ФГОБУ ВО «Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации»

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМА.
ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ – ФИНАНСИСТ!»
ПО ПРЕДМЕТУ **МАТЕМАТИКА** 2022-2023 уч. года

ОЧНЫЙ ЭТАП

11 класс **Вариант 2**

Задание 1 (10 баллов)

Фитнес-центр продал 515 годовых абонементов, базовая цена каждого из которых составляла 8000 рублей. При этом каждый m-й продаваемый абонемент был акционный и продавался со скидкой равной 1000 руб. Покупатель каждого четвертого акционного абонемента получал, сверх того, и дополнительную скидку в размере 1500 руб. Определите число m, если итоговая выручка фитнес-центра от продажи абонементов составила 3 979 500 руб.

Решение.

Пусть x - количество абонементов, проданных с максимальной (1000 + 1500 = 2500 руб.) скидкой. Количество остальных акционных абонементов тогда выражается формулой $3x + r$, где $r \in \{0, 1, 2, 3\}$. При этом общая сумма скидок, равная $2500x + 1000(3x + r) = 5500x + 1000r$ (руб.), равна с другой стороны $515 \cdot 8000 - 39795000 = 140500$ (руб.).

Уравнение $5500x + 1000r = 1405000$ при $r = 0, 1, 2$ не имеет целых корней, а при $r = 3$ получается $x = 25$. Искомое m теперь находим как частное от деления 515 на $25 + 3 \cdot 25 + 3 = 103$.

Ответ: 5.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача решена полностью	+	**10**
Составлено какое-либо правильное уравнение относительно m (или тесно связанной с m величины) и показано, что $m = 5$ ему удовлетворяет.	**+/-**	**7**
Приведены расчеты, показывающие, что возможно равенство $m = 5$.	**-/+**	**3**
Составлено какое-либо правильное уравнение, но дальше продвижений нет.	**-/.**	**2**

Задание 2 (10 баллов)

Решите уравнение $\sin(\cos x) = \sin(1 + \sin x)$.

Решение.

Для данного равенства возможны два случая.

1. $\cos x = 1 + \sin\ x + 2\pi k, k \in Z$; *при этом* $|2\pi k| = |1 + \sin x - \cos x| \le 1 + |\sin x| + |\cos x| \le 1 + 1 + 1\ \le 2\pi.$ | *Отсюда* $k = 0$. *Далее*, $\cos x = 1 + \sin x \Leftrightarrow \cos x - \sin x = 1 \Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z.$
2. $\cos x + 1 + \sin x = \pi + 2\pi k, k \in Z$. *Поскодльку* $|\cos x + 1 + \sin x| \le |\cos x| + 1 + |\sin x| \le 1 + 1 + 1 < \pi \le |\pi + 2\pi k|$, *то в этом случае решений нет*.

<u>Ответ</u>: $-\frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z.$

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача решена полностью	+	**10**
Задача в основном решена, необходимые неравенства указаны, но не доказаны	+/-	**8**
Ход решений верный, но при выписывании корней допущены ошибки	-/+	**4**
С самого начала (и до конца решения) рассматривался только один из двух возможных случаев.	-/.	**2**

Задание 3 (12 баллов)

Десятичная запись суммы 1 + 11 + 111 + ... + 11...1 оканчивается на 2023. Каким наименьшим может быть количество цифр в последнем слагаемом?

Решение:

Указанную сумму обозначим через S, а количество слагаемых в ней (совпадающее с количеством цифр в последнем слагаемом) - через n. Тогда сумма остатков слагаемых от деления на 10 000 равна 123 + 1111(n-3), и дает при делении на 10 000 такой же остаток, что и S.

Поэтому выполнено равенство 123 + 1111(n-3) =10000m +2023,
где m - некоторое натуральное число.

Отсюда

$$n-3 \;=\frac{10\,000\,m+2023-123}{1111}=\;9m+\frac{m+789}{1111}+1$$

Наименьшее m, при котором m + 789 делится на 1111, равно 1111-789=322.

Следовательно, искомое решение n равно 3+9·322+1+1=2903

Ответ: 2903

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача решена полностью	+	**12**
Ход решений верный, но допущены ошибки в вычислениях	+/-	**7-9**
Верно составлено уравнение, но дальше продвижений нет	-/+	**3**
Задача сведена к рассмотрению остатков по модулю 10000, но дальше продвижений нет	-/.	**1**

Задание 4 (12 баллов)

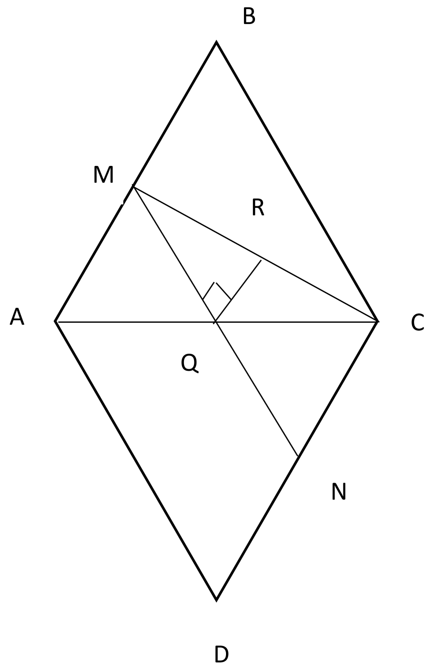
На поверхности правильного тетраэдра *ABCD* построена замкнутая линия, каждая точка *X* которой обладает следующим свойством: длина кратчайшего пути по поверхности тетраэдра между *X* и серединой ребра *AB* равна длине кратчайшего пути по поверхности тетраэдра между *X* и серединой ребра *CD*. Найдите длину этой линии, если длина ребра тетраэдра равна 1.

Решение.

Пусть *M* и *N* середины ребер *AB* и *CD* соответственно. Из соображений симметрии ясно, что ребрами *AC*, *BC*, *BD*, *AD* и отрезками *AN*, *BN*, *CM*, *DM* линия, о которой идет речь в условии задачи разбивается на 8 равных. Поэтому достаточно рассмотреть точки, принадлежащие треугольнику *AMC*.

Пусть *P* - одна из таких точек. Тогда кратчайшим путем между *P* и *M* служит отрезок *PM*, а кратчайшим путем между *P* и *N* - двухзвенная ломаная *PKN*, вершина *K* которой принадлежит ребру *AC* (в случае $P \in AC$ имеем просто отрезок *PN*). На развертке тетраэдра объединение граней *ABC* и *ADC* представляет собой ромб *ABCD*, а ломаная *PKN* - отрезок *PN* в нем. Условие *PM* = *PN* означает, что *P* лежит на серединном перпендикуляре к отрезку *MN*; следовательно геометрическим местом точек *P* служит отрезок *QR*, где *Q* -

середина ребра AC (и середина отрезка MN) R - точка на отрезке MC, $\angle MQR = 90°$ (см рисунок).



Найдем длину отрезка QR. Легко видеть, что $\angle\, QMR = 30°$,

а отрезок QM, будучи средней линией треугольника ABC, имеет длину $\frac{1}{2}$.

Поэтому $QR = \frac{1}{2} tg30° = \frac{\sqrt{3}}{6}$

Умножив это число на 8, получим ответ к задаче: $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

Ответ: $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача решена полностью	+	**12**
Приведено правильное построение линии	+/-	**8-10**
Отмечено, что линия является 8-звенной ломаной	-/.	**1**

Задание 5 (12 баллов)

При каких значениях параметра а система уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{1}{\log_x 3}+\dfrac{1}{\log_y 3}=1,\\ y=3-ax.\end{cases}$$

не имеет решений.

Решение.

Область допустимых значений переменных задается условиями

$$x>0, x\neq 1,\ y>0\ ,\ y\neq 1.$$

Из первого уравнения получаем

$$\log_3 x-\ \log_3 y=1,$$

откуда

$$xy=3.$$

Подставив $y=\frac{3}{x}$ во второе уравнение, получим

$$ax^2-3x+3=0$$

Мы должны найти все такие a, при которых это уравнение не имеет положительных корней, отличных от 1 и 3.

Если $a=0$, то $x=1$ единственный корень. Но $x\neq 1$.

Если же $a\neq 0$ и дискриминант $D=9-12a$ отрицателен, то действительных корней нет вообще.

Итак при $a\in\{0\}\cup\left(\frac{3}{4},\ +\infty\right)$ исходная система решений не имеет.

При $a\leq\frac{3}{4}$ хотя бы один положительный корень у квадратного уравнения есть, поскольку сумма корней и их произведение имеют одинаковый знак. Если же один из корней равен 3, то $a=\frac{2}{3}$ и уравнение $\frac{2}{3}x^2-3x+3=0$ имеет также корень $x=\frac{3}{2}$ (а исходная система имеет решение $\left(\frac{3}{2};2\right)$.

Ответ: при $a\in\{0\}\cup\left(\frac{3}{4},\ +\infty\right)$

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача решена полностью	+	**12**
Ход решения верный, но не доказано наличие решений исходной системы при $a\leq\frac{3}{4}$, $a\neq 0$	+/-	**8**
Пропущен случай $a=0$	**-/.**	**1**

Задание 6 (14 баллов)

В неравнобедренном треугольнике *ABC* проведены биссектрисы AA_1 и BB_1. Известно, что $AA_1 : BB_1 = AC : BC$ и что радиус окружности, касающейся стороны *AB* и продолжений сторон *CA* и *CB*, равен 1. Найдите периметр треугольника *ABC*.

Решение: Докажем, что $\angle ABC = 60°$. Для этого положим $\angle BAC = \alpha$, $\angle ABC = \beta$, $\angle BCA = \gamma$ и воспользуемся теоремой синусов.

Имеем:

$$\frac{AA_1}{\sin\gamma} = \frac{AC}{\sin\angle AA_1C}, \qquad \frac{BB_1}{\sin\gamma} = \frac{BC}{\sin\angle BB_1C},$$

откуда

$$\frac{AA_1}{BB_1} = \frac{AC}{BC}\cdot\frac{\sin\angle BB_1C}{\sin\angle AA_1C},$$

С учетом условия $\frac{AA_1}{BB_1} = \frac{AC}{BC}$ это означает, что $\sin\angle BB_1C = \sin\angle AA_1C$

Равенству $\alpha = \beta$, противоречило бы условию задачи.

Поэтому $\alpha + \frac{\beta}{2} + \frac{\alpha}{2} + \beta = 180°$, откуда $\alpha + \beta = 120°$ и $\gamma = 60°$

Теперь найдем периметр треугольника *ABC*. Пусть окружность с центром *O* касается стороны *AC* в точке *K*, а продолжений сторон *CA* и *CB* – в точках *S* и *T* соответственно.

Тогда $AK = AS$, $BK = BT$

и

$$AB + CA + CB = CA + AS + CB + BT = CS + CT =$$
$$= OS\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2} + OT\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2} = 2\operatorname{ctg}30° = 2\sqrt{3}$$

Ответ: $2\sqrt{3}$

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача решена полностью	+	**14**
Установлено равенство$<$C=60°, но периметр треугольника не найден	+/2	**7**
Равенство$<$C=60° не доказано, но с его использованием найден периметр	-/+	**2**

Задание 7 (14 баллов)

Найдите наименьшее значение функции

$$f(x) = \sqrt{2x^2 + 2x + 13} + \sqrt{2x^2 + 8x + 26}.$$

Решение.

Рассмотрим векторы

$$\vec{a} = (x + 3;\ 2 - x), \vec{b} = (1 - x;\ x + 5) \text{ и } \vec{s} = \vec{a} + \vec{b} = (4; 7)$$

$\underset{a}{\to} (x + 3; 2 - x)$, $\underset{в}{\to} (1 - x; x + 5)$ и $\underset{s}{\to}=\underset{a}{\to}+\underset{в}{\to}=(4;7)$.

Так как

$$|\vec{a}| = \sqrt{2x^2 + 2x + 13}, \quad |\vec{b}| = \sqrt{2x^2 + 8x + 26},$$

то

$$f(x) = |\vec{a}| + |\vec{b}| \geq |\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{s}| = \sqrt{65}.$$

Равенство $|\vec{a}| + |\vec{b}| = |\vec{a} + \vec{b}|$ выполняется, когда эти векторы сонаправлены; соответствующие значения x является корнем уравнения $\frac{x+3}{1-x} = \frac{2-x}{x+5}$
и равно $-\frac{13}{11}$.

<u>Ответ:</u> $\sqrt{65}$.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача решена полностью	+	**14**
Установлено, что f(x) $\geq \sqrt{65}$, но не показано,что значение достигается	-/+	**6**

Задача 8 (16 баллов)

На плоскости отмечено 9 различных точек, среди которых есть красные, синие и зеленые. Точек других цветов нет. Известно, что сумма всех попарных расстояний между красными и синими точками равна 13, между красными и зелеными равна 11, а между синими и зелеными равна 1. Каким может быть количество красных отмеченных точек?

Решение.

Пусть отмечены красные точки $A_1, \ldots. A_p$, синие точки $B_1, \ldots. B_q$, и зеленые точки $C_1, \ldots. C_r$.

Поскольку для каждой точки ($A_i\, B_j\, C_k$) выполняется неравенство треугольника $A_iB_j \le A_iC_k + B_jC_k$,

то

$$\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}\sum_{k=1}^{r} A_i\, B_j \le \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}\sum_{k=1}^{r} (A_i\, C_k + B_jC_k)$$

Откуда

$$13\, r \le 11q + p.$$

Аналогично, просуммировав неравенства $A_iC_k \le A_iB_j + B_jC_k$, получим

$$11\, q \le 13r + p.$$

Далее перебором можно установить, что найденным соотношениям и равенству $p + q + r = 9$ удовлетворяют ровно две тройки натуральных чисел

$$p = 5,\ q = 2, r = 2 \text{ и } p = 7,\ q = 1, r = 1.$$

Покажем, что оба найденных варианта могут быть реализованы на прямой. Каждую из отмеченных точек будем задавать ее координатой.

Первый вариант:

$A_1 = \frac{3}{16},\ A_2 = 1,\ A_3 = \frac{3}{2}\ , A_4 = 2,\ A_5 = \frac{17}{16}\ B_1 = 0,\ B_2 = \frac{1}{8}\ ,\ C_1 = \frac{1}{4},\ C_2 = \frac{3}{8}$

Второй вариант:

$A_1 = \frac{1}{6},\ A_2 = \frac{1}{3}\ , A_3 = \frac{1}{2},\ , A_4 = \frac{2}{3},\ A_5 = \frac{5}{6},\ A_6 = 5,\ A_7 = 7\ B_1 = 0,\ C_1 = 1$

Ответ: 5 или 7

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача решена полностью	+	**16**
Установлено, что все числа, отличные от 5 и 7, не подходят. Примеров нет.	+/-	**12**
Если пример(ы) для 5 и/или 7 красных точек	-/+	по **3** за каждый вариант