ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМА.
ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ – ФИНАНСИСТ!»
ПО ПРЕДМЕТУ **МАТЕМАТИКА** 2022-2023 уч. года

## ОЧНЫЙ ЭТАП

**8-9 классы** **Вариант 1**

### Задание 1 (10 баллов)

Если сложить произведение и сумму двух чисел, то получится 95. Если вычесть из произведения этих чисел их сумму, то получится 59. Найдите эти числа.

***Решение.***

Пусть $a$ и $b$ - искомые числа.

Тогда по условию задачи

$$\begin{cases} ab + (a + b) = 95, \\ ab - (a + b) = 59. \end{cases}$$

Складывая полученные уравнения, получаем $2ab = 154$ или $ab = 77$.

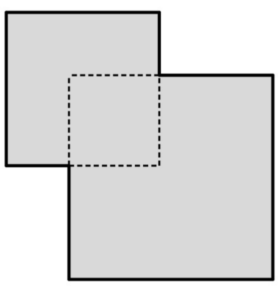
Вычитая полученные уравнения, получаем $2(a + b) =36$ или $a + b =18$.

Следовательно, искомые числа равны 7 и 11.

Ответ: 7 и 11.

### Задание 2 (10 баллов)

Два квадрата, стороны которых относятся как 3:4, наложены друг на друга так, что их общая часть также образует квадрат. Длины сторон всех трех квадратов являются натуральными числами, а площадь закрашенной фигуры равна 525. Найдите стороны всех квадратов.



***Решение.***

Обозначим сторону меньшего из двух квадратов как $3n$, сторону большего из двух квадратов как $4n$, а сторону квадрата, образовавшегося в результате пересечения как $m$.

Площадь закрашенной фигуры в этом случае составляет:

$$(3n)^2 + (4n)^2 - m^2 = 525.$$

После преобразования получим:

$$25n^2 - m^2 = (5n - m)(5n + m) = 525 = 5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 7.$$

Так как все длины сторон - натуральные числа, то получаем систему:

$$\begin{cases} 5n - m = a \\ 5n + m = b \end{cases}$$

где $a$ и $b$ - натуральные числа (делители числа 525).

Перебором делителей убеждаемся, что существует единственное целочисленное решение:

$$n = 5,\ m = 10.$$

Ответ: сторона меньшего квадрата 15, сторона большего 20, сторона квадрата, образованного их пересечением равна 10.

**Задание 3 (12 баллов)**

Найдите наименьшее натуральное число $n$, для которого десятичная запись числа $n$! оканчивается 500 нулями. ($n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n - 1) \cdot n$)

*Решение.*

Произведение двух чисел дает на конце ноль, если в состав их множителей входит 5 и 2. Чтобы узнать, сколько нулей будет на конце у $M$! нужно разделить число $M$ на степени числа 5.

У 125! будет в конце 125:5+125:25+125:125 = 25+5+1 = 31 ноль.

У 625! будет в конце 625:5+625:25+625:125+625:625 = 125+25+5+1 = 156 нулей.

Таким образом, число 2005! будет содержать на конце:

2005:5 + [2005:25] + [2005:125] + [2005:625] = 401+80+16+3 = 500 нулей, в то время как число 2004! заканчивается на 499 нулей.

(Здесь $[x]$ - целая часть числа $x$)

Ответ: 2005.

**Задание 4 (12 баллов)**

На доске написано:

$$*\,1 * 8 * 64 * 8^3 * 8^4 * 8^5 * 8^6 * 8^7$$

Боря и Гоша по очереди заменяют звездочки знаками + или – (по одной звездочке за один ход). После восьми ходов вычисляется значение полученного выражения. Докажите, что Гоша может ходить так, что эта сумма будет делиться на 13, если он ходит вторым.

***Решение.***

Заметим, что $1 + 64 = 65 = 5 \cdot 13$.

Стратегия Гоши может быть следующей.

Все числа делим на пары: $(1; 64)$, $(8; 8^3)$, $(8^4; 8^6)$, $(8^5; 8^7)$.

После хода Бори Гоша выбирает число, которое является парным для выбранного Борей числа, и ставит перед ним тот же знак, который Боря поставил перед своим числом.

В итоге получится следующее выражение:

$$\pm(1+64) \pm (8+8^3) \pm (8^4+8^6) \pm (8^5+8^7) =$$
$$= 13 \cdot 5 \cdot (\pm 1 \pm 8 \pm 8^4 \pm 8^5),$$

где вместо $\pm$ стоит один из знаков «плюс» или «минус» (необязательно одинаковые).

Представленная стратегия позволяет Гоше сделать так, чтобы полученная сумма будет делиться на 13.

**Задание 5 (12 баллов)**

Найдите количество пар $(m, n)$ натуральных чисел, таких что каждый из корней уравнения $x^2 - mx - n = 0$ не превосходит 10.

***Решение.***

Поскольку корни уравнения существуют, то $m^2 + 4n \geq 0$. Это неравенство верно для всех натуральных чисел $m$ и $n$.

Чтобы каждый из корней уравнения не превосходил 10 достаточно, чтобы больший корень не превосходил 10.

Таким образом, достаточно найти количество пар натуральных чисел, таких что

$$\frac{m+\sqrt{m^2+4n}}{2} \le 10 \Leftrightarrow \sqrt{m^2+4n} \le 20-m.$$

Возводя в квадрат и учитывая, что $m \le 20$, получаем

$$n+10m \le 100.$$

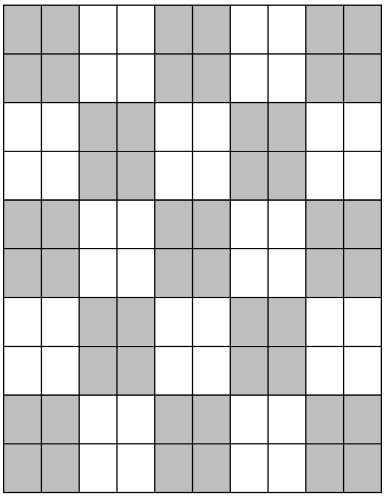
Из последнего неравенства находим ответ: 90 + 80 + 70 + … +20 + 10 = 450.

Ответ: 450.

**Задание 6 (14 баллов)**

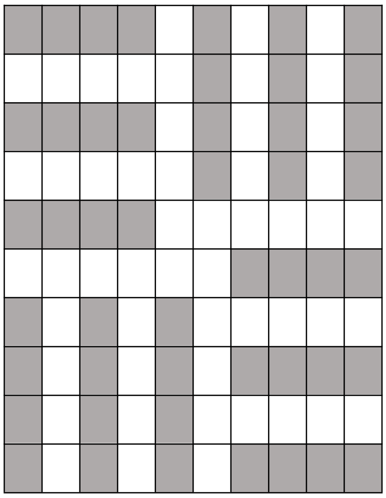
У Бори и Гоши есть шахматная доска размером 10×10 и по набору из одинакового числа плиток. У Бори все плитки имеют размеры 1×3, а у Гоши некоторые плитки размеров 1×3, а остальные – 1×4. Ребята выкладывают свои плитки так, чтобы они не выступали за края доски, чтобы края плиток проходили по линиям клеток и чтобы никакие две плитки не касались друг друга (даже углами). Боре удалось выложить все свои плитки указанным способом. Докажите, что, убрав плитки Бори, Гоша тоже сможет уложить свои плитки, не нарушив правила.

***Решение.***



Наибольшее число плиток 1×3 или 1×4, которые можно уложить по правилам равно 12, что следует из такой раскраски слева на рисунке.

При любой укладке плиток 1×3 или 1×4 каждая закроет собой одну или две белые клетки. Укладка будет удовлетворять условию когда (и только когда) никакие две плитки не закрывают разные клетки в одном белом квадрате 2×2. Таким образом, плиток не более, чем белых квадратов, а их 12.



Двенадцать плиток уложить можно. На рисунке справа пример раскладки для плиток 1×4, убрав из каждой плитки один квадратик получаем пример раскладки для плиток 1×3

Ответ: 12

**Задание 7 (14 баллов)**

В школе любые два ребёнка либо дружат друг с другом, либо нет. Назовём ребёнка общительным, если он дружит хотя бы с тремя другими детьми. Известно, что в школе есть $n$ общительных детей, а также ровно 11 детей, у которых всего один друг. При каком наименьшем $n$ заведомо найдётся несколько детей, которых можно посадить за круглый стол так, чтобы каждый знал обоих своих соседей?

***Решение.***

Пусть в школе всего $N$ детей.

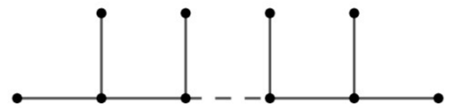
Будем представлять детей в виде вершин графа, а факт дружбы между детьми в виде ребра, соединяющие вершины, соответствующие друзьям.

Если $n \geq 10$, то сумма степеней вершин не меньше чем

$$11 + 2 \cdot (N - 11 - n) + 3n \geq 2N + n - 11 \geq 2N - 1.$$

Сумма степеней вершин четная, то она равна как минимум $2N$, а тогда ребер хотя бы $N$, из чего следует, что найдется цикл, а значит при $n = 10$ заведомо найдётся несколько детей, которых можно посадить за круглый стол так, чтобы каждый знал обоих своих соседей (очевидно, что друзья знают друг друга).

Если же $n = 9$, то можно построить пример, когда цикла не будет и, следовательно, указанная рассадка не возможна.Например, возьмем 11 вершин, соединим их путем (10 ребер) и затем ко всем вершинам, кроме концов добавим «висячую» вершину, как показано на рисунке ниже.



Ответ: 10

**Задача 8 (16 баллов)**

Найдите наименьшее натуральное число $n$ такое, что существуют различные натуральные числа $x_1$, $x_2$, $x_3$, … , $x_n$ такие, что

$$\left(1 - \frac{1}{x_1}\right)\left(1 - \frac{1}{x_2}\right)\left(1 - \frac{1}{x_3}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{x_n}\right) = \frac{118}{2023}.$$

***Решение.***

Без ограничения общности будем считать, что $x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_n$.

Тогда

$$2 \le x_1 \le x_2 - 1 \le x_3 - 2 \le \ldots \le x_n - (n-1).$$

Поскольку $x_k \ge k+1$ для всех $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, то

$$\frac{118}{2023} = \left(1 - \frac{1}{x_1}\right)\left(1 - \frac{1}{x_2}\right)\left(1 - \frac{1}{x_3}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{x_n}\right) \ge$$

$$\ge \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1}.$$

Итак,

$$\frac{1}{n+1} \le \frac{118}{2023} \Rightarrow n \ge 17.$$

Для $n = 17$ рассмотрим последовательность $x_k = k + 1$ для всех $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ и $x_{17} = 119$ :

$$\left(1 - \frac{1}{x_1}\right)\left(1 - \frac{1}{x_2}\right)\left(1 - \frac{1}{x_3}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{x_n}\right) = \frac{1}{17} \cdot \frac{118}{119} = \frac{118}{2023}.$$

Таким образом, наименьшее натуральное число $n$ равно 17.

Ответ: 17