \frac{2}{x} - \frac{2}{x - \frac{2}{x}} = \frac{(x^2-2)}{x} - \frac{2x}{(x^2-2)} = \frac{(x^2-2)^2 - 2x^2}{x(x^2-2)}$

$f(f(f(x))) = f\left(\frac{(x^2-2)^2-2x^2}{x(x^2-2)}\right) = \frac{(x^2-2)^2-2x^2}{x(x^2-2)} - \frac{2x(x^2-2)}{(x^2-2)^2-2x^2} = 1$

Задача сводится к нахождению корней ур-ия.

$$\frac{\left(\left(\frac{x^2-2}{x}\right)^2 - 2\right)^2 - 2\left(\frac{x^2-2}{x}\right)^2}{\frac{x^2-2}{x}\left(\left(\frac{x^2-2}{x}\right)^2 - 2\right)} = 0$$

Вынесем x^3 ~~$x^3\left(\left(\frac{x^2-2}{x}\right)^2 - 2\right)^2 -$~~

$$\frac{x^3\left[\left(\left(\frac{x^2-2}{x}\right)^2 - 2\right)^2 - 2\left(\frac{x^2-2}{x}\right)^2\right]}{(x^2-2)\left((x^2-2)^2 - 2x^2\right)} = 0$$

(Т.к. по ОДЗ $x \neq 0$, то x^3 можно убрать, т.к. не влияет на ответ)

$$\cancel{x^3}\left(\frac{x^2-2}{x}\right)^2 \cancel{- 4(x^2-2)}\Big)^2 - 2\left(\frac{x^2-2}{x}\right)^2 = 0$$

Далее того, уберем ~~числитель~~ знаменатель (с учетом ОДЗ)

ОДЗ: $x \neq \pm\sqrt{2}$

$(x^2-2)^2 - 2x^2 \neq 0$
$x^4 - 4x^2 + 4 - 2x^2 \neq 0$
$t = x^2,\ t > 0$
$t^2 - 6t + 4 = 0$
$k = 3$
$D = 9 - 4 = 5$
$t \neq 3 \pm \sqrt{5}$
$x^2 \neq 3 \pm \sqrt{5}$
$x \neq \sqrt{3 \pm \sqrt{5}}$

=> Уравнение принимает вид:

$\left(\left(\frac{x^2-2}{x}\right)^2 - 2\right)^2 - 2\left(\frac{x^2-2}{x}\right)^2 = 0$

Пусть $\left(\frac{x^2-2}{x}\right)^2 = t,\ t > 0$

$(t-2)^2 - 2t = 0$

$t^2 - 4t + 4 - 2t = 0 \Leftrightarrow t^2 - 6t + 4 = 0$

Информатика 3

9301000 1

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМА, ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ-ФИНАНСИСТ!»

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

$t^2-6t+4=0$
$k=-3$
$D=9-4=5$
$t=3\pm\sqrt5$ – оба числа > 0! $\sqrt5\approx2,2$. Уравнение распадается:

$\Rightarrow\left(\frac{x^2-2}{x}\right)^2=3+\sqrt5$

$\frac{x^4-4x^2+4-3x^2\sqrt5x^2}{x^2}=0$

$x^4-4x^2-3x^2-\sqrt5x^2+4=0$

$x^4-7x^2-\sqrt5x^2+4=0$

$x^2=t,\ t>0$

$t^2-(7+\sqrt5)t+4=0$

$D=(7+\sqrt5)^2-16>0$

$\Rightarrow$ 2 корня

$t_1=\frac{7+\sqrt5-\sqrt{49+5+14\sqrt5-16}}{2}>0$

$t_2=\frac{7+\sqrt5+\sqrt{49+5+14\sqrt5-16}}{2}>0$

каждый t еще 2 корня, т.к. $x^2=a\Rightarrow x=\pm\sqrt a$, где $a>0$
в итоге у уравнения 4 корня

$\left(\frac{x^2-2}{x}\right)^2=3+\sqrt5$

$x^4-4x^2+4-3x^2+\sqrt5x^2=0$

$x^4-7x^2+\sqrt5x^2+4=0$

$t=x^2$

$t^2+t(\sqrt5-7)+4=0$

$D=(\sqrt5-7)^2-16>0\Rightarrow2$ корня

$t_1=\frac{7-\sqrt5-\sqrt{(\sqrt5-7)^2-16}}{2}>0$

$t_2=\frac{7-\sqrt5+\sqrt{5+49-14\sqrt5-16}}{2}>0$

Аналогично в этом ур-ии 4 корня.

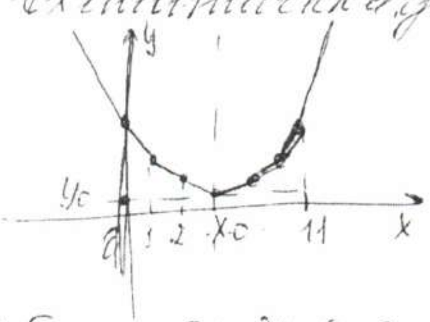
$4+4=8$

Ответ: 8

+

Задание 2. Анг $y=|x|+2|x-1|+3|x-2|+\ldots+11|x-10|$

Схематический график этой ф-ции выглядит так:



Т.е существует такой x_0, при котором y_0 наим.
По графику видно, что x_0 – середина отрезка $x\in[0;11]$.
Подставим $x=5$, $5,5$ и 6 и посмотрим какое знач. – наим.

+

$x=5$ $y=5+8+9+8+5+7+16+27+40+55=180$

$x=6$ $y=6+10+12+12+10+6+8+18+30+44=156$

$\Rightarrow$ ~~$x=5$ наим~~ т.к. если с граф $x=5,5$ будет $>x=5$ и $<x=6$)
$y=180$ нет
Ответ: 180

Задание 7 Рассмотрим $\triangle ABC$ у которого
$\angle ABC=\angle$, $\angle BAC=1,01\angle$

2

Док-то: ~~$AC=BC$~~ $\frac{BC}{AC}=1,01$

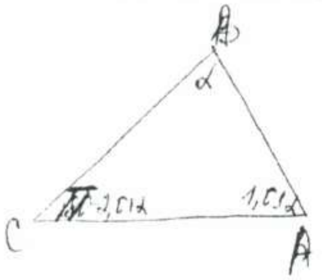
Запрещается делать пометки, раскрывающие авторство работы

Математика 4

93010001

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМА, ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ-ФИНАНСИСТ!»

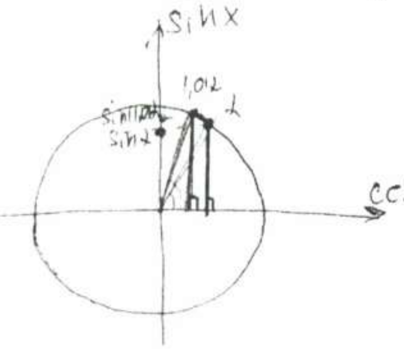
ЛИСТ-ВКЛАДЫШ



Док-во:

Во первых, пусть α — рад; во-вторых, $\alpha < 90° \Rightarrow$
$\Rightarrow \alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha < 1{,}57$ (т.к. иначе нарушится правило, что сумма углов $= 180°$)

Тогда на тригоном. окр. α находится в I четверти.



Видно, что при умножении α в 1,01 р, sin незн-но увеличивается

sin — длина перпенд. от α и 1,01α до ох.

т.к. рассматрив. α и 1,01α нельзя привести к кардинальному примеру.

По теореме sin-ов в ABC

$$\frac{BC}{\sin 1{,}01\alpha} = \frac{AC}{\sin\alpha}$$

$$\frac{BC}{AC} = \frac{\sin 1{,}01\alpha}{\sin\alpha}$$

Но т.к. α — рад, то $\frac{\sin 1{,}01\alpha}{\sin\alpha} = 1{,}01$

(+)

$\Rightarrow \frac{BC}{AC} = 1{,}01$ чтд.

Задание №6

Выразим $1+a^2$ из данного равенства

$$\sqrt{1+a^2} = \frac{1}{b+\sqrt{1+b^2}} - a$$

$$?\,|1+a^2| = \frac{1}{(b+\sqrt{1+b^2})^2} - \frac{2a}{b+\sqrt{1+b^2}} + a^2$$

? неизв. $>0 \Rightarrow$ и модуль

$(\sqrt{x})^2 = x$

$$1 = \frac{1}{(b+\sqrt{1+b^2})^2} - \frac{2a}{b+\sqrt{1+b^2}}$$

Разложили

$$\frac{\sqrt{1+b^2} - b}{b+\sqrt{1+b^2}} - \frac{2a}{b+\sqrt{1+b^2}} - \frac{\sqrt{1+b^2}+b\ 2b}{b+\sqrt{1+b^2}} = 0$$

$$\frac{-2a-2b}{b+\sqrt{1+b^2}} = 0$$ Отбрасываем знаменатель

$-2a-2b=0$

$a+b=0$

Ответ

(+)

N8 (−)

Запрещается делать пометки, раскрывающие авторство работы

9301000I

Чертежи

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМА, ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ-ФИНАНСИСТ!»

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

ЛЛА ФАЛА ФФА

АФ

ЛЛА ФА

$\sqrt{1+a^2} = b - a + \sqrt{1+b^2}$

$1+a^2 = \left(\frac{1}{b+\sqrt{1+b^2}} - a\right)^2$

$1+a^2 = \left(\frac{1}{b+\sqrt{1+b^2}} - a\right)^2$

$= 1 + a^2 = \left(\frac{1 - ab - a\sqrt{1+b^2}}{b+\sqrt{1+b^2}}\right)^2 =$

$a^2 = \left(\frac{1 - ab - a\sqrt{1+b^2} - b - \sqrt{1+b^2}}{b+\sqrt{1+b^2}}\right)\cdot$

$= a^2 = \left(\frac{1 - ab - a\sqrt{1+b^2} - b - \sqrt{1+b^2}}{b+\sqrt{1+b^2}}\right)$

$\left(\frac{1 - ab - a\sqrt{1+b^2} + b + \sqrt{1+b^2}}{b+\sqrt{1+b^2}}\right)$

$\cdot\left(\frac{1}{b+\sqrt{1+b^2}} - a - 1\right)\left(\frac{1}{b+\sqrt{1+b^2}} - a + 1\right) =$

$= \left(\frac{(b+\sqrt{1+b^2})((-a-1)+1)}{b+\sqrt{1+b^2}}\right)\left(\frac{(b+\sqrt{1+b^2})(1-a)}{b+\sqrt{1+b^2}}\right)$

$= \left(\frac{1 - ab - a\sqrt{1+b^2} - b - \sqrt{1+b^2}}{b+\sqrt{1+b^2}}\right)$

$\frac{(b+\sqrt{1+b^2})((-a-1+1-a)+2)}{(b+\sqrt{1+b^2})^2} =$

$\left(\frac{1 - ab - a\sqrt{1+b^2} + b + \sqrt{1+b^2}}{b+\sqrt{1+b^2}}\right) =$

$= -2a$

$= 1 - a(b+\sqrt{1+b^2}) - (b+\sqrt{1+b^2})$

$= \frac{((b+\sqrt{1+b^2})(-a-1)+1)((b+\sqrt{1+b^2})(-a+1)+1)}{(b+\sqrt{1+b^2})^2} =$

$(b+\sqrt{1+b^2})^2 + 2a(b+\sqrt{1+b^2}) - 1 = 0$

$t^2 + 2at - 1 = 0 \quad t = a$

$= \frac{(b+\sqrt{1+b^2})(-a-1)}{(b+\sqrt{1+b^2})^2}$

$D = a^2 + 1$

$\sqrt{1+b^2} > \sqrt{b^2} = |b|$

$t_1 = -a - \sqrt{\ }$

$\frac{1}{b+}$

$b^2 + 1 + b^2 + 2b\sqrt{1+b^2} =$

$b + \sqrt{1+b^2} > 0$

$t_0 = \frac{-2a}{2} = -a$

$= 2b^2 + 2b\sqrt{1+b^2} + 1$

$a + \sqrt{1+a^2} > 0$

$(b+\sqrt{1+b^2})^2 - 1$

$\sqrt{1+a^2} = \frac{1}{b+\sqrt{1+b^2}} - a$

$\frac{\sqrt{1+b^2} - b}{b+\sqrt{1+b^2}} - \frac{2a}{b+\sqrt{1+b^2}} - \frac{\sqrt{1+b^2}+b}{b+\sqrt{1+b^2}} = 0$

$1 + a^2 = \frac{1}{(b+\sqrt{1+b^2})^2} - \frac{2a}{b+\sqrt{1+b^2}} + a^2$

$\frac{2a+2b}{b+\sqrt{1+b^2}} = 0$

$a + b = 0$

$\frac{\sqrt{1+b^2} - b}{b+\sqrt{1+b^2}} - \frac{2a}{b+\sqrt{1+b^2}} - \frac{\sqrt{1+b^2}+b}{b+\sqrt{1+b^2}} = 0$

Запрещается делать пометки, раскрывающие авторство работы

черновик

93010001

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМА, ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ-ФИНАНСИСТ!»

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

при $x \leq 0$

$\cancel{f(x)} = \begin{cases} \cancel{-x-2x+2}-3x+6-4x+12-5x+110- \quad +110 \\ \cancel{\text{при } x\in[1;0]} \end{cases}$

(при $x=0$ $y=110+\dots$ при $x=-1$ y-дальше не подх.

$x=0 \quad x=1 \quad x=2 \quad \dots \quad x=10$

$|x|$ — 0

$|x-1|$ —

$|x-2|$ —

$|x-3|$ —

$x\leq 0 \quad f(x) = -x-2x-3x \dots -11x+2+6+12+ \dots +110$

$\Rightarrow$ при $x=0$ $y=110+\dots+2+6\dots$

при $x<0$ $y\uparrow \Rightarrow$ не наим

$\begin{array}{r} +13 \\ 17 \\ \hline 30 \end{array} \quad \begin{array}{r} 30 \\ +21 \end{array}$

$x\in[0;1]$ $f(x) = x-2x-3x-4x\dots-11x+2+6+12\dots+110$ - не наим

$x\in[1;2]$ $f(x)=x+2x-3x-4x\dots-11x-2+6+12 \quad \dots$ - не наим,

$x\in[4;5]$ $f(x)$ $x+2x+3x+4x+5x-6x-7x-8x-9x-10x-11x+\dots$

$= 15x-51x$

$x=6$: $f(x)=x+2x+3x+4x+5x+6x-7x-8x-9x-10x-11x-2-6-12-20-30+$
$+42+56+72+90+110=$

$|x|+2|x-1|+3|x-2|+4|x-3|+5|x-4|+6|x-5|+7|x-6|+$
$+8|x-7|+9|x-8|+10|x-9|+11|x-10|$

$\pi - 180$ рад: $\frac{\alpha\pi}{180}$

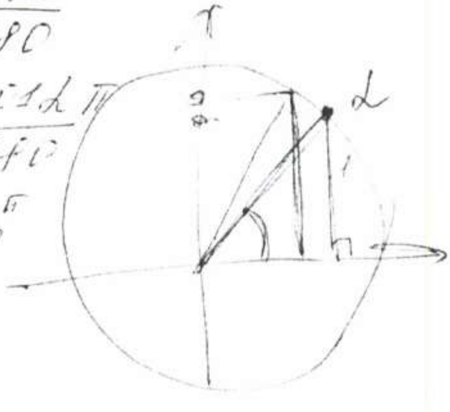
80

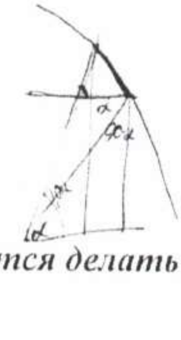
10

$\frac{BC}{4} = \frac{AC}{3}$

$BC = \frac{4}{3}AC$

$\frac{AC}{\sin\frac{\alpha\pi}{180}} = \frac{BC}{\sin\frac{1{,}011\alpha\pi}{180}}$ $\frac{1{,}011\alpha\pi}{180}$





Запрещается делать пометки, раскрывающие авторство работы

Черновик

9301000L

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМА. ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ-ФИНАНСИСТ!»

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

$\cancel{2} \cdot \frac{3\cdot\cancel{79}}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{4\cdot 2}}{3\cdot\cancel{79}} \cdot \frac{5\cdot 3\cdot 79}{\cancel{4\cdot 2}}$

$x_1 = 79$ $\quad x_1\, x_2 \ldots x_{2018}$

$x_n = \frac{n}{x_{n-1}}$ $\quad x_2 = \frac{2}{79}$ $\quad x_3 = \frac{3\cdot 79}{2}$ $\quad x_4 = \frac{4\cdot 2}{3\cdot 79}$

$x_5 = \frac{5\cdot 3\cdot 79}{4\cdot 2}$

$x_6 = \frac{6\cdot 4\cdot 2}{5\cdot 3\cdot 79}$ $\quad x_n = \frac{n}{x_{n-1}}$

$x_{n+1} = \frac{n+1}{n} x_{n-1}$

$x_{n+2} = \frac{(n+2)n}{n+1\, x_{n-1}}$

$x_n\, x_{n+1} = \frac{\cancel{n}}{\cancel{x_{n-1}}} \cdot \frac{(n+1)\cancel{x_{n-1}}}{\cancel{n}} = n+1$ $\quad x_{n+3} = \frac{(n+3)(n+1)\, x_{n-1}}{(n+2)\, n}$

$x_{n+4} = \frac{(n+4)(n+2)\, n}{(n+3)(n+1)}$

$x_n\, x_{n+1}\, x_{n+2} = \frac{(n+2)\, n}{x_{n-1}}$

$\left(\left(\frac{x^2-2}{2}\right)^2 - 2\right)^2 - 2\left(\frac{x^2-2}{x}\right)^2$

$x_n\, x_{n+1}\, x_{n+2}\, x_{n+3} = (n+3)(n+1)$

$\frac{x^2-2}{x} \left(\left(\frac{x^2-2}{x}\right)^2 - 2\right)$

$\underbrace{x_1\, x_2\, x_3\, x_4\, x_5}$ $= 6\cdot 6$ $\quad 5\cdot 3$

$(3+1)$

49
11
38

$\cancel{79} \cdot \frac{2}{\cancel{79}} \cdot \frac{3\cdot \cancel{79}}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{4\cdot 2}}{\cancel{3\cdot 79}} \cdot \frac{5\cdot 3\cdot \cancel{79}}{\cancel{4\cdot 2}}$

$x_1 = \cancel{79}$

$(3+\sqrt{5})$

$x_2 = \frac{2}{\cancel{79}}$ $\quad x_3 = \frac{\cancel{3\cdot 2}}{\cancel{79}}$ $\quad x_4 = \frac{4\cdot \cancel{79}}{\cancel{3\cdot 2}}$ $\quad x_5 = \frac{5\cdot 3\cdot 2}{4\cdot \cancel{79}}$

$(3+\sqrt{5})(9+\sqrt{5})$

$x_6 = \frac{6\cdot 4\cdot \cancel{79}}{\cancel{5\cdot 3\cdot 2}}$

$49+5+14\sqrt{5}-16 =$ $\quad 2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10$

$= 38+14\sqrt{5}$, 69,304

$\cancel{2 \cdot 2^2 \cdot 2\cdot 3\cdot 2^3 \cdot 2\cdot 5}$

$7+\sqrt{5} - \sqrt{38+14\sqrt{5}}$
9,376

$2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2018$

9, 2 3.

Запрещается делать пометки, раскрывающие авторство работы

9301 P001

$x_1 = 79$

$2(1003!)$

$x_n = \frac{n}{x_{n-1}}$ $\quad x_{n+1} = \frac{n+1}{\cancel{n}} \cancel{x_{n-1}}$

$x_{n+2} = \frac{(n+2)\cancel{n}}{\cancel{(n+1)x_{n-1}}}$ $\quad x_{n+3} = \frac{(n+3)\cancel{(n+1)x_{n-1}}}{\cancel{(n+2)}n}$

$n = 2$ $\quad (n+1)(n+3)(n+5)(n+7)\ldots$

$n = 1$

$2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \quad \cdot 2018$

$\cancel{2018}$

$2 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \ldots 2^{10} \cdot 2(3+3^2+3^3) \cdot 2(5+5^2) \cdot$

$\cdot 2(7+7^2) \cdot 2(9) \cdot 2(11)) \, 2$

$2(1003!)$

$f(x) = |x| + 2|x-1| + 3|x-2| + \ldots + 11|x-10|$

$\pm x \pm 2(x-1) \pm 3(x-2) \pm \ldots \pm 11(x-10)$

$10 + 2\cdot9 + 3\cdot8 + 4\cdot7 + 5\cdot6 + 6\cdot5 + 7\cdot4 + 8\cdot3 + 9\cdot2 + 10$

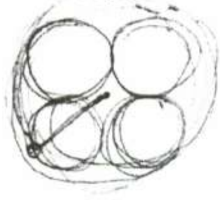
$f(-x) = |-x| + 2|-x-1| + 3|-x-2| + \ldots + 11|-x-10|$

$x = 10$

$\cancel{10+}$

$1+2+4$

$1\cdot4 + 7\cdot5 + 32\cdot 4 + 16 \; 0$



$5/6$

2^{2^6}

$f(f(f(x))) = 1$ $\quad f(x) = x - \frac{2}{x}$

$f\left(f\left(x - \frac{2}{x}\right)\right) = +1$

9301 0001

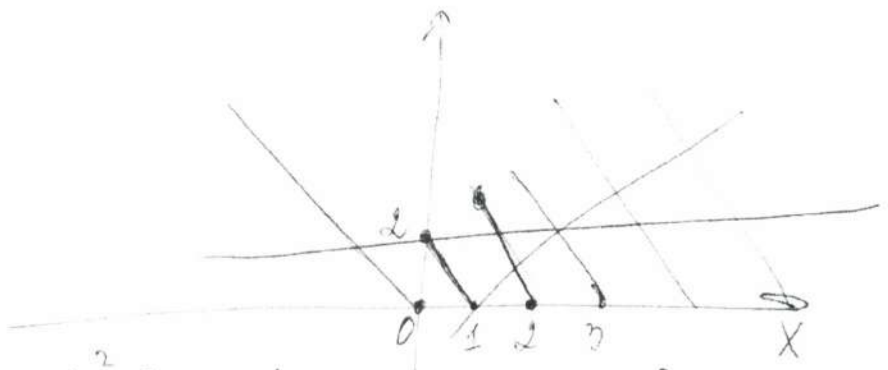
ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМА, ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ-ФИНАНСИСТ!»

$((x-2)^2-2x^2)-x(x^2-2))^2=$

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

$y=2|x-1|$

$3|x-2|$



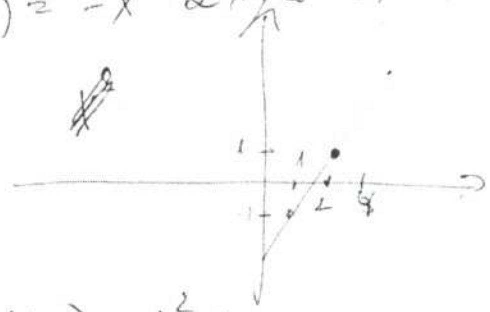
$\frac{x^2-2}{x}=1$

$x^2-x-2=0$

~~$x<0$ $f(x)=x+2x-2+3x-6+\ldots+11x-110$~~

~~$x\in[0;1]$ $f(x)=-x+2x-2$~~

$x\le 0$ $f(x)=-x-2x+2-3x+6\ \ldots\ -11x+110$



$f(f(x-\frac{2}{x}))=1$

$f(f(\frac{x^2-2}{x}))=1$

$f(x)=\frac{x^2-2}{x}$

$f\left(\frac{x^4-6x^2+4}{x(x^2-2)}\right)=\frac{x^4-6x^2+4}{x(x^2-2)}-\frac{2(x(x^2-2))}{x^4-6x^2+4}=$

$=\frac{(x^4-6x^2+4)^2-2(x(x^2-2))^2}{x(x^2-2)(x^4-6x^2+4)}=1$

$f(x-\frac{2}{x})=x-\frac{2}{x}-\frac{2}{x-\frac{2}{x}}=$

$=x-\frac{2}{x}-\frac{2x}{x^2-2}=$

$=\frac{x^2(x^2-2)-2(x^2-2)-2x^2}{x(x^2-2)}=$

$=\frac{(x^2-2)(x^2-2)-2x^2}{x(x^2-2)}=\frac{(x^2-2)^2-2x^2}{x(x^2-2)}=$

$=\frac{x^4-4x^2+4-2x^2}{x(x^2-2)}=\frac{x^4-6x^2+4}{x(x^2-2)}$

Запрещается делать пометки, раскрывающие авторство работы

93010001

2016 Т Л
2 x x
2017 3x x

$2x - 100$
$x\ 50$
~~400x = 120 3x~~

$4x = 120$
$3x = 100$

	Т з,	%	Л з,	%
2016	2y	0,1x	y	0,9x
2017	3y	0,1x	y	(0,9x - k)

~~$0{,}2xy + 0{,}9xy = 1{,}1xy$ - 2016 г~~
~~$0{,}3y + y(0{,}9x - k) = 1{,}32xy$ 2017 г~~
~~$1{,}2xy - ky = 1{,}32xy$~~
~~$k = 0{,}12x$~~

$1{,}1xy = 100$
$1{,}32xy$ 120

$1{,}1xy \cdot 100$
$1{,}32 - 120\%$
$1{,}1xy$ - затр

	Т		Л	
	з	к - 80%	з	к - 80%
	2y	0,1x	y	0,9x
	3y		y	

$(a+\sqrt{1+a^2})(b+\sqrt{1+b^2}) = 1$

$xy = 1$

$5 + 2\cdot 4 + 3\cdot 3 + 4\cdot 2 + 5\cdot 1 +$
$6 + 7\cdot 2 + 8\cdot$

$3yz + y - yz = 1{,}32xy$
$3yzx + y(1-z)x = 1{,}32xy$
$3zx - zx + x = 1{,}32x$
$3z - z + 1 = 1{,}32$
$2z = 0{,}32$
$z = 0{,}16$

$x \neq 0$
$$\frac{(x^4 - 6x^2 + 4)\cdot(x^4 - x^3 - 6x^2 - 2x + 4) - 2x^2(x^4 - 4x^2 + 4)}{x^2 x^2}$$
$$= \frac{x^8 - x^7 - 6x^6 - 2x^5 + 4x^4 - 6x^6 + 6x^5 + 36x^4 + 12x^3 - 24x^2 - 8x + 16 - 2x^6 + 8x^4 - 8x^2}{x^4} = x^8 - x^7 - 12x^6$$

93010001

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМА. ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ-ФИНАНСИСТ!»

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

Задание 3 $f(x) = x - \frac{2}{x}$ ОДЗ: $x \neq 0$

$$f(f(x)) = f\left(x - \frac{2}{x}\right) = x - \frac{2}{x} - \frac{2}{x - \frac{2}{x}} = x - \frac{2}{x} - \frac{2x}{x^2-2} =$$

$$= \frac{(x^2-2)}{x} - \frac{2x}{x^2-2} = \frac{(x^2-2)^2 - 2x^2}{x(x^2-2)}$$

$$f(f(f(x))) = f\left(\frac{(x-2)^2 - 2x^2}{x(x^2-2)}\right) = \frac{(x-2)^2 - 2x^2}{x(x^2-2)} - \frac{2x(x^2-2)}{(x-2)^2 - 2x^2} =$$

$$= \frac{((x-2)^2 - 2x^2)^2 - 2x^2(x^2-2)^2}{x(x^2-2)((x-2)^2 - 2x^2)} = 1$$ ОДЗ: $x \neq 0$; $x \neq \pm\sqrt{2}$; $x \neq$

$$((x-2)^2 - 2x^2)^2 - 2x^2(x^2-2)^2 - x(x^2-2)((x-2)^2 - 2x^2) = 0$$

$$(x-2)^4 - 4x^2(x-2)^2 + 4x^4 - 2x^2(x-2)^2 - x(x^2-2)((x-2)^2 - 2x^2) = 0$$

$$(x-2)^4 - 4x^2$$

а 4

Т		Л	
Зарплата на 1	кол-во в делях	Зарпл. на одного	кол-во в делях
2y	0,1x		

2016

2017

$$\frac{\left(\left(\frac{x^2-2}{2}\right)^2 - 2\right)^2 - 2\left(\frac{x^2-2}{x}\right)^2}{\frac{x^2-2}{x}\left(\left(\frac{x^2-2}{x}\right)^2 - 2\right)} = \cancel{x^3}\left(\left(\frac{x^2-2}{x}\right)^2 - 2\right)^2 -$$

$$\left(\left(\frac{x^2-2}{2}\right)^2 - 2\right)^2 - 2\left(\frac{x^2-2}{x}\right)^2 = \frac{x^2-2}{x}\left(\left(\frac{x^2-2}{x}\right)^2 - 2\right)$$

$$\cancel{\left(\left(\frac{x^2-2}{2}\right)^2 - 2 + \sqrt{2}\left(\frac{x^2-2}{x}\right)\right)\left(\left(\frac{x^2-2}{2}\right)^2 - 2 + \sqrt{2}\left(\frac{x^2-2}{x}\right)\right)} - x^2$$

$$\left(\left(\frac{x^2-2}{x}\right)^2 - 2\right)\left(\left(\frac{x^2-2}{x}\right)^2 - 2 - \frac{x^2-2}{x}\right) - 2\left(\frac{x^2-2}{x}\right)^2 =$$

$$= \frac{(x^2-2)^2 - 2x^2}{x^2} \cdot \left(\frac{(x^2-2)^2 - 2x^2 - (x^2-2)x}{x^2}\right) - \frac{2(x^2-2)^2}{x^2} =$$

$$= \left(\frac{x^4 - 4x^2 + 4 - 2x^2}{x^2}\right) \cdot \left(\frac{x^4 - 4x^2 + 4 - 2x^2 - x^3 + 2x}{x^2}\right) - \frac{2(x^4 - 4x + 4)}{x^2} =$$

Запрещается делать пометки, раскрывающие авторство работы

93010001

$2 \cdot 1009!$

$2 \quad 1009!$

201

$1009! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 1009$

40

$$\left(\left(\frac{x^2-2}{2}\right)^2-2\right)^2-2\left(\frac{x^2-2}{x}\right)^2=\frac{x^2-2}{x}\left(\left(\frac{x^2-2}{x}\right)^2-2\right)=$$

$$\cancel{\left(\frac{x^4-4x^2+4-8}{4}\right)^2-\frac{2}{x^2}(x^4-}$$

$$\left(\left(\frac{x^2-2}{2}\right)^2-2\right)\left(\left(\frac{x^2-2}{2}\right)^2-2\right)-\left(\frac{x^2-2}{x}\right)-2\frac{(x^2-2)^2}{x}=0$$

$$\frac{x^4-4x^2+4}{4}\cdot\left(\frac{x^4-4x^2+4-8}{4}\right)\frac{(x^2-2)^2}{x}-2\frac{(x^2-2)^2}{x}=0$$

$$\left(\frac{x^4-4x^2-4}{4}\right)\left(\frac{x^5-4x^3-4x-4x^2+8}{4x}\right)-\frac{2(x^4-4x^2+4)}{x}=$$

$$=\cancel{\frac{t-4}{4}\,t+4\left(\frac{t-4}{4}-\frac{t+4}{x}\right)}$$

$$x^3\left[\left(\left(\frac{x^2-2}{x}\right)^2-2\right)^2-2\left(\frac{x^2-2}{x}\right)^2\right]=$$

$$(x^2-2)((x^2-2)^2-2x^3)$$

$$x^3\left[\left(\frac{x^2-2}{x}\right)^4-4\left(\frac{x^2-2}{x}\right)^2+4-2\left(\frac{x^2-2}{x}\right)^2\right]\quad x\neq0$$

$2/x-$

$$\left(\left(\frac{x^2-2}{x}\right)^2-2\right)^2-2\left(\frac{x^2-2}{x}\right)^2=0$$

$+20+15=35$

$15 \quad -14x+$

$$\cancel{(t^2-2)^2-}$$

$$(t-2)^2-2t=0$$

$$t^2-6t+4=0$$

$k=-3$

$D=9-4=5$

$t_1=3-\sqrt5 \quad t_2=3+\sqrt5$