ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМА.
ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ – ФИНАНСИСТ!»
ПО ПРЕДМЕТУ **МАТЕМАТИКА** 2022-2023 уч. года

ОЧНЫЙ ЭТАП

10 класс **Вариант 1**

Задание 1 (10 баллов)

Пусть α, β, γ - такие острые углы, что $\sin\alpha = \operatorname{ctg}\beta$, $\sin\beta = \operatorname{ctg}\gamma$, $\sin\gamma = \operatorname{ctg}\alpha$. Вычислите косинусы этих углов.

Решение.

На интервале $\left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$ неравенства $\sin x \geq \sin y$ и $\operatorname{ctg} x \leq \operatorname{ctg} y$ равносильны; этот факт, являющийся следствием монотонности функции, мы для краткости будем называть *М*-свойством.

Пусть, для определённости, $\max\{\sin\alpha, \sin\beta, \sin\gamma\} = \sin\alpha$. По *М*-свойству тогда $\operatorname{ctg}\alpha = \min\{\operatorname{ctg}\alpha, \operatorname{ctg}\beta, \operatorname{ctg}\gamma\}$. Применив здесь условие задачи получим, что $\min\{\sin\alpha, \sin\beta, \sin\gamma\} = \sin\gamma$. Еще раз воспользовавшись *М*-свойством будем иметь равенство $\operatorname{ctg}\gamma = \max\{\operatorname{ctg}\alpha, \operatorname{ctg}\beta, \operatorname{ctg}\gamma\}$ согласно условию означающее, что $\max\{\sin\alpha, \sin\beta, \sin\gamma\} = \sin\beta$. Следовательно, $\sin\alpha = \sin\beta$ и $\operatorname{ctg}\beta = \operatorname{ctg}\gamma$, откуда $\alpha = \beta = \gamma$. Косинус каждого из этих углов равен $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ - положительному корню уравнения $t = 1 - t^2$.

Поскольку, например, в силу равенства $\sin\alpha = \operatorname{ctg}\alpha$ имеем

$$\cos\alpha = \sin\alpha \operatorname{ctg}\alpha = \sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha.$$

<u>Ответ:</u> $\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача решена полностью	+	**10**
Установлено равенство углов, но косинусы не найдены	-/+	**4**
Равенство углов не доказано, но на его основе найдены косинусы	-/.	**2**

Задание 2 (10 баллов)

Таблица 4*4, составленная из 16 чисел, такова, что каждое число равно в ней сумме всех своих соседей по горизонтали и по вертикали. Каким наибольшим может быть количество положительных чисел в таблице?

Решение.

a	b		
c	d		
e	f		
g	h		

Пусть левая половина таблицы заполнена числами $a, \dots,$ h как показано на рис. 1. Так как из равенств $a = b + c$ и $c = a + d + e$ следует равенство $b + d + e = 0$, то верно, хотя одно из неравенств $b \leq 0$, $d \leq 0$ или $e \leq 0$.

Аналогично устанавливается, что верно хотя бы одно из неравенств $c \leq 0$, $f \leq 0$ или $h \leq 0$. Значит, в левой половине таблицы не более 6 положительных чисел. Ясно, что такое утверждение верно и для правой половины, а всего в таблице не более 12 положительных чисел.

Пример таблицы, удовлетворяющей условиям задачи и содержащей 12 положительных чисел показан на рис. 2

2	1	1	2
1	-2	-2	1
1	-2	-2	1
2	1	1	2

Ответ: 12

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача решена полностью	+	**10**
Установлена оценка, пример не приведен.	+/-	**6**
Приведен пример, оценка не установлена	-/+	**3**

Задание 3 (12 баллов)

График функции $y = x - a\sqrt{x} + 1$ пересекает ось *Ox* в двух точках. Через них проведена окружность, касающаяся оси *Oy*. Найдите ординату точки касания.

Решение.

Найдем, при каких значениях a существует указанная в условии задачи конфигурация. Пусть $t = \sqrt{x}$, тогда квадратное уравнение $t^2 - at + 1 = 0$ должно иметь два положительных корня, что равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} a > 0 \\ a^2 - 4 > 0 \end{cases}$$

Отсюда $a > 2$.

Пусть график пересекает ось абсцисс в точках $X_1(x_1, 0)$ и $X_2(x_2, 0)$, а окружность касается оси ординат в точке $Y(0, y_0)$. По теореме о касательной и секущей, проведенных из одной точки $OY^2 = OX_1 \cdot OX_2$, откуда

$$y_0{}^2 = x_1 x_2 = t_1{}^2 t_1{}^2,$$

где t_1 , t_2 - корни уравнения $t^2 - at + 1 = 0$. По теореме Виета $t_1 t_2 = 1$, следовательно $y_0 = \pm 1$. То есть, что существуют две окружности, удовлетворяющие условиям задачи.

Ответ: 1 или -1 (при а > 2).

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача решена полностью	+	**12**
Задача в основно решена, но не установлены допустимые значения параметра	**+/-**	**10**
Найдено только одно из значений ординаты точки касания	**-/+**	**1-4**

Задание 4 (12 баллов)

По дороге из *А* в *В* ездят только легковые машины, грузовики и автобусы. Легковые машины выезжают из *А* в *В* каждые 2 минуты со скоростью 120 км/ч, грузовики каждые 3 минуты со скоростью 80 км/ч, а автобусы каждые 6 минут со скоростью 60 км/ч. Скорости всех машин постоянны, а расстояние между *А* и *В* достаточно большое. Мотоцикл едет из *В* в *А* со скоростью 60 км/ч. Какую долю среди встречного транспорта составляют грузовики?

Решение.

Каждый выехавший из *А* легковой автомобиль движется в $\frac{2}{60} \cdot 120 = 4$ (км) позади легкового автомобиля, выехавшего перед ним, каждый грузовик - в $\frac{3}{60} \cdot 80 = 4$ (км) позади грузовика, выехавшего перед ним, а каждый автобус - в $\frac{6}{60} \cdot 60 = 6$ км позади автобуса, выехавшего перед ним. Едущий из *В* в *А* пассажир сближается со скоростями 60 + 120= 180 (км/ч), 60+80=140(км/ч) и 60+60=120 (км/ч) с каждым встречным легковым автомобилем, грузовиком и автобусом соответственно. Поэтому в течение часа он встретит 180:4 = 45 легковых автомобилей, 140:4=35 грузовиков и 120:6 = 20 автобусов, доля грузовиков среди встречного транспорта, таким образом, равна

$$35/(45+35+20) = 0{,}35.$$

Ответ: 0,35

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача решена полностью	+	**12**
Ход решения верный, но допущены арифметические ошибки	**+/2**	**6**

Задание 5 (12 баллов)

Дан куб $ABCDA'B'C'D'$. На отрезках AB', AC, AD', $B'C$, CD', $B'D'$ расставляют стрелки и затем находят сумму $\vec{S}$ всех 6 полученных векторов. Сколько различных векторов $\vec{S}$ можно получить, по-разному расставляя стрелки на указанных отрезках?

Решение.

Введем систему координат *Oxyz* так, чтобы векторы $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AA'}$ совпали с единичными векторами $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$ осей *Ox*, *Oy* и *Oz* соответственно. Тогда получим, что

$$\overrightarrow{AC} = \vec{i} + \vec{j}, \quad \overrightarrow{B'D'} = \vec{i} - \vec{j},$$

$$\pm\overrightarrow{AC} \pm \overrightarrow{B'D'} \in \{2\vec{i};\ -2\vec{i}; -2\vec{j};\ 2\vec{j}\}$$

и, аналогично,

$$\pm\overrightarrow{AD'} \pm \overrightarrow{B'C} \in \{2\vec{i};\ -2\vec{i}; -2\vec{k};\ 2\vec{k}\}.$$

Вся сумма $\vec{S}$ получит вид

$$p\vec{i} + q\vec{j} + r\vec{k},$$

где p, q и r - чётные числа, для которых

$$\max\{|p|, |q|, |r|\} \le 4,\ |p| + |q| + |r| \le 6 \text{ и } |p + q + r| \in \{2;\ 6\}.$$

В частности, равенство $p = -4$ реализуется четырьмя способами:

$$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{B'D} \pm \overrightarrow{AB'} \pm \overrightarrow{CD'} + \overrightarrow{AD'} + \overrightarrow{B'C},$$

также по 4 способа есть для случаев p = -4, q = 4, q = -4, r = 4 и r = -4. Для случая $\max\{|p|, |q|, |r|\} = 4$ имеется таким образом 6·4=24 способа расстановки стрелок. Равенства $|p| = |q| = |r| = 2$ достигаются 2·2·2=8 способами, а для равенства $|p|+|q|+|r|=2$ есть 3·2=6 расстановок. Следовательно, можно получить 24+8+6=38 различных векторов $\vec{S}$.

Ответ: 38

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача решена полностью	+	**12**
Ход решения верный, но в результате арифметических ошибок получен неверный ответ.	**+/-**	**8**
При наличии верного плана решения допущены ошибки комбинаторного характера	**-/+**	**4**

Задание 6. (14 баллов)

В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ $\angle ABC = 70°, \angle ADC = 145°$, $BC = BD = 1$. Найдите длину стороны AB.

Решение.

На луче BA отметим точку A', для которой BA'=1. Треугольники $A'BD$ и CBD равнобедренные, поэтому

$$\angle A'DB = \frac{1}{2}(180° - \angle A'BD), \angle CDB = \frac{1}{2}(180° - \angle CBD),$$

откуда

$$\angle A'DC = \angle A'DB + \angle CDB = \frac{1}{2}(360° - \angle A'BD - \angle CBD) =$$

$$= \frac{1}{2}(360° - 70°) = 145° = \angle ADC.$$

Это значит, что точки A и A' совпадают.

Ответ: 1

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача решена полностью	+	**14**
Есть попытка доказательства равенства AB = 1	**-.**	**От 1**

Задание 7 (14 баллов)

Числа *x, y, z* различны и удовлетворяют системе уравнений

$$x^3+y^2+z^2 = x^2+y^3+z^2 = x^2+y^2+z^3 = 0{,}9.$$

Какие значения может принимать их произведение?

Решение.

Нам будет удобно представить систему в виде

$$\begin{cases} x^3 - x^2 + (x^2+y^2+z^2) - 0{,}9 = 0 \\ y^3 - y^2 + (x^2+y^2+z^2) - 0{,}9 = 0 \\ z^3 - z^2 + (x^2+y^2+z^2) - 0{,}9 = 0 \end{cases}$$

Пусть

$$f(t) = (t-x)(t-y)(t-z) = t^3 + \alpha t^2 + \beta t + \gamma,$$

где $\alpha = -(x+y+z), \beta = xy+yz+zx, \gamma = -xyz.$

Тогда x, y, z - корни многочлена $g(t) = t^3 - t^2 + \alpha^2 - 2\beta - 0{,}9$, совпадающего (в силу условий $x \neq y, y \neq z, z \neq x$ с $f(t)$.

Поэтому $\alpha = -1, \beta = 0, \gamma = 0{,}1$, откуда $xyz = -0{,}1$

Ответ: $-0{,}1$

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача решена полностью	+	**14**
Верный план решения не реализован из-за описок и/или арифметических ошибок	**+/2**	**7**
Имеется продвижение в решении задачи, но решение не завершено	**-/+**	**От 1**

Задача 8 (16 баллов)

Каким наибольшим может быть количество последовательных десятизначных натуральных чисел, среди которых нет ни одного палиндрома? (Палиндром - это число, одинаково читающееся в обоих направлениях, например, 33, 2552,70507.)

Решение.

Пусть $M = \overline{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_5 a_4 a_3 a_2 a_1}$ - палиндром (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 - цифры, $a_1 \neq 0$), $M \neq 10^{10} - 1$, а k - наибольший индекс, для которого $a_{\mathrm{k}} \neq 9$.

Тогда $M + 10^k + 10^{k-1}$ тоже палиндром: первые k - 1 и последние k - 1 его цифр такие же, как у M, на k-м месте справа и слева стоит цифра $a_{\mathrm{k}} + 1$, остальные, если они есть, - нули.

А поскольку $10^k + 10^{k-1} \leq 10^5 + 10^4 = 110000$, то между M и $M + 10^k + 10^{k-1}$ не более 109 999 натуральных чисел. С другой стороны, среди 109 999 натуральных чисел, заключенных между 10^9 и $10^9 + 10^5 + 10^4 + 1$ нет ни одного палиндрома.

Ответ: 109 999.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача решена полностью	+	**16**
Есть нужный пример и попытка доказательства оценки	**-/+**	**От 4**