ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМА.
ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ – ФИНАНСИСТ!»
ПО ПРЕДМЕТУ **МАТЕМАТИКА** 2022-2023 уч. года

ОЧНЫЙ ЭТАП

10 класс **Вариант 2**

Задание 1 (10 баллов)

Пусть α, β, γ — такие острые углы, что $\cos\alpha = \operatorname{tg}\beta$, $\cos\beta = \operatorname{tg}\gamma$, $\cos\gamma = \operatorname{tg}\alpha$. Вычислите синусы этих углов.

Решение.

На интервале $\left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$ неравенства $\cos x \geq \cos y$ и $\operatorname{tg} x \leq \operatorname{tg} y$ равносильны; этот факт, являющийся следствием монотонности функции, мы для краткости будем называть *M*-свойством.

Пусть, для определённости, $\max\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\} = \cos\alpha$. По *M*-свойству тогда $\operatorname{tg}\alpha = \min\{\operatorname{tg}\alpha, \operatorname{tg}\beta, \operatorname{tg}\gamma\}$. Применив здесь условие задачи получим, что $\min\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\} = \cos\gamma$. Еще раз воспользовавшись *M*-свойством будем иметь равенство $\operatorname{tg}\gamma = \max\{\operatorname{tg}\alpha, \operatorname{tg}\beta, \operatorname{tg}\gamma\}$ согласно условию означающее, что $\max\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\} = \cos\beta$. Следовательно, $\cos\alpha = \cos\beta$ и $\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\gamma$, откуда $\alpha = \beta = \gamma$. Синус каждого из этих углов равен $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ - положительному корню уравнения $t = 1 - t^2$.

Поскольку, например, в силу равенства $\cos\alpha = \operatorname{tg}\alpha$ имеем

$$\sin\alpha = \cos\alpha \operatorname{tg}\alpha = \cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha.$$

<u>Ответ:</u> $\sin\alpha = \sin\beta = \sin\gamma = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Задание 2 (10 баллов)

Таблица 4×4, составленная из 16 чисел, такова, что каждое число в ней равно произведению всех своих соседей по горизонтали и по вертикали. Каким наибольшим может быть количество отрицательных чисел в таблице?

Решение.

Если в угловой клетке стоит число a, соседями которого являются числа b и c, то $a = bc$ и хотя бы одно из чисел a, b, c неотрицательно.

Так как в таблице четыре угла и соответствующие 4 трехклеточных уголка попарно не перекрываются, то таблица содержит не менее 4 неотрицательных и, следовательно, не более 12 отрицательных чисел.

Пример таблицы, удовлетворяющей условиям задачи и содержащей 12 отрицательных чисел показан на рисунке

-1	1	1	-1
-1	-1	-1	-1
-1	-1	-1	-1
-1	1	1	-1

Ответ: 12

Задание 3 (12 баллов)

График функции $y = x - \sqrt{x} + a$ пересекает ось *Ox* в двух точках. Через них проведена окружность, касающаяся оси *Oy*. Найдите ординату точки касания.

Решение.

Пусть график пересекает ось абсцисс в точках $X_1(x_1, 0)$ и $X_2(x_2, 0)$, а окружность касается оси ординат в точке $Y(0, y_0)$. По теореме о касательной и секущей, проведенных из одной точки

$$OY^2 = OX_1 \cdot OX_2 = |x_1 x_2|.$$

Поскольку функция определена только при $x \geq 0$, то

$$y_0 = \pm \sqrt{x_1}\sqrt{x_2} = \pm t_1 t_2 \quad ,$$

где t_1, t_2 - корни уравнения $t^2 - t + a = 0$.

Для выполнения условий $t_1 \geq 0$, $t_2 \geq 0$ и $t_1 \neq t_2$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства $a \geq 0$ и $1 - 4a > 0$, то есть

$$0 \leq a < \frac{1}{4}.$$

По теореме Виета $t_1 t_2 = a$, следовательно $y_0 = \pm a$.

При $a > 0$ существуют две окружности, удовлетворяющие условиям задачи.

Ответ: $\pm a$ при $0 \leq a < \frac{1}{4}$.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача решена полностью	+	**12**
Задача в основно решена, но не установлены допустимые значения параметра	+/-	**10**
Найдено только одно из значений ординаты точки касания	-/+	**1-4**

Задание 4 (12 баллов)

По дороге из A в B ездят только легковые машины, грузовики и автобусы. Легковые машины выезжают из A в B каждые 2 минуты со скоростью 120 км/ч, грузовики каждые 3 минуты со скоростью 80 км/ч, а автобусы каждые 6 минут со скоростью 60 км/ч. Скорости всех машин постоянны, а расстояние между A и B достаточно большое. Пассажир едет из A в B на автобусе. Какую долю среди обгоняющих его транспортных средств составляют грузовики?

Решение.

Каждый выехавший из A легковой автомобиль движется в $\frac{2}{60} \cdot 120 = 4$ (км) позади легкового автомобиля, выехавшего перед ним, и сближается со скоротью 120 - 60 = 60 (км/ч) с впереди идущим автобусом.

Поэтому легковые автомобили обгоняют автобус каждые $\frac{4}{60}$ часа, а за час проходит $1 : \frac{4}{60} = 15$ обгонов автобусов легковыми автомобилями.

Аналогичные расчеты для грузовиков: $\frac{3}{60} \cdot 80 = 4$ (км), 80 - 60 = 20 (км/ч), $1 : \frac{4}{20} = 5$ обгонов.

Следовательно, искомая доля равна

$$5/(5+15) = 0,25.$$

Ответ: 0,25

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача решена полностью	+	**12**
Ход решения верный, но допущены арифметические ошибки	+/2	**6**

Задание 5 (12 баллов)

Дан куб, на ребрах которого расставляют стрелки и затем находят сумму $\vec{S}$ всех 12 полученных векторов. Сколько различных векторов $\vec{S}$ можно получить, по-разному расставляя стрелки на ребрах?

Решение.

Введем систему координат *Oxyz* так, чтобы ребра куба были параллельно ее осям, а начало координат совпадало с одной из вершин куба.

12 полученных вектора разбиваются на три группы: 4 вектора $\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{x_3}$ и $\overrightarrow{x_4}$, коллинеарных оси $0x$, 4 вектора $\overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{y_2}, \overrightarrow{y_3}$ и $\overrightarrow{y_4}$, коллинеарных оси $0y$, и 4 вектора $\overrightarrow{z_1}, \overrightarrow{z_2}, \overrightarrow{z_3}$ и $\overrightarrow{z_4}$, коллинеарных оси $0z$.

Тогда

$$\vec{S} = \vec{x} + \vec{y} + \vec{z},$$

где $\vec{x} = \overrightarrow{x_1} + \overrightarrow{x_2} + \overrightarrow{x_3} + \overrightarrow{x_4}$, $\vec{y} = \overrightarrow{y_1} + \overrightarrow{y_2} + \overrightarrow{y_3} + \overrightarrow{y_4}$, $\vec{z} = \overrightarrow{z_1} + \overrightarrow{z_2} + \overrightarrow{z_3} + \overrightarrow{z_4}$.

Вектор $\vec{x}$ может принимать ровно 5 различных значений:

$$-4\vec{i}, -2\vec{i}, \vec{0}, 2\vec{i}, 4\vec{i},$$

где $\vec{i}$ - единичными вектор оси *Ox*.

Такое же утверждение справедливо для векторов $\vec{y}$ и $\vec{z}$.

Поскольку равенство $\vec{S} = \vec{x} + \vec{y} + \vec{z}$ представляет собой разложение вектора по координатным осям, то он может принимать ровно $5^3 = 125$ различных значений.

Ответ: 125

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача решена полностью	+	**12**
Ход решения верный, но в результате арифметических ошибок получен неверный ответ.	+/-	**8**
При наличии верного плана решения допущены ошибки комбинаторного характера	-/+	**4**

Задание 6 (14 баллов)

В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ $\angle ABC = 102°, \angle ADC = 129°$, $AB = BC = 1$. Найдите длину диагонали BD.

Решение.

Проведем окружность радиуса 1 с центом в точке B.

Пусть D' - точка пересечения этой окружности с продолжением отрезка DB за точку B.

Тогда

$$\angle ADC + \angle AD'C = 129° + \frac{1}{2}\angle ABC = 180°,$$

следовательно, четырехугольник $AD'C\ D$ вписан в проведенную нами окружность.

Отсюда $BD = BA = 1$.

Ответ: 1

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача решена полностью	+	**14**
Есть попытка доказательства равенства BD = 1	-.	**От 1**

Задание 7 (14 баллов)

Числа x, y, z различны и удовлетворяют системе уравнений

$$x^2 + y^3 + z^3 = x^3 + y^2 + z^3 = x^3 + y^3 + z^2 = 0{,}8.$$

Какие значения может принимать их произведение?

Решение.

Сложив уравнения $x^2 + y^3 + z^3 = 0{,}8$ и $x^3 + y^2 + z^3 = 0{,}8$, а затем вычтя из полученной суммы уравнение $x^3 + y^3 + z^2 = 0{,}8$, получим

$$2z^3 + x^2 + y^2 - z^2 = 0{,}8.$$

Последнее равенство можно представить в виде

$$z^3 - z^2 + \frac{x^2 + y^2 + z^2 - 0{,}8}{2} = 0.$$

Аналогично,

$$x^3 - x^2 + \frac{x^2+y^2+z^2-0{,}8}{2} = 0.$$

$$y^3 - y^2 + \frac{x^2+y^2+z^2-0{,}8}{2} = 0.$$

Пусть

$$f(t) = (t-x)(t-y)(t-z) = t^3 + \alpha t^2 + \beta t + \gamma,$$

где $\alpha = -(x+y+z), \beta = xy+yz+zx, \gamma = -xyz$.

Тогда x, y, z - корни многочлена $g(t) = t^3 - t^2 + \frac{\alpha^2-2\beta-0{,}8}{2}$,

совпадающего (в силу условий $x \neq y, y \neq z, z \neq x$) с $f(t)$.

Поэтому $\alpha = -1, \beta = 0, \gamma = 0{,}1$, откуда $xyz = -0{,}1$.

Ответ: $-0{,}1$

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача решена полностью	+	**14**
Верный план решения не реализован из-за описок и/или арифметических ошибок	**+/2**	**7**
Имеется продвижение в решении задачи, но решение не завершено	**-/+**	**От 1**

Задача 8 (16 баллов)

Найдите все такие десятизначные числа $C = \overline{a_1a_2a_3a_4a_5b_1b_2b_3b_4b_5}$, которые делятся на произведение пятизначных чисел $A = \overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$ и $B = \overline{b_1b_2b_3b_4b_5}$. ($a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5$ – цифры, $a_1 \neq 0$)

Решение.

Пусть $C = 10^5A + B$ делится на AB.

Тогда B делится на A, при этом число $k = \frac{B}{A}$ однозначное.

При этом k больше 1 и делит 10^5, следовательно, $k \in \{2, 4, 5, 8\}$.

Число $\frac{C}{B}$ - пятизначное, кратное A, при этом A являтся собственным, отличным от самого числа $\frac{C}{B}$, делителем.

Если $k = 2$, то $\frac{C}{B} = \frac{10^5 A + 2A}{2A} = 50001$ имеет ровно один собственный пятизначный делитель 16667, а С = 1666733334.

Случаи $k = 4, 5, 8$ невозможны, поскольку в каждом из них у числа $\frac{10^5 A + kA}{kA}$ нет собственных пятизначных делителей.

Ответ: 1666733334.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача решена полностью	+	**16**
Число С найдено, но его единственность не доказана	**-/+**	**От 4**