ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ФИНАНСОВЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПРИ ПРАВИТЕЛЬСТВЕ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ»
ЯРОСЛАВСКИЙ ФИЛИАЛ

Н.И. Коршунова

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА ДЛЯ ЭКОНОМИСТОВ

Учебное пособие для бакалавриата

МОСКВА
2021

УДК 51.77+519.86
ББК 22я73
К 70

Рецензент:
Коречков Ю.В., доктор экономических наук, профессор, профессор кафедры «Экономики и учетно-аналитической деятельности» образовательной организации высшего образования (частное учреждение) «Международная академия бизнеса и новых технологий (МУБиНТ)».

Коршунова Н.И.
К 70 Прикладная математика для экономистов: Учебное пособие [Текст] / Н.И. Коршунова. — М.: Прометей, 2021. — 192 с.

ISBN

Учебное пособие адресовано студентам младших курсов экономического бакалавриата, обучающимся по направлениям подготовки 38.03.01 «Экономика», 38.03.02 «Менеджмент организации», 38.03.04 «Государственное и муниципальное управление» при изучении дисциплин «Математика», «Эконометрика», «Анализ данных», «Экономический анализ». Содержит материал, способствующий раннему и успешному взаимному проникновению учебных дисциплин естественно-математического и общеэкономического циклов. Пособие содержит экономико-математические модели (производственные функции, дифференциальные и разностные уравнения), построение и решение которых опирается на базовые знания по математическому анализу.

ISBN

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Непрерывное образование предполагает не просто переход с одной образовательной ступени на другую (более высокую) с целью получения новых количественных знаний, но и формирование всё более серьёзных навыков самостоятельного нахождения и обработки необходимой информации, включения полученных результатов в повседневную работу. Постепенно постоянное самосовершенствование должно стать потребностью личности.

Одна из основных задач вуза заключается в том, чтобы научить студентов самостоятельно приобретать знания. Для этого в процессе учёбы надо обосновать необходимость и возможность решения этой задачи, сформировать потребность в самосовершенствовании. Для студентов экономических специальностей необходимость вытекает, прежде всего, из постоянного изменения экономических условий и повышения уровня развития науки, как экономической, так и математической, взаимное проникновение наук, стремительное совершенствование и внедрение в практику экономико-математических методов. Возможность решения задачи предполагает наличие соответствующего, в данном случае — математического, аппарата, а также знаний, умений и навыков, позволяющих им воспользоваться. В данном пособии рассмотрим роль производственных функций, дифференциальных и разностных уравнений в их формировании.

Потребность в расширении и углублении знаний в области экономико-математического моделирования возникает только при наличии уверенности специалиста в том, что он может справиться с этой работой. Только тогда возникает убеждение в эффективности применения изученных методов на практике и желание их использовать в своей работе. Использовать можно сами методы в полном объёме, что под силу далеко не каждому экономисту-практику, или результаты, полученные специалистом-математиком по заказу экономиста. Но, прежде чем сделать такой заказ, надо осознать возможность применения тех или иных математических методов и грамотно сформулировать экономическую задачу, сформировать базу данных, на основе которых теоретик построит математическую модель и решит соответствующую математическую задачу. А вот в анализе результатов должен участвовать заказчик. Всё это предполагает достаточно обширные знания в области экономико-математических методов у каждого экономиста.

Базой для обширного класса экономико-математических моделей служат так называемые производственные функции. Изучение этих функций и их характеристик способствует пониманию студентами необходимости глубокого изучения базовых математических и экономических дисциплин, подводит к формированию потребности в овладении статистическими методами, осознанию роли и места эконометрики и экономического анализа в подготовке и будущей деятельности экономиста и т. п. Осознанию роли и места предельных, относительных, суммарных и др. экономических показателей способствует изучение методов построения и решения дифференциальных и разностных уравнений.

В учебном пособии рассмотрены перечисленные выше базовые экономико-математические объекты, составляющие основу моделей, математической базой для которых служат знания по математическому анализу. Приведённые в нём теоретические и практические факты, объекты, соотношения, а также задания, задачи, тесты и упражнения позволят обогатить и активизировать все виды занятий по математике, обеспечить их профессиональную ориентацию, заложить базу для изучения, построения и применения на практике более объёмных и содержательных математических моделей.

Пособие состоит из двух разделов, пяти глав и 28 параграфов. Нумерация формул, примеров, заданий и рисунков своя в каждой главе.

Раздел I. ПРОИЗВОДСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ

В этом разделе изучаем агрегированный подход в моделировании широкого класса производств, основывающийся на рассмотрении только главных исходных и итоговых показателей производства без детализации последнего (дезагрегации его на отрасли), как это имеет место в модели Леонтьева. Этот подход также использует понятия и факты из изученных в курсе математики тем (прежде всего, дифференциального исчисления функций одной и нескольких независимых переменных).

Этот подход связан с аппаратом так называемых производственных функций (ПФ), выражающих взаимосвязь между Y — главным экстенсивным экономическим показателем итога деятельности предприятия, фирмы, отрасли, экономики в целом за определенный временной период и x_1, $x_2, \ldots, x_n$ — количествами потребляемых производственных факторов, или ресурсов. Рассмотрим:

а) экономико-математическое обоснование введения в рассмотрение ПФ;

б) требования, предъявляемые к ПФ и, следовательно, их свойства;

в) основные типы ПФ и их характеристики.

Научимся строить ПФ и использовать их для решения модельных задач оптимизации производства и построения функций спроса и предложения. По типу, характеристикам и свойствам ПФ близки к функциям потребительской полезности. Также и решаемые задачи оптимизации производства напоминают задачи оптимизации потребительской корзины, что лишний раз свидетельствует о единстве науки в целом.

ГЛАВА 1. ОДНОФАКТОРНЫЕ ПРОИЗВОДСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ

1.1. Понятие производственной функции

Под **производством** понимается целенаправленный процесс преобразования одних факторов (ресурсов, промежуточных продуктов, полуфабрикатов и т. д.) в качественно другие факторы, именуемые готовой продукцией (просто продукцией). И те, и другие характеризуются в некотором временном периоде количественными неотрицательными показателями, в идеале считающимися непрерывными. Рассмотрим для простоты случай, когда имеется $m = 1$ или 2 ресурса. Возможны следующие случаи.

а) Фирма производит ровно один $n = 1$ продукт по одной фиксированной технологии. Тогда существует однозначная связь между выходом готовой продукции и затратами ресурсов: $Y = f(x_1, x_2)$.

б) Фирма производит один или несколько продуктов, несмотря на качественные различия, имеющих некоторую общую условную единицу измерения. Тогда при одних и тех же затратах ресурсов x_1 и x_2 возможны различные количества произведенной продукции $y(x_1, x_2)$. Однако, интерес представляет лишь максимально возможное в конкретных обстоятельствах количество

$$Y = f(x_1, x_2) = max\{y(x_1, x_2)\}.$$

Оно единственно. Производственный процесс, обеспечивающий это максимальное количество, называется **максимально эффективным**.

в) Фирма действует в конкурентных рыночных условиях и вынуждена всякий раз подстраиваться под потребителя, т. е. считаться с конъюнктурой, подчас имеющей непредсказуемую, случайную природу. Однако, в течение ряда достаточно продолжительных периодов имеет место тесная статистическая взаимосвязь между Y, с одной стороны, и x_1 и x_2, с другой. И эта взаимосвязь описывается некоторым законом $Y^* = f(x_1, x_2)$, вид, значимость и свойства которого устанавливают путем эконометрического анализа.

Таким образом, во всех трех этих и, также иных случаях, для фирмы имеет место либо функциональная, либо тесная статистическая взаимосвязь между y и x (или Y и x_1 и x_2,), задаваемая законом $y = f(x)\left(Y = F(x_1, x_2)\right)$.

Определение 1. Воспроизводимая из периода в период зависимость между объемом выпуска готовой продукции фирмы Y и затратами ресурсов x_1 и x_2 называется **статической двухфакторной производственной функцией** фирмы $Y = f(x_1, x_2)$.

Замечание. В общем случае число ресурсов может быть равно любому натуральному n, в т. ч. $n = 1$ или $n \geq 2$. Тогда имеет место однофакторная ПФ $y = f(x)$ или многофакторная ПФ $Y = f(x_1, x_2, ... x_n)$, где $x_1, x_2, ... ,x_n$ — объемы всех n ресурсов. Если же функция дополнительно зависит от времени, что отражает влияние научно-технического прогресса (НТП), то говорят о производственных функциях в темповой записи, которые мы не рассматриваем в настоящем пособии.

Как правило, основными определяющими ресурсами являются капиталовложения (или стоимость основных производственных фондов в микроэкономических моделях, валовой внутренний продукт — в макроэкономических) K (*capital*) и стоимость затрат труда (труд) L (*labour*), и тогда статическая функция имеет вид $Y = F(K, L)$. Поэтому под x_1 будем понимать капитал, под x_2 — труд, измеряемые каждый в своих единицах: капитал — в стоимостных (рублях, долларах, евро и т. д.), труд — в человеко-часах, человеко-днях и т. д. или также в стоимостном выражении. Причем, несмотря на дискретный характер стоимостных показателей,

ввиду большого объема K, считаем его непрерывной величиной, точно так же и величину L. Естественно, величины K, L не могут быть отрицательными. Более того, производственная функция имеет смысл лишь для $K > 0$ и $L > 0$, и тогда она сама положительна: $Y > 0$.

Графиком ПФ будет поверхность в первой восьмой части (октанте) пространства (K, L, Y) (или же (x_1, x_2, Y)), задаваемая уравнением $Y = f(x_1, x_2)$. Это — непрерывная поверхность без провалов, порезов и проколов. Любое сечение графика плоскостью $x_1 = const > 0$ (или же плоскостью $x_2 = const > 0$) является непрерывной возрастающей (неубывающей для негладких ПФ) кривой $Y = F(x_1, const)$ ($Y = F(const, x_2)$).Также возрастающей линией является любое сечение графика плоскостью $x_1 = kx_2 + C$, $k > 0$.

Определение 2. Линией уровня или **изоквантой** производственной функции называется множество точек неотрицательной части числовой плоскости, задаваемое уравнением $F(x_1, x_2) = C > 0$.

В отличие от линий уровня многих функций 2-х действительных переменных изокванта является односвязной, т. е. не состоящей из изолированных кусков непрерывной линией, вдоль которой объем выпуска сохраняет свое значение, хотя комбинации ресурсов меняются. Разрешив уравнение относительно $x_1 = g(x_2, C)$, получим явную функцию, выражающую зависимость необходимых затрат одного ресурса от заданных затрат другого, обеспечивающих неизменный выпуск С, играющий здесь роль параметра. Аналогично, можно получить $x_2 = g^{-1}(x_1, C)$, g^{-1}— функция, обратная к g.

1.2. Свойства производственной функции

От любой другой функции двух независимых переменных двухфакторная ПФ отличается рядом специфических свойств, имеющих экономическое толкование. Прежде всего, для любой ПФ

1) область определения: $x_1, x_2 > 0$;
2) область значений: $F(x_1, x_2) > 0$;

$$\forall x_1, x_2 > 0 \lim_{x_1 \to 0} f(x_1, x_2) = \lim_{x_2 \to 0} f(x_1, x_2) = 0$$

4) $\forall \boldsymbol{C}_1, \boldsymbol{C}_2 > 0 f(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{C}_2)$ и $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{C}_1, \boldsymbol{x}_2)$ — непрерывные возрастающие функции своих аргументов;

5) $\forall \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \lambda > 0 f(\lambda \boldsymbol{x}_1, \lambda \boldsymbol{x}_2) = \lambda^p \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)$, или $\boldsymbol{p} > 0$.

Свойство 2 означает, что для любых, даже сколь угодно малых положительных комбинаций ресурсов, существует процесс, преобразующий их в положительное количество готовой продукции. Свойство 3) означает, что это количество является бесконечно малой величиной, если количество хотя бы одного ресурса стремится к нулю, и в пределе выпуск невозможен, если хотя бы один ресурс отсутствует.

Свойство 4 означает, что любое, даже сколь угодно малое дополнительное количество каждого из ресурсов (всего одна молекула!) при неизменном количестве другого дает дополнительный доход, являющийся в силу непрерывности бесконечно малой величиной при стремящемся к нулю увеличении первого.

Свойство 5 называют свойством однородности ПФ порядка р > 0. Это спорное свойство, т. к., из соображений здравого смысла, степень однородности р должна равняться 1: одновременное изменение в λ раз количеств каждого из ресурсов должно приводить к такому же изменению и объема выпуска. Однако, эконометрические исследования показали, что в некоторые периоды времени производственные функции ряда стран (США, 1921—1941) имели такой показатель, существенно отличающийся от единицы. В качестве одной из причин этого можно назвать такие факторы, как концентрация производства и послевоенный и предвоенный научно-технический прогресс (НТП), в значительной мере объяснимый притоком высококвалифицированных иммигрантов из Европы, приведшие к более эффективному использованию ресурсов. В ряде подходов аксиоматизируется свойство однородности порядка $p = 1$ для ПФ любого типа, и это свойство называется еще эффектом масштаба,

или экстенсивностью ПФ. Оно очень удобно, т. к. при согласованном изменении единиц измерения ресурсов и готовой продукции в одно и то же число раз соотношение $Y = f(x_1, x_2)$ сохранится, между тем, как при р≠1, необходимо делать поправку в одной из частей. Тогда при переходе от больших единиц к единицам, в 10 раз меньшим, необходимо Y дополнительно умножать на 10^{p-1}.

Функция, в которой роль независимой переменной играют затраты, а зависимая переменная определяет уровень выпуска, называется **функцией выпуска** или просто производственной функцией. В **функции затрат**, наоборот, независимая переменная — выпуск, а зависимая — затраты.

1.3. Однофакторные производственные функции и их характеристики

Пример 1. Затраты y на производство продукции складываются из условно-постоянных и условно-переменных затрат. Если условно-переменные затраты прямо пропорциональны объёму выпуска x и составляют $a_1 x$ единиц, а условно-постоянные затраты равны a_0 единиц, то функция затрат имеет вид:

$$y = a_1 x + a_0 \left(a_1 > 0, a_0 > 0, x \geq 0\right).$$

Это — линейная ПФ. С такими функциями встречаемся, например, при изучении линейных балансовых моделей (межотраслевые потоки прямо пропорциональны соответствующему валовому выпуску, коэффициенты пропорциональности — технологические коэффициенты), затраты каждого из используемых ресурсов прямо пропорциональны объёмам выпускаемой продукции и т. п.

Пример 2. С помощью однофакторных ПФ описывается также зависимость объёма выпускаемой продукции от затрат некоторого специфического вида ресурса. В роли такого ресурса часто выступают трудовые ресурсы, основные производственные фонды, объём капиталовложений, различные виды сырья. При этом затраты всех других участвующих в производстве ресурсов считаются неизменными.

Так, с помощью функции вида

$$y = a_0 + a_1 x - a_2 x^2 \ (a_0 > 0,\ a_1 > 0,\ a_2 > 0, x \geq 0)$$

можно охарактеризовать, например, зависимость урожайности y некоторой сельскохозяйственной культуры от количества x внесённых удобрений (квадратная ПФ), (Рис. 1). При отсутствии удобрений урожайность будет на уровне y_0,

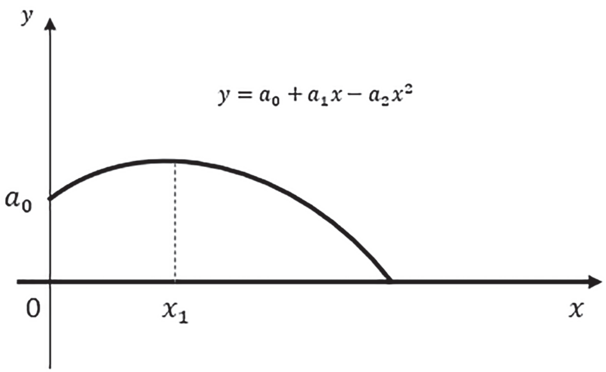

Рис. 1. Квадратичная производственная функция

Пример 3. Гиперболическая зависимость

$$y = a_0 + \frac{a_1}{x} \ (a_0 > 0, a_1 > 0, x > 0)$$

применяется, например, для моделирования зависимости затрат y на единицу выпускаемой продукции от объёма

производства (Рис. 2). Удельные затраты имеют обычно постоянную составляющую a_0 и переменную $\frac{a_1}{x}$. Величина $\frac{a_1}{x}$ снижается с ростом x. Это означает, что с увели-

чением объёма производства доля переменных затрат неограниченно убывает. При большом объёме производства $(x \to \infty)$ удельные затраты y лишь незначительно отличаются от постоянного слагаемого $a_0 (y \to a_0)$.

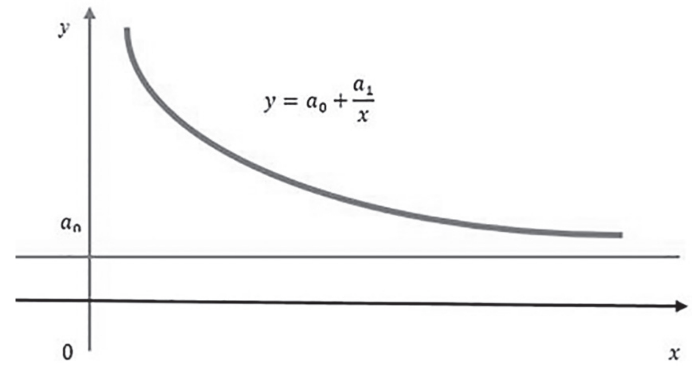

Рис. 2. Гиперболическая производственная функция

Пример 4. Экспоненциальная ПФ (Рис. 3)

$$y = a_0 e^{a_1 x} \ (a_0 > 0, a_1 > 0, x \geq 0)$$

используется, например, для исследования динамики изменения объёма производства y с течением времени x.

В начальный момент времени $x = 0$ объём производства $y = a_0$. Крутизна соответствующей прямой зависит, очевидно, от величины коэффициентов a_0 и a_1.

Зависимость указанного вида имеет место и в следующей ситуации. Если на банковский счёт кладётся сумма a_0, то через x лет на счёте будет сумма y, если банк выплачивает a_1% годовых.

Пример 5. Показательная функция (Рис. 4)

$$y = a_0 - k_0 a_1^x \left(a_0 > 0, 1 > a_1 > 0, k_0 > 0, x \geq 0\right)$$

может моделировать влияние затрат переменного ресурса R на выпуск у продукции, если уровень выпуска не может быть больше некоторой предельной величины a_0. Так как

$a_1 < 1$,то с ростом x степень a_1^x неограниченно убывает. При этом y возрастает. Если $x \to \infty$, то $y \to a_0$. При $x = 0$ выпуск равен $a_0 - k_0$.

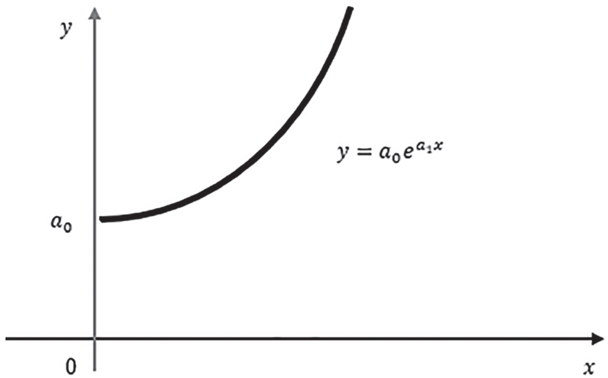

Рис. 3. Экспоненциальная производственная функция

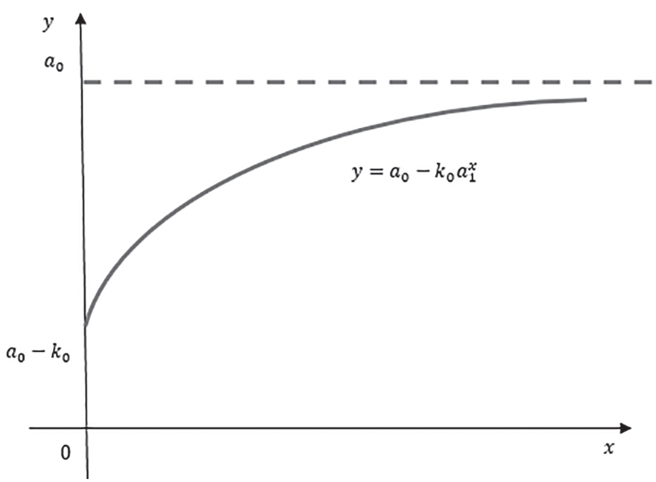

Рис. 4. Показательная производственная функция

Пример 6. При моделировании экономики используются также степенные ПФ (Рис. 5)

$$y = a_0 x^{a_1} \ (a_0 > 0, a_1 > 0, \ x \geq 0).$$

Они обычно описывают ситуации, в которых рост затрат x некоторого ресурса R ведёт к неограниченному увеличению выпуска y. Темп роста y зависит от величины параметров a_0 и a_1.

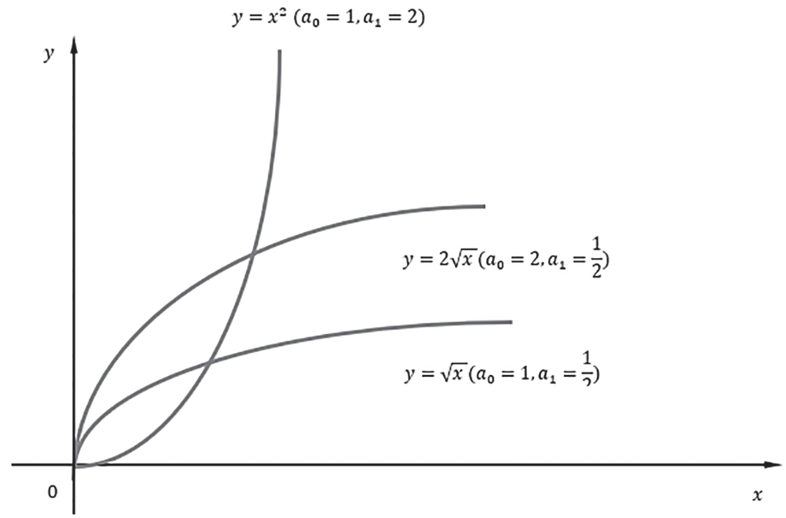

Рис. 5. Степенные производственные функции

На практике используются как сами рассмотренные выше производственные функции, так и различные их комбинации.

Построение математической модели начинается с установления характера зависимости между исследуемыми величинами. Выбирается производственная функция определённого, наиболее полно соответствующего моделируемой ситуации, вида. Это достаточно сложный процесс. Здесь важно хорошо изучить свойства моделируемого объекта и сопоставить их со свойствами имеющихся в нашем арсенале функций. А значит, чем большим числом характеристик каждой производственной функции мы сможем располагать, тем точнее будет выбор. Следующие параграфы данной главы посвящаются основным характеристикам однофакторных функций, выяснению их экономического смысла, роли в экономическом анализе. Оценки характеристик, обычно, получают на основе статистической информации, которой располагает исследователь. Методы получения, обработки и применения статистических данных изучаются на занятиях по «Математической статистике», «Эконометрике», «Экономическому анализу».

1.4. Предельно продуктивные объёмы используемых ресурсов

С понятием производной функции и некоторыми её приложениями студенты впервые познакомились в старших классах средней школы. Строгое определение производной даётся в курсе «Высшей математики» на первом курсе ВУЗа. В частности, рассматривается серия задач, относящихся к различным областям науки и практики, но имеющих одинаковую логику решения. Все они содержат четыре логических шага:

- значение независимой переменной $\boldsymbol{x}$ увеличивается на величину $\Delta\boldsymbol{x}$, то есть принимает значение $\boldsymbol{x}+\Delta\boldsymbol{x}$;
- при этом зависимая переменная y получает положительное или отрицательное приращение $\Delta\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{x}+\Delta\boldsymbol{x}\right)-\boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{x}\right)$;
- находится относительная характеристика (среднее значение исследуемой функции) $\dfrac{\Delta\boldsymbol{y}}{\Delta\boldsymbol{x}}$;
- вычисляется предельный показатель $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta\boldsymbol{y}}{\Delta\boldsymbol{x}}$.

Если этот предел существует и конечен, то его называют значением ***производной функции*** в точке x. Выяснялся и использовался при решении задач геометрический (угловой коэффициент касательной к графику функции f в точке с абсциссой x) и механический (мгновенная скорость неравномерного движения в данный момент времени) смысл производной.

Рассмотрим ещё одну задачу, решение которой содержит такие же четыре логических шага.

Пусть функция $\boldsymbol{d}=\boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{p}\right)$ выражает зависимость объёма спроса на некоторый товар от уровня рыночной цены на него.

- Цена увеличивается (уменьшается) на Δp единиц и принимает значение $\boldsymbol{p}+\Delta\boldsymbol{p}$;
- при этом спрос изменяется (убывает при неизменности значений других факторов, оказывающих влияние на величину спроса) на $\Delta\boldsymbol{d}=\boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{p}+\Delta\boldsymbol{p}\right)-\boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{p}\right)$;
- отношение $\dfrac{\Delta\boldsymbol{d}}{\Delta\boldsymbol{p}}$ показывает на сколько денежных или др. единиц в среднем изменяется спрос на данный товар, если цену увеличили на одну денежную единицу (1 рубль, 1 доллар,1 евро и т. д.);
- очевидно, реакция величины спроса на каждую дополнительную денежную единицу не всегда одинакова, первая и сто первая дополнительна единица, скорее всего, приведут к различным изменениям со стороны спроса. Чем меньше $\Delta\boldsymbol{p}$, тем точнее будет относительный показатель. При неограниченном убывании $\Delta\boldsymbol{p}$ получим предельный показатель (предельный спрос)

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta d}{\Delta p}=d'\left(p\right),$$

характеризующий скорость изменения спроса, то есть величину изменения спроса при увеличении цены на одну малую денежную единицу.

Аналогично получаем предельное предложение, предельную выручку, предельные затраты, предельную производительность ресурса и т. д.

Замечания. 1. Для дифференцируемой функции, выражающей зависимость между двумя величинами (экономическими, финансовыми, физическими, химическими и т. д.) производная функция отражает характер изменения соответствующего показателя.

2. В дискретном случае роль предельного показателя играет предел, к которому стремится относительный показатель $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ при неограниченном убывании Δx.

3. Известно, что второй производной функции называется производная от её первой производной. значит она выражает скорость изменения первой производной, является предельным показателем для функции, представляющей собой предельный показатель для исходной зависимости. Механический смысл второй производной — ускорение, с которым изменяется значение функции. В экономике аналогичный показатель принято называть темпом изменения (спроса, предложения, производительности и т. д.).

4. При изучении специальных дисциплин познакомитесь ещё с рядом относительных характеристик. У каждой из них своя роль и своё место.

Примеры (вспомним геометрический и проиллюстрируем экономический смысл производной)

Пример 1. Найдём угол наклона касательной к параболе $y = x^2 - 2x + 5$ в каждой из следующих точек

$$x_1 = 0{,}5,\ x_2 = 1,\ x_3 = 1{,}5.$$

Решение. Известно, что угловой коэффициент касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $(x_0, f(x_0))$ равен значению производной $f'(x_0)$:

$$k_{\text{кас.}} = f'(x_0).$$

С другой стороны, угловой коэффициент любой прямой — это тангенс угла наклона данной прямой к положительному направлению оси Ox:

$$k_{\text{кас.}} = tg\alpha.$$

Значит,

$$tg\alpha = f'(x_0).$$

Если

$$f(x) = x^2 - 2x + 5,$$

то

$$f'(x) = 2x - 2$$

и

$$f'(0{,}5) = -1, f'(1) = 0, f'(1{,}5) = 1.$$

В первом случае $\mathrm{tg}\alpha_1 = -1$, и касательная образует с положительным направлением оси Ox тупой угол, равный 135°. Во втором случае $tg\alpha_2 = 0$, касательная параллельна оси Ox. И наконец, $tg\alpha_3 = 1$. Значит, $\alpha = 45^\circ$.

Пример 2. Составим уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $(x_0, f(x_0))$.

Решение. Уравнение любой прямой, не параллельной оси Ox, может быть записано в виде

$$y = kx + b,$$

где $k = tg\alpha$ (α — угол наклона прямой по отношению к положительному направлению оси $Ox, \alpha \neq \frac{\pi}{2}$).

Для касательной к кривой $y = f(x)$ угловой коэффициент $k = f'(x_0)$.

Итак,

$$y = f'(x_0) \cdot x + b. \tag{1}$$

Свободный член b найдём, если в это уравнение вместо x и y подставим координаты точки касания $(x_0, f(x_0))$:

$$f(x_0) = f'(x_0) \cdot x_0 + b.$$

Отсюда выразим b:

$$b = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$$

и подставим это выражение в уравнение (1):

$$y = f'(x_0)x + f(x_0) - f'(x_0)x_0.$$

Окончательно получаем:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Составим, например, уравнение касательной к параболе

$$y = x^2 - 2x + 5$$

в точке $x_0 = 0{,}5.$

В предыдущем примере мы нашли $f'(0{,}5) = -1$. Подставив в правую часть уравнения параболы $x_0 = 0{,}5,$ найдём:

$$f(x_0) = f(0{,}5) = 0{,}5^2 - 2 \cdot 0{,}5 + 5 = 4{,}25.$$

Уравнение касательной имеет вид:

$$y = 4{,}25 - 1 \cdot (x - 0{,}5)$$

или

$$y = -x + 4{,}75.$$

Пример 3. Допустим, функция затрат имеет вид:

$$K = 2x + \ln(x + 1).$$

Определим предельные издержки производства при данном объёме выпуска $x_1 = 2, x_2 = 9.$

Решение. $K'(x) = 2 + \dfrac{1}{x+1},$ тогда

$$K'(2) = 2\frac{1}{3}, K'(9) = 2{,}1.$$

Видим, что $K'(9) < K'(2)$ и, вообще, $K'(x_2) < K'(x_1),$ если $x_2 > x_1.$ То есть с увеличением объёма производства предельные издержки (дополнительные затраты на следующую за x-овой малую единицу выпуска) убывают.

Увеличение выпуска на малую единицу требует всё меньших дополнительных затрат.

Пример 4. Пусть зависимость спроса на товар от цены на него выражается формулой $d = \dfrac{100}{p+1}.$ Определим скорость изменения спроса, когда цена на товар составляет 1 ден. ед., 4 ден. ед.

Решение. Скорость изменения любой функции равна её производной. В данном случае

$$d'(p) = -\frac{100}{(p+1)^2}.$$

Отсюда $d'(1) = -25, d'(4) = -4.$ Знак «минус» показывает, что с увеличением цены спрос на товар убывает.

Пример 5. Предположим, что технология процесса производства не меняется, а основные производственные фонды используются полностью.

Введём следующие обозначения:

F — размеры основных производственных фондов в момент времени t ,

Q — объём производства предметов потребления с помощью основных производственных фондов F .

Предположим, что масса основных фондов пропорциональна объёму производства:

$$F = qQ, \tag{2}$$

где q — постоянный коэффициент пропорциональности ($q > 0$).

Из (2) следует, что

$$\frac{dF}{dt} = q \cdot \frac{dQ}{dt}. \tag{3}$$

Это означает, что прирост основных производственных фондов в единицу времени пропорционален приросту выпуска предметов потребления в единицу времени.

Прирост основных фондов в единицу времени есть результат капиталовложений K . Можно, следовательно, записать, что в момент времени t

$$K = q \cdot \frac{dQ}{dt}, \qquad (4)$$

т. е. капиталовложения пропорциональны приросту объёма производства.

Предположим, что объём производства предметов потребления в период времени $[0, t_1]$ возрастает всё быстрее, а с момента t_1 начинает возрастать всё медленнее. Кривая производства предметов потребления имеет вид, показанный на рисунке 6.

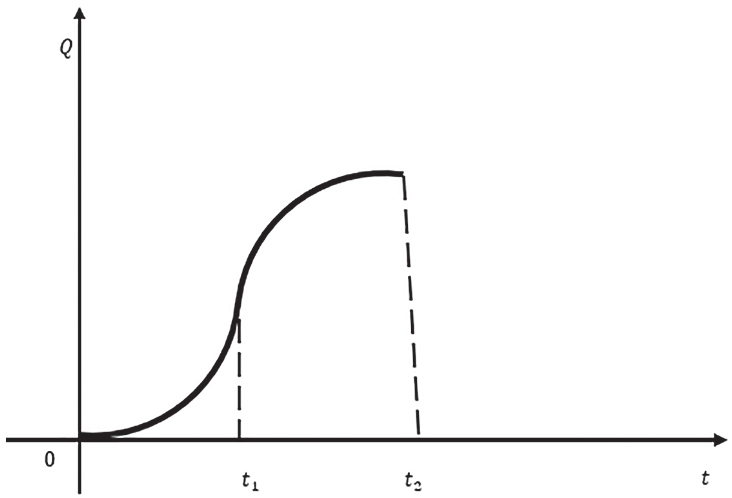

Рис. 6. Пример 5. Кривая производства предметов потребления

Для $t \in (0,\ t_1)$ $Q''(t) > 0$, а для $t \in (t_1, t_2)$ $Q''(t) < 0$.

Это означает, что функция $\frac{dQ}{dt}$ возрастает в промежутке $(0, t_1)$ и убывает для $t \in (t_1, t_2)$.Из (3) и условия $q > 0$ следует, что K имеет такой же характер изменения, что и $\frac{dQ}{dt}$.

Поэтому функцию $K = \tilde{K}(t)$ можно изобразить кривой, приведённой на рис. 7.

Поведение графиков двух функций $Q = \tilde{Q}(t), K = \tilde{K}(t)$ позволяет сделать следующие выводы:

1. Если спрос на предметы потребления (или, что то же самое, их производство) возрастает в каком-либо периоде с положительным ускорением (промежуток $(0, t_1)$), то возрастают и капиталовложения. Следовательно, растёт спрос на средства производства, необходимые для увеличения выпуска предметов потребления.

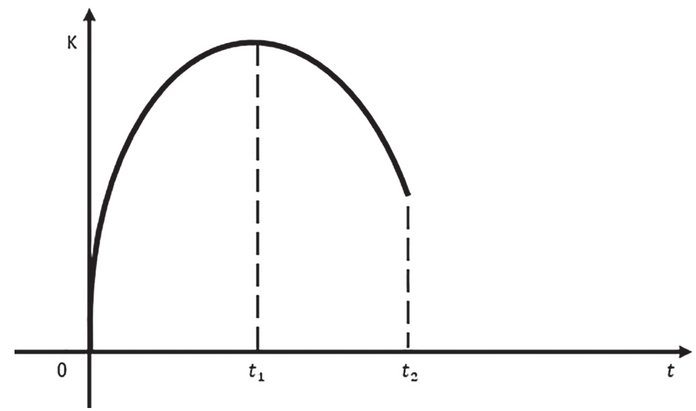

Рис. 7. Пример 5. Изменение капиталовложений

Следовательно, растёт спрос на средства производства, необходимые для увеличения выпуска предметов потребления.

2. Если спрос на предметы потребления (или их производство) с какого-то момента начинает расти медленнее, т. е. в отрицательном темпе (промежуток (t_1, t_2)), это вызовет уменьшение размеров капиталовложений, т. е. падение спроса на средства производства.

3. Удержание капиталовложений на уровне, достигнутом в момент времени t_1, возможно лишь в том случае, если спрос на предметы потребления возрастает постоянным темпом, достигнутым в момент времени t_1.

Приведённое положение называют принципом ускорения или принципом акселератора.

1.5. Показатели эластичности

Изучение различных экономических вопросов, таких, как определение динамики спроса населения на данный товар при изменении его цены или при изменении доходов населения, исследование диапазона взаимозаменяемости ресурсов производства, определение эффективности тех или иных затрат, прогнозирование изменения прибыли предприятия или фирмы под воздействием различных факторов и решение многих-многих других проблем, приводит к необходимости выяснения, на сколько процентов изменится одна величина, если другая увеличилась на 1%.

Характеристика, дающая ответ на поставленный вопрос, называется ***эластичностью*** соответствующей функции.

Приступим к построению этого показателя. Пусть аргумент x функции $f(x)$ получил приращение Δx. Тогда значение функции изменится на величину

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x).$$

Приращения Δx и Δy называют абсолютными приращениями аргумента и функции соответственно. Составим относительные приращения переменных $\frac{\Delta x}{x}$, $\frac{\Delta y}{y}$ и выразим их в процентах.

Величина $\frac{\Delta x}{x}\cdot 100\%$ указывает, на сколько процентов изменилось значение аргумента, а $\frac{\Delta y}{y}\cdot 100\%$ даёт соответствующее процентное изменение значения функции.

Отношение $\left(\frac{\Delta y}{y}\cdot 100\%\right):\left(\frac{\Delta x}{x}\cdot 100\%\right)$ показывает, на сколько процентов в среднем меняется (увеличивается

или уменьшается) значение функции, когда значение аргумента возрастает на 1% (увеличивается от x до $x + 0{,}01x$).

Это отношение будет характеризовать поведение функции $y = f(x)$ в данной точке тем точнее, чем меньше Δx. Пусть Δx неограниченно убывает. Вычислим предел указанного отношения при условии, что $\Delta x \to 0$.

$$\lim_{\Delta x \to 0}\left(\left(\frac{\Delta y}{y}\Delta 100\%\right):\left(\frac{\Delta x}{x}\Delta 100\%\right)\right) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta y}{y}:\frac{\Delta x}{x}\right) = \frac{x}{y}\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}. \quad (5)$$

Отношение $\frac{x}{y}$ не зависит от изменения Δx. Оно играет роль постоянной и может быть вынесено за знак предела.

Определение 1. Предел отношения относительного приращения функции $\frac{\Delta y}{y}$ к соответствующему относительному приращению аргумента $\frac{\Delta x}{x}$ при условии, что абсолютное приращение аргумента Δx стремится к нулю, называется ***эластичностью*** функции $y = f(x)$ по переменной x и обозначается символом

$$E_x(y) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta y}{y}:\frac{\Delta x}{x}\right) = \frac{x}{y}\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}. \quad (6)$$

Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x, то

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$$

и формула (6) принимает вид

$$E_x(y) = \frac{x}{y}\cdot f'(x)$$

или

$$\boxed{E_{x(y)} = \frac{x}{y}\cdot\frac{dy}{dx}} \quad (7)$$

Из (5) следует, что эластичность $E_x(y)$ показывает, ***на сколько процентов изменится значение функции при увеличении независимой переменной*** x на 1% (с x до $x + 0{,}01x$).

Формулу (3) можно переписать в виде

$$E_x(y) = \frac{dy}{dx} : \frac{y}{x}.$$

Это означает, что для функции выпуска $y = f(x)$ эластичность равна отношению предельной производительности ресурса к его средней производительности.

Пример 1. $f(x) = 3x + 4$.

Эластичность данной функции вычисляется по формуле

$$E_x\left(f(x)\right) = \frac{x}{f(x)} \cdot f'(x) = \frac{x}{3x+4} \cdot 3 = \frac{3x}{3x+4}.$$

При $x = 2$ показатель эластичности равен 0,6. Это означает, что при увеличении x с 2 до 2,02 значение функции возрастает примерно на 0,6%. Если $x = 0$, то $E_x\left(f(x)\right) = 0$. Следовательно, увеличение x с 0 до 0,01 практически не меняет значения функции.

Пример 2. $y = 1 + 2x - x^2$.

Здесь $E_x(y) = \dfrac{x}{1+2x-x^2} \cdot (2-2x) = \dfrac{2x(1-x)}{1+2x-x^2}$.

При $x = 1$ показатель эластичности равен нулю. При увеличении с 1 до 1,01 значение функции практически не меняется. Если $x = 2$, то $E_x(y) = -4$. Увеличение значения x с 2 до 2,02 приводит к уменьшению значения функции на 4%.

Эластичность спроса относительно цены

Изучается зависимость спроса d на товар от цены p на него.

Предположим, что цены на аналогичные товары, доходы потребителей и структура их потребностей — постоянные величины. Тогда зависимость спроса от цены можно описать с помощью функции $d = d(p)$.

Во многих экономических исследованиях необходимо установить не величину спроса при каждом конкретном уровне цены, а характер изменения спроса при определённом изменении цены. В этом случае находят эластичность спроса относительно цены. В наших обозначениях

$$E_p(d) = \frac{p}{d(p)} \cdot d'(p).$$

Эластичность спроса относительно цены определяет, на сколько процентов изменится спрос на товар, если цена на него увеличится на 1%. Так как в большинстве случаев спрос является убывающей функцией цены и

$$d'(p) < 0,$$

чтобы избежать отрицательных чисел, в этих случаях при изучении эластичности спроса принимают

$$\boxed{E_p(d) = -\frac{p}{d(p)} \cdot d'(p)} \tag{8}$$

Знак «–» показывает, что спрос уменьшается при увеличении цены.

Пример 3. Если функция спроса линейная:

$$d = 5 - \frac{1}{2}p,$$

то $E_p(d) = -\dfrac{p}{5-\frac{1}{2}p} \cdot \left(-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{p}{10-p}$.

При $p = 2$ имеем $E_p(d) = \dfrac{1}{4}$. Это означает, что при увеличении цены на 1% спрос падает на $\dfrac{1}{4}$%. Если $p = 5$, показатель эластичности равен единице. Увеличение цены с 5 до 0,05 приводит к уменьшению спроса на 1%. При $p = 9$ спрос уменьшается на 9%.

Пример 4. Для $d=\dfrac{c}{p}$ (c — постоянная, $c>0$) показатель эластичности равен единице при любом уровне цены. Действительно,

$$E_p(d)=-\frac{p}{\frac{c}{p}}\cdot\left(-\frac{c}{p^2}\right)=1.$$

Если спрос обратно пропорционален цене, то при любой цене увеличение её на 1% влечёт за собой уменьшение спроса также на 1%.

Определение 2. Говорят, что ***спрос эластичен***, если повышению цены на 1% соответствует снижение спроса более чем на 1%, т. е. $E_p(d)>1$; ***спрос нейтрален***, если $E_p(d)=1$; ***спрос неэластичен***, если $0<E_p(d)<1$.

В примере 3 спрос нейтрален при $p=5$; при $p=2$ — неэластичен и для $p=9$ — эластичен. Для функции $d=\dfrac{c}{p}$ спрос нейтрален при любой цене.

Другими словами, спрос на товар эластичен, если небольшое изменение цены товара вызывает значительные изменения величины спроса на него. В обратной ситуации, когда изменение цены ведёт к сравнительно небольшому изменению величины спроса, последний является неэластичным. Примерами товаров с эластичным спросом могут служить, например, яблоки, помидоры, персики и т. п. При росте цен на них покупательский спрос может переключиться на другие виды овощей и фруктов. При определённом уровне цен покупатели могут полностью отказаться, например, от употребления фруктов или заменить их соками и другими консервами. В то же время спрос на товары первой необходимости (лекарства, обувь, электричество, газ, телефон), на вещи, цена которых мало ощутима для семейного бюджета (карандаш, зубная паста, крем для обуви) и трудно заменяемые товары (электрические лампочки, хлеб, бензин) является неэластичным.

Исследуем динамику *выручки* при различных видах спроса. Общие расходы населения на данный товар (выручка от его продажи) при цене p составляют $u=p\cdot d(p)$.

Предельная выручка равна

$$\frac{du}{dp}=d(p)+p\cdot d'(p),$$

или

$$\frac{du}{dp}=d(p)\left(1+\frac{p}{d(p)}\cdot d'(p)\right)=d(p)\cdot\left(1-E_p(d)\right).$$

а) Если спрос эластичен, т. е. $E_p(d)>1$, то

$$\frac{du}{dp}<0$$

и с повышением цены выручка от продажи товара снижается.

б) При нейтральном спросе ($E_p(d)=1$)

$$\frac{du}{dp}=0,$$

и выручка практически не зависит от цены.

В этом случае $u=c$ (c — постоянная) и

$$d(p)=\frac{c}{p}.$$

Следовательно, в случае нейтрального спроса его размер обратно пропорционален цене (см. пример 4).

в) При неэластичном спросе ($0<E_p(d)<1$) выручка увеличивается с ростом цены, так как в этом случае

$$\frac{du}{dp}>0.$$

Из сказанного видно, что знание эластичности спроса на данный товар позволяет прогнозировать направление изменения суммы выручки под влиянием роста или снижения цены. Очевидно, каждой фирме выгодно, чтобы спрос на её продукцию был как можно более неэластичным, ибо в такой ситуации существует возможность назначать сравнительно высокие цены.

Значит, фирма должна прилагать все усилия к поддержанию спроса на её товар на достаточно высоком уровне. Достижению этой цели способствуют хорошее качество продукции, чётко организованное обслуживание потребителей, высокое качество рекламы.

Пример 5. Известно, что эластичность спроса на товар составляет 0,4. Определим, как изменится доход от реализации товара, если цену на него увеличить на 5%.

При эластичности $E_p(d) = 0{,}4$ увеличение цены на 1% вызывает уменьшение спроса на 0,4%. Увеличение цены на 5% способствует уменьшению спроса на $5 \cdot 0{,}4 = 2\%$. Цена выросла на 5% и стала равной 1,05 p, где p — старая цена. Если $d(p)$ — спрос, соответствующий цене p, то $0{,}98 \cdot d(p)$ — величина спроса при цене *1,05 p*.

Выручка от реализации товара по цене p составляла $p \cdot d(p)$ денежных единиц. После увеличения цены выручка изменилась. Она стала равной

$$(1{,}05p) \cdot (0{,}98d(p)) = 1{,}029pd(p) \approx 1{,}03pd(p).$$

Последнее равенство означает, что выручка возросла приблизительно на 3%. При неэластичном спросе (0,4 < 1) увеличение цены приводит к возрастанию выручки.

Эластичность предложения определяется аналогично эластичности спроса:

$$E_p(s) = \lim_{\Delta p \to 0}\left(\left(\frac{\Delta s}{s} \cdot 100\%\right) : \left(\frac{\Delta p}{p} \cdot 100\%\right)\right) = \frac{p}{s} \lim_{\Delta p \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta p}. \qquad (9)$$

Для дифференцируемой функции $s = s(p)$ формула (9) принимает вид

$$E_p(s) = \frac{p}{s} \cdot \frac{ds}{dp} \qquad (10)$$

или

$$E_p(s) = \frac{ds}{dp} : \frac{s}{p}. \qquad (11)$$

В отличие от формулы (8), выражающей эластичность спроса, в (10) и (11) отсутствует знак «–». Это связано с тем, что с ростом рыночной цены на товар предложение этого товара обычно растёт. Каждому предпринимателю выгодно реализовать свою продукцию по более высокой цене. Поэтому $s = s(p)$ — возрастающая функция и $\frac{ds}{dp} > 0$.

Равенство (7) означает, что эластичность предложения равна отношению предельного предложения к среднему.

Предложение также может быть эластичным и неэластичным.

Определение 3. Предложение называется **эластичным**, если $E_p(s) > 1$, **неэластичным**, если $0 < E_p(s) < 1$, и **нейтральным**, если $E_p(s) = 1$.

Например, фирма решила пригласить на работу дополнительное количество разнорабочих и высококвалифицированных наладчиков для скорейшего ввода в строй новой автоматической линии. Чтобы увеличить предложение услуг, руководство фирмы объявило об увеличении заработной платы на 10 000 руб. в месяц. Если в городе много безработных, студентов, малооплачиваемых трудящихся, то такая прибавка к семейному бюджету может оказаться для них существенной, и предложение услуг в качестве разнорабочего будет эластичным по цене. Однако едва ли много высококвалифицированных, а, следовательно, и высокооплачиваемых, наладчиков согласится сменить место работы из-за такой прибавки к зарплате. Транспортные расходы, моральный ущерб, необходимость хотя бы частичной переквалификации для работы с новым для них оборудованием не окупятся дополнительной суммой в 10 000 рублей. Здесь предложение услуг едва ли окажется эластичным по цене.

Пример 6. Пусть зависимость предложения s от цены p описывается формулой

$$s = 0{,}05p^2 + p.$$

а) $\dfrac{ds}{dp} = 0{,}1p + 1 > 0$, т. е. s есть возрастающая функция цены.

б) $\dfrac{d^2s}{dp^2} = 0{,}1 > 0$ — функция вогнутая, темп изменения предложения постоянный.

в) $E_p(s) = \dfrac{(0{,}1p+1)p}{0{,}05p^2 + p} = \dfrac{0{,}1p+1}{0{,}5p+1} > 1.$

Предложение эластично по цене.

Зависимость между спросом на товар и его ценой (а значит, и вид соответствующей кривой) в значительной степени определяется полезностью товара. На вид функции предложения в первую очередь оказывают влияние издержки производства.

Определение 4. ***Цена***, при которой величина спроса равняется величине предложения, называется ***равновесной*** (или ценой равновесия).

В точке M величина спроса равна величине предложения, p — цена равновесия) (Рис. 8).

Пример 7. $d(p) = e^{-p^2}$ — функция спроса,

$s(p) = e^{p^2-8}$ — функция предложения.

Из уравнения $d(p) = s(p)$ найдём цену равновесия

$$e^{-p^2} = e^{p^2-8},$$

отсюда

$$-p^2 = p^2 - 8$$

или

$$2p^2 = 8 \text{ и } p^2 = 4.$$

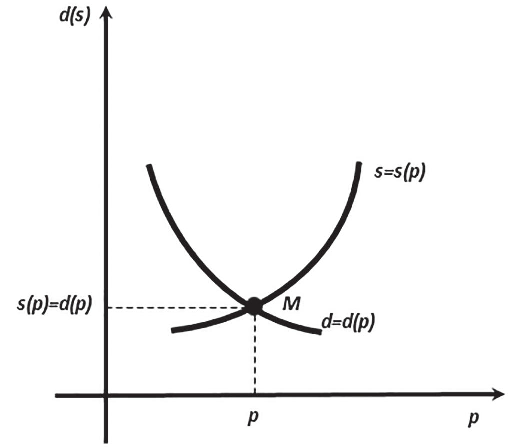

Рис. 8. Цена равновесия

Следовательно, цена равновесия $p = 2$.

Задания

1. Докажите, что для функций $u = u(x)$ и $v = v(x)$:

а) $E_x(uv) = E_x(u) + E_x(v)$;

б) $E_x\left(\dfrac{u}{v}\right) = E_x(u) - E_x(v)$;

в) $E_x(xu) = 1 + E_x(u)$;

г) $E_x c = 0$;

д) $E_x(cu) = E_x(u)$;, где c — постоянная.

2. Выведите формулы для вычисления эластичности суммы и разности двух функций.

3. Докажите, что эластичность степенной функции постоянна и равна её показателю степени.

4. Убедитесь в том, что показатель эластичности функции $y = a^x$ прямо пропорционален соответствующему значению аргумента.

5. Докажите, что при любом $x > 0$, $x \neq 1$ значение функции $y = \ln x$ обратно соответствующему показателю эластичности.

6. Функция спроса имеет вид $d=\dfrac{400}{p^2-4p+8}$. Постройте эскиз её графика. Определите, при каких значениях p спрос эластичен, нейтрален, неэластичен.

7. Определите, на сколько процентов приблизительно изменится выручка от реализации товара, если эластичность спроса равна α, а цена на товар увеличена на $\beta\%$:

а) $\alpha=0,2, \beta=20\%$;

б) $\alpha=4, \beta=5\%$;

в) $\alpha=1,\ \beta=10\%$.

8. Используя свойства эластичности, найдите $E_x\left(f(x)\right)$, если:

а) $f(x)=x^2e^x$;

б) $f(x)=3x\ln x$;

в) $f(x)=\dfrac{x^4}{5e^x}$;

г) $f(x)=2+3x-x^2$;

д) $f(x)=\dfrac{4a^x}{x^5}$;

е) $f(x)=2^x\cdot\ln x$.

9. Установите зависимость между эластичностью полных K и средних $\dfrac{K}{x}$ издержек производства. Докажите, что $K=Cx$ (C — постоянная, x — объём выпуска), если $E_x(K)=1$.

10. Найдите эластичность каждой из основных однофакторных производственных функций. Составьте таблицу характеристик однофакторных производственных функций по схеме:

Название функции	Уравнения $y=f(x)$ $x\geq 0$	Средняя производительность ресурса $f(x)/x$	Предельная производительность ресурса $f'(x)$	Темп изменения функции $f''(x)$	Эластичность $\dfrac{x}{f(x)}\cdot f'(x)$
1. Линейная	$y=a_0+$ $+a_1x$ $(a_0>0,$ $a_1>0)$	$a_1+\dfrac{a_0}{x}$	a_1	0	$\dfrac{a_1x}{a_0+a_1x}$
2. ...	...	...	...	...	...

11. Спрос d и предложение s изменяются по следующим законам:

$$d=\frac{100}{2p+1},\ s=\frac{p^2}{2p+1}.$$

Найдите цену, при которой спрос совпадает с предложением (цену равновесия). Рассчитайте эластичность спроса при этой цене. Постройте эскизы графиков спроса и предложения.

12. Формула

$$d(p)=e^{-p^2}$$

выражает зависимость спроса от цены. Определите, при каких значениях p спрос эластичен, неэластичен, нейтрален. Как зависит выручка от изменения цены? Сопоставьте с критериями эластичности.

13. Установите зависимость между показателями эластичности взаимно обратных функций в соответствующих точках.

Выводы:

1. Производственные функции устанавливают зависимость между затратами ресурсов и объёмом выпускаемой продукции. Под затратами, или издержками, производства понимают стоимость всех используемых в производстве ресурсов или стоимость какого-либо одного специфического ресурса (когда объёмы других ресурсов не меняются).

2. При моделировании экономических процессов наиболее часто используются шесть основных однофакторных производственных функций:

линейная: $y=a_0+a_1x$ $(a_0>0,\ a_1>0,\ x\geq 0)$,

квадратная: $y=a_0+a_1x-a_2x^2$ $(a_0>0,\ a_1>0,\ a_2>0,\ x\geq 0)$,

гиперболическая: $y=a_0+\dfrac{a_1}{x}$ $(a_0>0,\ a_1>0,\ x>0)$,

экспоненциальная: $y=a_0e^{a_1x}$ $(a_0>0,\ a_1>0,\ x\geq 0)$, показательная: $y = a_0 - k_0 a_1^x$ $(a_0 > 0,\ 1 > a_1 > 0,\ k_0 > 0, x \ge 0)$,

степенная: $y = a_0 x^{a_1}$ $(a_0 > 0,\ a_1 > 0,\ x \ge 0)$.

При выборе характера зависимости руководствуются особенностями протекания моделируемых экономических процессов и свойствами производственных функций.

3. Решение различных по содержанию задач приводит к необходимости вычисления предела отношения приращения функции к вызвавшему его приращению аргумента при неограниченном убывании последнего. Указанный предел, если он существует и конечен, называется производной функции. К необходимости нахождения производной приводят задачи, в которых требуется определить скорость изменения некоторой функции.

4. С помощью производной находятся такие показатели, как предельные затраты, предельная выручка, предельный спрос, предельная производительность и др.

5. Предельные затраты — показатель, дающий величину изменения затрат (суммарных или одного ресурса) при увеличении выпуска на одну малую единицу. Предельные затраты — это производная от затрат (суммарных или одного ресурса) по выпуску продукции.

6. Предельная производительность ресурса характеризует изменение (увеличение или уменьшение) выпуска, вызванное увеличением затрат данного ресурса на малую единицу. Предельная производительность ресурса — это производная от выпуска продукции по затратам данного ресурса.

7. Предельный спрос позволяет оценить изменение спроса на данный товар под влиянием возрастания цены на него на одну денежную единицу.

Предельный спрос — это производная от спроса на товар по цене на этот товар.

8. Темп изменения функции даёт возможность охарактеризовать динамику предельных величин. Чем выше темп (абсолютное его значение), тем быстрее растёт или убывает скорость изменения функции. Положительный темп означает возрастание предельной величины при увеличении значения независимой переменной. При отрицательном темпе возрастание независимой переменной приводит к уменьшению скорости изменения функции.

9. Функция, обладающая положительным темпом изменения, является вогнутой. Если темп отрицательный, то соответствующая функция выпукла. Точки перегиба отделяют друг от друга промежутки с разным по знаку темпом изменения функции.

10. На достаточно малом промежутке $[x, x + \Delta x]$ участок графика дифференцируемой функции может быть заменён отрезком прямой (касательной к графику функции в точке с абсциссой x). Это в значительной степени облегчает дальнейшую работу с функцией и служит источником получения приближённых формул.

11. Сравним роль $f'(x_0)$ и $E_{x_0}(y)$. Производная $f'(x_0)$ показывает, на сколько единиц изменится $f(x_0)$ при увеличении x_0 на одну малую единицу. Показатель эластичности $E_{x_0}(y)$ позволяет определить, на сколько процентов приблизительно изменится значение y, если аргумент увеличить на 1%. В частности, если функция выражает зависимость спроса на некоторый товар от цены на него, то значение показателя эластичности даёт возможности прогнозировать изменение спроса под воздействием изменения цены.

12. Если повышение цены на 1% приводит к снижению спроса более чем на 1%, то спрос считают эластичным. При неэластичном спросе аналогичное изменение цены вызывает уменьшение спроса менее чем на 1%. Спрос нейтрален, если при увеличении цены на 1% спрос на товар падает также на 1%.

13. При эластичном спросе на товар увеличение цены на него ведёт к уменьшению выручки от его реализации. Если спрос неэластичен, то с ростом цены растёт и выручка. При нейтральном спросе выручка практически не зависит от цены.

14. Спрос на товар определяется прежде всего его полезностью, а предложение товара в первую очередь зависит от издержек производства.

15. Предложение товара также может быть эластичным и неэластичным. Как правило, предложение — это возрастающая функция цены.

16. Цена, при которой уравновешиваются спрос и предложение, называется равновесной. Равновесной цене соответствует точка пересечения кривых спроса и предложения.

Вопросы и задания для проведения собеседования по материалу главы первой

1. Дайте определение однофакторной производственной функции. Какие величины могут играть в ней роль зависимой и, соответственно, независимой переменной? Как вы думаете, почему функцию называют производственной? А однофакторной?

2. Приведите примеры экономических ситуаций, в которых можно использовать именно однофакторные производственные функции?

3. В чём состоит отличие функции выпуска от функции затрат? А что их объединяет?

4. Перечислите известные вам виды однофакторных производственных функций. Приведите примеры ситуаций, которые могут быть описаны с помощью каждой из этих функций.

5. На какую информацию опираются, выбирая тот или иной вид производственной функции? Что ещё могло бы помочь вам в осуществлении подобного выбора?

6. Что объединяет между собой предельные издержки производства, предельную эффективность ресурса, предельную выручку, угловой коэффициент касательной? Что бы вы ещё включили в эту компанию и почему? Дайте характеристику каждого из компаньонов.

7. Что характеризует темп изменения функции? Как он измеряется? Можно ли по графику функции определить

участки с разным по знаку темпом изменения? Как отличить друг от друга промежутки с более высоким и более низким темпом? При решении каких экономических задач необходима информация о темпе изменения функции?

8. Дайте определение дифференциала функции, обоснуйте его геометрический и экономический смысл.

Выведите формулу, использующую дифференциал в приближённых вычислениях.

9. Объясните роль показателя эластичности. В чём сходство и различие между $f'(x_0)$ и $E_{x_0}(f(x))$?

10. Как можно воспользоваться информацией об эластичности спроса на данный товар или данный вид услуг?

11. Как по графику зависимости спроса от цены (то же для зависимости предложения от цены) определить характер спроса (предложения): эластичен он, неэластичен или нейтрален?

12. Приведите примеры функций, которые могли бы описывать эластичный, неэластичный или нейтральный спрос (то же для предложения). Какие ситуации, на ваш взгляд, могла бы описать каждая из этих функций? Схематически изобразите графики таких функций из §1.

13. Составьте «портреты» шести производственных функций из §1 (их свойства, характеристики, практическое применение, обоснование вида графика).

Ответы к заданиям на стр. 35–37

2. $\grave{\imath}\grave{\imath}\grave{\imath}_x\left(\;(\;)\pm\;(\;)\right)=\dfrac{x}{u(x)\pm v(x)}\left(\;'(\;)\pm\;'(\;)\right).$

3. $E_x\left(x^n\right)=\dfrac{x}{x^n}\cdot n\cdot x^{n-1}=n.$

4. $E_x\left(a^x\right)=\dfrac{x}{a^x}\cdot a^x\ln a=\ln a\cdot x.$

5. $E_x(\ln x)=\dfrac{x}{\ln x}\cdot\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{\ln x}.$

6. $E_p(d)=\dfrac{2p(p-2)}{p^2-4p+8}$. При $p=2\sqrt{2}\approx 2{,}8$ спрос нейтрален, для $2<p<2\sqrt{2}$ спрос неэластичен, при $p>2\sqrt{2}$ спрос эластичен.

7. а) Увеличится на 15,2%;
б) уменьшится на 16%; в) практически не изменится.

8. а) $2+x$; б) $\dfrac{\ln x+1}{\ln x}$; в) $4-x$; г) $\dfrac{x(3-2x)}{2+3x-x^2}$; д) $x\ln a-5$; е) $x\ln 2+\dfrac{1}{\ln x}$.

9. $E_\pi = E_K - 1$, где $\pi=\dfrac{K}{x}$.

11. $p=$¿¿¿$E_{10}(d)\approx$

12. При $p\approx 0{,}7$ спрос нейтрален; при $p>0{,}7$ — эластичен, выручка убывает с возрастанием цены; при $p<0{,}7$ спрос неэластичен, увеличение цены приводит к возрастанию выручки.

ГЛАВА 2. МНОГОФАКТОРНЫЕ ПРОИЗВОДСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ, ПРЕДЕЛЬНЫЕ ПОКАЗАТЕЛИ

2.1. Многофакторные производственные функции

В первой главе объектом нашего внимания были однофакторные производственные функции. Они описывают характер зависимости выпуска продукции от затрат одного фактора производства (будь то суммарные издержки производства или затраты одного специфического ресурса). Отсюда и название таких функций — однофакторные.

При изучении закономерностей функционирования некоторой экономической системы (всей экономики страны, отдельной отрасли, завода, цеха и т. д.) каждая входящая в её состав экономическая единица (отрасль, предприятие, цех, участок и т. д.) характеризуется функцией, устанавливающей связь между затратами различных факторов производства (сырьё, электроэнергия, трудовые ресурсы и т. д.) и объёмом выпускаемой продукции. Пусть $x_1,x_2,\ldots,x_n$ — затраты производственных ресурсов $r_1,r_2,\ldots,r_n$ соответственно, а y — соответствующий им объём выпускаемой продукции. Очевидно, разным объёмам затрат отвечают, вообще говоря, разные уровни выпуска. То есть каждому набору чисел $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ сопоставлено вполне определённое число y.

С ситуациями, в которых значение одной величины зависит от значений, принимаемых несколькими другими величинами, вы встречались ещё в школьном курсе математики, а затем в курсе высшей математики.

Так, объём V прямого кругового цилиндра зависит от его высоты H и радиуса основания R. Эта зависимость записывается в виде формулы

$$V = \pi R^2 H. \quad (1)$$

Формула площади треугольника

$$S = \frac{1}{2} ab \cdot \sin\alpha \quad (2)$$

содержит три независимых параметра a, b и α. Изменение длины одной (или обеих) сторон треугольника или угла между сторонами отражается на величине S.

Дальность полёта T снаряда в пустоте, выпущенного с начальной скоростью V_0 из орудия, ствол которого наклонён к горизонту под углом φ, зависит от значений V_0 и φ. Установлено, что

$$T = \frac{V_0^2 \cdot \sin 2\varphi}{g}. \quad (3)$$

Прибыль от реализации продукции

$$P = p \cdot X - Y, \quad (4)$$

где X — объём реализованной продукции, p — цена реализации, Y — производственные затраты.

В формулах (1) и (3) имеем дело с функциями двух независимых переменных (R, H и V_0, φ соответственно). В (2) значение функции S зависит от значений трёх независимых переменных a, b и α, в (4) — X, p, Y. Здесь уже речь идёт о функциях трёх переменных.

Вспомним основные понятия из теории функций нескольких переменных.

Определение 1. Функцией *n* независимых переменных называется правило, по которому каждому упорядоченному допустимому набору n действительных чисел ставится в соответствие вполне определённое действительное число y.

$$f : (x_1, x_2, \ldots, x_n) \to y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Здесь f — символ функции, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — независимые (или объясняющие) переменные, y — зависимая (или объясняемая) переменная, $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — значение функции. Областью определения f является подмножество M -мерного арифметического пространства R^n, состоящее из допустимых наборов x_i. Множество значений содержится в R.

В определении 1 сказано, что набор $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ упорядоченный и допустимый. Упорядоченность означает, что каждой переменной отводится своя роль. Так, в (1) $x_1 = R, x_2 = H$, и если известно, что высота цилиндра равна пяти, а радиус основания — трём, то значение 5 надо придать второй переменной, 3 — первой, а никак не наоборот. В формуле (2) обозначим $a = x_1, b = x_2, \alpha = x_3$. Ясно, что совершенно небезразлично, какую переменную следует изменить, когда угол между сторонами удвоили.

Что значит «допустимый набор»?

Это понятие определяется конкретным смыслом независимых переменных. Ясно, что все переменные в (1)—(4) неотрицательны и, кроме того, $\alpha \in (0, \pi), \varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Определение 2. Функция n независимых переменных, устанавливающая зависимость между затратами n производственных ресурсов и объёмом выпускаемой продукции, называется ***n*-факторной производственной функцией** (функцией выпуска).

$$y = F(x_1, x_2, \ldots, x_n). \quad (5)$$

Если (5) выражает зависимость объёма выпускаемой данным предприятием продукции от затрат ресурсов $r_1, r_2, \ldots, r_n$, запасы которых ограничены, то, очевидно, допустимыми следует считать значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$, удовлетворяющие следующей системе неравенств:

$$0 \le x_1 \le a_1,$$

$$0 \le x_2 \le a_2,$$

....

$$0 \le x_n \le a_n,$$

где $a_i\left(i=1,2,\ldots,n\right)$ — запасы i-го ресурса (в стоимостном или натуральном выражении).

Не нарушая общности рассуждений, в дальнейшем будем рассматривать лишь функции двух независимых переменных. Обращение к функциям, зависящим от большего числа переменных, не влечёт никаких принципиальных изменений, но вносит дополнительные технические трудности.

При моделировании экономики страны в качестве основных ресурсов используют затраты труда L и объём производственных фондов K. Национальный доход Y выступает в роли результата деятельности экономики. В принятых обозначениях макроэкономическая двухфакторная производственная функция записывается с помощью формулы

$$Y = F\left(K,L\right). \tag{6}$$

В математических моделях функционирования отдельного предприятия, цеха, участка и т. п. Y обозначает объём выпускаемой данным экономическим объектом продукции.

Конкретный вид производственной функции зависит от особенностей функционирования экономики и базируется на четырёх предположениях о свойствах этой функции, следующих из общеэкономических соображений. Два из четырёх предположений обсудим в этом параграфе.

Предположение первое. При отсутствии хотя бы одного производственного ресурса производство невозможно, т. е.

$$F\left(0,L\right)=0, F\left(K,0\right)=0. \tag{7}$$

Предположение второе. При пропорциональном росте количества используемых ресурсов производства объём производства увеличивается в такое же число раз. Математически это можно записать так:

$$F\left(\lambda K,\lambda L\right)=\lambda F\left(K,L\right), \lambda > 0. \tag{8}$$

Так, если $\lambda = 2$ (вдвое увеличили затраты каждого ресурса), то выпуск увеличивается в два раза. Функции, обладающие свойством (8), называют линейно-однородными.

Рассмотрим два вида находящих широкое применение производственных функций. Убедимся, что каждая из них обладает указанными свойствами.

Степенная производственная функция (функция типа Кобба—Дугласа)

Это функция вида

$$Y = Y_0 K^{\alpha} L^{1-\alpha}, 0 < \alpha < 1. \tag{9}$$

При $K = 0$ результат функционирования экономического объекта нулевой:

$$Y = Y_0 \cdot 0 \cdot L^{1-\alpha} = 0.$$

К такому же выводу приходим и при $L = 0$, т. е. оба ресурса абсолютно необходимы.

Если K и L увеличить в λ раз, то в такое же количество раз возрастает и Y.

Действительно,

$$F\left(\lambda K,\lambda L\right)=Y_0\left(\lambda K\right)^{\alpha}\left(\lambda L\right)^{1-\alpha}=Y_0\lambda^{\alpha}K^{\alpha}\lambda^{1-\alpha}L^{1-\alpha}=$$
$$=\lambda^{\alpha+1-\alpha}Y_0K^{\alpha}L^{1-\alpha}=\lambda F\left(K,L\right).$$

В макроэкономических исследованиях функция вида (9) была впервые применена К. Коббом и П. Дугласом (США) в 20-х годах XX в. для изучения связей между национальным доходом и двумя важнейшими факторами производства — рабочей силой и основными производственными фондами[1]. Поэтому такие функции принято называть функциями Кобба-Дугласа. Одна из первых макроэкономических функций для народного хозяйства СССР была построена

---

[1] *Грегори Мэнкью Н*. Макроэкономика. М., Издательство Московского Университета, 1994. С.110—112.

Б.Н. Михалевским и Ю.П. Соловьёвым[1]. Несмотря на большие различия между рыночной и плановой экономикой, упомянутые макроэкономические функции имеют одинаковую структуру и отношение между показателями степени. Изучению переходной экономики с помощью ПФ посвящена статья Бессонова В.А.[2], вышедшая в 2002 году. Исследованию экономики России с использованием ПФ в начале XXI века посвящено достаточно много работ, в том числе, ведущих учёных, работающих в Центральном Экономико-математическом институте (ЦЭМИ РАН). Так, в частности, в 2014 году выходит статья А.А. Афанасьева и О.С. Пономарёвой, в которой «Проведено эконометрическое исследование производственных функций российской экономики, которые адекватно- с точки зрения классических критериев эконометрики и содержательного смысла-описывают процесс расширенного воспроизводства народного хозяйства Российской Федерации в 1990—2012 гг. Исследовано влияние народно-хозяйственной инфраструктуры и мировой цены нефти на величину ВВП, а также прогнозная сила эконометрических моделей»[3].

Функция с постоянными пропорциями

Эта функция задаётся с помощью формулы

$$Y = Y_0 \min\left\{\frac{K}{K_0}, \frac{L}{L_0}\right\}. \qquad (10)$$

[1] *Михалевский Н.В.* Производственная функция народного хозяйства СССР в 1951—1963 гг. // Экономика и математические методы. 1988. Т. 2. Вып. 6.

[2] *Бессонов В.А.* Проблемы построения производственных функций в российской переходной экономике // Бессонов В.А., Цухло С.В. Анализ динамики российской переходной экономики. М.: Институт экономики переходного периода, 2002.

[3] *Афанасьев А.А., Пономарёва О.С.* Производственная функция народного хозяйства России в 1990—2012 гг. // Экономика и математические методы. 2014. Том 50. № 4. С. 21.

Значение функции находится по такому правилу: для значений аргументов K и L вычисляются отношения $\frac{K}{K_0}$ и $\frac{L}{L_0}$, из полученных отношений выбирается меньшее и, наконец, параметр Y_0 умножается на выбранное число.

Так, если $Y_0 = 10, K_0 = 5, L_0 = 8$, функция (9) принимает вид

$$Y = 10\min\left\{\frac{K}{5}, \frac{L}{8}\right\}.$$

При $K = 20, L = 24$

$$\min\left\{\frac{20}{5}, \frac{24}{8}\right\} = \min\{4,3\} = 3$$

и значение функции $Y = 10 \cdot 3 = 30$.

Параметры Y_0, K_0, L_0 имеют явный экономический смысл: если затраты ресурсов составляют соответственно K_0 и L_0 единиц, то национальный доход (или объём выпуска в микроэкономических моделях) $Y = Y_0$.

Действительно, при $K = K_0$ и $L = L_0$ имеем:

$$Y = Y_0 \min\left\{\frac{K_0}{K_0}, \frac{L_0}{L_0}\right\} = Y_0 \min\{1,1\} = Y_0 \cdot 1 = Y_0.$$

Убедимся в том, что в функции (10) реализуются предположения о свойствах производственных функций.

1. Если $K = 0$ или $L = 0$, то

$$\min\left\{\frac{K}{K_0}, \frac{L}{L_0}\right\} = 0$$

и $Y = Y_0 \cdot 0 = 0.$

2. Предположим, что $\frac{K}{K_0} < \frac{L}{L_0}$ и $\lambda > 0$. Тогда

$$\frac{\lambda K}{K_0} < \frac{\lambda L}{L_0}$$

и $F(\lambda K,\lambda L)=Y_0\min\left\{\frac{\lambda K}{K_0},\frac{\lambda L}{L_0}\right\}=Y_0\cdot\frac{\lambda K}{K_0}=\lambda\cdot Y_0\frac{K}{K_0}=$

$$=\lambda Y_0\min\left\{\frac{K}{K_0},\frac{L}{L_0}\right\}=\lambda F(K,L).$$

К такому же результату придём, если $\frac{K}{K_0}\geq\frac{L}{L_0}$. (Убедитесь в этом самостоятельно!)

Выясним теперь, почему функцию (9) называют функцией с постоянными пропорциями.

Выше было установлено, что $Y=Y_0$, если $K=K_0,\ L=L_0$. Пусть теперь $Y=Y_1$. Определим, при каких объёмах затрат K_1 и L_1 можно достигнуть такого уровня производства.

Для $Y=Y_1, K=K_1$ и $L=L_1$ равенство (10) принимает вид

$$Y_1=Y_0\min\left\{\frac{K_1}{K_0},\frac{L_1}{L_0}\right\}.$$

Отсюда

$$\min\left\{\frac{K_1}{K_0},\frac{L_1}{L_0}\right\}=\frac{Y_1}{Y_0}. \qquad (11)$$

Если предположить, что

$$\frac{K_1}{K_0}<\frac{L_1}{L_0}, \qquad (12)$$

то

$$\min\left\{\frac{K_1}{K_0},\frac{L_1}{L_0}\right\}=\frac{K_1}{K_0}. \qquad (13)$$

Сопоставляя равенства (11) и (13), получаем:

$$\frac{K_1}{K_0}=\frac{Y_1}{Y_0}$$

или

$$K_1=\frac{K_0}{Y_0}Y_1. \qquad (14)$$

Очевидно, уменьшение затрат труда до уровня L_1, удовлетворяющего равенству

$$\frac{K_1}{K_0}=\frac{L_1}{L_0}, \qquad (15)$$

никак не отразится на уровне выпуска Y_1. В этом случае по-прежнему

$$Y_1=Y_0\min\left\{\frac{K_1}{K_0},\frac{L_1}{L_0}\right\}.$$

Из (14) и (15) следует:

$$L_1=\frac{L_0}{K_0}\cdot K_1=\frac{L_0}{K_0}\cdot\frac{K_0}{Y_0}Y_1=\frac{L_0}{Y_0}Y_1.$$

Итак,

$$L_1=\frac{L_0}{Y_0}Y_1 \qquad (16)$$

и отношение затрат ресурсов равно

$$\frac{K_1}{L_1}=\left(\frac{K_0}{Y_0}Y_1\right):\left(\frac{L_0}{Y_0}Y_1\right)=\frac{K_0}{L_0}. \qquad (17)$$

При уровне затрат, определяемых равенствами (14) и (16), выпуск продукции составляет Y_1 единиц. Уменьшение затрат одного из ресурсов приведёт к падению уровня производства ниже Y_1. Увеличение K_1 или L_1 является неразумным, так как оно не отразится на величине Y_1, а лишь приведёт к дополнительным расходам.

Вывод:

В процессе производства, описываемом функцией вида (10), следует использовать ресурсы в постоянной пропорции

(17). Уровень выпуска возрастает в λ раз лишь при одновременном увеличении затрат обоих ресурсов в такое же число раз. Отношение $\frac{K_0}{L_0}$ задаёт рациональную пропорцию между K и L.

Замечание! Функция

$$Y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 \qquad (18)$$

не обладает ни одним из указанных в предположениях свойств, а функция

$$Y = a_1 x_1 + a_2 x_2 \qquad (19)$$

удовлетворяет только второму предположению. Тем не менее, такие функции часто используются при моделировании экономических объектов. Например, в линейной балансовой модели, в задачах линейного программирования.

В линейной балансовой модели предполагается, что конечный продукт Y_i отрасли P_i линейно зависит от объёмов валовой продукции всех отраслей, входящих в экономическую систему. Для экономической системы, состоящей из двух отраслей, эта зависимость записывается с помощью функций вида (19):

$$Y_1 = (1 - a_{11}) x_1 - a_{12} x_2,$$

$$Y_2 = -a_{21} x_1 + (1 - a_{22}) x_2.$$

Функции (18) и (19) называются линейными. Если свободный член отсутствует ($a_0 = 0$), то функцию называют однородной. Это вызвано тем, что в данном случае

$$F(\lambda x_1, \lambda x_2) = \lambda F(x_1, x_2).$$

Степенные функции находят широкое применение в моделях долгосрочного прогнозирования. Они удобны в работе. Это обусловлено прежде всего наличием небольшого числа параметров, которые к тому же имеют явный экономический смысл. (Его мы выясним позднее). Кроме того, степенную функцию можно заменить функцией линейной относительно логарифмов переменных. Действительно, если прологарифмируем обе части функции

$$Y = Y_0 K^{\alpha} L^{1-\alpha},$$

то получим

$$\ln Y = \ln Y_0 + \alpha \ln K + (1 - \alpha) \ln L.$$

Введём обозначения:

$$\ln Y = z,\ \ln K = x_1,\ \ln L = x_2, \ln Y_0 = a_0.$$

Придём к линейной функции

$$z = a_0 + \alpha x_1 + (1 - \alpha) x_2.$$

Найти значения параметров (с достаточной степенью точности) такой функции легче, чем проделать это для функции любого другого вида. Такой приём использовали, в частности, П. Дуглас и Д. Кобб в своей статье «Теория производства» для отыскания параметров введённой ими функции.

Функцию с постоянными пропорциями выбирают тогда, когда один из ресурсов производства резко дефицитен, а второй избыточен. В задачах планирования такие функции получают значительное превосходство над другими. Дело в том, что они содержат в себе понятие рациональной пропорции между двумя ресурсами, что даёт возможность ввести в модель понятие технологии (способа производства). Этим объясняется широкое распространение производственных функций с постоянными пропорциями в балансовых моделях планирования.

Осталось выяснить, на основе какой информации можно построить производственные функции экономических единиц. Вспомним прежде всего, что в соответствии с целями исследования в роли экономической единицы выступают экономические объекты разного уровня. При моделировании экономики страны в целом эта экономическая система разбивается на чистые отрасли или рассматривается как совокупность регионов (экономических районов), между которыми осуществляются поставки. Наконец, экономика в ряде случаев рассматривается как элементарная экономическая единица модели, в которой продуктом является национальный доход, а ресурсами — основные фонды и трудовые ресурсы. Мы будем придерживаться, в основном, такого подхода.

Отрасль обычно представляют как совокупность предприятий, предприятия — как совокупность цехов или как совокупность различных технологий производства. Экономическая единица в этом случае описывается с помощью своей функции выпуска или функции затрат. Наконец, цех или производство могут рассматриваться как экономические системы, в роли экономических объектов (единиц), в которых выступают станки или другие агрегаты, обслуживаемые людьми. Каждый из этих объектов обычно описывается своей функцией затрат. Так, например, при моделировании участка производства экономической единицей является станок. Для него строится функция затрат. Под затратами обычно понимают затраты времени на выполнение каждой из возможных операций.

Чтобы построить функцию затрат (рассчитать величину её параметров) для станка, участка, цеха или предприятия, используют технологические характеристики этих объектов. В других случаях основой построения производственной функции является обработка статистических данных об экономических показателях моделируемых объектов. Так, при построении функции затрат для отрасли материального производства обычно условно считают, что в отрасли используется единственный технологический процесс и из статистической информации находят затраты сырья и других ресурсов, приходящиеся в этом процессе на единицу выпускаемой продукции.

Другим подходом к анализу изучаемых объектов является широко известный кибернетический метод «чёрного ящика». Он состоит в том, что исследователь не пытается проникнуть внутрь изучаемого объекта, исследовать его структуру, а только сравнивает внешние воздействия на объект (входы «чёрного ящика») и реакцию объекта на эти воздействия (выходы «чёрного ящика»). При построении производственной функции входами считают затраты ресурсов, а выходами — произведённую продукцию. Сопоставляя входы и выходы за несколько лет, находят такие параметры производственной функции, при которых значения этой функции при заданных размерах затрат лишь незначительно (с заданной степенью точности) отличаются от фактических объёмов выпуска.

Рис. 1. Схема метода «чёрный ящик»

Задания

1. Найдите значения функций при заданных значениях независимых переменных:

а) $Y=3K^{\frac{1}{4}}L^{\frac{3}{4}}, K=16, L=81;$

б) $Y=10\min\left\{\frac{K}{4},\frac{L}{5}\right\}, K=12, L=14;$

в) $\mathrm{Y}=0,25x_1+0,4x_2, x_1=100, x_2=80;$

г) $Y=\ln\left(x_1^2+x_2^2-1\right), x_1=4, x_2=3.$

2. Определите, как изменится значение функции

$$Y=10\min\left\{\frac{K}{4},\frac{L}{5}\right\},$$

если $K\geq\frac{4}{5}L$ и

а) K увеличить на 3 единицы;

б) L уменьшить на 1 единицу;

в) K увеличить в 2 раза при неизменном значении другой переменной.

А если затраты обоих ресурсов одновременно

г) уменьшить в 4 раза;

д) увеличить в 3 раза;

е) увеличить на 3 единицы?

3. Процесс производства описывается с помощью степенной функции выпуска

$$Y = 0,5K^{\frac{1}{3}}L^{\frac{2}{3}}:$$

а) как следует изменить затраты K, чтобы компенсировать уменьшение L на 50%? (Уровень выпуска при этом сохраняется).

б) на сколько процентов уменьшатся затраты K при увеличении L на 25%?

4. Для функции из задания 3 установите:

а) как изменится выпуск, если затраты обоих ресурсов увеличить в 2 раза (уменьшить в 3 раза)?

б) во сколько раз надо увеличить затраты L, чтобы компенсировать уменьшение K в 4 раза?

2.2. Линии постоянного выпуска

Пусть процесс производства описывается с помощью двухфакторной производственной функции

$$z = f(x_1, x_2). \tag{20}$$

Равенство

$$z_0 = f\left(x_1^0, x_2^0\right)$$

означает, что при затратах ресурсов в объёмах $x_1 = x_1^0$ (икс один ноль) и $x_2 = x_2^0$ выпуск продукции составляет z_0 единиц (в натуральном или стоимостном выражении). Возникает вопрос: можно ли достичь уровня выпуска z_0 при других объёмах затрат этих ресурсов? На математическом языке это означает следующее. Существуют ли другие, отличные от $\left(x_1^0, x_2^0\right)$ пары значений x_1 и x_2, для которых

$$f(x_1, x_2) = f\left(x_1^0, x_2^0\right) = z_0 \ (z_0 \text{ — постоянная}).$$

Уравнение

$$f(x_1, x_2) = z_0 \tag{21}$$

задаёт на координатной плоскости $x_1 0 x_2$ множество точек, в каждой из которых функция (1) принимает одно и то же значение z_0.

Определение 1. Множество точек плоскости называется **линией уровня** функции $z = f(x_1, x_2)$, если координаты этих точек удовлетворяют уравнению

$$f(x_1, x_2) = z_0 \ (z_0 \text{ — постоянная}).$$

Пример 1. Линии уровня функции $z = x^2 + y^2$ — концентрические окружности радиуса $R = \sqrt{z_0}\ (z \geq 0)$ с центром в начале координат (Рис. 2).

Определение 2. Линии уровня производственных функций называются **линиями постоянного выпуска** или **изоквантами.**

Пример 2. Для линейной производственной функции

$$y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 \ (a_0 > 0, a_1 > 0, a_2 > 0) \tag{22}$$

изокванты — семейство параллельных прямых. Учитывая неотрицательность переменных x_1 и x_2, ограничиваемся лишь первой четвертью.

В каждой точке изокванты $a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 = c_k$ (Рис. 3) значение производственной функции одно и то же и равно c_k.

$$f\left(0, x_2^{\cdots}\right) = f\left(x_1^{\cdot}, x_2^{\cdot}\right) = f\left(x_1^{\cdot\cdot}, x_2^{\cdot\cdot}\right) = f\left(x_1^{\cdots}, 0\right) = c_k.$$

Наличие точек $M\left(0, x_2^{\cdots}\right)$ и $N\left(x_1^{\cdots}, 0\right)$ означает, что в данном случае ресурсы не являются абсолютно необходимыми, без каждого из них можно обойтись. Используя только первый ресурс (в количестве $x_1^{\cdots}$) или только второй (в объёме $x_2^{\cdots}$), можем достичь данного уровня выпуска. Говорят, что в этом случае ресурсы абсолютно заменяемы.

Например, изучается зависимость урожайности некоторой сельскохозяйственной культуры от количества вносимых минеральных удобрений двух типов. До определённого уровня использования удобрений может иметь место ситуация, описываемая (хотя бы приближённо) линейной производственной функцией. В этом случае ясно, что один и тот же урожай может быть получен при различных комбинациях объёмов удобрений и что одно удобрение можно полностью заменить другим. При $x_1 = x_2 = 0$ имеем $z = a_0$. Это означает, что без удобрений указанных типов можем рассчитывать на урожай, выражаемый свободным членом a_0.

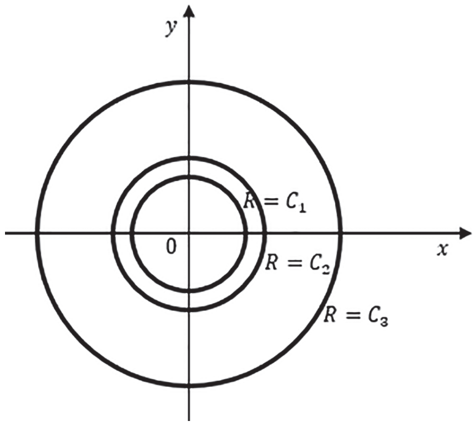

Рис. 2. Линии уровня из примера 1 — концентрические окружности с центром в начале координат

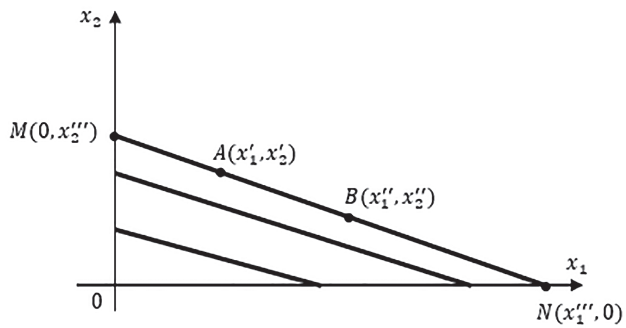

Рис. 3. Линии уровня линейной двухфакторной ПФ

Пример 3. Иную ситуацию описывает производственная функция с постоянными пропорциями

$$Y = Y_0 \min\left\{\frac{x_1}{x_1^0}, \frac{x_2}{x_2^0}\right\}. \tag{23}$$

При $x_1 = x_1^0$, $x_2 = x_2^0$ имеем $Y = Y_0$.

То есть Y_0 — объём выпуска, соответствующий затратам ресурсов в количествах x_1^0 и x_2^0, соответственно. Если при данном $x_1 = x_1^0$ будем увеличивать затраты второго ресурса, то выпуск Y останется на прежнем уровне Y_0. Аналогично увеличение затрат первого ресурса при постоянном $x_2 = x_2^0$ не изменит выпуска. То есть x_1^0 и x_2^0 — минимальные объёмы ресурсов, при которых достигается указанный объём производства.

Изокванта $Y = Y_0$ представляет собой прямой угол с вершиной в точке (x_1^0, x_2^0) и сторонами, параллельными координатным осям.

Такую же форму имеют и все остальные изокванты (Рис. 4).

Вершины прямых углов характеризуют минимальные затраты ресурсов, обеспечивающие соответствующие объёмы производства. Все вершины лежат на прямой $x_2 = \frac{x_2^0}{x_1^0} x_1$ (т. е. $x_2 : x_1 = x_2^0 : x_1^0 = const$).

Так, для $Y = Y_c$ минимальные затраты ресурсов равны $\frac{Y_c x_1^0}{Y_0}$ и $\frac{Y_c x_2^0}{Y_0}$ соответственно. В этом легко убедиться, проделав несложные преобразования:

$$Y = Y_0 \min\left\{\frac{x_1}{x_1^0}, \frac{x_2}{x_2^0}\right\} = Y_c \cdot \frac{Y_0}{Y_c} \min\left\{\frac{x_1}{x_1^0}, \frac{x_2}{x_2^0}\right\} =$$

$$= Y_c \min\left\{x_1 \cdot \frac{Y_0}{x_1^0 Y_c}, x_2 \cdot \frac{Y_0}{x_2^0 Y_c}\right\}.$$

Отсюда следует, что для $x_1 = \frac{x_1^0 Y_c}{Y_0}$ и $x_2 = \frac{x_2^0 Y_c}{Y_0}$ выпуск продукции $Y = Y_c$.

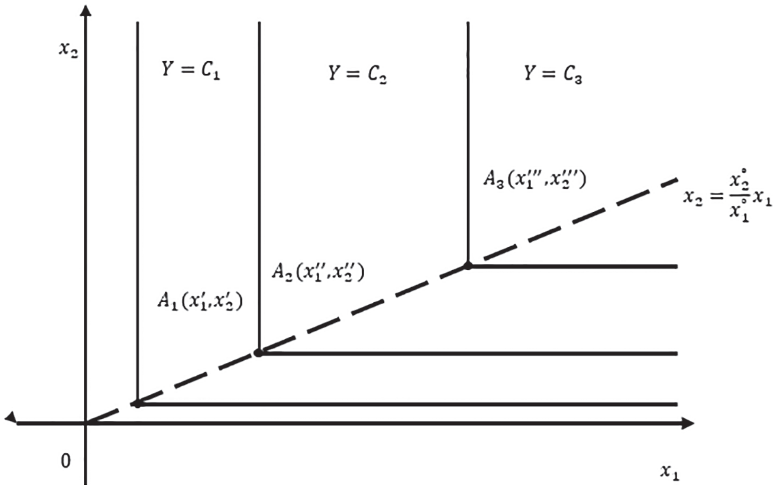

Рис. 4 Линии уровня ПФ с постоянными пропорциями

Все точки изоквант, не лежащие на прямой AB, представляют неэффективные комбинации ресурсов при любых разумных критериях эффективности.

Из сказанного выше следует, что уменьшение затрат одного ресурса нельзя компенсировать увеличением объёма другого. В процессе производства, описываемом функцией с постоянными пропорциями, ресурсы незаменяемы. Они дополняют друг друга. Каждый ресурс абсолютно необходим в процессе производства. При любом объёме производства отношение объёмов используемых ресурсов остаётся постоянным.

Если в (10) x_1 обозначает основные производственные фонды K, а x_2 — трудовые ресурсы L и

$$Y = Y_0 \min\left\{\frac{K}{K_0}, \frac{L}{L_0}\right\},$$

то отношение $\frac{K_0}{L_0}$ даёт величину рациональной фондовооружённости производства.

Пример 4. Исследуем форму изоквант функции Кобба-Дугласа

$$Y = Y_0 K^\alpha L^{1-\alpha}.$$

Зафиксируем значение функции. Пусть $Y = Y_c$. Тогда уравнение соответствующей изокванты примет вид

$$K^\alpha L^{1-\alpha} = \frac{Y_c}{Y_0}.$$

Выразим L через K. Для этого сначала обе части уравнения разделим на K^α, затем возведём их в степень $\frac{1}{1-\alpha}$.

Обозначим коэффициент $\left(\frac{Y_c}{Y_0}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$ буквой β и окончательно получим:

$$L = \beta \cdot K^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}} \, (\beta > 0). \quad (24)$$

Производная функции (24)

$$L' = \beta\left(-\frac{\alpha}{1-\alpha}\right) K^{-\frac{1}{1-\alpha}}$$

отрицательна при всех допустимых значениях K $(\beta > 0, \alpha > 0, 1-\alpha > 0, K^{-\frac{1}{1-\alpha}} > 0)$, поэтому данная функция убывает. При этом $L \to 0$, если $K \to +\infty$. Аналогично $L \to +\infty$, если $K \to 0$. Оси координат являются асимптотами графика функции.

Найдём вторую производную функции:

$$L'' = \beta\left(-\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)\left(-\frac{1}{1-\alpha}\right) K^{-\frac{2+\alpha}{1-\alpha}}$$

или

$$L'' = \frac{\alpha\beta}{(1-\alpha)^2} K^{\frac{\alpha-2}{1-\alpha}}.$$

Вторая производная принимает положительные значения для всех $K > 0$. Функция (6) вогнута, L убывает всё быстрее (в положительном темпе) с возрастанием K.

В процессе производства, описываемом функцией Кобба-Дугласа, ресурсы взаимозаменяемы. Причём с ростом затрат одного ресурса высвобождается всё большее количество другого. Изокванты функции (9) имеют вид, представленный на рис. 4.

Перечислим теперь общие свойства изоквант.

Свойство 1. Никакие две изокванты не пересекаются.

Если бы существовали точки, принадлежащие одновременно двум изоквантам, то при одних и тех же затратах ресурсов оказалось возможным произвести разное количество продукции.

Свойство 2. Если оба ресурса абсолютно необходимы для производства (т. е. при отсутствии хотя бы одного из ресурсов невозможно производить продукцию), то изокванты не имеют общих точек с осями координат.

Очевидно, этим свойством обладают степенные производственные функции и функции с постоянными пропорциями.

Свойство 3. Чем дальше удалена изокванта от начала координат, тем больше соответствующий ей выпуск продукции.

Пусть некоторый луч, проведённый из начала координат, пересекает изокванту $F(x_1, x_2) = Y_c$ в точке $x_1 = x_1^0, x_2 = x_2^0$. В точке (x_1^0, x_2^0), очевидно, $F(x_1^0, x_2^0) = Y_c$.

Согласно предположению 2,

$$F(\lambda x_1, \lambda x_2) = \lambda F(x_1, x_2)(\lambda > 0).$$

Если $\lambda < 1$, то точка $(\lambda x_1^0, \lambda x_2^0)$ лежит на луче $0M$ ближе к началу координат, чем точка $(x_1^0,\ x_2^0)$, и

$$F(\lambda x_1^0, \lambda x_2^0) = \lambda F(x_1^0,\ x_2^0) < Y_c.$$

При $\lambda > 1$ точка $(\lambda x_1^0, \lambda x_2^0)$ удалена от начала координат больше, чем $(x_1^0,\ x_2^0)$ и

$$F(\lambda x_1^0, \lambda x_2^0) = \lambda F(x_1^0,\ x_2^0) > Y_c.$$

Изокванта $Y = Y_c$ как бы разделяет точки плоскости на два множества. Для точек одного из них $F(x_1, x_2) < Y_c$, а для другого $F(x_1, x_2) > Y_c$.

Точки, в которых $F(x_1, x_2) < Y_c$, расположены ближе к началу координат, чем точки изокванты $Y = Y_c$. В точках, лежащих выше изокванты $Y = Y_c$ $F(x_1, x_2) > Y_c$ (Рис. 5).

Замечание. Доказана справедливость свойства 3 для функций, обладающих свойством, сформулированным в предположении 2, т. е. для однородных функций.

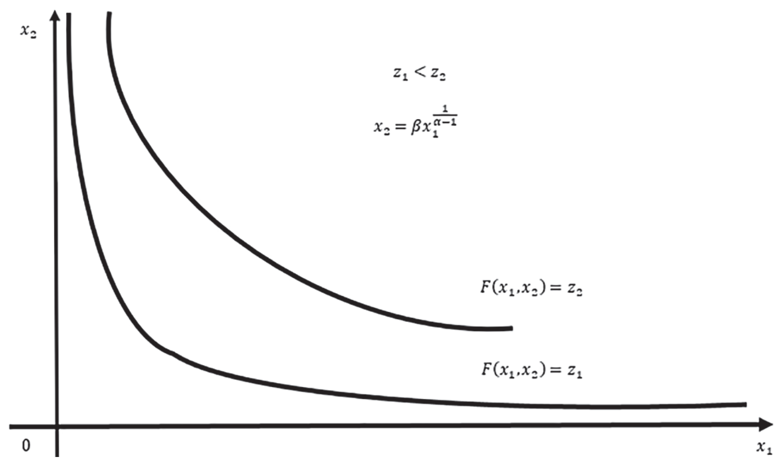

Рис. 5. Изокванты функции Кобба-Дугласа

Задания

1. Найдите линии уровня следующих функций. Изобразите их на чертеже.

а) $z = xy$, в) $z = x + y$, д) $z = \min\{x, y\}$,

б) $z = \dfrac{x}{y}$, г) $z = \dfrac{3x}{y^2}$, е) $y = \ln\left(x_1^2 + x_2^2\right)$.

2. Докажите справедливость свойства 3 для линейной неоднородной функции

$$z = a_0 + a_1X_1 + a_2X_2, a_1 > 0, a_2 > 0, a_0 > 0.$$

2.3. Предельные производительности ресурсов. Показатель характера их изменения

Рассмотрим производственную функцию

$$Y = F(K, L), \tag{25}$$

описывающую зависимость объёма выпускаемой продукции Y от затрат основных производственных фондов K и трудовых ресурсов L. Выясним, как изменение потребления каждого из указанных факторов производства отражается на величине выпуска. Очевидно, при неизменных затратах одного ресурса выпуск изменяется только под влиянием меняющихся затрат другого.

Итак, пусть $L = L_0$ (L_0 — постоянная), а основные производственные фонды увеличились на ΔK единиц:

$$L = L_0, K_0 \to K_0 + \Delta K.$$

Происшедшие при этом изменения выпуска выражаются разностью

$$\Delta_K Y = F(K_0 + \Delta K, L_0) - F(K_0, L_0).$$

Поделим $\Delta_K Y$ на ΔK. Отношение

$$\frac{\Delta_K Y}{\Delta K} \tag{26}$$

выражает то дополнительное количество продукции (в стоимостном или натуральном выражении), которое в среднем может быть получено в результате увеличения основных производственных фондов на единицу (на 1 руб., на 1 млн руб., на 1 штуку и т. п.). В экономическом анализе (8) называют средней эффективностью (производительностью) первого ресурса или средним продуктом в точке (K_0, L_0) по первому ресурсу. В нашем случае первый ресурс (основные производственные фонды), и средний продукт (8) представляет собой фондоотдачу. Отношение

$$\frac{\Delta_L Y}{\Delta L}, \tag{27}$$

построенное по аналогичной схеме для трудовых ресурсов, называется трудоотдачей или производительностью труда. Отметим, что (26) и (27) характеризуют изменение выпуска в среднем. Разным ΔK и ΔL соответствуют разные по величине средние продукты. Характеристика ресурсоотдачи при $K = K_0$ и $L = L_0$ будет тем точнее, чем меньше абсолютный прирост соответствующего ресурса ΔK или ΔL.

Вычислив

$$\lim_{\Delta K \to 0} \frac{F(K_0 + \Delta K,\ L_0) - F(K_0,\ L_0)}{\Delta K} = \lim_{\Delta K \to 0} \frac{\Delta_K F}{\Delta K}, \tag{28}$$

найдём прирост выпуска продукции, соответствующий увеличению затрат первого ресурса на «малую единицу». Предел (28) используют в экономическом анализе эффективности производства и называют **предельной эффективностью** (производительностью) ресурса или **коэффициентом приростной ресурсоотдачи**. В данном случае речь идёт о фондоотдаче.

Предел

$$\lim_{\Delta L \to 0} \frac{F(K_0,\ L_0 + \Delta L) - F(K_0,\ L_0)}{\Delta L} = \lim_{\Delta L \to 0} \frac{\Delta_L F}{\Delta L} \tag{29}$$

характеризует производительность труда при объёме затрат (K_0, L_0).

Как и в §4 главы 1, прежде чем перейти к пределам (28) или (29), мы проделали три шага:

1) дали приращение одному аргументу (при неизменном значении другого);

2) нашли соответствующее приращение функции;

3) составили отношение приращения функции к вызвавшему его приращению аргумента.

В общем случае для функции двух независимых переменных $z = f\left(x_1, x_2\right)$ эта цепочка шагов выглядит так:

$$(x_1^0, x_2^0) \to (x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0) \to \Delta_{x_1} z = f(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0) - f(x_1^0, x_2^0) \to \frac{\Delta_{x_1} z}{\Delta x_1}$$

или для второй переменной

$$(x_1^0, x_2^0) \to (x_1^0, x_2^0 + \Delta x_2) \to \Delta_{x_2} z = f(x_1^0, x_2^0 + \Delta x_2) - f(x_1^0, x_2^0) \to \frac{\Delta_{x_2} z}{\Delta x_2}$$

Разности

$$\Delta_{x_1} z = f(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0) - f(x_1^0, x_2^0)$$

и

$$\Delta_{x_2} z = f(x_1^0, x_2^0 + \Delta x_2) - f(x_1^0, x_2^0)$$

называются **частными приращениями** функций $z = f\left(x_1, x_2\right)$ по x_1 и по x_2, соответственно.

Отношения $\dfrac{\Delta_{x_1} z}{\Delta x_1}$ и $\dfrac{\Delta_{x_2} z}{\Delta x_2}$ — **относительные приращения** по x_1 и по x_2.

Определение 3. Предел относительного приращения функции $z = f\left(x_1, x_2\right)$ при условии, что соответствующее приращение аргумента $\Delta x_i \to 0$ называется **частной производной** этой функции по переменной x_i (если указанный предел существует и конечен).

Обозначения.

$$\lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{\Delta_{x_1} z}{\Delta x_1} = \frac{\partial z}{\partial x_1}, \qquad (30)$$

$$\lim_{\Delta x_2 \to 0} \frac{\Delta_{x_2} z}{\Delta x_2} = \frac{\partial z}{\partial x_2}. \qquad (31)$$

Частные производные первого порядка обозначают также следующими символами:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i},\ f'_{x_i}\left(x_1, x_2\right),\ z'_{x_i}.$$

В соответствии с (30), (31) и определением 1 можем утверждать, что для производственной функции (25)

$$\lim_{\Delta K \to 0} \frac{\Delta_K F}{\Delta K} = \frac{\partial F}{\partial K} - \qquad (32)$$

коэффициент приростной фондоотдачи,

$$\lim_{\Delta L \to 0} \frac{\Delta_L F}{\Delta L} = \frac{\partial F}{\partial L} \qquad (33)$$

производительность труда при объёме затрат (K_0, L_0).

Частные производные можно рассматривать (Рис. 6) как скорости изменения функции относительно одной из переменных (в направлении соответствующей оси координат):

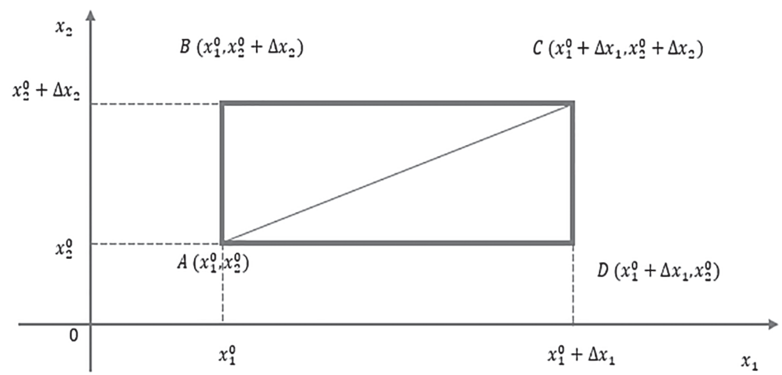

Рис. 6 Приращения функции двух переменных

При вычислении частных производных используем все известные нам формулы и правила вычисления производных, так как, зафиксировав одну из независимых переменных, мы имеем дело с функцией, зависящей только от одной переменной.

Пример 5. $U=\left(x^2+1\right)\cdot e^{x-y}+x^y$.

Считая y постоянной, находим производную по x:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x\cdot e^{x-y}+\left(x^2+1\right)\cdot e^{x-y}+yx^{y-1}=\left(x+1\right)^2\cdot e^{x-y}+yx^{y-1}.$$

Чтобы найти производную по y, полагаем постоянной x:

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\left(x^2+1\right)e^{x-y}+x^y\cdot\ln x.$$

Пример 6. Для линейной производственной функции

$$z=a_0+a_1x_1+a_2x_2\ (a_j>0, j=0,1,2)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x_1}=a_1,\ \frac{\partial z}{\partial x_2}=a_2. \tag{34}$$

Коэффициенты при неизвестных — предельные производительности ресурсов. Из условий $a_1>0, a_2>0$ и (18) следует, что рост используемого количества ресурсов приводит к увеличению выпуска продукции.

Пример 7. Для функции Кобба-Дугласа

$$Y=Y_0K^{\alpha}L^{1-\alpha}\ (K>0, L>0, Y_0>0, \alpha\in(0,1)),$$

$$\frac{\partial Y}{\partial K}=Y_0\alpha K^{\alpha-1}L^{1-\alpha}=\frac{\alpha}{K}Y_0K^{\alpha}L^{1-\alpha},$$

или

$$\frac{\partial Y}{\partial K}=\alpha\cdot\frac{Y}{K}>0 \text{ для } K>0, L>0. \tag{35}$$

Аналогично,

$$\frac{\partial Y}{\partial L}=\left(1-\alpha\right)\cdot\frac{Y}{L}>0 \text{ для } K>0, L>0. \tag{36}$$

Видим, что предельные производительности обоих ресурсов положительны, т. е. увеличение затрат K и L приводит к росту выпуска. Кроме этого, из (35) и (36) следует, что предельные производительности обоих ресурсов прямо пропорциональны их средним производительностям. При этом коэффициентом пропорциональности в каждом случае служит показатель степени соответствующего ресурса.

Пример 8. Если $y=\min\left\{x_1, x_2\right\}$, то

для $x_1>x_2$ $y=x_2$, $\dfrac{\partial y}{\partial x_1}=0$, $\dfrac{\partial y}{\partial x_2}=1$,

а для $x_1<x_2$ $y=x_1$, $\dfrac{\partial y}{\partial x_1}=1$, $\dfrac{\partial y}{\partial x_2}=0$.

Частные производные первого порядка функции $z=f\left(x_1, x_2\right)$ являются, вообще говоря, функциями, зависящими от двух переменных x_1 и x_2:

$$\frac{\partial z}{\partial x_1}=\varphi_1\left(x_1, x_2\right),\ \frac{\partial z}{\partial x_2}=\varphi_2\left(x_1, x_2\right).$$

Поэтому имеет смысл задача об отыскании частных производных этих функций.

Определение 4. Частные производные первых частных производных функции $z=f\left(x_1, x_2\right)$, если они существуют, называются вторыми частными производными или ***частными производными второго порядка*** данной функции.

Обозначения:

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial z}{\partial x_1}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2},\ \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial z}{\partial x_1}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x_1\partial x_2},$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial z}{\partial x_2}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x_2\partial x_1},\ \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial z}{\partial x_2}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2},$$

или

$$f''_{x_1x_1},\ z''_{x_1x_2},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_1},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}.$$

В отличие от дифференциального исчисления функций одной переменной, здесь, помимо порядка производной, приходится указывать, по каким переменным и в какой последовательности производится дифференцирование.

Производные второго порядка $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2}$ и $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x_2 \partial x_1}$, являющиеся результатом последовательного дифференцирования функции $z = f(x_1, x_2)$ сначала по одной, а затем по другой переменной, называются ***смешанными***.

Пример 9. Для функции $z = x_1^2 + x_2^2$

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = 2x_1, \frac{\partial z}{\partial x_2} = 2x_2,$$

а вторые частные производные постоянны:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} = 2, \ \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x_2 \partial x_1} = 0.$$

Пример 10. В примере 3 были вычислены первые частные производные функции Кобба-Дугласа:

$$\frac{\partial Y}{\partial K} = Y_0 \alpha K^{\alpha-1} L^{1-\alpha}, \ \frac{\partial Y}{\partial L} = Y_0 (1-\alpha) K^{\alpha} L^{-\alpha}.$$

Найдём вторые частные производные для этой производственной функции:

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial K^2} = Y_0 \alpha (\alpha - 1) K^{\alpha-2} L^{1-\alpha} \quad (37)$$

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial L^2} = Y_0 \alpha (1-\alpha)(-\alpha) K^{\alpha} L^{-\alpha-1} \quad (38)$$

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial K \, \partial L} = Y_0 \alpha (1-\alpha) K^{\alpha-1} L^{-\alpha} \quad (39)$$

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial L \, \partial K} = Y_0 \alpha (1-\alpha) K^{\alpha-1} L^{-\alpha}. \quad (40)$$

Обратим внимание на равенство смешанных производных, а также на то, что

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial K^2} < 0, \ \frac{\partial^2 Y}{\partial L^2} < 0, \text{ если } K > 0, L > 0. \quad (41)$$

Случайно ли это?

Напомним известную из курса «Высшей математики» теорему о смешанных частных производных второго порядка.

Теорема. Если существуют непрерывные смешанные частные производные второго порядка $z''_{x_1x_2})^\wedge$ и $z''_{x_2x_1}$ функции $z = f(x_1,x_2)$, то они равны между собой:

$$z''_{x_1x_2} = z''_{x_2x_1}.$$

Остановимся теперь на неравенствах (41).

Для производственной функции $Y = F(K, L)$ вторая частная производная $\dfrac{\partial^2 Y}{\partial K^2}\left(\dfrac{\partial^2 Y}{\partial L^2}\right)$ определяет характер изменения предельной эффективности соответствующего ресурса. Если $\dfrac{\partial^2 Y}{\partial K^2} > 0$, то с увеличением K возрастает эффективность соответствующего ресурса. На практике чаще имеют место неравенства противоположного смысла. Наблюдения показывают, что в условиях чисто экстенсивного роста производства (увеличивается объём производства без изменения технологии) наращивание затрат лишь одного производственного ресурса приводит к снижению его эффективности. Это связано с тем, что каждая последующая единица возрастающего ресурса соединяется со всё меньшим приходящимся на неё количеством другого ресурса. Так, если увеличивать число станков, обслуживаемых одним рабочим, не изменяя при этом технологию производства, квалификацию рабочих и технологические характеристики станков, то на каждом новом станке будет производиться всё меньшее дополнительное количество продукции (в частности, это обусловлено возрастанием времени простоя станков, нарастанием усталости рабочего).

Всё сказанное выше находится в полном соответствии со следующими двумя предположениями (предположения 1 и 2 см. раздел 2.1 на стр. 46) о свойствах производственных функций.

Предположение 3. Рост используемого количества основных производственных фондов и рост числа трудящихся приводят к росту национального дохода, т. е. в случае дифференцируемых производственных функций

$$\frac{\partial F(K,L)}{\partial K}>0, \frac{\partial F(K,L)}{\partial L}>0 \qquad (42)$$

при $K>0, L>0$.

Сравните (42) с (10) и (11).

Предположение 4. В условиях чисто экстенсивного роста производства увеличение затрат лишь одного производственного ресурса приводит к снижению эффективности его использования, т. е.

$$\frac{\partial^2 F(K,L)}{\partial K^2}<0, \frac{\partial^2 F(K,L)}{\partial L^2}<0\,. \qquad (43)$$

Сравним (43) с (42).

Отметим, что степенные производственные функции типа Кобба-Дугласа обладают свойствами, сформулированными в предположениях 1–4, которые вытекают из экономических законов. Этим и объясняется широкое применение таких функций в экономико-математических моделях. В дальнейшем, если не оговорено противное, будем считать, что производственные функции удовлетворяют требованиям, высказанным в предположениях 1–4.

Графически зависимость национального дохода от одного фактора производства (K или L) при фиксированных затратах другого может быть изображена в виде выпуклой восходящей линии (Рис. 7).

Задание 3.

Вычислите все частные производные второго порядка следующих функций:

а) $z = x\ln y + \sqrt{\sin x}$;

в) $v = e^{\sqrt[3]{s}+\frac{1}{t}}$.

б) $z = \frac{y}{tg\,x}$;

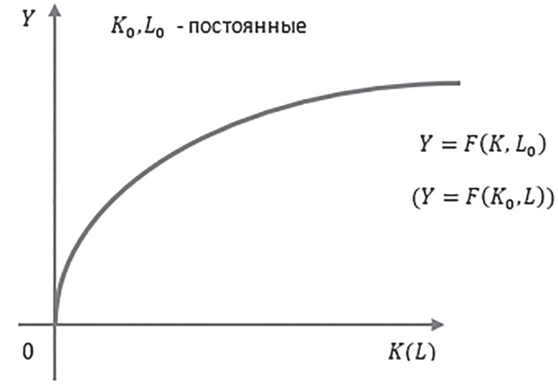

Рис. 7. Зависимость национального дохода от одного фактора производства

Задание 4. Объясните, что означает с экономической точки зрения равенство нулю вторых частных производных $\frac{\partial^2 F}{\partial K^2}$ и $\frac{\partial^2 F}{\partial L^2}$ для линейной производственной функции.

Задание 5. По аналогии с анализом знака второй частной производной по K на стр. 72 объясните смысл и практическое значение неравенств $\frac{\partial^2 Y}{\partial L^2} > 0$ и $\frac{\partial^2 Y}{\partial L^2} < 0$.

2.4. Как избежать убытков при приобретении сырья?

Ответ на этот вопрос тесным образом связан с предельной эффективностью ресурсов и влиянием этих характеристик на величину полного дифференциала производственной функции.

Итак, появилось новое понятие — полный дифференциал. Что же это такое? Как полный дифференциал связан с полным приращением функции?

В разделе 2.3 были вычислены частные приращения функции

$$z = f(x_1,\ x_2)$$

в точке $\left(x_1^0,\ x_2^0\right)$. Это

$$\Delta_{x_1} z\left(x_1^0,\ x_2^0\right)=f\left(x_1^0+\Delta x_1, x_2^0\right)-f\left(x_1^0, x_2^0\right),$$

$$\Delta_{x_2} z\left(x_1^0,\ x_2^0\right)=f\left(x_1^0, x_2^0+\Delta x_2\right)-f\left(x_1^0, x_2^0\right), \qquad (44)$$

Если из точки $\left(x_1^0,\ x_2^0\right)$ перейдём в точку $\left(x_1^0+\Delta x_1, x_2^0+\Delta x_2\right)$, т. е. одновременно изменим обе независимые переменные, а не только одну из них (см. рис. 6, стр. 67), то значение функции изменится на величину

$$\Delta z\left(x_1^0,\ x_2^0\right)=f\left(x_1^0+\Delta x_1, x_2^0+\Delta x_2\right)-f\left(x_1^0,\ x_2^0\right), \qquad (45)$$

называемую ***полным приращением функции*** $z=f\left(x_1,\ x_2\right)$ в точке $\left(x_1^0, x_2^0\right)$.

Установим связь между полным и частными приращениями в одной и той же точке $\left(x_1^0, x_2^0\right)$.

В правой части равенства (45) вычтем и прибавим значение функции f в точке $\left(x_1^0, x_2^0+\Delta x_2\right)$. Получим:

$$z\left(x_1^0,\ x_2^0\right)=\left(f\left(x_1^0+\Delta x_1, x_2^0+\Delta x_2\right)-f\left(x_1^0, x_2^0+\Delta x_2\right)\right)+$$

$$+\left(f\left(x_1^0, x_2^0+\Delta x_2\right)-f\left(x_1^0, x_2^0\right)\right)=\Delta_{x_1} z\left(x_1^0,\ x_2^0+\Delta x_2\right)+\Delta_{x_2} z\left(x_1^0,\ x_2^0\right).$$

Первое слагаемое даёт величину частного приращения по x_1 функции $z=f\left(x_1,\ x_2\right)$, вычисленного в точке $\left(x_1^0, x_2^0+\Delta x_2\right)$. Геометрически — это результат перехода из точки $\left(x_1^0,\ x_2^0+\Delta x_2\right)$ в точку $\left(x_1^0+\Delta x_1, x_2^0+\Delta x_2\right)$. Экономически — увеличение затрат x_1 на Δx_1 единиц при неизменном расходе x_2 в объёме $x_2^0+\Delta x_2$ единиц.

Второе слагаемое допускает аналогичное истолкование. Оно выражает изменение значения функции при переходе из точки $\left(x_1^0,\ x_2^0\right)$ в точку $\left(x_1^0,\ x_2^0+\Delta x_2\right)$, что соответствует увеличению выпуска на $\Delta_{x_2} z\left(x_1^0, x_2^0\right)$ единиц за счёт увеличения затрат x_2 на Δx_2 единиц при условии, что x_1 по-прежнему используется в объёме x_1^0.

Итак,

$$\Delta z\left(x_1^0,\ x_2^0\right)=\Delta_{x_2} z\left(x_1^0,\ x_2^0\right)+\Delta_{x_1} z\left(x_1^0,\ x_2^0+\Delta x_2\right). \qquad (46)$$

С помощью подобных рассуждений можно прийти к равенству

$$\Delta z\left(x_1^0,\ x_2^0\right)=\Delta_{x_1} z\left(x_1^0,\ x_2^0\right)+\Delta_{x_2} z\left(x_1^0+\Delta x_1,\ x_2^0\right). \qquad (47)$$

Результат движения вдоль диагонали прямоугольника (рис. 6, стр. 67) складывается из итогов двух последовательных перемещений вдоль его смежных сторон:

Из равенств (46) и (47) можно сделать такой **вывод:**

При последовательном увеличении затрат сначала одного (любого из двух), а затем и другого ресурса получаем ту же отдачу, что и при одновременном увеличении обоих ресурсов на те же величины Δx_1 *и* Δx_2.

Из равенств (46) и (47) в общем случае следует, что

$$\Delta z\left(x_1^0,\ x_2^0\right)\neq\Delta_{x_1} z\left(x_1^0,\ x_2^0\right)+\Delta_{x_2} z\left(x_1^0,\ x_2^0\right). \qquad (48)$$

Неравенство (48) означает, что дополнительная продукция, полученная в результате одновременного увеличения объёмов обоих используемых ресурсов, вообще говоря, не равна сумме приростов выпуска, обусловленных изменением затрат лишь одного ресурса. Объясняется это, прежде всего, снижением эффективности ресурса при увеличении его объёма в случае, когда потребление другого ресурса не изменилось.

Поэтому обычно (48) имеет вид:

$$\Delta z\left(x_1^0,\ x_2^0\right)>\Delta_{x_1} z\left(x_1^0,\ x_2^0\right)+\Delta_{x_2} z\left(x_1^0,\ x_2^0\right). \qquad (48')$$

Пример 11. Для линейной производственной функции

$$z = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2$$

справедливо равенство

$$\Delta z(x_1, x_2) = \Delta_{x_1}(x_1, x_2) + \Delta_{x_2}(x_1, x_2)\,. \qquad (49)$$

Задание 6. Убедитесь в этом самостоятельно. Дайте геометрическое и экономическое истолкование равенства (49).

Пример 12. Для функции с постоянными пропорциями ((4), §3) введём обозначения:

$$\frac{Y}{Y_0} = Y,\ \frac{x_1}{x_1^0} = X_1,\ \frac{x_2}{x_2^0} = X_2.$$

Функция относительно новых переменных примет вид:

$$Y = min\{X_1, X_2\}. \qquad (50)$$

Предположим, что в данной точке $X_1 < X_2$. Тогда $Y = X_1$. Для приращений $\Delta X_1 > 0$ и $\Delta X_2 > 0$ вычислим частные и полное приращение функции:

$$\Delta_{x_2} Y = \min\{X_1,\ X_2 + \Delta X_2\} - \min\{X_1.\ X_2\} \ = \ X_1 - X_1 = 0,$$

$$\Delta_{x_1} Y = \begin{cases} \Delta X_1, \text{ если } X_1 + \Delta X_1 < X_2 < X_2 + \Delta X_2, \\ X_2 - X_1, \text{ если } X_1 + \Delta X_1 > X_2 \end{cases}$$

$$\Delta Y(X_1, X_2) = \min\{X_1 + \Delta X_1, X_2 + \Delta X_2\} - \min\{X_1, X_2\} =$$

$$= \begin{cases} \Delta X_1, \text{ если } X_1 + \Delta X_1 < X_2 + \Delta X_2\,, \\ X_2 - X_1 + \Delta X_2, \text{ если } X_1 + \Delta X_1 > X_2 + \Delta X_2 \end{cases}$$

Очевидно, в случае $X_1 + \Delta X_1 < X_2 + \Delta X_2$ имеем равенство (49), а в противоположном случае — неравенство (48').

Задание 7. Вычислите $\Delta_{x_1} Y, \Delta_{x_2} Y$ и ΔY, когда $X_1 > X_2$.

Напоминаем!

Определение 5. Произведение частной производной функции $z = f(x_1, x_2)$, вычисленной в данной точке, на произвольное малое приращение соответствующей независимой переменной называется **частным дифференциалом** данной функции. Сумму частных дифференциалов будем называть **полным дифференциалом**.

Обозначения

$$d_{x_i} z = \frac{\partial z}{\partial x_i} \cdot \Delta x_i, i = 1, 2,$$

$$dz = d_{x_1} z + d_{x_2} z. \qquad (51)$$

Величина дифференциала, как частного, так и полного, зависит от точки (x_1^0, x_2^0), в которой он вычисляется, и от величины входящих в его выражение приращений независимых переменных Δx_1 и Δx_2. Функцию, обладающую полным дифференциалом, называют дифференцируемой.

Как и в случае функции одной переменной, можно доказать, что

$$\Delta z \approx dz \qquad (52)$$

для $\Delta x_1 \to 0, \Delta x_2 \to 0$.

Из (2), (18) и (9) получаем формулу

$$f\left(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0 + \Delta x_2\right) \approx f\left(x_1^0, x_2^0\right) + \frac{\partial z}{\partial x_1} \cdot \Delta x_1 + \frac{\partial z}{\partial x_2} \cdot \Delta x_2, \qquad (53)$$

применяемую в приближённых вычислениях.

Значения частных производных в (35), естественно, вычисляются в точке $\left(x_1^0, x_2^0\right)$.

Пример 13. Найдём приближённое значение произведения $10{,}003 \cdot 4{,}998$.

Рассмотрим функцию

$$z = x_1 \cdot x_2. \qquad (54)$$

Для неё $\frac{\partial z}{\partial x_1} = x_2,\ \frac{\partial z}{\partial x_2} = x_1.$

Применим к функции (54) формулу (53) при $x_1^0 = 10$, $x_2^0 = 5$, $\Delta x_1 = 0{,}003$, $\Delta x_2 = -0{,}002$:

$$\left(x_1^0+\Delta x_1\right)\left(x_2^0+\Delta x_2\right)\approx x_1^0\cdot x_2^0+x_2^0\cdot\Delta x_1+x_1^0\cdot\Delta x_2.$$

Отсюда

$$10{,}003\cdot 4{,}998\approx 10\cdot 5+5\cdot 0{,}003+10(-0{,}002)=49{,}995.$$

(Сравните с точным значением, которое равно 49,994994).

По аналогии с теорией функции одной переменной считаем дифференциал независимой переменной равным её приращению

$$dx_i=\Delta x_i. \tag{55}$$

Это даёт возможность записать формулы (51) в виде

$$d_{xi}z=\frac{\partial z}{\partial x_i}\cdot dx_i, i=1,2, \tag{56}$$

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x_1}\cdot dx_1+\frac{\partial z}{\partial x_2}\cdot dx_2. \tag{57}$$

Приступим, наконец, к обсуждению вопроса, служащего заглавием данного параграфа.

Итак, частный дифференциал $d_{x_i}z$, являясь произведением предельной производительности $\frac{\partial z}{\partial x_i}$ -го ресурса на его дополнительные затраты Δx_i, даёт приближённое значение стоимости продукции, произведённой за счёт увеличения x_i на Δx_i. Тогда полный дифференциал

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x_1}\cdot\Delta x_1+\frac{\partial z}{\partial x_2}\cdot\Delta x_2 \tag{58}$$

приближённо выражает изменение выпуска продукции Δz при небольших изменениях затрат обоих ресурсов (см. (52)).

Если P_1 — цена единицы первого ресурса (скажем, меди), а P_2 — цена единицы второго ресурса (например, серебра), то затраты на приобретение дополнительного количества меди составят $P_1\cdot\Delta x_1$ денежных единиц, а на приобретение Δx_2 единиц серебра — $P_2\cdot\Delta x_2$. Следовательно, $P_1\cdot\Delta x_1+P_2\cdot\Delta x_2$ — сумма затрат на дополнительное приобретение ресурсов. Производство выгодно только тогда, когда дополнительно произведённая стоимость превосходит затраты, связанные с её созданием, т. е.

$$dz>P_1\cdot\Delta x_1+P_2\cdot\Delta x_2$$

или

$$\frac{\partial z}{\partial x_1}\cdot\Delta x_1+\frac{\partial z}{\partial x_2}\cdot\Delta x_2>P_1\cdot\Delta x_1+P_2\cdot\Delta x_2.$$

Это неравенство выполняется лишь при условии, что

$$\frac{\partial z}{\partial x_1}\cdot\Delta x_1+\frac{\partial z}{\partial x_2}\cdot\Delta x_2-P_1\cdot\Delta x_1-P_2\cdot\Delta x_2>0$$

или

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x_1}-P_1\right)\cdot\Delta x_1+\left(\frac{\partial z}{\partial x_2}-P_2\right)\cdot\Delta x_2>0.$$

Так как $\Delta x_1>0$ и $\Delta x_2>0$ последнее неравенство возможно, когда

$$\frac{\partial z}{\partial x_1}-P_1\geq 0,\ \frac{\partial z}{\partial x_2}-P_2\geq 0,$$

причём хотя бы одно из этих неравенств является строгим.

Цены ресурсов не должны превосходить их предельных производительностей. Следовательно, $\frac{\partial z}{\partial x_i}$ можно истолковывать как *верхний предел* (тогда $\frac{\partial z}{\partial x_i}=P_i$) *цены*, которую можно заплатить за единицу i-го ресурса и при этом избежать убытков.

При фиксированной системе цен $(P_1,\ P_2)$ уровень прибыльности предприятия будет зависеть от величины Δx_1 и Δx_2. Изменение объёмов используемых ресурсов $(\Delta x_1,\ \Delta x_2)$

называется ***предельно продуктивным***, если имеет место следующее условие:

$$dz-\left(P_1\cdot\Delta x_1+P_2\cdot\Delta x_2\right)=\left(\frac{\partial z}{\partial x_1}-P_1\right)\cdot\Delta x_1+\left(\frac{\partial z}{\partial x_2}-P_2\right)\cdot\Delta x_2\geq 0. \quad (59)$$

Очевидно, предельная продуктивность возможна и в том случае, когда одна из цен превосходит предельную производительность соответствующего ресурса. Например,

$$P_1>\frac{\partial z\left(x_1,x_2\right)}{\partial x_1}$$

и, следовательно,

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x_1}-P_1\right)\cdot\Delta x_1<0.$$

Но, если P_2 значительно меньше $\dfrac{\partial z\left(x_1,x_2\right)}{\partial x_2}$ или Δx_2 достаточно велико (по сравнению с Δx_1), то в (59) абсолютная величина первого слагаемого может оказаться меньше второго слагаемого, и неравенство (59) будет справедливо.

Задания

8. Какую цену стоит заплатить за единицу каждого из двух специфических ресурсов при небольшом расширении масштаба производства, если зависимость выпуска от затрат этих ресурсов описывается функцией

$$z=61+3x_1+2x_2.$$

9. Предположим, что процесс производства описывается функцией выпуска вида

$$z=x_1^{\frac{1}{4}}\cdot x_2^{\frac{3}{4}},$$

причём ресурсы ежемесячно использовались в объёме $x_1=16, x_2=81$ единиц. Было принято решение расширить производство. Сырьём второго вида располагает предприятие, выступающее на рынке как монополист. Оно установило цену $P_2=0{,}55$ ден. ед. Удастся ли избежать убытков при приобретении дополнительного сырья? Укажите все способы, какие вам представляются разумными.

2.5. Предельная норма замещения. Показатели эластичности

В этом параграфе познакомимся с тремя важными показателями, используемыми в экономическом анализе. Это прежде всего коэффициент эквивалентной заменяемости ресурсов, который показывает, какое количество одного ресурса может быть высвобождено при увеличении затрат другого на единицу. Второй показатель — коэффициент эластичности выпуска по ресурсам — характеризует изменение выпуска при возрастании затрат одного из ресурсов на 1%. И наконец, пределы, в которых возможна замена одного производственного ресурса другим, определяет эластичность взаимозаменяемости ресурсов. Итак, всё по порядку.

1°. Уравнение изокванты производственной функции

$$z=f\left(x_1,x_2\right)$$

имеет вид $z = C$ (C — постоянная) или $f\left(x_1,x_2\right)=C$.

Для точек, принадлежащих изокванте, дифференциал функции равен нулю:

$$dz=dC=0,$$

а значит,

$$\frac{\partial z}{\partial x_1}\cdot\Delta x_1+\frac{\partial z}{\partial x_2}\cdot\Delta x_2=0. \quad (60)$$

Отсюда выразим отношения приращений затрат ресурсов и обозначим их соответственно γ_{21} и γ_{12}:

$$\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1}=-\frac{\dfrac{\partial z}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial z}{\partial x_2}}=\gamma_{21}, \quad (61)$$

$$\frac{\Delta x_1}{\Delta x_2} = -\frac{\frac{\partial z}{\partial x_2}}{\frac{\partial z}{\partial x_1}} = \gamma_{12}, \tag{62}$$

Определение 6. Величина γ_{ij} называется **коэффициентом эквивалентной заменяемости ресурсов** или **предельной нормой замещения**. Она показывает, какое количество одного ресурса может быть высвобождено при увеличении затрат другого на единицу. Поскольку (предположение 3) предельные производительности ресурсов $\frac{\partial z}{\partial x_i}$ неотрицательны, то коэффициент

$$\gamma_{ij} \le 0 \left(i, j = 1, 2\right). \tag{63}$$

Это объясняется тем, что при уменьшении использования одного из ресурсов затраты другого надо увеличить, чтобы сохранить объём производства на прежнем уровне.

Следует отметить, что предельная норма замещения не остаётся постоянной вдоль изокванты. Она зависит от точки (x_1, x_2), в которой вычисляется. Для недифференцируемой функции γ_{ij} находят как отношение приращений ресурсов с учётом их знаков ($\Delta x_i < 0$, если количество соответствующего ресурса уменьшается). То есть,

для **дифференцируемой** функции $\gamma_{ij} = -\frac{\frac{\partial z}{\partial x_j}}{\frac{\partial z}{\partial x_i}}$.

для **недифференцируемой** функции $\gamma_{ij} = \frac{\Delta x_i}{\Delta x_j}, i, j = 1, 2.$

Ясно, что числа γ_{ij} и γ_{ji} обратны друг другу.

Пример 14. Для функции Кобба-Дугласа

$$Y = Y_0 K^{\alpha} L^{1-\alpha}, \alpha \in \left(0, 1\right).$$

$$\frac{\partial Y}{\partial K} = \frac{\alpha}{K} Y, \ \frac{\partial Y}{\partial L} = \frac{1-\alpha}{L} Y$$

(см. (35), (36) стр. 68).

Отсюда

$$\gamma_{KL} = -\frac{1-\alpha}{\alpha} \cdot \frac{K}{L}, \tag{64}$$

$$\gamma_{LK} = -\frac{\alpha}{1-\alpha} \cdot \frac{L}{K}. \tag{65}$$

Из (64) следует, что γ_{KL} прямо пропорционален фондовооружённости труда. Коэффициент пропорциональности зависит от величины показателя степени α. Показатель γ_{LK} прямо пропорционален трудоёмкости $\frac{L}{K}$ (см. (65)) с коэффициентом пропорциональности $-\frac{\alpha}{1-\alpha}$.

Если K и L изменяются пропорционально друг другу

$$K = \beta L,$$

то

$$\gamma_{KL} = -\frac{1-\alpha}{\alpha} \cdot \beta = \gamma, \tag{64'}$$

где γ — постоянное число.

В этом случае предельная норма замещения не зависит от точки, в которой она вычисляется.

Пример 15. Предельная норма замещения ресурсов для линейной производственной функции

$$z_0 = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 \ (a_0 \ge 0, a_1 > 0, a_2 > 0)$$

постоянна и равна

$$\gamma_{21} = -\frac{a_1}{a_2} \tag{66}$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x_1} = a_1, \frac{\partial z}{\partial x_2} = a_2, \frac{\partial z}{\partial x_1} : \frac{\partial z}{\partial x_2} = a_1 : a_2\right).$$

Пример 16. В производственной функции с постоянными пропорциями

$$Y = Y_0 \min\left\{\frac{x_1}{x_1^0}, \frac{x_2}{x_2^0}\right\} \tag{67}$$

ресурсы незаменяемы и

$$\gamma_{ij} = \frac{\Delta x_i}{\Delta x_j} = 0. \tag{68}$$

Это вызвано тем, что при движении вдоль изокванты (см. рис. 6 §3) меняется величина только одного из ресурсов. Если $\Delta x_j \neq 0$, то $\Delta x_i = 0$ и, следовательно, $\gamma_{ij} = 0$. Кстати, к выводу о незаменяемости ресурсов в процессе производства, описываемом функцией вида (67), мы пришли ещё в разделе 2.3.

2°. Важной характеристикой производственной функции являются коэффициенты эластичности выпуска по затратам ресурсов. Эти показатели вычисляются аналогично эластичности функции одной независимой переменной (см. раздел 1.7).

Пусть аргумент x_1 функции $z = f(x_1, x_2)$ получил приращение Δx_1, а значение x_2 осталось прежним. Изменение значения функции выражается частным приращением по x_1

$$\Delta_{x_1} z = f(x_1 + \Delta x_1, x_2) - f(x_1, x_2).$$

Составим относительные приращения x_1 и z

$$\frac{\Delta x_1}{x_1} \text{ и } \frac{\Delta_{x_1} z}{z}$$

и выразим их в процентах.

Значение x_1 изменилось на $\frac{\Delta x_1}{x_1} \cdot 100\%$, а значение функции — на $\frac{\Delta_{x_1} z}{z} \cdot 100\%$.

Отношение $\left(\frac{\Delta_{x_1} z}{z} \cdot 100\%\right) : \left(\frac{\Delta x_1}{x_1} \cdot 100\%\right)$ показывает, на сколько процентов в среднем изменится значение функции при увеличении x_1 на 1% (т. е. от x_1 до $x_1 + 0{,}01x_1$).

Найдём предел этого отношения при $\Delta x_1 \to 0$:

$$E_1 = \lim_{\Delta x_1 \to 0}\left(\left(\frac{\Delta_{x_1} z}{z} \cdot 100\%\right) : \left(\frac{\Delta x_1}{x_1} \cdot 100\%\right)\right) = \frac{x_1}{z} \lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{\Delta_{x_1} z}{\Delta x_1}. \tag{69}$$

Аналогично

$$E_2 = \frac{x_2}{z} \lim_{\Delta x_2 \to 0} \frac{\Delta_{x_2} z}{\Delta x_2}. \tag{70}$$

Определение 7. Показатели E_1 и E_2 называются **коэффициентами** (или показателями) **эластичности выпуска** по первому и второму ресурсу соответственно.

Каждый из них показывает, на сколько процентов приблизительно изменится значение функции (величина выпуска), если затраты соответствующего ресурса увеличили на 1%, оставив неизменными затраты ресурса.

Для дифференцируемой функции $z = f(x_1, x_2)$ формулы (10) и (11) принимают вид:

$$E_1 = \frac{x_1}{f(x_1, x_2)} \cdot \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1}, \tag{71}$$

$$E_2 = \frac{x_2}{f(x_1, x_2)} \cdot \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2}, \tag{72}$$

Формулы (71) и (72) можно записать в виде

$$E_1 = \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} : \frac{f(x_1, x_2)}{x_1}, \tag{73}$$

$$E_2 = \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} : \frac{f(x_1, x_2)}{x_2}, \tag{74}$$

В (73) и (74) частные производные дают значения предельных производительностей соответствующих ресурсов при уровне их затрат (x_1, x_2). А отношения

$$\frac{f(x_1,x_2)}{x_1} \text{ и } \frac{f(x_1,x_2)}{x_2}$$

– средние производительности ресурсов при том же уровне затрат. Отсюда следует, что показатель эластичности E_i равен отношению предельной производительности соответствующего ресурса к его средней производительности. Поэтому равенство единице коэффициента эластичности выпуска по i-му ресурсу означает совпадение предельной и средней производительности этого ресурса при уровне затрат (x_1, x_2).

Пример 17. Для функции Кобба-Дугласа

$$E_k = \frac{\partial Y}{\partial K} : \frac{Y}{K} = \left(\frac{\alpha}{K} \cdot Y\right) : \frac{Y}{K} = \alpha,$$

$$E_L = \frac{\partial Y}{\partial L} : \frac{Y}{L} = \left(\frac{1-\alpha}{L} \cdot Y\right) : \frac{Y}{L} = 1-\alpha,$$

$$E_K + E_L = 1.$$

Показатели степени α и $1-\alpha$ — коэффициенты эластичности выпуска по соответствующим ресурсам. Сумма коэффициентов эластичности равна единице.

Пример 18. Коэффициенты эластичности линейной функции вычисляются по формулам

$$E_i = \frac{a_i x_i}{z}, i = 1,2.$$

Пример 19. Для функции с постоянными пропорциями

$$z = min\{x_1, x_2\}$$

рассмотрим два случая:

1) $x_1 > x_2$.

Тогда

$$z = x_2, \frac{\partial z}{\partial x_1} = 0, \frac{\partial z}{\partial x_2} = 1,$$

следовательно,

$$E_{x_1}(z) = \frac{\partial z}{\partial x_1} \cdot \frac{x_1}{z} = 0, E_{x_2}(z) = \frac{\partial z}{\partial x_2} \cdot \frac{x_2}{z} = 1.$$

2) $x_1 < x_2$.

Здесь

$$z = x_1, E_{x_1}(z) = 1, E_{x_2}(z) = 0.$$

3) Наряду с понятием эластичности выпуска по затратам ресурсов в экономическом анализе применяется понятие ***эластичности взаимозаменяемости ресурсов***.

При движении вдоль изокванты $z = C$ вместе с координатами точки (x_1, x_2), вообще говоря, изменяется как значение γ_{ij}, так и величина отношения затрат $x_i : x_j$. Считая, что отношение $\frac{x_i}{x_j}$ связано с γ_{ij} функциональной зависимостью

$$\frac{x_i}{x_j} = \varphi(\gamma_{ij}),$$

вычислим эластичность этой функции:

$$E_{ij} = \frac{d\left(\frac{x_i}{x_j}\right)}{d\gamma_{ij}} \cdot \frac{\gamma_{ij}}{\frac{x_i}{x_j}} \tag{75}$$

(предполагается дифференцируемость φ).

Определение 8. Показатель E_{ij} называется **эластичностью взаимозаменяемости ресурсов.**

E_{ij} показывает, на сколько процентов должно измениться отношение затрат ресурсов, чтобы предельная норма заменяемости ресурсов увеличилась на 1%.

Так, равенство $E_{ij}=5$ говорит о необходимости увеличить отношение затрат ресурсов на 5%, чтобы предельная норма замещения увеличилась с γ_{ij} до 1,01 γ_{ij}.

Выясним геометрический смысл E_{ij}.

На плоскости $x_1 0 x_2$ уравнение изокванты $z=C$ может быть записано в виде

$$x_2 = g(x_1).$$

Соединим точку $M_1(x_1, x_2)$ с началом координат. Обозначим через α угол, который радиус OM_1 образует с положительным направлением оси Ox_1, а через β — угол наклона касательной к графику функции $x_2 = g(x_1)$, проведённой в точке M_1 (рис. 8).

Из геометрического смысла производной вытекает, что

$$tg\beta = g'(x_1) = \frac{dx_2}{dx_1}, \tag{76}$$

а из ΔOM_1B (Рис. 8) получаем

$$tg\alpha = \frac{x_2}{x_1}. \tag{77}$$

По определению предельной нормы замещения ресурсов

$$\gamma_{21} = -\frac{\dfrac{\partial z}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial z}{\partial x_2}} = \frac{\partial x_2}{\partial x_1} \tag{78}$$

(вспомним, что $\mathrm{d}x_i = \Delta x_i$, по определению).

Таким образом (см. (76), (77) и (78)),

$$tg\,\alpha = \frac{x_2}{x_1}, tg\,\beta = \gamma_{21},$$

$$tg\,\alpha = \varphi(tg\,\beta).$$

При движении точки M_1 вдоль изокванты $x_2 = g(x_1)$ вместе с координатами точки изменяется и величина углов.

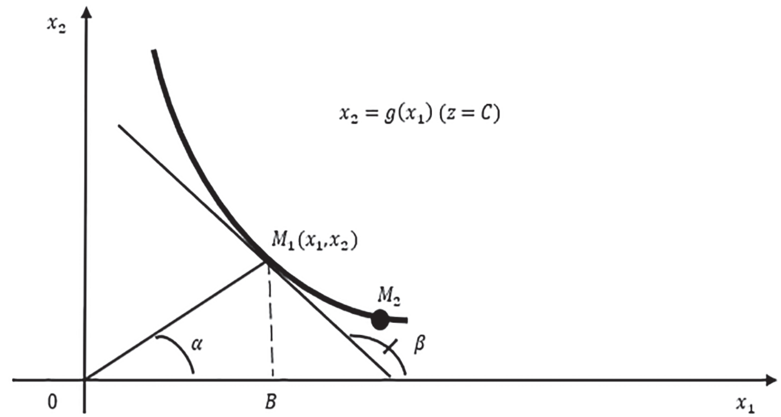

Рис. 8. Геометрический смысл предельной нормы замещения ресурсов

E_{21} показывает, ***на сколько процентов изменится*** $tg\alpha$, ***если при переходе из точки*** M_1 ***в точку*** M_2 $tg\beta$ ***увеличится на 1%.***

Коэффициент E_{21} удобен для характеристики производственных функций. Это связано прежде всего с тем, что для большинства из используемых на практике производственных функций он постоянен, т. е. не только не изменяется при движении вдоль данной изокванты, но и не зависит от выбора изокванты.

Пример 20. Для функции Кобба-Дугласа (((64), (65) стр. 83)

$$\gamma_{KL} = -\frac{1-\alpha}{\alpha}\cdot\frac{K}{L}.$$

Отсюда

$$\frac{\gamma_{KL}}{\dfrac{K}{L}} = -\frac{1-\alpha}{\alpha}, \tag{79}$$

$$\frac{K}{L} = -\frac{\alpha}{1-\alpha}\gamma_{KL}$$

и

$$\frac{d\left(\frac{K}{L}\right)}{d\gamma_{KL}}=-\frac{\alpha}{1-\alpha}. \qquad (80)$$

Из (79) и (80) следует

$$E_{KL}=\frac{d\left(\frac{K}{L}\right)}{d\gamma_{KL}}\cdot\frac{\gamma_{KL}}{\frac{K}{L}}=-\frac{\alpha}{1-\alpha}\cdot\left(-\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)=1.$$

Аналогично вычисляется

$$E_{LK}=1.$$

Итак, для функции

$$Y=Y_0K^{\alpha}L^{1-\alpha},\alpha\in(0,1)$$

эластичность взаимозаменяемости ресурсов равна единице, т. е. при увеличении отношения ресурсов на 1% предельная норма их заменяемости также увеличивается на 1% независимо от объёмов используемых ресурсов.

Пример 21. Линейная производственная функция имеет постоянную предельную норму замещения $\gamma_{ij}=-\frac{a_j}{a_i}$, поэтому $d\gamma_{ij}=0$ и считаем $E_{ij}=\infty$. В процессе производства, описываемом с помощью линейной производственной функции, ресурсы могут полностью заменять друг друга.

Пример 22. Для производственной функции с постоянными пропорциями γ_{ij} равно 0, а значит, E_{ij} также равен нулю. Ресурсы абсолютно незаменяемы.

В приведённых выше примерах все производственные функции имеют постоянную эластичность замены ресурсов. Можно построить производственную функцию с постоянной эластичностью замещения более общего вида. Из этой функции с помощью предельного перехода легко получить все рассмотренные ранее функции. Она имеет вид:

$$z=z_0\left(\beta_1x_1^{-\rho}+\beta_2x_2^{-\rho}\right)^{-\frac{\gamma}{\rho}}. \qquad (81)$$

Для функции (81) вычислим предельные производительности ресурсов

$$\frac{\partial z}{\partial x_1}=z_0\left(-\frac{\gamma}{\rho}\right)\left(\beta_1x_1^{-\rho}+\beta_2x_2^{-\rho}\right)^{-\frac{\gamma}{\rho}-1}\left(-\rho\beta_1x_1^{-\rho-1}\right),$$

$$\frac{\partial z}{\partial x_2}=z_0\left(-\frac{\gamma}{\rho}\right)\left(\beta_1x_1^{-\rho}+\beta_2x_2^{-\rho}\right)^{-\frac{\gamma}{\rho}-1}\left(-\rho\beta_2x_2^{-\rho-1}\right)$$

и найдём предельную норму замещения ресурсов

$$\gamma_{12}=-\frac{\frac{\partial z}{\partial x_2}}{\frac{\partial z}{\partial x_1}}=-\frac{-\rho\beta_2x_2^{-\rho-1}}{-\rho\beta_1x_1^{-\rho-1}}=-\frac{\beta_2}{\beta_1}\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{1+\rho},$$

$$\gamma_{21}=-\frac{\beta_1}{\beta_2}\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{1+\rho}$$

или в общем виде

$$\gamma_{ij}=-\frac{\beta_j}{\beta_i}\left(\frac{x_i}{x_j}\right)^{1+\rho},i,j=1,2. \qquad (82)$$

Из (23) выразим $\frac{x_i}{x_j}$ через γ_{ij}

$$\frac{x_i}{x_j}=\left(-\frac{\beta_i}{\beta_j}\gamma_{ij}\right)^{\frac{1}{1+\rho}}$$

и найдём

$$E_{ij}=\frac{d\frac{x_i}{x_j}}{d\gamma_{ij}}\cdot\frac{\gamma_{ij}}{\frac{x_i}{x_j}}=\frac{1}{1+\rho}\left(-\frac{\beta_i}{\beta_j}\gamma_{ij}\right)^{\frac{1}{1+\rho}-1}\cdot\left(-\frac{\beta_i}{\beta_j}\right)\cdot\frac{\gamma_{ij}}{\frac{x_i}{x_j}}=$$

$$= \frac{1}{1+\rho} \cdot \left(-\frac{\beta_i}{\beta_j} \gamma_{ij} \right)^{\frac{1}{1+\rho}-1+1} \cdot \frac{1}{\frac{x_i}{x_j}} = \frac{1}{1+\rho} \cdot \frac{x_i}{x_j} \cdot \frac{x_j}{x_i} = \frac{1}{1+\rho}.$$

Итак, функция вида (81) имеет постоянную эластичность взаимозаменяемости ресурсов

$$E_{ij} = \frac{1}{1+\rho}, \qquad (65)$$

зависящую от параметра ρ, который и определяет конкретный тип функции.

При $\rho = -1$ и $\gamma = 1$ из (81) приходим к однородной линейной функции

$$z = z_0 \left(\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 \right)$$

или, если ввести обозначения $z_0 \beta_1 = a_1, z_0 \beta_2 = a_2$, линейная функция запишется в знакомом нам виде:

$$z = a_1 x_1 + a_2 x_2.$$

При $\rho \to -1$ эластичность взаимозаменяемости ресурсов $E_{ij} \to \infty$. Это согласуется с полученным в примере 2 результатом.

Если $\rho \to \infty$, то $E_{ij} \to 0$. При $\gamma = 1$ из (81) с помощью предельного перехода получается функция с постоянными пропорциями.

При $\rho \to 0 \left(E_{ij} \to 1 \right)$ приходим к функции Кобба-Дугласа.

Доказательства этих факторов опускаем.

Как мы убедились, эластичность взаимозаменяемости ресурсов принимает самые различные значения

$$0 \le E_{ij} \le \infty.$$

Чем выше значение E_{ij}, тем в более широких пределах ресурсы могут заменять друг друга. При $E_{ij} \to \infty$ есть возможность взаимной замены ресурсов в самых широких пределах. При $E_{ij} = 0$ возможность замены ресурсов полностью отсутствует. Ресурсы взаимно дополняют друг друга.

На рисунке 9 представлено взаимное расположение изоквант рассмотренных нами производственных функций.

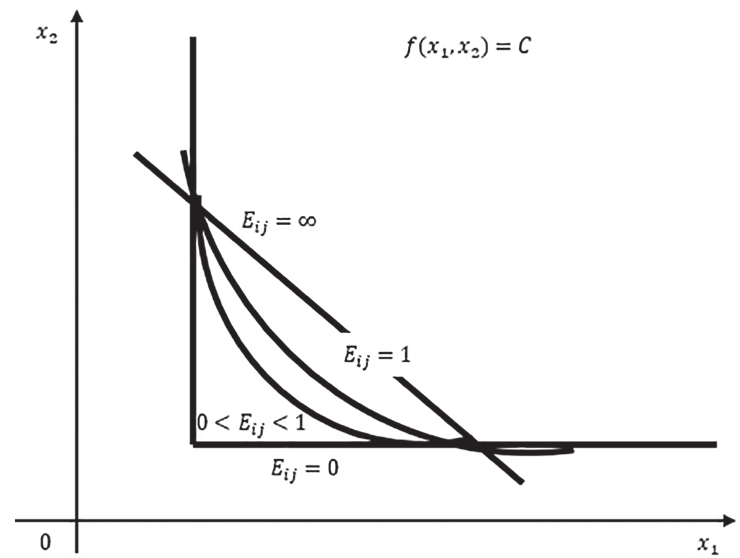

Рис. 9. Линии уровня двухфакторных производственных функций, имеющих постоянную эластичность замены ресурсов

В таблице 2.1 приведены рассмотренные выше характеристики двухфакторных производственных функций.

Задания

10. Убедитесь в том, что показатели степени в степенной функции

$$Y = Y_0 x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} (\alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0, Y_0 > 0)$$

являются показателями эластичности функции по соответствующим переменным.

Таблица 2.1

Основные характеристики двухфакторных производственных функций

№	Вычислительная формула	Название	Экономический смысл
1	2	3	4
1.	$z=f(x_1,x_2)$	Производственная функция (функция выпуска)	Выражает зависимость выпуска от затрат ресурсов x_1 и x_2.
2.	$f(x_1,x_2)=C$	Изокванта (линия постоянного выпуска)	Линия в пространстве ресурсов, координаты точек которой представляют комбинации затрат ресурсов, обеспечивающие выпуск продукции (национальный доход в макроэкономической модели) в объёме, равном C единиц.
3.	$\dfrac{f(x_1,x_2)}{x_i}$	Средняя производительность i-го ресурса, или фондоотдача	Показывает, сколько в среднем единиц продукции приходится на единицу данного ресурса.
4.	$\dfrac{\partial z}{\partial x_i}$	Предельная эффективность (или производительность) i-го ресурса при уровне затрат (x_1,x_2)	Прирост выпуска продукции, соответствующий увеличению затрат i-го ресурса на «малую единицу».
5.	$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x_i^2}$	Темп изменения z по x_i	Определяет характер изменения (возрастание или убывание) предельной эффективности i-го ресурса.
6.	$\dfrac{\partial z}{\partial x_i}\cdot\Delta x_i=d_{x_i}z$	Частный дифференциал	Приближённое значение стоимости продукции, произведённой за счёт Δx_i.
7.	$dz=d_{x_1}z+d_{x_2}z$	Полный дифференциал	Приближённо выражает изменение выпуска продукции при небольших изменениях затрат обоих ресурсов ($\Delta x_1\to 0,\Delta x_2\to 0$).
8.	$\gamma_{ij}=\dfrac{\Delta x_i}{\Delta x_j}=-\dfrac{\dfrac{\partial z}{\partial x_j}}{\dfrac{\partial z}{\partial x_i}}$	Предельная норма замещения (коэффициент эквивалентной заменяемости ресурсов)	Показывает, какое количество i-го ресурса может быть высвобождено при увеличении затрат j-го ресурса на единицу, с тем чтобы выпуск продукции остался на прежнем уровне.
9.	$E_i=\lim\limits_{\Delta x_i\to 0}\dfrac{\dfrac{\Delta_{x_i}z}{z}}{\dfrac{\Delta x_i}{x_i}}=$ $=\dfrac{\partial z}{\partial x_i}:\dfrac{z}{x_i}$	Коэффициент эластичности выпуска по i-му ресурсу	Показывает, на сколько процентов в среднем изменится выпуск продукции при увеличении затрат i-го производственного ресурса на один процент.
10.	$E_{ij}=\dfrac{d\dfrac{x_i}{x_j}}{d\gamma_{ij}}:\dfrac{\dfrac{x_i}{x_j}}{\gamma_{ij}}$	Коэффициент эластичности взаимозаменяемости ресурсов	Показывает, на сколько процентов должно измениться отношение затрат ресурсов, чтобы предельная норма замещения ресурсов увеличилась на 1%.

11. Составьте таблицу основных характеристик для функции $Y = F(K, L)$, выражающей зависимость национального дохода Y от основных производственных фондов K и трудовых ресурсов L.

12. Составьте сводную таблицу характеристик основных двухфакторных производственных функций по схеме:

№	**Наименование функции**	**Формула**	**Предельные эффективности ресурсов**	**Предельная норма замещения**	**Коэффициент эластичности выпуска по i-му ресурсу.**	**Коэффициент эластичности взаимозаменяемости ресурсов**
1.	Линейная	$y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2$	$a_i\ (i = 1,2)$	$\frac{a_j}{a_i}$	$\frac{a_i x_i}{y}$	∞
2.	...	...	...	...	...	...

13. Докажите, что для функции Кобба-Дугласа справедливо равенство

$$Y = \frac{\partial Y}{\partial K}\cdot K + \frac{\partial Y}{\partial L}\cdot L.$$

14. Пользуясь линейной однородностью функции Кобба-Дугласа, выразите среднюю производительность труда $y = \frac{Y}{L}$ через фондовооружённость $k = \frac{K}{L} : y = f(k)$.

Выразите в новых переменных предельную производительность, предельную фондоотдачу, коэффициенты эластичности по обоим факторам.

15. Установите монотонность предельной производительности труда и предельной фондоотдачи относительно k.

16. Докажите, что для функции Кобба-Дугласа справедливы свойства

$$f'(k) > 0, f''(k) < 0, f(0) = 0, \lim_{k\to\infty} f(k) = \infty,$$

$$\lim_{k\to 0} f'(k) = \infty, \lim_{k\to\infty} f'(k) = 0.$$

Функция, обладающая перечисленными свойствами, называется ***неоклассической.***

17. Дайте экономическую интерпретацию свойствам неоклассической функции. Постройте эскиз графика такой функции.

18. Докажите, что для степенной производственной функции

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} > 0.$$

19. Вычислите предельную норму замены трудовых ресурсов основными производственными фондами для степенной производственной функции. Убедитесь в том, что она зависит только от фондовооружённости. Докажите, что имеет место равенство

$$Y = \frac{1}{2\alpha_1}\cdot\frac{\partial F}{\partial K}\cdot K + \frac{1}{2\alpha_2}\cdot\frac{\partial F}{\partial L}\cdot L.$$

20. Для функции $z = \ln(x^2 + y^2)$ найдите:

$$\frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial z}{\partial y},\ \gamma_{xy},\ E_x(z) + E_y(z),\ E_{xy},\ \frac{\partial z}{\partial x}\cdot x + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot y.$$

21. Указать класс производственных функций, в которых ресурсы дополняют друг друга и известно, что объёмы затрат ресурсов P_1 и P_2 откосятся как 3 к 2.

22. Известно, что производство продукции стоимостью 20 ден. ед. возможно и при отсутствии ресурса P. Его использование сначала является эффективным и ведёт к росту объёма производства. Но, начиная с некоторого момента, дальнейшее наращивание количества P становится негативным, ведёт к падению объёма производства.

2.6. Примеры применения производственных функций

1. Рассмотрим содержательную задачу, пройдя все этапы построения экономико-математической модели с подробным анализом каждого шага, всех промежуточных результатов; обсудим альтернативные варианты; отклоняя их, опираться не только на математические выкладки, но и на экономические законы. Автор считает модель динамического равновесия в экономике, отвечающей указанным требованиям. Построим модель, проведём математическое доказательство «Золотого правила потребления[1].

Сначала обсудим предположения о свойствах модели.

В модели предполагается, что:

- производственная функция $Y = F(K, L)$ нелинейная, и она однородна порядка $p = 1$;
- норма сбережений ρ постоянна, и инвестиции $I = \rho Y$;
- трудосберегающий научно-технический прогресс имеет темп g;
- численность занятых в производстве L растет с постоянным темпом n;
- спрос изменяется в таком же размере, как и предложение;
- выбытие капитала пропорционально его величине: $W = \delta \cdot K$, δ — постоянная норма выбытия;
- ресурсы взаимозаменяемы.

Производительность труда $q = Y/L$ рассматривается как функция капиталовооружённости (фондовооружённости) $k = K / L$: $q = q(k)$.

Из свойства однородности с показателем $p = 1$ следует, что $Y = L \cdot Y(K / L, 1) = L \cdot q(k)$. А отсюда: $q = q(k)$.

Рассмотрим пример обоснования использования производственной функции определённого вида.

Р. Солоу в своем труде "A contribution to the theory" (Qnart. I. Econ. 1956. Vol.70. Febr.) доказывает, что нестабильность динамического равновесия в посткейнсианских моделях есть следствие невзаимозаменяемости факторов в используемой производственной функции.

[1] *Коршунова Н.И.* Производственные функции и непрерывная математическая подготовка специалистов // Математика в образовании. 2015. № 11. С. 103—109.

Вместо ПФ с постоянными пропорциями

$$Y = Y_0 \min\left\{\frac{K}{K_0}, \frac{L}{L_0}\right\}$$

Солоу предлагает использовать в модели экономического роста ПФ типа Кобба-Дугласа:

$$Y = K^{\alpha} L^{1-\alpha}, \qquad (1)$$

в которой труд L и капитал K хорошо заменяемы и сумма коэффициентов эластичности по факторам (эластичность производства) равна единице:

$$E_K(Y) + E_L(Y) = \alpha + 1 - \alpha = 1$$

Она не линейна и однородна порядка 1.

Ранее было установлено, что показатели эластичности по факторам постоянны и равны соответствующим показателям степени. Для функции (1) при высказанных предположениях справедливо равенство

$$q = k^{\alpha}. \qquad (2)$$

При жёстком дефиците времени (как, например, в заочных вузах) можно не решать глобальную задачу на построение и анализ модели, а остановиться на доказательстве «Золотого правила потребления». Здесь модель достаточно простая. Соответствующая математическая задача допускает прозрачное решение.

«Золотое правило потребления» звучит так:

Экономика растёт в равновесном темпе, максимизирующем среднюю норму потребления, если норма сбережений равна эластичности объема производства по капиталу.

Доказательство.

Допустим, что экономика находится в состоянии динамического равновесия и что с позиции национального хозяйства будущее потребление имеет такое же значение, как и сегодняшнее. Примем в качестве критерия оптимальности максимум потребления на одного занятого, то есть

$$z = \frac{C}{L} \to max,$$

при условии, что

$$\begin{cases} Y = K^{\alpha} \cdot L^{1-\alpha}, \\ I = \rho Y, \\ Y = I + C. \end{cases}$$

Здесь Y — валовой национальный продукт, I и C — его части, идущие на накопление (инвестиции) и потребление, соответственно, K — капитал (стоимость основных производственных), L — трудовые ресурсы, ρ — норма сбережений.

Первое ограничение выражает тот факт, что модель строится на базе функции Кобба—Дугласа с параметрами α и $1 - \alpha$. То, что эти параметры являются показателями эластичности, мы убедились ранее. А именно,

$$E_K(Y) = \frac{\partial Y}{\partial K} \cdot \frac{K}{Y} = \alpha K^{\alpha-1} L^{1-\alpha} \cdot \frac{K}{K^{\alpha} L^{1-\alpha}} = \alpha.$$

Аналогично, $E_L(Y) = 1 - \alpha$.

В процессе, описываемом ПФ выбранного вида, средняя производительность труда $q = \frac{Y}{L}$ является функцией капиталовооружённости (фондовооружённости) $k = \frac{K}{L}$ труда:

$$q = \frac{Y}{L} = \frac{K^{\alpha} L^{1-\alpha}}{L} = \frac{K^{\alpha}}{L^{\alpha}} = \left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha} = k^{\alpha},$$

то есть

$$q = k^{\alpha}, \; q' = \alpha k^{\alpha-1} = \frac{\partial Y}{\partial K}.$$

Вспомогательные вычисления сделаны. Приступаем непосредственно к решению задачи.

Преобразуем целевую функцию. Выразим z через q и k.

$$z = \frac{C}{L} = \frac{Y - I}{L} = \frac{Y}{L} - \frac{I}{L} = q(k) - \frac{I}{K} \cdot \frac{K}{L} = q(k) - \mu k.$$

Здесь $\mu = \frac{I}{K}$ — вспомогательная переменная.

Очевидно, что средняя норма потребления достигает максимума при условии, что $z'_k = 0$. Найдём z'_k и приравняем её нулю.

$$z'_k = q'(k) - \mu = 0.$$

Отсюда получаем $\mu = q'(k)$.

Приступаем непосредственно к доказательству «Золотого правила потребления».

$$\alpha = E_K(Y) = \frac{\partial Y}{\partial K} \cdot \frac{K}{Y} = q' \cdot \frac{K}{I} \cdot \frac{I}{Y} = q' \cdot \frac{1}{\mu} \cdot \frac{\rho Y}{Y} = \frac{q'}{q'} \cdot \rho = \rho \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \boxed{\alpha = \rho}.$$

Это доказывает «Золотое правило потребления», сформулированное выше.

2. Мы подробно изучили производственные функции, их свойства и характеристики. Узнали, что от произвольной функции двух независимых переменных двухфакторные статические ПФ отличаются рядом свойств экономического характера. Рассмотрим некоторые задачи на применение ПФ в модельных задачах оптимизации производства, в которых тем более будет проявляться этот характер. На данный момент вы умеете находить безусловный и условный экстремумы дважды дифференцируемых в области определения функций 2-х переменных.

Используя полученные ранее знания, научимся решать модельные задачи а) максимизации прибыли фирмы (отрасли, экономики в целом) в долговременном периоде, б) в краткосрочном периоде.

Пусть Y— объем готовой продукции фирмы определяется x_1 и x_2 — затратами двух типов ресурсов в соответствие с производственной функцией $Y = f(x_1, x_2)$. Пусть известны рыночные цены на все производственные факторы: p_0 — стоимость единицы готовой продукции, p_1 и p_2 — цены на ресурсы. Известно также, что цены эти: а) стабильны в течение достаточно длительного времени, б) ни фирма, ни поставщики ресурсов не способны повлиять на эту стабильность своим экономическим поведением. Это равносильно тому, что цены постоянны во времени и не зависят от величин спроса на ресурсы и от объема выпуска продукции.

Тогда стоимость готовой продукции, произведенной за некоторый временной период, (доход фирмы) равняется

$$I = p_0 f(x_1, x_2).$$

С точностью до положительного множителя p_0 это ПФ фирмы. Стоимость потраченных ресурсов

$$C = p_1 x_1 + p_2 x_2 \text{ —}$$

линейная функция двух переменных, коэффициенты в которой — цены.

Определение. Множество всех точек $M(x_1, x_2)$ положительной части числовой плоскости, для которых величина издержек принимает одно и тоже значение C_0, т. е. линия уровня функции издержек, называется **изокостой.**

В общем случае изменяющихся цен, зависящих от спроса, это кривая линия, но, при постоянных ценах на ресурсы, независимых от величин спроса x_1 и x_2, изокоста является отрезком прямой линии, ограниченным координатными осями. Градиент $grad\, C(x_1, x_2) = (\frac{dC}{dx_1}, \frac{dC}{dx_2}) = (p_1, p_2)$ направлен по нормали к изокосте в сторону увеличения издержек.

Итог деятельности фирмы за некоторый отчетный период может быть описан прибылью фирмы P, являющейся разностью дохода I и издержек C:

$$P = I - C = p_0 Y(x_1, x_2) - p_1 x_1 - p_2 x_2.$$

В общем случае, эта функция нелинейна по переменным x_1 и x_2. Кроме них она также зависит от 3-х параметров p_0, p_1

и p_2. (Однако, в силу того, что цена — денежное выражение стоимости, а обмен осуществляется в соответствии с отношением стоимостей меняемых товаров, функция прибыли фактически определяется двумя параметрами $\pi_1 = p_1/p_0$, $\pi_2 = p_2/p_0$, ($\pi_0 = 1$)).

Прибыль, в каких бы единицах она ни выражалась, является важнейшим, критериальным показателем при анализе хозяйственной деятельности предприятия, т. к., чем она выше за определенный период (месяц, квартал, год), тем более эффективно работало предприятие: правильно расходовало оборотные средства на приобретение ресурсов, рационально установила ассортимент и объем своего выпуска и т. д.

Можно показать (сделайте это сами!), что функция прибыли «наследует» ряд свойств ПФ, связанных со вторыми производными. Это свойство выпуклости вверх трехмерного графика $z = P(x_1, x_2)$. Поэтому линии уровня прибыли должны напоминать изокванты ПФ: также связные монотонные кривые. Однако, в отличие от ПФ, величина прибыли может принимать и нулевые, и отрицательные значения, что означает бесприбыльность или убыточность фирмы в рассматриваемом периоде.

Кроме того, частные производные от прибыли по x_1 и x_2 ($\frac{dP}{dx_1}$ и $\frac{dP}{dx_2}$), которые можно назвать предельными прибыльностями или рентными стоимостями ресурсов, должны убывать с ростом затрат соответствующего ресурса и не убывать или расти с ростом затрат другого ресурса.

2.7. Задача максимизации прибыли в долгосрочном периоде

Как было сказано выше, прибыль фирмы является важнейшим критерием эффективности работы фирмы. Потому фирма из всех возможных способов (альтернатив) своего экономического поведения должна выбирать тот, который обеспечит максимум этого показателя. Если отвлечься от деталей и считать, что при любой паре x_1 и x_2 фирма выбирает эффективный производственный процесс, то свобода выбора фирмы заключается лишь в выборе спроса на каждый из ресурсов для обеспечения этого процесса. В долговременном периоде, многократно превышающем время обращения оборотных средств, т. е. средств, затрачиваемых на приобретение ресурсов, теоретически возможно такое приобретение в любых количествах. Другими словами, никакими лимитами величины x_1 и x_2 сверху не ограничены.

Известно, что у статической ПФ с показателем однородности $n < 1$ и предельная, и средняя производительности каждого из ресурсов убывают с ростом соответствующих количеств. Цены же на ресурсы предполагаем неизменными. Следовательно, безграничное увеличение затрат невыгодно, и должны существовать оптимальные количества x_1^* и x_2^*, обеспечивающие максимум прибыли $P\ (x_1,\ x_2)$.

Задача максимизации прибыли в долгосрочном периоде имеет следующий вид:

$$P(\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_2) = p_0 Y(\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_2) - p_1\mathrm{x}_1 - p_2\mathrm{x}_2 \to max,$$
$$\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_2 > 0\ ,\ p_0, p_1, p_2 > 0.$$

Функция прибыли имеет непрерывные частные производные, следовательно, в точке максимума они должны обращаться в нуль:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial \mathrm{x}_1} = p_0 \dfrac{\partial Y}{\partial \mathrm{x}_1} - p_1 = 0, \\ \dfrac{\partial PR}{\partial \mathrm{x}_2} = p_0 \dfrac{\partial Y}{\partial \mathrm{x}_2} - p_2 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} M_1 = \dfrac{\partial Y}{\partial \mathrm{x}_1} = \eth_1, \\ M_2 = \dfrac{\partial Y}{\partial \mathrm{x}_2} = \eth_2,\ \eth_i = \dfrac{p_i}{p_0}, i = 1,2. \end{cases}$$

Таким образом, при оптимальном наборе количества ресурсов их предельные производительности равны отношениям соответствующих цен и цены готовой продукции, т. е. относительным ценам ресурсов, выраженных в ценах на готовую продукцию. (Например, относительная цена ресурса 1, равная $\pi_1 = 5$, означает, что единица этого ресурса стоит столько же, сколько стоят 5 единиц готовой продукции.)

Уравнения второй системы имеют геометрическую интерпретацию. Как известно, вектор $gradY = \left(\dfrac{dY}{dx_1}, \dfrac{dY}{dx_2}\right)$ является внешней нормалью к изокванте ПФ, проходящей через т. $A\ (x_1,\ x_2)$. Вектор $\boldsymbol{n} = (\pi_1,\ \pi_2)$ коллинеарен вектору градиента стоимости издержек $grad\ C\ (x_1,\ x_2) = (p_1,\ p_2)$ — вектору внешней нормали к изокосте, проходящей через ту же точку. Коль эти две линии, проходя через одну точку, имеют общую внешнюю нормаль, следовательно, они имеют и общую касательную, которая, как известно, перпендикулярна нормали. Следовательно, изокванта и изокоста касаются друг друга в точке максимума прибыли.

Как правило, полученную систему решают при помощи несложного приема деления уравнений. В результате получают равносильную ей систему

$$\begin{cases} M_1 = \dfrac{\partial Y}{\partial x_1} = \pi_1, \\ M_2 = \dfrac{\partial Y}{\partial x_2} = \pi_2, \\ \dfrac{\partial Y}{\partial x_1} : \dfrac{\partial Y}{\partial x_2} = \pi_1 : \pi_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} M_1 = \dfrac{p_1}{p_0}, \\ M_2 = \dfrac{p_2}{p_0}, \\ R_{12} = \dfrac{p_1}{p_2}. \end{cases}$$

Это означает, что при оптимальном плане производства, предельная норма замещения 1-го ресурса 2-м равна отношению цен заменяемого и замещающего ресурсов. В декартовой (естественно, прямоугольной) системе координат величина R_{12} с точностью до знака есть тангенс угла наклона касательной к изокванте, и он равен отношению цен. В частности, если цены на ресурсы одинаковы, а этого легко добиться подбором единиц их измерения, угол наклона касательной к изокванте равен 135°.

Пример. ПФ фирмы $Y_{CES}(x_1,x_2)=\left\{0,4x_1^{-1/3}+0,6x_2^{-1/3}\right\}^{-2}$. Цены на готовую продукцию и ресурсы суть $p_0 = 20$, $p_1 = 2$ и $p_2 = 3$. Найти максимальную прибыль фирмы и спрос на каждый из ресурсов.

Прежде, чем решать задачу, убедимся в том, что показатель однородности ПФ $n < 1$. В противном случае, максимум прибыли не будет достижим ни при каких x_1 и x_2 в отсутствие ограничений экстремум не достигается. У функций ПЭЗ показатель степени для выражения в скобках равен $(-1/3)$. Следовательно, $n = 2/3 < 1$.

ПНЗФ 1-го ресурса вторым должно быть равно отношению их цен —

$$R_{12}=\frac{0,4x_1^{-1/3-1}}{0,6x_2^{-1/3-1}}=\frac{2}{3}\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{4/3}=\frac{2}{3}\Rightarrow\frac{x_2}{x_1}=1\Leftrightarrow x_1=x_2.$$

Таким образом, **при максимальной прибыли расходуются численно равные количества ресурсов, и функция прибыли имеет вид**

$$P(x_1,\ x_2=x_1)=20\left\{x_1^{-1/3}\right\}^{-2}-2x_1-3x_1=20x_1^{2/3}-5x_1.$$

Она является функцией только одной переменной, и максимум ее находится стандартным способом:

$$\left(20x_1^{2/3}-5x_1\right)'_{x_1}=0\Leftrightarrow\frac{40}{3}x_1^{-1/3}=5\Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1=x_2=\left(\dfrac{3}{8}\right)^{-3}\approx 18.96,\\ Y=Y\left(x_1,\ x_2\right),=64/9,\\ maxP=20\cdot\dfrac{64}{9}-5\cdot(^{\frac{8}{3}})=\dfrac{1280}{27}\approx\underline{47.41}.\end{cases}$$

Возникает резонный вопрос: почему имеет место максимум прибыли, а не минимум? Почему, вообще, имеет место

экстремум? Не трудно видеть, что при нулевых затратах ресурсов производства нет, прибыль равна нулю. При ненулевых, но очень малых затратах, прибыль становится положительной, но при очень больших затратах она вновь становится отрицательной. Значит, где-то должен быть максимум. Наличие этого максимума следует также и из свойств однородности ПФ с показателем $n < 1$ и линейности функции издержек

$C\ (x_1,\ x_2)$. Нетрудно видеть, что однородные вторые производные от прибыли и от ПФ отличаются только положительным ценовым множителем, а следовательно, те и другие везде отрицательны. Единственная опасность заключается в том, что определитель (дискриминант)

$$\Delta=\begin{vmatrix}\partial^2 P/\partial x_1^2 & \partial^2 P/\partial x_1\partial x_2\\ \partial^2 P/\partial x_2\partial x_1 & \partial^2 P/\partial x_2^2\end{vmatrix}$$

может оказаться отрицательным. Однако, для всех типов производственных функций с $n < 1$, в том числе для рассматриваемой ПФ «с постоянной эластичностью замены ресурсов», он больше нуля. (Убедитесь сами.)

Параллельно делаем вывод, что положительная смешанная вторая производная и ПФ, и функции прибыли меньше (или не больше) среднего геометрического однородных производных того же порядка.

Таким образом, если ПФ имеет степень однородности, меньшую единицы, то задача максимизации прибыли в долгосрочном периоде имеет конечное решение.

2.8. Максимизации прибыли в краткосрочном периоде

В краткосрочном периоде много меньшем времени оборота средств ситуация с приобретением ресурсов иная. Так, количество одного из ресурсов может быть лимитировано некоторой величиной. Например, количество капитала $x_1 = K$. У предприятия нет возможности приобрести дополнительно капитал в силу разных причин, но есть возможность в полной мере использовать имеющиеся средства, т. к. трудовой ресурс x_2 ничем не ограничен. В таком случае максимизировать прибыль означает приобрести оптимальное количество этого ресурса на рынке труда и максимально эффективно его использовать. Последнее, как вы уже знаете, заложено в самом понятии производственной функции.

Не представляет труда показать, опираясь на свойства ПФ, что ограниченный ресурс I должен использоваться без остатка. Предположим противное. Пусть ($x_1 < K$, x_2) —расход ресурсов, обеспечивающий максимум прибыли $Y_{max} = Y(x_1, x_2)$. Но, из свойств монотонности ПФ по своим аргументам $Y(K, x_2) > Y_{max} = Y(x_1, x_2)$. *Т. е.* $Y(x_1, x_2)$ не есть максимальное значение прибыли. Следовательно, наше предположение о неполном использовании ограниченного ресурса неверно.

Это же можно доказать и другим способом и одновременно найти решение поставленной задачи. Сформулируем задачу с более слабым нежестким ограничением на лимитированный ресурс 1:

$$P(x_1,x_2) = p_0 Y(x_1,x_2) - p_1 K - p_2 x_2 \to max,$$
$$x_1 \le K$$
$$x_1, x_2 > 0\ , K, p_0, p_1, p_2 > 0.$$

Перейдем от функционального нестрогого неравенства для первого ресурса к уравнению связи путем введения неотрицательной балансной переменной $z^2 \geqslant 0$.

$$P(x_1,x_2) = p_0 Y(x_1,x_2) - p_1 K - p_2 x_2 \to max,$$
$$x_1 + z^2 - K = 0$$
$$x_1, x_2 > 0\ , K, p_0, p_1, p_2 > 0.$$

Получили задачу условной оптимизации с тремя переменными и четырьмя параметрами. Решаем методом неопределенных множителей Лагранжа. Для этого составим функцию Лагранжа

$$L(x_1, x_2, z, \lambda) = p_0 Y(x_1, x_2) - p_1 K - p_2 x_2 - \lambda(x_1 + z^2 - K).$$

Приравняв нулю все четыре её частные производные первого порядка, получим

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = p_0 \dfrac{\partial Y}{\partial x_1} - \lambda = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = p_0 \dfrac{\partial Y}{\partial x_2} - p_2 = 0, \\ .\dfrac{\partial L}{\partial z} = -2\lambda z = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial ё} = -x_1 - z^2 + K = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 0, \\ \dfrac{\partial Y}{\partial x_1} = 0, \\ \dfrac{\partial Y}{\partial x_2} = \dfrac{p_2}{p_0}, \\ x_1 + z^2 - K = 0. \end{cases} \vee \begin{cases} z = 0 & (1), \\ p_0 \dfrac{\partial Y}{\partial x_1} = \lambda & (2), \\ \dfrac{\partial Y}{\partial x_2} = \dfrac{p_2}{p_0} & (3), \\ x_1 = K & (4). \end{cases}$$

Первая система, очевидно, несовместна. (Почему?). Из второй системы следует, что лимитированный ресурс используется целиком. Так как вид ресурса, его специфика нигде в выводе не учитывались, то таким образом, мы показали, что при имеющемся количественном ограничении на любой ресурс он в оптимальном плане используется без остатка. И обусловлено это свойством положительности первых производных ПФ во всей области определения.

Не представляет труда решить вторую систему, т. к. три неизвестных уже найдены: z, x_1 и λ. Из уравнения (3) найдем x_2^*, и задача решена. Проанализируем ее решение.

Итак, в оптимальном плане предельная производительность нелимитированного ресурса равна его цене относительно цены готовой продукции. Неопределенный множитель λ тоже имеет экономический смысл: он равен, с одной стороны, стоимостному выражению предельной производительности ограниченного ресурса, а с другой — убытку от недоиспользования единицы этого ресурса.

Таким образом, мы делаем вывод: в краткосрочном периоде прибыль предприятия в расчете на единицу выпуска готовой продукции не превышает соответствующую величину при долгосрочном планировании.

Пример. Фирма из примера из 2.1 располагает 8-ю единицами первого ресурса: $x_1 = 8$. Цены те же. Требуется максимизировать ее прибыль в краткосрочном периоде.

Решение. $x_1 = 8$

$$\begin{cases} x_1 = 8, \\ \dfrac{\partial Y}{\partial x_2} = \dfrac{p_2}{p_0} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial \left\{0,4 \cdot 8^{-1/3} + 0,6 x_2^{-1/3}\right\}^{-2}}{\partial x_2} = \end{cases}$$

$$x_1 = 8,$$

$$= -2\left\{0,2 + 0,6 x_2^{-\frac{1}{3}}\right\}^{-3} 0,6\left(-\frac{1}{3}\right) \cdot x_2^{-4/3} = 3/20$$

$$\Rightarrow \left\{0,2 + 0,6 x_2^{-1/3}\right\}^3 x_2^{3 \cdot 4/9} = 8/3 \Leftrightarrow x_2^{4/9} + 3 x_2^{1/9} = \frac{10}{\sqrt[3]{3}}.$$

Полученное уравнение путем замены $x_2^* = \dfrac{z^9}{27}$ сводится к трудноразрешимому относительно коэффициентов уравнению 4-й степени относительно z — $z^4 + 9z = 30$, решить которое можно приближенно, например, известным методом касательных.

Возможные варианты контрольной работы

Общее для всех задание:

1. Составьте сводную таблицу характеристик основных однофакторных производственных функций по схеме:

№	Название функции	Формула	Предельная производительность ресурса	Темп изменения функции	Эластичность
...	...	...	...	...	...

2. Постройте графики функций из п. 1.
3. Составьте сводную таблицу характеристик основных двухфакторных производственных функций по схеме:

№	Наименование функции	Формула	Предельные эффективности ресурсов	Предельная норма замещения	Коэффициент эластичности выпуска по i-му ресурсу	Коэффициент эластичности взаимозаменяемости ресурсов
...	...	...	...	...	...	...

4. Постройте линии уровня функций из п. 3.

Замечание: Все вычисления должны быть приведены в работе!

5. Задания по вариантам

Вариант 1.

Задача 1. ПФ фирмы $Y(K,L) = K^2 + KL + L^2$. Найти средние и предельные производительности ресурсов, частные и полную эластичности выпусков для $K = 1$, $L = 1$. Чему равна эластичность замещения труда капиталом?

Задача 2. Максимизировать прибыль фирмы из задачи 1 при ценах на ресурсы $p_K = 1$, $p_L = 2$ и ограничении на затраты $C = 6$.

Задача 3. Минимизировать издержки этой же фирмы при тех же ценах на ресурсы и фиксированном выпуске $Y_0 = 3$.

Вариант 2.

Задача 1. ПФ фирмы $Y(K,L) = K^{1/3} L^{2/3}$. Найти средние и предельные производительности ресурсов, частные и полную эластичности выпусков для $K = 1$, $L = 1$. Чему равна эластичность замещения труда капиталом?

Задача 2. Максимизировать прибыль фирмы из задачи 1 при ценах на ресурсы $p_K = 1$, $p_L = 2$ и ограничении на затраты $C = 12$.

Задача 3. Минимизировать издержки этой же фирмы при тех же ценах на ресурсы и фиксированном выпуске $Y_0 = 4$.

Вариант 3.

Задача 1. ПФ фирмы $Y_{CES}(K,L) = \left\{0.75K^{-0.5} + 0.25L^{-0.5}\right\}^{-2}$. Найти средние и предельные производительности ресурсов, частные и полную эластичности выпусков для $K = 1$, $L = 1$. Чему равна эластичность замещения труда капиталом?

Задача 2. Максимизировать прибыль фирмы из задачи 1 при ценах на ресурсы $p_K = 3$, $p_L = 1$ и ограничении на затраты $C = 16$.

Задача 3. Минимизировать издержки этой же фирмы при тех же ценах на ресурсы и фиксированном выпуске $Y_0 = 8$.

Вариант 4.

Задача 1. ПФ фирмы $Y_{CES}(K,L) = 2\left\{0.4K^{-0.5} + 0.6L^{-0.5}\right\}^{-2}$. Найти средние и предельные производительности ресурсов, частные и полную эластичности выпусков для $K = 1$, $L = 1$. Чему равна эластичность замещения труда капиталом?

Задача 2. Максимизировать прибыль фирмы из задачи 1 при ценах на ресурсы $p_K = 2$, $p_L = 3$ и ограничении на затраты $C = 20$.

Задача 3. Минимизировать издержки этой же фирмы при тех же ценах на ресурсы и фиксированном выпуске $Y_0 = 4$.

Вариант 5.

Задача 1. ПФ фирмы $Y_{CES}(K,L) = \left\{0.25K^{-1/3} + 0.75L^{-1/3}\right\}^{-3}$. Найти средние и предельные производительности ресурсов, частные и полную эластичности выпусков для $K = 1$, $L = 1$. Чему равна эластичность замещения труда капиталом?

Задача 2. Максимизировать прибыль фирмы из задачи 1 при ценах на ресурсы $p_K = 16$, $p_L = 3$ и ограничении на затраты $C = 40$.

Задача 3. Минимизировать издержки этой же фирмы при тех же ценах на ресурсы и фиксированном выпуске $Y_0 = 1$.

Вариант 6.

Задача 1. ПФ фирмы $Y(K,L) = K^{1/3}L^{1/3}\left\{0.5K^{1/3} + 0.5L^{1/3}\right\}$ (функция Сато). Найти средние и предельные производительности ресурсов, частные и полную эластичности выпусков для $K = 1$, $L = 1$. Чему равна эластичность замещения труда капиталом?

Задача 2. Максимизировать прибыль фирмы из задачи 1 при ценах на ресурсы $p_K = 1$, $p_L = 1$ и ограничении на затраты $C = 16$.

Задача 3. Минимизировать издержки этой же фирмы при тех же ценах на ресурсы и фиксированном выпуске $Y_0 = 8$.

Указание: обратить внимание на симметричность ПФ по аргументам и на равенство цен.

Вариант 7.

Задача 1. ПФ фирмы $Y(K,L) = \dfrac{5KL}{0.25K + 0.75L}$. Найти средние и предельные производительности ресурсов, частные и полную эластичности выпусков для $K = 1$, $L = 1$. Чему равна эластичность замещения труда капиталом?

Задача 2. Максимизировать прибыль фирмы из задачи 1 при ценах на ресурсы $p_K = 1$, $p_L = 3$ и ограничении на затраты $C = 12$.

Задача 3. Минимизировать издержки этой же фирмы при тех же ценах на ресурсы и фиксированном выпуске $Y_0 = 6$.

Тесты по материалу первого раздела

№	Условие	Варианты ответов
1.	Какая из однофакторных производственных функций (ОПФ) имеет не зависящие от объёма производства предельные производительности ресурсов?	1. линейная, 2. квадратичная, 3. показательная, 4. логарифмическая.
2.	Какое из названий не имеет отношения к показателю $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y \cdot x}{\Delta x \cdot y}$?	1. относительная производная, 2. логарифмическая производная, 3. эластичность, 4. экономическая производная.
3.	Укажите формулу, которая не выражает свойство эластичности однофакторной ПФ.	1. $E_x(UV) = E_xU + E_xV$, 2. $E_x(U + V) = E_xU + EV$, 3. $E_x(U / V) = E_xU - E_xV$, 4. $E_x(xU) = 1 + E_xU$.

№	Условие	Варианты ответов
4.	У какой из ОПФ показатель эластичности численно равен значению её аргумента?	1. линейная $y = a + bx$, 2. квадратичная $y = a + bx + cx^2$, 3. показательная вида $y = e^x$, 4. логарифмическая вида $y = \ln x$.
5.	У какой из функций п. 4 показатель эластичности равен числу, обратному соответствующему значению функции?	1. линейная $y = a + bx$, 2. квадратичная $y = a + bx + cx^2$, 3. показательная вида $y = e^x$, 4. логарифмическая вида $y = \ln x$.
6.	Какая из указанных однофакторных ПФ может быть использована для описания зависимости объёма затрат на производство очередной единицы продукции от объёма производства?	1. $y = a_0 + a_1 x$, 2. $y = a_0 + a_1/x$, 3. $y = a_0 + a_1 \ln x$, 4. $y = a\sqrt{x}$.
7.	Какая из ОПФ может быть использована для описания ситуации: «При отсутствии ресурса P объём выпуска составляет a_0 единиц. Включение в производственный процесс ресурса P вначале благотворно сказывается на результате, и объём выпуска достигает максимума, когда затраты P составят $\dfrac{a_1}{2a_2}$ единиц.	1. $y = a_0 + a_1 x - a_2 x^2$, 2. $y = a_0 + a_1 x$, 3. $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$, 4. $y = a_0 + \ln(x+1)$. Все коэффициенты положительные.

№	Условие	Варианты ответов
	При дальнейшем увеличении затрат Р наблюдается снижение объёма производства. И рост, и снижение объёма производства происходят в отрицательном темпе»?	
8.	Какая из ОПФ из п. 1 имеет постоянный ненулевой темп изменения?	1—4 из п.1
9.	Суммарные затраты на производство x единиц продукции складываются из условно постоянных и условно переменных затрат. Какая функция может быть использована для описания этой ситуации?	1—4 из п. 1.
10.	Продолжите определение: «Изоквантой производственной функции $Y = F(K, L)$ называется линия, в каждой точке которой ...	1....$K = L$», 2....$K = \text{const}$», 3....$L = \text{const}$», 4....$Y = \text{const}$».
11.	Чему равна эластичность производства, описываемого с помощью функции $Y = Y_0 K^{\alpha_1} L^{\alpha_2}$?	1. $E = \alpha_1$, 2. $E = \alpha_2$, 3. $E = \alpha_1 + \alpha_2$, 4. $E = \alpha_1 / \alpha_2$.
12.	У какой двухфакторной производственной функции показатели эластичности по факторам явно входят в аналитическое задание функции?	1. Линейная. 2. С постоянными пропорциями. 3. Кобба-Дугласа. 4. С постоянной эластичностью замены.

№	Условие	Варианты ответов
13.	Чему равна предельная норма замещения первого ресурса вторым для функции из задания 11?	1. $-\frac{\alpha_1 L}{\alpha_2 K}$, 2. $\frac{\alpha_1 L}{\alpha_2 K}$, 3. $\frac{L}{K}$, 4. $\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$.
14.	Какова эластичность предельной нормы замещения ресурсов у производственной функции с постоянными пропорциями?	1. 0, 2. ∞, 3. 1. 4. –1.
15.	Какой вид имеют линии уровня производственной функции с постоянными пропорциями $Y = Y_0 \min\left\{\frac{K}{K_0}, \frac{L}{L_0}\right\}$?	1. Параллельные прямые. 2. Семейство гипербол. 3. Семейство прямых углов со сторонами, параллельными осям координат. 4. Пучок лучей с вершиной в начале координат.
16.	Продолжите фразу: «Эластичность взаимозаменяемости ресурсов показывает, на сколько процентов должно измениться отношение затрат двух ресурсов, чтобы ...	1. ... затраты первого ресурса увеличились на 1%». 2. ... затраты второго ресурса уменьшились на 1%». 3. ... предельная норма замещения ресурсов увеличилась на 1%». 4. ... предельная норма замещения ресурсов уменьшилась на 1%».

№	Условие	Варианты ответов
17.	Известно, что предельные производительности ресурсов постоянны и явно входят в аналитическое задание ПФ. Определить вид функции.	1. Линейная. 2. С постоянными пропорциями. 3. Кобба-Дугласа. 4. С постоянной эластичностью замены.
18.	Какая характеристика многофакторной производственной функции показывает, на сколько процентов должно измениться отношение затрат двух ресурсов, чтобы предельная норма их замещения увеличилась на 1%?	1. Темп изменения функции. 2. Коэффициент эластичности одного ресурса п другому. 3. Коэффициент эластичности взаимозаменяемости ресурсов. 4. Коэффициент прироста ной ресурсоотдачи.
19.	Для двухфакторной производственной функции известно оптимальное соотношение используемых ресурсов. Оно равно $\frac{2}{3}$. Какая это функция?	1. $Y = 6K^{\frac{1}{3}}L^{\frac{1}{3}}$. 2. $Y = 2X_1 + 3X_2 + 5$. 3. $Y = min\left\{\frac{X_1}{6}, \frac{X_2}{9}\right\}$. 4. $Y = 15min\left\{\frac{X_1}{5}, \frac{X_2}{10}\right\}$.
20.	Используя свойства эластичности вычислите эластичность функции $y = x^4 \ln x$.	1. $4lnx$. 2. $4 + lnx$. 3. 4. 4. $4 + \frac{1}{lnx}$.

Раздел II. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ И РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ГЛАВА 1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Дифференциальное уравнение является одним из основных математических объектов. Аппарат дифференциальных уравнений широко и эффективно применяется при построении и анализе математических моделей экономических объектов и явлений.

Дифференциальное уравнение — это уравнение, в котором роль неизвестной величины играет функция одной или нескольких переменных. Оно выражает зависимость между аргументом (или аргументами), неизвестной функцией от этих аргументов и её производными (частными производными). **Обыкновенным** называется дифференциальное уравнение относительно функции одной независимой переменной.

1.1. Задачи, приводящие к понятию дифференциального уравнения

Задача 1. В баке находится 100 л раствора, содержащего 10 кг соли. В бак непрерывно подается вода — 5 л в минуту, которая перемешивается с имеющимся раствором. Смесь вытекает из бака с такой же скоростью. Сколько соли останется в баке через t мин? В частности, сколько соли останется в баке через 1 час?

Решение. Обозначим через y — количество соли в баке через t минут: $y = y(t)$. В частности, $y\ (0) = 10$ кг (в некоторый момент времени в баке было 10 кг соли). Рассмотрим промежуток времени $(t,\ t + \Delta t)$, где Δt — достаточно малое число. Тогда можно считать скорость уменьшения соли в баке приблизительно постоянной и равной $\frac{y(t)}{100}\times 5$ литров в минуту.

За время Δt количество соли в баке уменьшится на $\frac{y(t)}{20}\Delta t$ т. е. $\Delta y \approx -\frac{y}{20}\Delta t$ (знак минус показывает, что количество соли уменьшается). Тогда

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} \approx -\frac{y}{20}.$$

Переходим к пределу (считая, что он существует):

$$\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t} = -\frac{y}{20}\text{, т. е. } y'(t) = -\frac{y(t)}{20}. \qquad (1)$$

Мы получили соотношение (уравнение), которое связывает время t, функцию $y(t)$ и её производную $y'(t)$. Это — дифференциальное уравнение.

Итак, получили математическую задачу: найти функцию (или функции), удовлетворяющую уравнению (1).

Можно проверить непосредственно, что при любом числе C функция

$$y = C\ell^{\frac{-t}{20}} \qquad (2)$$

удовлетворяет уравнению (1) (т. е. является его решением).

Чтобы найти решение нашей задачи, вспомним, что при $t = 0$ количество соли $y = 10$, т. е.

$$10 = C\cdot\ell^{-\frac{0}{20}}.$$

Отсюда, $C = 10$. Следовательно, функция $y = 10\,\ell^{-\frac{t}{20}}$ и есть ответ на первый вопрос задачи. Через 1 час в баке будет соли:

$$y\,(60) = 10\,\ell^{-\frac{60}{20}} = \frac{10}{\ell^3} \approx 0{,}5 \text{ кг.}$$

Задача 2. Известно, что скорость распада радия прямо пропорциональна наличному количеству радия. Требуется определить количество радия в любой момент времени t.

Решение. Пусть количество радия в момент времени t равно $y = y(t)$. Скорость изменения количества радия равна $\frac{dy}{dt}$. Если обозначим коэффициент пропорциональности буквой K, то получим дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dt} = -Ky. \qquad (3)$$

Если сравним уравнения (1) и (3), то увидим, что (1) есть частный случай (3), когда $K = 1/20$, т. е. эти две задачи приводят к одному и тому же дифференциальному уравнению, что позволяет решать задачи из различных областей при помощи одного и того же математического аппарата.

Решим уравнение (3).

Из (3) получаем $\frac{dy}{y} = -Kdt.$ Отсюда

$$\int\frac{dy}{y} = -\int Kdt.$$

Результат интегрирования:

$$ln|y| = -Kt + C,\ C \in R.$$

Или, окончательно,

$$y = e^{-Kt+C},\ C \in R.$$

Задача 3. Скорость распространения рекламы (число потенциальных покупателей, узнавших о данном товаре в течение одной единицы времени) считается пропорциональной, как числу осведомлённых (с момента времени t) покупателей $x(t)$, так и числу покупателей, до которых может дойти данная реклама $N - x(t)$. Дифференциальное уравнение относительно функции $x(t)$, где t — время, отсчитываемое от момента дачи рекламных объявлений, имеет вид:

$$\frac{dx}{dt} = kx(N - x).$$

Задача 4. Движение тела, брошенного под углом к горизонту, может быть описано с помощью системы дифференциальных уравнений относительно координат

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -g,$$

где g — ускорение свободного падения, t — время, отсчитываемое от начала движения.

Задача 5. Функция спроса $d = f(p)$ является решением дифференциального уравнения

$$\frac{p}{f(p)} \cdot f'(p) = \frac{k}{f(p)}, \ k < 0,$$

если известно, что в рассматриваемый период времени эластичность спроса по цене обратно пропорциональна спросу на данный товар.

Задача 6. Составим дифференциальное уравнение для нахождения семейства кривых, обладающих следующим свойством: отрезок любой касательной к кривой, заключённый между осями координат, делится точкой касания пополам.

Решение. Уравнение касательной t к кривой $y = f(x)$ в точке $M(x, f(x))$ запишем в виде

$$Y = f(x) + f'(x)(X - x),$$

Обозначив X и Y координаты точки, лежащей на касательной t. В точке A абсцисса $X = 0$. Следовательно, $Y = f(x) - x\ f'(x)$.

В точке B ордината $Y = 0$. Значит

$$X = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

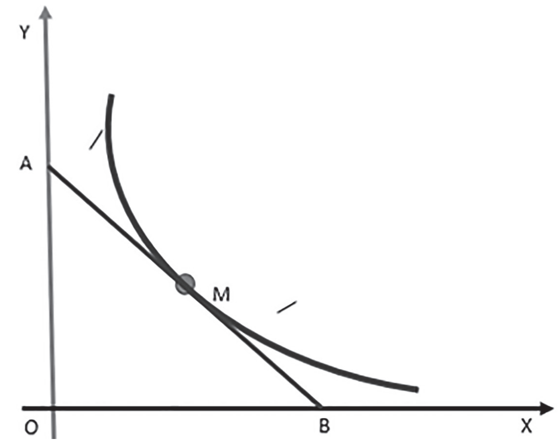

Рис. 1. Задача 6

Итак, точки A, M, B имеют следующие координаты:

$$A\,(0;\ f(x) - xf'(x)),\ M(x, f(x)),\ B\,(x - \frac{f(x)}{f'(x)},\ 0).$$

Отсюда

$$AM^2 = x^2 + x^2\left(f'(x)\right)^2,$$

$$BM^2 = \frac{\left(f(x)\right)^2}{\left(f'(x)\right)^2} + \left(f(x)\right)^2.$$

Поскольку AM = BM ($AM^2 = BM^2$), можем приравнять правые части равенств:

$$x^2 + x^2\left(f'(x)\right)^2 = \frac{\left(f(x)\right)^2}{\left(f'(x)\right)^2} + \left(f(x)\right)^2.$$

Выносим за скобку общие множители:

$$x^2\left(1 + \left(f'(x)\right)^2\right) = \frac{\left(f(x)\right)^2}{\left(f'(x)\right)^2}\left(1 + \left(f'(x)\right)^2\right).$$

Деля обе части уравнения на

$$1+\left(f'(x)\right)^2 \neq 0,$$

получаем

$$x^2 = \frac{\left(f(x)\right)^2}{\left(f'(x)\right)^2},$$

что равносильно

$$\frac{\left(f'(x)\right)^2}{\left(f(x)\right)^2} = \frac{1}{x^2}$$

или

$$\frac{(y')^2}{y^2} = \frac{1}{x^2}.$$

Отсюда

$$\frac{y'}{y} = \pm\frac{1}{x}.$$

Заменим y' отношением дифференциалов $\frac{dy}{dx}$. Получим

$$\frac{dy}{ydx} = \pm\frac{1}{x}$$

или

$$\frac{dy}{y} = \pm\frac{dx}{x},$$

что равносильно

$$d\ln|y| = \pm\ d\ln|x|.$$

Из равенства

$$d\ln|y| = d\ln|x|$$

следует

$$\ln|y| = \ln|x| + \ln|C|,\ C \neq 0.$$

(константу записываем в форме логарифма с целью упрощения формы записи искомой функции). Используя свойства логарифмов, приходим к уравнениям вида

$$y = Cx,\ C \neq 0, \tag{4}$$

а из равенства

$$d\ln|y| = -d\ln|x|$$

получаем

$$\ln|y| = \ln|x|^{-1} + \ln|C|$$

или

$$y = \frac{C}{x}, C \neq 0. \tag{5}$$

(5) — общее решение построенного дифференциального уравнения. Графики соответствующих функций — гиперболы. (4) — пучок прямых, проходящих через начало координат. Так как касательной к прямой линии в любой её точке является сама эта прямая, то для каждой прямой из (4) $AM = BM = 0$.

Исключая из рассмотрения вырожденный случай, приходим к выводу, что указанными свойствами обладает каждая из гипербол (рис. 2)

$$y = \frac{C}{x}, C \in (-\infty,\ 0) \cup (0,\ +\infty).$$

Задача 7. Известно, что спрос D на какой-то товар зависит от момента времени t, цены на этот товар (которая также зависит от t) $y(t)$ и скорости изменения этой цены, т. е. $y'(t)$. Эту зависимость можно найти (например, экспериментально), по крайней мере, приближенно:

$$D = f_1(t, y(t), y'(t)).$$

Аналогично можно выразить предложение S этого же товара:

$$S = f_2(t, y(t), y'(t)).$$

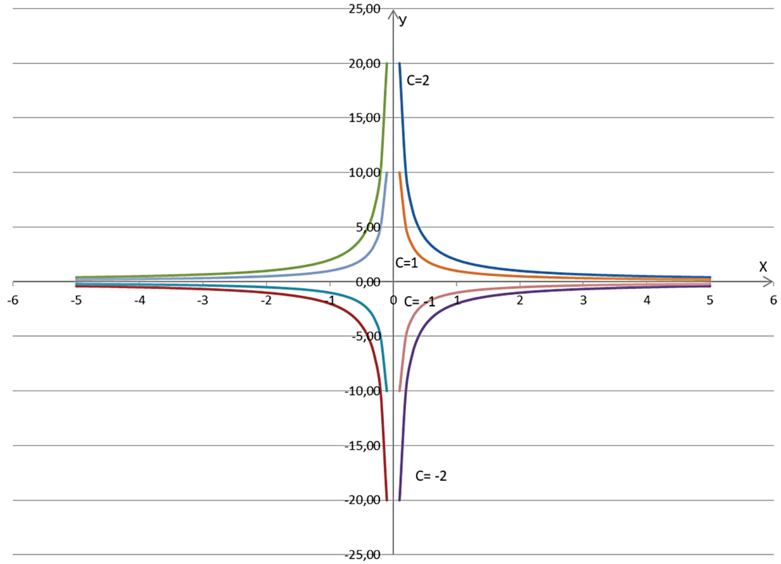

Рис. 2. Интегральные кривые уравнения из задачи 6

Какова должна быть цена на товар в момент времени t для того, чтобы наступило равновесие, т. е. чтобы спрос равнялся предложению: $D = S$?

Получим дифференциальное уравнение

$$f_1(t, y(t), y'(t)) = f_2(t, y(t), y'(t)) .$$

Задача 8. Уравнение кривой, в каждой точке которой угловой коэффициент касательной равен сумме координат этой точки, находится из уравнения

$$y' = x + y \qquad (6)$$

или

$$f'(x) = x + f(x).$$

Оно содержит независимую переменную, искомую функцию и её первую производную. Убедимся в том, что каждая функция вида

$$y = Ce^x - x - 1, \text{ где } C \in R \qquad (7)$$

удовлетворяет (6). Найдём производную функции (7)

$$y' = Ce^x - 1,$$

подставим её и y в уравнение (6):

$$Ce^x - 1 = Ce^x - x - 1 + x.$$

Очевидно, левая часть тождественно равна правой.

Подробное решение уравнения (6) будет приведено ниже.

Полагая $x = -1$, а $y = 0$, получим $C = 0$ и

$$y = -x - 1.$$

Задача 9. Известно, что темп изменения функции затрат $K = F(x)$ прямо пропорционален объёму выпускаемой продукции x. Определить класс функций затрат, обладающих таким свойством.

Решение: темп изменения функции выражается её второй производной. Поэтому

$$K'' = ax, \quad a \in R.$$

Так как $K'' = \left(K'\right)'$, то $\dfrac{dK'}{dx} = ax$ и $K' = \dfrac{a}{2}\, x^2 + b$, a, $b \in R$.

Предельные издержки производства в данном случае выражаются с помощью квадратичной функции. Первообразная квадратичной функции — функция кубическая. Искомые функции имеют вид

$$K = \frac{a}{6}x^3 + b\,x + c, \; a, b, c \in R.$$

1.2. Дифференциальное уравнение и его порядок. Общее, частное и особое решения дифференциального уравнения 1-го порядка. Геометрический смысл дифференциального уравнения 1-го порядка

Общий вид обыкновенного дифференциального уравнения:

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0.$$

Примеры:

$$y'' - y' + 2xy = 3sinx \tag{8}$$

$$5y''' + y'' - 2xy = 0 \tag{9}$$

$$\sqrt{\frac{y'' + y'}{y}} = y\frac{3x}{y'}. \tag{10}$$

Определение 1. Порядком дифференциального уравнения называется наивысший порядок производной, входящей в уравнение.

Например, уравнения (8) и (10) — второго порядка, (9) — третьего, (1), (3) — первого.

Определение 2. Решением обыкновенного дифференциального уравнения называется всякая функция $y = U(x)$ такая, что при подстановке этой функции и её производных в уравнение вместо y, y', ..., $y^{(n)}$ получаем тождественное равенство.

Пример. Дано уравнение

$$y'' + y = 0. \tag{11}$$

Функции $y = 3cosx$; $y = sinx$; $y = 2sinx - 5cosx$ являются решениями уравнения (11). Убедимся в том, что:

а) при любых значениях C_1 и C_2 функция $y = C_1 \, sinx + C_2 \, cosx$ является решением уравнения (11).

б) функция $y = 3x + 1$ не является решением (11).

Решение.

а) $y' = C_1 cosx - C_2 sinx$, $y'' = -C_1 sinx - C_2 cosx$.

Отсюда,

$y'' + y = -C_1 sinx - C_2 cosx + C_1 \, sinx + C_2 \, cosx = 0.$

б) Если $y = 3x + 1$, то $y' = 3$, а $y'' = 0$ и $y'' + y \neq 0$.

Объектом нашего внимания становятся обыкновенные дифференциальные уравнения **первого порядка.** В общем виде они записываются так:

$$F(x, y, y') = 0. \tag{12}$$

Присутствие производной в уравнении обязательно. Сама функция и/или её аргумент могут отсутствовать. Иногда удаётся явно выразить производную через искомую функцию и/или её аргумент:

$$y' = f(x, y). \tag{13}$$

В этом случае говорят, что уравнение разрешено относительно производной. См., например, задачи 1, 2, 3, 8.

Замечания:

1) Часто невозможно записать решение в виде $y = U(x)$ (т. е. в явном виде), а удается найти математическое соотношение, связывающее зависимую и независимую переменную. Такое соотношение называется **интегралом дифференциального уравнения**. Оно задает решение неявно. Например, для уравнения $(x - y^2 + 3)\, y' + x + y = -1$ соотношение $\frac{x^2}{2} + x + xy - \frac{y^3}{3} + 3y = 0$ является интегралом. Это можно проверить, вычислив y' по правилам дифференцирования функции, заданной неявно и подставить функцию и её производную в уравнение.

2) Дифференциальным уравнением первого порядка называют также уравнение вида

$$A(x, y)dx + B(x, y)dy = 0, \tag{14}$$

связывающее переменные x и y и их дифференциалы.

3) График решения ДУ называется интегральной кривой этого уравнения.

Семейство функций, зависящих от параметра.

Рассмотрим выражение

$$y = \Phi(x, C),$$

где C — некоторый параметр, пробегающий всё множество действительных чисел или некоторое его подмножество. При каждом допустимом значении $C = C_0$ имеем функцию одной переменной

$$y = \Phi(x, C_0) = \gamma(x).$$

Таким образом, перебирая значения параметра C, получаем множество («семейство») функций.

Пример. $y = \dfrac{1}{Cx}$, где $c \neq 0$.

При $c = 1$ имеем $y = \dfrac{1}{x}$. Если $c = ½$, то $y = 2/x$.

Семейство функций можно задать разными способами, выбирая различным образом параметр c. Например, в нашем примере можно заменить $\dfrac{1}{c}$ на $k \neq 0$.

Иногда удается множество значений параметра c изменить так, что в семейство функций войдут дополнительные (интересующие нас) функции или объединить два или большее число множеств.

Так, если во множество решений не входит функция $y = 0$, то убрав ограничение $c \neq 0$, получаем семейство $y = \dfrac{c}{x}$ (c — любое действительное число), куда входит и функция $y = 0$.

Или рассмотрим два семейства функций:

$y = \ell^{x+c}$ (c — любое действительное число),

$y = -\ell^{x+c}$ (c — любое действительное число).

Обозначаем ℓ^c через $C > 0$. Получаем

$$y = C\ell^x \ (C > 0),$$

$$y = -C\ell^x \ (C > 0).$$

Если запишем $y = C\ell^x$ ($C \neq 0$), то получим объединение двух семейств.

4) Графически, семейство функций задает на плоскости множество (семейство) кривых. Для того, чтобы выделить из семейства функций одну функцию, нужно задать какие-то дополнительные требования. Очень часто такими требованиями являются так называемые начальные условия: $y(x_0) = y_0$. Графически это означает, что мы из семейства кривых «вызываем» кривую, проходящую через точку (x_0, y_0).

Например, из семейств $y = \dfrac{k}{x}$ требуется взять функцию, удовлетворяющую условию: $y(1) = 2$.

Для этого, подставляя в уравнение семейства $x = 1$ и $y = 2$, получим $c = 2$. Следовательно, $y = \dfrac{2}{x}$ — искомая функция.

Определение 3. Общим решением дифференциального уравнения (ДУ) первого порядка называется функция $y = g(x, C)$, зависящая от одного параметра С и удовлетворяющая следующим требованиям:

а) при любом допустимом значении параметра $C = C_0$ соответствующая функция одной переменной является решением данного ДУ;

б) каковы бы ни были допустимые значения x_0 и y_0, можно найти такое значение $C = C_0$, что функция $y = g(x, C_0)$ будет удовлетворять условиям $y = y_0$ при $x = x_0$:

$$y_0 = g(x_0, C_0).$$

Равенства $x = x_0$, $y = y_0$ называются **начальными условиями** данного ДУ.

Значение C_0 — решение уравнения

$$y_0 = g(x_0, C).$$

Определение 4. Решение, получаемое из общего при конкретном допустимом значении $C = C_0$ называется **частным решением ДУ.**

Определение 5. Решение, которое не может быть получено из общего ни при каких значениях параметра С, называется **особым.**

Пример. $y' = 3\sqrt[3]{y^2}$.

Можно убедиться (проверкой), что $y = (x + c)^3$ (c — любое действительное число) является общим решением этого ДУ. Решение $y = 0$ — его особое решение.

5) Выяснение того, каким условиям должны удовлетворять функции f (или F), чтобы ДУ (12) или (13) имело единственное решение, удовлетворяющее данным начальным условиям, составляет содержание известной «задачи Коши». Приведём один из вариантов её решения.

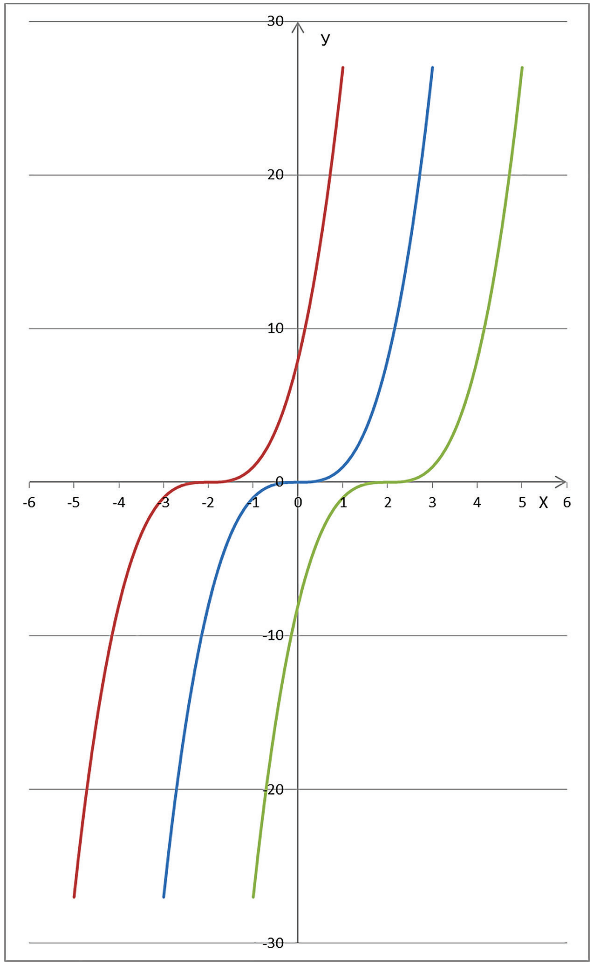

Рис. 3. Интегральные кривые (пример стр. 131)

Теорема. Если в уравнении (13)

$$y' = f(x, y)$$

функция f и её частная производная $\partial f/\partial y$ по y определены и непрерывны в некоторой области $M \subset xOy$, содержащей точку (x_0, y_0), то существует единс единственное решение этого уравнения, удовлетворяющее данным начальным условиям ($y = y_0$ при $x = x_0$).

1.3. Дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными

Пусть дано уравнение

$$F(x, y, y') = 0.$$

Иногда удается записать уравнение в виде

$$A(x)dx = B(y)dy, \qquad (15)$$

где $A(x)$ не зависит от переменной y (т. е. зависит только от x), а $B(y)$ не зависит от x (т. е. зависит только от y), причем $A(x)$ и $B(y)$ — интегрируемые функции. Такое уравнение называется **уравнением с разделёнными переменными.**

Если функции f, A, B в уравнениях (13) и (14) могут быть представлены в виде произведений двух сомножителей, каждый из которых зависит только от одной переменной x или y, то уравнение называется **ДУ с разделяющимися переменными.** В этом случае уравнения могут быть приведены к виду (15).

Рассмотрим это на примере.

Пример 1. $y' = -\dfrac{x\sqrt{1+y^2}}{y\sqrt{1+x^2}}$.

Решение. 1. Правая часть уравнения — произведение сомножителей, первый из которых зависит только от x, а второй — только от y:

$$y' = -\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{\sqrt{1+y^2}}{y}.$$

Значит, это уравнение с разделяющимися переменными.

2. Производную запишем в виде отношения двух дифференциалов:

$$y' = \frac{dy}{dx}.$$

3. Обе части уравнения умножим на dx:

$$dy = -\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{\sqrt{1+y^2}}{y} dx.$$

4. Разделяем переменные с помощью деления обеих частей уравнения на дробь, содержащую у:

$$\frac{ydy}{\sqrt{1+y^2}} = -\frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}$$

5. Интегрируем левую часть по y, правую по x:

$$\int \frac{ydy}{\sqrt{1+y^2}} = -\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx.$$

Отсюда получаем

$$\sqrt{1+y^2} = -\sqrt{1+x^2} + C \ (C \in R).$$

В процессе преобразований делили обе части уравнения на $\frac{\sqrt{1+y^2}}{y}$. Это выражение в нуль не обращается ни при каких значениях y. То есть операция была законной. Особых решений уравнение не имеет.

Итак, общий интеграл:

$$\sqrt{1+y^2} = -\sqrt{1+x^2} + C, \ (C \in R).$$

Пример 2. $xy' = y^2 - y$

1. $y' = \frac{1}{x}\left(y^2 - y\right)$ – уравнение с разделяющимися переменными.

2. $x\frac{dy}{dx} = y^2 - y$.

3, 4. $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y^2 - y}$.

5. Представляем дробь относительно y в виде суммы простейших дробей I типа

$$\frac{1}{y^2 - y} = \frac{1}{y-1} - \frac{1}{y}.$$

Интегрируем:

$$\int \frac{1}{y-1} dy - \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}.$$

Получаем

$$\ln|y-1| - \ln|y| = \ln|x| + \ln|c|, \ c \neq 0.$$

Используя свойства логарифмов, упрощаем форму записи общего решения:

$$\frac{y-1}{y} = xc, \ c \neq 0. \qquad (16)$$

При разделении переменных делили на y и $y - 1$. Предполагалось, что каждый из делителей не равен нулю. Это могло привести к потере решений. Проверим

а) являются или нет решениями данного уравнения функции $x = 0$, $y = 0$ и $y = 1$?

б) если «да», то входят или нет в состав общего решения?

Для обеих функций $y = 0$, $y = 1$ производные равны нулю. Подставляя исследуемые функции и их производные уравнения убеждаемся, что и $y = 0$, и $y = 1$ — решения данного ДУ.

Подставляем $y = 1$ в общее решение (16), находим $c = 0$. В формуле (16) исключим ограничение на параметр, тем самым включим в неё ещё одно решение. Очевидно, не существует значения c, при котором из (16) получается $y = 0$.

Значит $y = 0$ — особое решение. $x = 0$ не является решением исходного уравнения.

Ответ. $\left[\begin{array}{l} \dfrac{y-1}{y} = xc,\ c \in R, \\ y = 0. \end{array}\right.$

Пример 3. Найти общее и частное решение дифференциального уравнения

$$\operatorname{tg} x\, dy = (2y + 1)\, dx,\ y(\pi/4) = 1/2.$$

Чтобы прийти к уравнению с разделёнными переменными, необходимо обе части уравнения разделить на $tg\,x$ и $2y + 1$, предположив, что оба эти выражения отличны от нуля. Получаем

$$\frac{dy}{2y+1} = \frac{dx}{tg\,x}.$$

Интегрируем левую часть по y, а правую — по x. Получаем

$$\frac{1}{2} ln|2y+1| = ln|sinx| + ln|C|,\ C \neq 0.$$

Отсюда

$$ln|2y+1| = ln sin^2 x \cdot C^2,\ C \neq 0$$

и общее решение может быть записано в виде

$$y = \frac{1}{2}\left(C^2 sin^2 x - 1\right)$$

или

$$y = C_1 sin^2 x - \frac{1}{2},\quad C_1 = \frac{1}{2} C^2 > 0. \qquad (17)$$

Нетрудно убедиться, что $y = -\frac{1}{2}$ – решение данного дифференциального уравнения. При $C_1 = 0$ это решение может быть получено из формулы (17). Чтобы описать всё множество решений, разрешим параметру в (17) принимать все неотрицательные значения.

Чтобы найти частное решение, соответствующее заданным начальным условиям, в (17) подставим $x = \frac{\pi}{4}, y = \frac{1}{2}$, получим $C_1 = 1$. Значит, искомое частное решение имеет вид

$$y = sin^2 x - \frac{1}{2}.$$

4. Однородные функции.

Определение 5: Функция двух переменных

$$u = f(x, y)$$

называется **однородной,** если для любой точки (x, y) из области определения функции и любого числа $t \neq 0$ имеет место равенство

$$f(t\,x, t\,y) = f(x, y)$$

Пример. а) $f(x,y) = \frac{x}{y}$. б) $\frac{x^2 + 3y^2}{2x^2 - 5y^2 + 3xy} = f(x,y)$..

в) $g(x, y) = ln\,x - ln\,y$.

Проверим, например, в случае б), что $f(x, y)$ — однородная функция.

$$f(tx,ty) = \frac{(tx)^2 + 3(ty)^2}{2(tx)^2 - 5(ty)^2 + 3(tx)(ty)} = \frac{t^2(x^2 + 3y^2)}{t^2(2x^2 - 5y^2 + 3xy)} = $$
$$= f(x,y).$$

Нам понадобится следующее свойство однородной функции.

Свойство. Однородную функцию всегда можно записать в виде некоторой функции от аргумента $г = \frac{y}{x}$.

$$f(x,y) = \phi\left(\frac{y}{x}\right),\ (x \neq 0).$$

Доказательство. Пусть $(x,y) \in D_F$. Возьмём $t = 1/x$ $(x \neq 0)$.

Тогда

$$f(x,y) = f(tx,ty) = f\left(1,\frac{y}{x}\right) = \phi\left(\frac{y}{x}\right)$$

и, в нашем примере,

$$\frac{x^2+3y^2}{2x^2-5y^2+3xy} = \frac{1+3\left(\frac{y}{x}\right)^2}{2-5\left(\frac{y}{x}\right)^2+3\frac{y}{x}}.$$

1.5. Однородные уравнения 1-го порядка и их решения

Определение: Уравнение первого порядка

$$y' = f(x,y)$$

называется **однородным,** если функция $f(x,y)$ — однородная.

Процесс решения однородного уравнения легко сводится к решению вспомогательного уравнения с разделяющимися переменными.

Для этого введём в рассмотрение новую функцию

$$u(x) = \frac{y(x)}{x},$$

т. е. $y = xu$, $y' = xu' + u$.

На основании свойства однородных функций

$$f(x,y) = \phi\left(\frac{y}{x}\right) = \phi(u),$$

получаем $xu' + u = \varphi(u)$.

Отсюда

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x}\cdot\left(\varphi(u) - u\right).$$

Это уравнение с разделяющимися переменными. Решая его, находим

$$u = u(x).$$

Окончательно,

$$y = x\cdot u(x).$$

Пример 4.

$$y^2 + x^2\frac{dy}{dx} = xy\frac{dy}{dx}$$

1. Проверим, является ли это уравнение однородным.

Для этого нет необходимости приводить уравнение к виду $y' = f(x,y)$. Достаточно убедиться в том, что при замене x и y на $t\ x$ и $t\ y$, соответственно, уравнение не меняется. Из

$$(ty)^2 + (tx)^2\frac{dy}{dx} = (tx)(ty)\frac{dy}{dx}.$$

получаем

$$y^2 + x^2\frac{dy}{dx} = xy\frac{dy}{dx}.$$

Следовательно, данное уравнение однородное.

1. Производим замену переменной

$$\frac{y}{x} = u, \text{ т. е. } y = x\cdot u,$$

$$y' = u(x) + xu'(x).$$

Имеем $x^2u^2 + x^2(u + u'x) = x^2u(u + u'x)$

или $u^2 + u + xu' = u^2 + uxu'$.

Разделяем переменные

$$\frac{u-1}{u}du = \frac{1}{x}dx,$$

упрощаем и интегрируем:

$$u - \ln|u| = \ln|x| + \ln|c|,\ c \neq 0.$$

Используя свойства логарифмов, записываем общее решение вспомогательного уравнения в виде:

$$u = \ln|cux|,\ c \neq 0 .$$

Так как в процессе преобразований мы делили на u, то могли потерять решение $u = 0$. Нетрудно убедиться в том, что $u = 0$ — решение вспомогательного уравнения, которое не может быть получено из общего решения ни при каком значении параметра c.

Итак, решение вспомогательного уравнения имеет вид:

$$ux = \frac{1}{c}e^{u} \text{ , где } c \neq 0 \text{ и } u = 0.$$

Или, окончательно:

$$y = c \cdot e^{\frac{y}{x}},\ c \in R \text{ . (} \frac{1}{c} \text{ заменили на } c\text{).}$$

Пример 5.

$$\begin{cases} (x+2y) - xy' = 0, \\ y(2) = 3 \end{cases}$$

1. Убедимся в том, что уравнение однородное.
2. Делаем замену $y = zx$; $y' = z + xz'$. После подстановки этих выражений в ДУ, имеем

$$x + 2zx - xz - x^2 z' = 0 .$$

Откуда $1 + 2z - z = x\dfrac{dz}{dx}$, и, окончательно,

$$\frac{dz}{1+z} = \frac{dx}{x} .$$

2. В результате интегрирования получаем:

$$\ln|1+z| = \ln|x| + \ln|c| \ (c \neq 0).$$

$$\begin{cases} 1+z = cx \\ 1+z \neq 0 \end{cases} (c \neq 0).$$

4. Легко убедиться в том, что $z = -1$ также является решением вспомогательного уравнения, поэтому решение ДУ имеет вид

$$z = cx - 1 \ (c \in R).$$

Отсюда $\dfrac{y}{x} = cx - 1$

или, окончательно, $y = cx^2 - x$.

5. Найдём частное решение, соответствующее данным начальным условиям. Подставим в общее решение $x = 2$, $y = 3$. Из уравнения

$$\frac{3}{2} = c \cdot 2 - 1$$

найдём $c = 1{,}25$.

Ответ. Частное решение имеет вид $y = 1{,}25\, x^2 - x$. $y = cx^2 - x$ (c — любое действительное число) — общее решение.

1.6. Линейные уравнения первого порядка и их решение

Определение. Линейным уравнением первого порядка называется уравнение вида

$$p(x)\ y' + q(x)\ y = r(x) , \tag{18}$$

где $p(x)$, $q(x)$ и $r(x)$ — известные функции аргумента x. y — искомая функция от x, $p(x) \neq 0$. Таким образом, линейное уравнение должно быть линейным относительно y и y'.

Пример 5:

$$2xy' - 2x^2 y = \sin x ,$$

$$y' = 2xy - \sin x ,$$

$$y + 2xy' = 3x^2 y + \sin x \cdot y' .$$

Линейные уравнения первого порядка решаем **методом Бернулли.**

Он заключается в следующем.

1. Так как любая элементарная функция бесчисленным множеством способов может быть представлена в виде произведения двух сомножителей, то решение будем искать в виде произведения двух функций. Вводим в рассмотрение две новые функции $u(x)$ и $v(x)$ так, чтобы $y = uv$.

У нас теперь две неизвестные функции. Одну из них можем выбрать удобным для нас способом. Помимо условия (17), мы можем потребовать выполнение ещё одного условия. Это сделаем в процессе работы. Вычислим

$$y' = uv' + u'v .$$

2. Подставляем выражения для y и y' в (18). Получим:

$$p(x)\ uv' \ +\ p(x)\ u'v\ +\ q(x)\ uv = r$$

3. Группируем все слагаемые, содержащие u (или, если угодно, v).

$$(\ p(x)\ v' + q(x)v)u + p(x)u'v = r \qquad (19)$$

4. Теперь можем наложить дополнительное условие, о котором говорилось выше. Пусть

$$p(x)\ v' + q(x)v = 0 .$$

Получаем дифференциальное уравнение относительно v и x. Это ДУ с разделяющимися переменными. Решая его, находим какую-нибудь функцию v, удовлетворяющую указанному уравнению. (ищется **частное**, а не общее решение).

5. Найденную функцию подставляем в (18). Получаем

$$p(x)\ u'v = r \ —$$

уравнение с разделяющимися переменными относительно u и x. Находим его **общее** решение.

6. Пишем ответ: $y = uv$.

Пример 6. $x^2y' - xy - (1+x^2) = xy - y'$ или

$$(1+x^2)y' - 2xy = 1 + x^2 .$$

1.Уравнение линейное относительно y.

2. $y = u(x)v(x);\ \ y' = uv' + v'u$.

3. $(1+x^2)\ (uv' + u'v) - 2xuv = 1 + x^2$

4. $\left(\left(1+ \ ^2\right)\ ^{/} - 2 \qquad \right) + \left(1+ \ \ ^2\right) \qquad ^{/} = 1 + \ \ ^2.$

5. $\left(1+x^2\right)$ — первое вспомогательное уравнение.

6. Разделяем переменные и интегрируем:

$$\frac{du}{u} = \frac{2xdx}{1+x^2};\ \ \ln|u| = \ln\,(1+x^2)\,.$$

7. Находим частное решение: $u = 1 + x^2$.

8. Подставляем найденную функцию в п. 4: $(1+x^2)^2$ $\dfrac{dv}{dx} = 1 + x^2$.

Отсюда

$$dv = \frac{dx}{1+x^2}\ .$$

9. Из последнего уравнения находим все возможные функции v: $v = arctgx + c$.

10. Записываем ответ:

$$y = uv = \ (1+x^2)\,(\,arctgx + c\,).$$

Пример 7. $y' = x + y$ (См. п. 1. Задача 8).

1-й способ (метод Бернулли)

Это линейное относительно y уравнение. Пусть $y = UV, y' = U'V + UV'$. Подставляем в уравнение:

$$U'V + UV' = x + UV.$$

Переносим произведение вспомогательных функций в левую часть уравнения, группируем слагаемые содержащие, например, U:

$$U'V + U(\,V' - V\,) = x.$$

Составляем два вспомогательных уравнения с разделяющимися переменными:

1) $V' = V$.

2) $U'V = x$.

Решением первого уравнения является функция $V = e^x$. Подставляем найденную функцию во второе уравнение:

$$U'e^x = x.$$

Разделяем переменные

$$dU = x\, e^{-x} dx.$$

Интегрируем, применяя в правой части метод интегрирования по частям. Получаем

$$U = -e^{-x}(x+1) + C.$$

И, окончательно, $y = UV = Ce^x - x - 1,\ C \in R$.

2-й способ (метод вариации постоянной)

1. Решаем однородное уравнение, соответствующее данному линейному неоднородному уравнению:

$$y' - y = 0.$$

Отсюда $\dfrac{dy}{dx} = y$ или $\dfrac{dy}{y} = dx$. Интегрируем и получаем $ln|y| = x + C$. Используем определение логарифма:

$$y = e^{x+C}.$$

Преобразуем правую часть

$$e^{x+C} = e^x e^c = \tilde{C} e^x.$$

Общее решение однородного уравнения запишется в виде

$$y = \tilde{C} e^x. \tag{20}$$

2. В уравнении (20) константу $\tilde{C}$ заменим на функцию аргумента x. В исходное уравнение подставим

$$y = \tilde{C}(x)\cdot e^x,\ y' = \tilde{C}'(x)e^x + \tilde{C}(x)\cdot e^x.$$

Решаем уравнение с разделяющимися переменными

$$\tilde{C}'(x)e^x = x:$$

заменяем производную искомой функции отношением дифференциалов функции и аргумента, умножаем обе части уравнения на dx и делим на e^x:

$$d\tilde{C} = e^{-x} x\, dx.$$

Правую часть интегрируем «по частям». Получаем

$$\tilde{C}(x) = -xe^{-x} - e^{-x} + C.$$

Ответ: $y = \tilde{C}(x)\cdot e^x = Ce^x - x - 1, C \in R.$

7. Уравнение Бернулли

Определение. Уравнение вида

$$y' + p(x)y = q(x)y^n, \tag{21}$$

где $p(x)$, $q(x)$ — непрерывные на некотором ПРОМЕЖУТКЕ (a,b) $(-\infty \le a < b \le +\infty)$ функции, n – действительное число, отличное от 0 и 1, называется **уравнением Бернулли.**

Уравнение Бернулли можно свести к линейному дифференциальному уравнению первого порядка. Для этого разделим обе части уравнения на y^n и сделаем подстановку $z = y^{1-n}$, где z – новая неизвестная функция аргумента x. При этом получим линейное уравнение вида

$$z' + (1-n)p(x)z = (1-n)q(x).$$

Заметим, что при делении обеих частей уравнения (21) на y^n при $n > 0$ возможна потеря решения $y = 0$.

Пример 8. Решить уравнение

$$\frac{dy}{dx} + 2xy = -2x^3y^2.$$

Решение. Обе части уравнения разделим на y^2 $(y \ne 0)$, тогда будем иметь:

$$y^{-2}\frac{dy}{dx} + 2xy^{-1} = -2x^3. \tag{22}$$

Положим $y^{-1}=z$, откуда $z'=-y^{-2}y'$. В силу введенной подстановки уравнение (22) можно записать следующим образом:

$$-z'+2xz=-2x^3$$

или

$$z'-2xz=2x^3.$$

Последнее уравнение — линейное относительно функции z. Его общее решение имеет вид

$$z=-\left(x^2+1\right)+Ce^{x^2},$$

где C — произвольная константа. Отсюда, учитывая, что $z=y^{-1}$, записываем общий интеграл исходного уравнения

$$\frac{1}{y}=-\left(x^2+1\right)+Ce^{x^2} \quad \left(y\neq 0\right).$$

Нетрудно убедиться в том, что функция $y=0$ является решением данного уравнения Бернулли, не входящим в состав общего. Это особое решение.

Заметим, что при интегрировании уравнения Бернулли можно применить **подстановку** $y=uv$ **или метод вариации произвольной постоянной.**

Пример 9. Проинтегрировать уравнение

$$y'-\frac{y}{x}=xy^{\frac{1}{2}}. \tag{23}$$

Решение. 1-й способ. Уравнение (23) — это уравнение Бернулли. Положим $y=uv$, тогда (23) запишется в виде

$$u'v+uv'-\frac{uv}{x}=xu^{\frac{1}{2}}v^{\frac{1}{2}}.$$

или, сгруппировав первое и третье слагаемое в левой части уравнения,

$$\left(u'-\frac{u}{x}\right)v+uv'=xu^{\frac{1}{2}}v^{\frac{1}{2}}.$$

В качестве u выберем частное решение уравнения $u'-\dfrac{u}{x}=0$. Например, пусть $u=x$. Подставим x вместо u в последнее уравнение. Для определения v получим уравнение

$$xv'=x^{\frac{3}{2}}v^{\frac{1}{2}}. \tag{24}$$

Уравнение (24) — это уравнение с разделяющимися переменными, его общий интеграл имеет вид

$$2v^{\frac{1}{2}}-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}=C,$$

откуда

$$v=\left(C_1+\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)^2,$$

где $C_1\left(C_1=\dfrac{C}{2}\right)$– произвольная константа. Следовательно, общее решение уравнения (23) запишем в виде:

$$y=x\left(C_1+\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)^2. \tag{25}$$

Заметим, что при интегрировании уравнения (23) методом разделения переменных мы теряем решение $v=0$, это ведет к потере решения $y=y\left(x\right)=0 \quad \left(x\neq 0\right)$ уравнения (22). Непосредственной проверкой убеждаемся в том, что *y = 0* — решение уравнения (22). Это решение является особым.

2-й способ. Рассмотрим другой способ решения уравнения (23), а именно проинтегрируем его **методом вариации произвольной постоянной.** Запишем однородное уравнение, соответствующее (23) (правую часть уравнения (23) заменим нулём):

$$y'-\frac{y}{x}=0.$$

Его общее решение есть $y=Cx$. Общее решение неоднородного уравнения (23) ищем в виде

$$y = C(x)x\,. \tag{26}$$

Подставим $y = C(x)x$ и $y' = C'(x)x + C(x)$ в левую часть уравнения (22), получим

$$C'(x)x + C(x) - \frac{1}{x}C(x)x = x\left[C(x)\right]^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}},$$

или

$$C'(x) = \left[C(x)\right]^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{dC(x)}{dx} = \left[C(x)\right]^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \left[C(x)\right]^{-\frac{1}{2}} dC(x) = x^{\frac{1}{2}}dx.$$

Проинтегрировав последнее уравнение с разделёнными переменными, находим

$$2\left[C(x)\right]^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \tilde{C},$$

или

$$C(x) = \left(\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}} + C_1\right)^2,$$

где C_1 – произвольная константа, $C_1 = \frac{\tilde{C}}{2}$. Подставляя $C(x)$ в (26), получаем общее решение уравнения (23):

$$y = x\left(\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}} + C_1\right)^2.$$

1.8. Уравнения в полных дифференциалах

Определение. Дифференциальное уравнение вида

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{27}$$

называется уравнением **в полных дифференциалах**, если его левая часть представляет собой полный дифференциал некоторой функции $U(x,y)$ двух независимых переменных x, y.

Общий интеграл такого уравнения имеет вид

$$U(x,y) = C = \text{const}.$$

Следующая теорема дает признак того, что уравнение вида (26) является уравнением в полных дифференциалах.

Теорема. Если функции $M(x,y)$ и $N(x,y)$ непрерывны вместе с частными производными $\frac{\partial M}{\partial y}$ и $\frac{\partial N}{\partial x}$ в некоторой односвязной области D плоскости xOy, то левая часть $M(x,y)dx + N(x,y)dy$ уравнения (26) будет полным дифференциалом некоторой функции $U(x,y)$ тогда и только тогда, когда выполняется тождество

$$\frac{\partial M}{\partial y} \equiv \frac{\partial N}{\partial x}, \quad (x,y) \in D\,. \tag{28}$$

Интегрирование уравнения в полных дифференциалах сводится к нахождению по функциям $M(x,y)$ и $N(x,y)$ соответствующей функции $U(x,y)$. Особые решения отсутствуют.

Пример 10. Проинтегрировать уравнение

$$2xy\,dx + \left(x^2 - y^2\right)dy = 0\,.$$

Решение. Данное уравнение есть уравнение в полных дифференциалах, так как функции $M(x,y) = 2xy$ и $N(x,y) = x^2 - y^2$ непрерывны во всей плоскости вместе со своими частными производными, при этом выполняется условие (28):

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(2xy) = 2x = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 - y^2\right) = \frac{\partial N}{\partial x}\,.$$

Таким образом, левая часть данного уравнения является полным дифференциалом некоторой функции $U(x,y)$. Так как $dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy$, то имеем соотношения

$$\frac{\partial U}{\partial x}=2xy,\quad \frac{\partial U}{\partial y}=x^2-y^2 .$$

Из первого, интегрированием по x, получаем

$$U(x,y)=\int 2xy\,dx+\phi(y)$$

или

$$U(x,y)=x^2y+\phi(y) . \qquad (29)$$

Здесь $\phi(y)-$ непрерывно дифференцируемая функция, постоянная интегрирования. Она зависит от y, так как интегрирование производилось по x. Из (28) находим

$$\frac{\partial U}{\partial y}=x^2+\phi'(y) .$$

Но, с другой стороны,

$$\frac{\partial U}{\partial y}=x^2-y^2 ,$$

поэтому для нахождения ϕ имеем следующее уравнение:

$$x^2+\phi'(y)=x^2-y^2 ,$$

или

$$\phi'(y)=-y^2 .$$

Отсюда

$$\frac{d\phi}{dy}=-y^2 \Rightarrow d\phi=-y^2dy \Rightarrow \int d\phi=-\int y^2dy ,$$

то есть

$$\varphi(y)=-\frac{y^3}{3}+C, \qquad (30)$$

где C — произвольная константа. Подставляя (29) в (28), получим семейство функций

$$U(x,y)=x^2y-\frac{y^3}{3}+C ,$$

для которых левая часть данного уравнения является полным дифференциалом. Таким образом, наше уравнение можно переписать в виде

$$d\left(x^2y-\frac{y^3}{3}\right)=0 ,$$

откуда его общий интеграл имеет вид'

$$x^2y-\frac{y^3}{3}=C .$$

1.9. Задания

1. Определите, к какому из следующих пяти классов принадлежит каждое из приведённых ниже дифференциальных уравнений:

I — с разделяющимися переменными;

II — однородное;

III — линейное;

IV — уравнение Бернулли;

V — другого типа.

Объясните, по каким признакам вы осуществляли свой выбор. Результаты исследования оформите в виде таблицы, состоящей из пяти столбцов.

1.1 $\left(e^{2x}+5\right)dy+ye^{2x}dx=0,$

1.2 $dy=\left(2xy+xe^{-x^2}sinx\right)dx,$

1.3 $\left(3x^2-2xy\right)dy=\left(x^2+3xy-y^2\right)dx,$

1.4 $dy+\frac{2}{x}ydx=y^3dx,$

1.5 $xdy=4\sqrt{x^2+y^2}dx+ydx,$

1.6 $y'=\frac{y}{x+2}+x^2+2x,$ 1.7 $s'=e^{\frac{s}{t}}+\frac{s}{t},$

1.8 $\frac{dx}{dy}=\frac{y+4x}{6y-x}$, 1.9 $cos^2x-y'=y\,tgx,$

1.10 $u' = \frac{u}{v}(lnu - lnv)$, 1.11 $y' = \frac{y-1}{x+y-1}$,

2. Найдите общие решения дифференциальных уравнений. Выделите частные решения, удовлетворяющие указанным начальным условиям.

Определите, какие значения может принимать параметр C в общем решении каждого уравнения. Какой алгебраический смысл имеет параметр в каждом случае? Как его величина влияет на форму и положение соответствующей и интегральной кривой?

2.1. $y' = xe^{-y}$; $x_0 = 1, y_0 = 0$;

2.2. $dy = y\,tg\,x dx$; $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$;

2.3. $y' = \frac{y^2+1}{x^2+1}$; $y(0) = 1$;

2.4. $\left(e^{2x}+1\right)dy + 2ye^{2x}dx = 0$; $x_0 = 0, y_0 = 2$;

2.5. $y' = \frac{y^2}{x^2} + \frac{y}{x}$; $y(1) = 1$;

2.6. $xy' = y + \sqrt{x^2+y^2}$; $y(3) = 4$;

2.7. $(x-y)y' = x+y$; $y\left(\frac{1}{5}\right) = 0$;

2.8. $\frac{s(\ln s - \ln t)}{t} = \frac{ds}{dt} - \frac{s}{t}$; $s(1) = 8$.

3. Проверьте правильность составления вспомогательных дифференциальных уравнений первого порядка, используемых при решении линейных ДУ первого порядка. Решите эти уравнения. Запишите общие решения линейных уравнений.

3.1 $y' + 3x^2y = \frac{2x}{e^{x^2}}$. **3.2** $cosx \cdot y' + tgx \cdot y = tgx$.

1) $v' + 3x^2v = 0$, 2) $\frac{du}{dx}e^{-x^2} = \frac{2x}{e^{x^2}}$. 1) $cosx \cdot v' + tgx \cdot v = 0$,

2) $\frac{du}{dx}e^{-x^2} = \frac{2x}{e^{x^2}}$. 2) $cosx \cdot u' \cdot e^{\frac{1}{cosx}} = tgx$.

3.3 $e^{2\sqrt{1-x^2}}\left(y' - \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}y\right) = 1$. 3.4 $y' - \frac{y}{x} = 2x^2 - 4x + 5$.

1) $u' - \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}u = 0$, 1) $u' = \frac{u}{x}$,

2) $v' = 1$. 2) $xv' = 2x^2 - 4x + 5$.

4. Решите уравнения Бернулли всеми известными вам способами.

4.1 $y' - y = sinx \cdot \sqrt{y}$. **4.2** $xy' - \frac{y}{x+1} = xy^2$.

4.3 $UV' + U^2V = V^3e^{u^2}$. **4.4** $x' + 2x = y\sqrt[4]{x}$

5. Докажите, что при замене независимой переменной x в линейном ДУ на дифференцируемую функцию аргумента t:

$$x = \varphi(t)$$

уравнение остаётся линейным.

6. Докажите, что линейное ДУ остаётся линейным при замене искомой функции $y = f(x)$ на функцию $z = f_1(x)$ в соответствии с формулой $y = p(x)z + q(x)$, где $p(x)$ и $q(x)$ — дифференцируемые функции аргумента x.

7. Докажите, что уравнение вида

$$\frac{dy}{dx} = g(ax+by), \text{ где } a,\ b \in R$$

с помощью подстановки $z = ax + by$ преобразуется в уравнение с разделяющимися переменными.

8. Пусть x_1 и y_1 — координаты пересечения прямых

$$l_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0$$

и

$$l_2: a_2x + b_2y + c_2 = 0.$$

Убедитесь в том, что с помощью преобразований

$$u = x - x_1, \quad v = y - y_1$$

ДУ вида

$$\frac{dy}{dx} = g\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$$

преобразуется в однородное.

9. Найдите замену переменных, с помощью которой уравнение Бернулли

$$y' + p(x)y = q(x)y^n, n \neq 1,$$

сводится к линейному уравнению. Ответ обоснуйте.

10. Существуют или нет решения ДУ $y' = x^2 + y^2 + 1$, имеющие точки экстремума? А точки перегиба?

11 Ни одна из интегральных кривых уравнения $y' = x^5 + 8x$ не имеет точек перегиба. Объясните, почему?

12. Напишите уравнение линии (или линий), на которой лежат точки экстремума $M_0(x_0y_0)$ всех интегральных кривых ДУ $(x - y)dx + (x + y)dy = 0$.

13. Изменение предельной производительности ресурса R от объёма его затрат x и объёма выпуска описывается с помощью обыкновенного ДУ первого порядка

$$y' = \frac{y^3}{x} + \frac{8y^2}{x} + xy - 2y - \frac{7y}{x}.$$

Напишите уравнение множества точек $(x; y)$, соответствующих нейтральной эластичности выпуска относительно затрат R.

14. Составьте дифференциальные уравнения, описывающие следующие ситуации: требуется определить вид функции, выражающей зависимость спроса d на товар от уровня дохода Q индивида, если известен закон изменения предельного спроса с ростом дохода:

а) $6(Q-12)^3$; б) $\frac{4}{1+Q^2}$; в) $\frac{5}{1+(Q-6)^2}$.

В каком случае имеем дело с товарами первой необходимости, второй необходимости, предметами роскоши?

15. Составьте уравнение для определения стоимости оборудования в момент времени t, если скорость обесценения оборудования вследствие его износа пропорциональна (без учёта инфляции) его фактической стоимости.

16. Найдите класс функций, темп изменения для каждой из которых есть величина постоянная, не зависящая от значения аргумента.

17. Известно, что рыночная цена на товар $p(t)$ меняется с течением времени t.

В зависимости от цены и её ожидаемой динамики изменяются спрос d (количество товара, которое хотят и могут приобрести потребители) и предложение S (количество товара, которое имеется на рынке, или может быть доставлено на него). Уровень доходов покупателей, цены на сопутствующие товары и товары-заменители и т. д. считаем неизменными.

Цена, при которой спрос совпадает с предложением, называется ценой равновесия.

Составить дифференциальную модель, позволяющую определять цену равновесия в каждый момент времени t, если известен характер зависимости спроса от цены и предложения от цены:

$$d = p' - p + 45, \quad S = 2p' + 4p - 55.$$

Найти функцию, выражающую зависимость цены от времени. Считаем, что в начальный момент времени $(t = 0)$ цена p составляла 25 ден. ед.

18. Найдите функцию, значение которой в каждой точке совпадает с мгновенной скоростью и темпом её изменения.

19. Найдите классы функций, обладающих

а) постоянной эластичностью;

б) эластичностью, значение которой в каждой точке обратно значению функции в ней.

20. Сформулируйте характеристические свойства логарифмической, показательной и экспоненциальной кривой, используя результаты п. п. 18 и 19.

21. Составьте уравнение динамики основных производственных фондов $K = K(t)$, если $I = I(t)$ — объём инвестиций в году t, а C — постоянный коэффициент выбытия основных производственных фондов.

22. Составьте дифференциальные модели следующих ситуаций. Найдите функции, удовлетворяющие данным начальным условиям.

22.1. Ищется уравнение $y = f(x)$ линии, угловой коэффициент касательной к которой в каждой точке пропорционален абсциссе точки касания. Известно, что линия проходит через точку A (0;1).

22.2. Описать зависимость объёма выпускаемой продукции (руб.) от затрат некоторого специфического ресурса (руб.), если предельная производительность этого ресурса убывает пропорционально объёму его затрат. Если не использовать этот ресурс, то объём выпуска составляет 100 000 руб.

23. Приведите примеры процессов и явлений, описываемых дифференциальными моделями типа

23.1. $y' = kx$; **23.2.** $y' = ky$;

23.3. $y' = kx^2$; **23.4.** $y'' = C$;

23.5. $y'' = kx$; **23.6.** $y'' = ky$;

23.7. $\frac{x}{y} \cdot y' = x + 1$; **23.8.** $\frac{x}{y} \cdot y' = y^2$;

24. Для каждой из линий, заданных приведёнными ниже уравнениями, найдите зависимость между угловым коэффициентом касательной и координатами точки касания. Результаты сопоставьте с заданиями 23.

24.1. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$; **24.2.** $y = kx$;

24.3. $y^2 - x^2 = C$; **24.4.** $y = Ce^{\frac{x^2}{2}}, C > 0$;

24.5. $\frac{y^2}{2} = kx + C$; **24.6.** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$;

24.7. $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$; **24.8.** $y = e^{kx}$;

25. Решить ДУ из задач 3—5, 8 параграфа 1.

ГЛАВА 2.
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

2.1. Комплексные числа и операции над ними. Переход от одной формы записи комплексного числа к другой

Пусть a и b некоторые действительные числа, $a\,i =$ $= \sqrt{-1}$ — мнимая единица. Число $z = a + ib$ — комплексное число, записанное в **алгебраической** форме.

Обозначим $\sqrt{a^2 + b^2} = r$. Запишем z в виде

$$z = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + i\cdot\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) = r\left(cos\varphi + isin\varphi\right).$$

Это **тригонометрическая** форма комплексного числа.

На рис. 1 a и b — катеты, r — гипотенуза прямоугольного треугольника, $\varphi -$ угол между OM и положительным направлением оси Ox.

Используя формулы Эйлера:

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2},$$

$$sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i},$$

получаем $r\left(cos\varphi + i\,sin\varphi\right) = re^{i\varphi}$

или $z = re^{i\varphi}$.

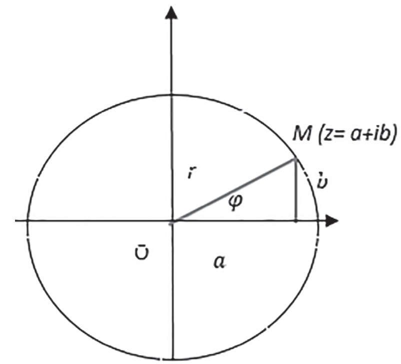

Рис. 1. Тригонометрическая форма комплексного числа

Это **показательная** форма комплексного числа.

Пусть $z_1 = a_1 + ib_1$, $z_2 = a_2 + ib_2$.

Нетрудно убедиться в том, что

$$z_1 \pm z_2 = (a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2)i$$

$$z_1 z_2 = (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + b_1a_2)i =$$

$$= r_1r_2\left(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + \sin(\varphi_1+\varphi_2)i\right) =$$

$$= r_1r_2\,e^{(\varphi_1+\varphi_2)i},$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left(cos\,(\varphi_1 - \varphi_2) + sin\,(\varphi_1 - \varphi_2)\,i\right) = \frac{r_1}{r_2}e^{(\varphi_1-\varphi_2)i}.$$

$$z^n = \left(re^{i\varphi}\right)^n = r^n e^{i\varphi n} = \left(r\left(cos\varphi + isin\varphi\right)\right)^n = r^n\,(cos\,n\,\varphi + i\,sin\,n\varphi).$$

Операции над комплексными числами обладают теми же свойствами, что и аналогичные операции над действительными числами.

2.2. Частное и общее решение однородного уравнения

Определение. Линейным однородным дифференциальным уравнением (ЛОДУ) n-го порядка с постоянными коэффициентами называется дифференциальное уравнение вида

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+\ldots+a_{n-1}y'+a_ny=0.$$
$$(a_1,a_2,\ldots,a_n\in R).$$

При $n = 2$ имеем ЛОДУ второго порядка:

$$y''+a_1y'+a_2y=0 \qquad (1)$$

Убедимся в том, что функция вида e^{kx} будет решением уравнения (1). Если $y = e^{kx}$, то $y'=ke^{kx}$ и $y''=k^2e^{kx}$. Подставим эти выражения в уравнение (1), получим:

$$e^{kx}(k^2+a_1k+a_2)=0.$$

Так как $e^{kx}\neq 0,$ то указанная функция будет решением уравнения (1) тогда и только тогда, когда коэффициент k является корнем квадратного уравнения

$$k^2+a_1k+a_2=0. \qquad (2)$$

Уравнение (2) называется **характеристическим уравнением** ОЛДУ (1).

Возможны три случая.

1. Дискриминант уравнения (2) Д >0. Уравнение имеет два различных действительных корня $k_1\neq k_2$.

Функции $y_1 = e^{k_1x}$ и $y_2 = e^{k_2x}$ — линейно независимые частные решения уравнения (1), так как

$$\frac{y_1}{y_2}=e^{(k_1-k_2)x}\neq const \text{ при } k_1\neq k_2.$$

2. Д $= 0$. $k_1=k_2=k$.

Докажем, что наряду с функцией $y_1=e^{kx}$ частным решением изучаемого уравнения является функция $y_2=xe^{kx}$.

В уравнение (1) подставим

$$y=xe^{kx},\ y'=1\cdot e^{kx}+x\cdot ke^{kx},\ y''=ke^{kx}+ke^{kx}+xk^2e^{kx}.$$

Каждое слагаемое содержит множитель e^{kx}, поэтому сразу вынесем его за скобки:

$$e^{kx}\left(k+k+x\cdot k^2+a_1+a_1x\cdot k+a_2x\right)=$$

$$=e^{kx}\left(x\left(k^2+a_1k+a_2\right)+\left(2k+a_1\right)\right)=e^{kx}\left(x\cdot 0+0\right)=0.$$

Выражение в первых скобках равно нулю в соответствии с (2), во вторых скобках — производная упомянутого выражения. Убедились в том, что функция $y=xe^{kx}$ – решение уравнения (1). Действительные частные решения $y_1 = e^{kx}$ и $y_2 = xe^{kx}$ — линейно независимы, ибо $\dfrac{y_1}{y_2}=\dfrac{1}{x}\neq const.$

3. Д <0. $k_{1,2}=\alpha\pm\beta i.$

Действительные частные решения: $y_1=e^{\alpha x}cos\beta x, y_2=e^{\alpha x}sin\beta x.$ Убеждаемся в этом с помощью непосредственной подстановки указанных функций в уравнение (1), как и в п. 2. Из условия

$$\frac{y_1}{y_2}=ctg\,x\neq const$$

следует линейная независимость функций y_1 и y_2.

Теорема. Если y_1 и y_2 — линейно независимые решения однородного линейного дифференциального уравнения, то их линейная комбинация также является решением этого уравнения.

Доказательство. Непосредственная проверка.

Следствие. Общее решение ОДУ имеет вид

$$=C_1y_1+C_2y_2,\ C_1,C_2\in R.$$

Замечание. Для нахождения частного решения необходимо располагать дополнительной информацией, позволяющей однозначно определить значения параметров C_1 и C_2. Установлено, что условиями (начальные условия), позволяющими решить эту задачу, являются соответствующие значения независимой и зависимой переменных (геометрически — точка на плоскости) и значение производной искомой функции в этой точке (угловой коэффициент касательной к интегральной кривой в указанной точке). С экономической точки зрения, начальные условия: соответствующие значения объясняющей и объясняемой переменной и скорость изменения последней (значение предельного показателя в данной точке).

2.3. Неоднородные линейные дифференциальные уравнения (НЛДУ) второго порядка с постоянными коэффициентами. Структура общего и частного решения

Теорема. Если функция $U(x)$ — частное решение неоднородного ЛДУ

$$y''+a_1y'+a_2y=f(x) \qquad (3)$$

а $C_1y_1+C_2y_2$ — общее решение соответствующего ему однородного ЛДУ, то

$$y=C_1y_1+C_2y_2+U(x)-$$

общее решение уравнения (3).

Доказательство: подставляем y в левую часть уравнения (3), используем линейность уравнения и тот факт, что $C_1y_1+C_2y_2$ — решение уравнения (1),а $U(x)$ — решение уравнения (3).

2.4. Метод подбора частного решения (метод неопределённых коэффициентов)

Этот метод применим только к линейным уравнениям с постоянными коэффициентами и только в том случае, когда его правая часть имеет вид:

$$f(x)=e^{\alpha x}\left(P_n(x)cos\beta x+Q_m(x)sin\beta x\right). \qquad (4)$$

Примем без доказательства следующие факты:

1. Частное решение ищется в виде:
$U(x)=x^re^{\alpha x}\left(P_l(x)cos\beta x+Q_l(x)sin\beta x\right)$, где r — показатель кратности корня $\alpha+i\beta$ в характеристическом уравнении, а $l=$ = наиб. $\{n, m\}$.
2. Если правая часть уравнения равна сумме нескольких различных функций вида (4), то необходимо использовать

Теорему о наложении решений:

Частное решение уравнения с правой частью $f(x)=f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_q(x)$ равно сумме частных решений уравнений, правыми частями которых являются слагаемые этой суммы.

Пример 1.

$$y''-6y'+9y=e^{3x}+e^{2x}cosx.$$

Решение.

1. Найдём общее решение однородного уравнения:

$$y''-6y'+9y=0.$$

Характеристическое уравнение $k^2-6k+9=0$ имеет двукратный действительный корень $k=3$. Общее решение однородного уравнения запишем в виде:

$$e^{3x}(C_1+xC_2).$$

Частное решение уравнения

$$y''-6y'+9y=e^{3x} \qquad (5)$$

ищем в виде $y=Ax^2e^{3x}$, т. к. $\alpha+\beta i$ = 3 + 0 I = 3 — двукратный корень характеристического уравнения.

$$y'=2Axe^{3x}+3Ax^2e^{3x},$$

$$y''=2Ae^{3x}+12Axe^{3x}+9Ax^2e^{3x}.$$

Подставим найденные выражения в уравнение (5).

$$2Ae^{3x}+12Axe^{3x}+9Ax^2e^{3x}-6\left(2Axe^{3x}+3Ax^2e^{3x}\right)+$$
$$+9Ax^2e^{3x}=e^{3x}.$$

Приведём подобные члены и обе части уравнения поделим на

$$e^{3x}\neq 0.$$

Получим $2A=1$. Отсюда находим $A=\dfrac{1}{2}$. Значит частное решение первого неоднородного уравнения имеет вид:

$$y_1 = \frac{1}{2}x^2 e^{3x}.$$

2. Теперь найдём частное решение второго вспомогательного неоднородного уравнения:

$$y'' - 6y' + 9y = e^{2x}\cos x. \qquad (6)$$

Ищем его в виде $y = e^{2x}(D\cos x + E\sin x)$. Находим первую и вторую производные этой функции:

$$y' = 2e^{2x}(D\cos x + E\sin x) + e^{2x}(-D\sin x + E\cos x) =$$

$$= e^{2x}\left((2D+E)\cos x + (2E-D)\sin x\right),$$

$$y'' = 2e^{2x}\left((2D+E)\cos x + (2E-D)\sin x\right) +$$

$$+ e^{2x}(-(2D+E)\sin x + (2E-D)\cos x) =$$

$$= e^{2x}\left((D+3E)\cos x + (-3D+E)\sin x\right).$$

Подставим y и его производные в уравнение (6):

$$e^{2x}\left((D+3E)\cos x + (-3D+E)\sin x - 6(2D+E)\cos x -\right.$$

$$\left. - 6(2E-D)\sin x + 9D\cos x + 9E\sin x\right) = e^{2x}\cos x.$$

Сокращаем на $e^{2x} \neq 0$. Приравниваем коэффициенты

при $\cos x$ и $\sin x$ в левой и правой части, получаем систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} -2D - 3E = 1, \\ 3D - 2E = 0. \end{cases}$$

Решаем её, относительно D и E. Получаем:

$$D = -2/13,\ E = -3/13.$$

Частное решение неоднородного уравнения имеет вид

$$y_2 = -\ e^{2x}\left(\frac{2}{13}\cos x + \frac{3}{13}\sin x\right).$$

Ответ: общее решение неоднородного уравнения имеет вид

$$y_{\text{о.н.}} = e^{3x}(C_1 + C_2 x) + \frac{1}{2}x^2 e^{3x} - e^{2x}\left(\frac{2}{13}\cos x + \frac{3}{13}\sin x\right).$$

2.5. Метод вариации произвольных постоянных

Общее решение уравнения (3) будем искать в виде

$$y = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2, \qquad (7)$$

где $C_1(x)$ и $C_2(x)$ — функции аргумента x.

Вычислим

$$y' = C_1'(x)y_1 + C_1(x)y_1' + C_2'(x)y_2 + C_2(x)y_2' \text{ и}$$

$$y'' = C_1''(x)y_1 + C_1'(x)y_1' + C_1'(x)y_1' + C_1(x)y_1'' + C_2''(x)y_2 +$$

$$+ C_2'(x)y_2' + C_2'(x)y_2' + C_2(x)y_2''.$$

Подставляем эти выражения в левую часть уравнения (3), сгруппируем слагаемые. Приравниваем левую часть уравнения правой $f(x)$

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = C_1(x)(y_1'' + a_1 y_1' + a_2 y_1) + C_2(x)(y_2'' + a_1 y_2'$$

$$+ a_2 y_2) + a_1(C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2) + (C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2') +$$

$$\left(C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2\right)' = f(x).$$

Отсюда получаем, что это уравнения выполняется, если:

$$C_1'y_1 + C_2'y_2 = 0 \text{ и}$$

$$C_1'y_1' + C_2'y_2' = f(x). \qquad (8)$$

Пример 2. $y'' - 4y = 2e^x,\ y(0) = -1,\ y'(0) = 0.$

Решаем характеристическое уравнение однородного дифференциального уравнения:

$$k^2 - 4 = 0.$$

Получаем $k_1 = -2$, $k_2 = 2$ и общее решение однородного уравнения имеет вид: у = $C_1 e^{-2x} + C_2 e^{2x}$.

Общее решение неоднородного уравнения ищем в виде:

$$y = C_1(x)e^{-2x} + C_2(x)e^{2x}.$$

Запишем условия (8) для этой функции:

$$\begin{cases} C_1'(x)\cdot e^{-2x} + C_2'(x)e^{2x} = 0, \\ C_1'(x)\cdot\left(-2e^{-2x}\right) + C_2'(x)\cdot 2e^{2x} = 2e^x. \end{cases}$$

Решаем систему двух линейных относительно $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$ уравнений. Используем, например, формулы Крамера. Главный определитель системы

$$D = \begin{vmatrix} e^{-2x} & e^{2x} \\ -2e^{-2x} & 2e^{2x} \end{vmatrix} = 4 \neq 0.$$

Вспомогательные определители:

$$D_1 = \begin{vmatrix} 0 & e^{2x} \\ 2e^x & 2e^{2x} \end{vmatrix} = -2e^{3x},\ D_2 = \begin{vmatrix} e^{-2x} & 0 \\ -2e^{-2x} & 2e^x \end{vmatrix} = 2e^{-x}.$$

Отсюда

$$C_1'(x) = -\frac{1}{2}e^{3x},\ C_2'(x) = \frac{1}{2}\ e^{-x}$$

или

$$\frac{dC_1}{dx} = -\frac{1}{2}e^{3x},\ \frac{dC_2}{dx} = \frac{1}{2}e^{-x}.$$

Следовательно,

$$dC_1 = -\frac{1}{2}e^{3x}dx,\quad dC_2 = \frac{1}{2}e^{-x}dx.$$

Интегрируем эти уравнения, и находим $C_1(x)$ и $C_2(x)$.

$$C_1(x) = -\frac{1}{6}e^{3x} + C_3,$$

$$C_2(x) = -\frac{1}{2}e^{-x} + C_4.$$

Общее решение данного уравнения:

$$y = -\frac{2}{3}e^x + e^{-2x}\left(C_3 + C_4e^{4x}\right),\ C_3,\ C_4 \in R.$$

Найдём частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям:

$$\begin{cases} -1 = -\frac{2}{3} + C_3 + C_4, \\ 0 = -\frac{2}{3} - 2C_3 + 2C_4. \end{cases}$$

Отсюда $C_4 = 0$, $C_3 = -\frac{1}{3}$.

Ответ: частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям:

$$y = -\frac{2}{3}e^x - \frac{1}{3}e^{-2x}.$$

Глава 3.
РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

3.1. Основные понятия теории разностных уравнений

Функция $y = f(x)$ для значений $x_1, x_2, x_3 \ldots$ переменной x принимает значения

$$f(x_1), f(x_2), f(x_3), \ldots \quad .$$

Построим приращения этой функции при переходе из точки x_i в точку x_{i+1}:

$$\Delta f(x_i) = f(x_{i+1}) - f(x_i). \tag{1}$$

В экономических исследованиях нередко встречаются задачи, в которых роль независимой переменной играет время t, а значения функции фиксируются через равные промежутки времени (1 час, 1 день, 1 месяц, 1 год и т. п.).

Например, так называемая «паутинообразная» модель рынка одного товара описывается уравнением

$$p(t+1) = ap(t) + b, \tag{2}$$

где $p(t)$ – цена товара в период времени t, a и b — некоторые числа.

При моделировании относительной численности какого-либо биологического вида появляется уравнение вида

$$x_{t+1} = \beta x_t\,(1 - x_t), \tag{3}$$

где x_t — относительная численность популяции в момент времени t, а β — коэффициент размножения.

По аналогии с (1) построим приращения значений функции $y(t)$:

$$y_{t+1} - y_t = \Delta y_t\,,$$
$$y_{t+2} - y_{t+1} = \Delta y_{t+1},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$y_{t+n} - y_{t+n-1} = \Delta y_{t+n-1}. \tag{4}$$

Из системы (4) следует

$$y_{t+1} = y_t + \Delta y_t,$$
$$y_{t+2} = y_{t+1} + \Delta y_{t+1} = y_t + \Delta y_t + \Delta y_{t+1}, \ldots$$

Из определения второй разности следует, что

$$\Delta^2 y_t = \Delta y_{t+1} - \Delta y_t\,, \text{ или } \Delta y_{t+1} = \Delta y_t + \Delta^2 y_t.$$

Следовательно,

$$y_{t+2} = y_t + \Delta y_t + \Delta y_t + \Delta^2 y_t = y_t + 2\,\Delta y_t + \Delta^2 y_t.$$

Аналогично,

$$y_{t+3} = y_{(t+1)+2} = y_{t+1} + 2\Delta y_{t+1} + \Delta^2 y_{t+1} = (y_t + \Delta y_t) + (2\Delta y_t + $$
$$+ 2\,\Delta^2 y_t) + (\Delta^2 y_t + \Delta^3 y_t) = y_t + 3\,\Delta y_t + 3\,\Delta^2 y_t + \Delta^3 y_t\,.$$

Используя метод математической индукции, можно доказать, что

$$y_{t+n} = y_t + C_n^1 \Delta y_t + C_n^2 \Delta^2 y_t + C_n^3 \Delta^3 y_t + \ldots C_n^{n-1} \Delta^{n-1} y_t + \Delta^n y_t\,, \tag{5}$$

где $C_n^k = \dfrac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot\cdot 3\cdot\ldots\cdot k}$.

Поэтому каждую функцию

$$f(y_t, y_{t+1}, \ldots, y_{t+n}, t\ \ )$$

можно представить как функцию t, y_t и n первых разностей:

$$F(y_t, \Delta y_t, \Delta^2 y_t, \ldots, \Delta^n y_t\,, t). \tag{5}$$

Определение.

Уравнение

$$f(y_t, y_{t+1}, \ldots, y_{t+n,t}) = 0 \tag{6}$$

или

$$F(y_t, \Delta y_t, \Delta^2 y_t\ , ...,\ \Delta^n y_t, t) = 0 \qquad (7)$$

называется **разностным уравнением n-го порядка**.

Определение.

Решить **разностное уравнение *n*-го порядка** — значит найти функцию y_t, для которой справедливо уравнение вида (6) или (7).

3.2. Примеры задач, приводящих к разностным уравнениям

Пример 1. Если некоторая сумма положена в банк под сложный процент p, то при ежегодном начислении процентов с последующей их капитализацией, к концу t-о года её размер составит:

$$y_t = A(1+\frac{p}{100})\,y_{t-1} = A(1+\frac{p}{100})(1+\frac{p}{100})\,y_{t-2} = $$
$$= A\left(1+\frac{p}{100}\right)^t.$$

При $t=0$ $y_0 = A$ – величина положенной в банк суммы, $y_t = A(1+\frac{p}{100})\,y_{t-1}$ — линейное разностное уравнение первого порядка, $y_t = A\left(1+\frac{p}{100}\right)^t$ – его решение.

Пример 2. Предположим, что размер предложения s_t некоторого сельскохозяйственного продукта в t-м году есть функция цены этого продукта в предшествующем году p_{t-1}, а спрос d_t на этот продукт есть функция цены в этом году:

$$d_t = f(p_t), \quad s_t = g(p_{t-1}).$$

Цена равновесия для данного продукта находится из разностного уравнения первого порядка

$$f(p_t) = g(p_{t-1}).$$

Пусть

$$d_t = ap_t, \quad s_t = bp_{t-1}.$$

Тогда

$$ap_t = bp_{t-1},$$

или

$$p_t = \frac{b}{a}p_{t-1.}$$

Имеем разностное уравнение первого порядка. Очевидно, его решением будет функция

$$p_t = A\left(\frac{b}{a}\right)^t,$$

где

$$A = p_0.$$

Окончательно,

$$p_t = p_0\left(\frac{b}{a}\right)^t.$$

Вообще говоря, d_t является убывающей функцией цены, а s_t — возрастающей. Поэтому $a\langle 0, b\rangle 0$ и, следовательно, $\frac{b}{a} < 0.$

Знак выражения $\left(\frac{b}{a}\right)$ зависит от номера года. Таким образом, цена подвержена колебаниям.

1) Если $\left|\frac{b}{a}\right| < 1$, то $\lim\limits_{t\to\infty}\left(\frac{b}{a}\right)^t = 0$ *и* $\lim\limits_{t\to\infty} p_t = 0$ колебания цен **подавляются.**

2) Если $\left|\frac{b}{a}\right| = 1$, то колебания цен **периодические.**

3) Если $\left|\frac{b}{a}\right| > 1$, то $\lim\limits_{t\to\infty}\left|\frac{b}{a}\right|=\infty$. Колебания цен **возрастают.**

Ниже рассмотрим некоторые, наиболее часто используемые в экономических исследованиях, классы разностных уравнений и методы их решения.

3.3. Стационарные разностные уравнения первого порядка

Определение. Уравнение вида

$$ay_{t+1} + by_t = f(t) \ (a = \text{const} \neq 0,\ b = \text{const} \neq 0)$$

называется неоднородным линейным стационарным разностным уравнением первого порядка.

Если $f(t) \equiv 0$,то уравнение называется **однородным.**

Обозначим $\frac{b}{a}=-\mu$ и однородное уравнение запишем в виде

$$y_{t+1} - \mu y_t = 0.$$

Отсюда $y_{t+1} = \mu y_t$.

Убедимся в том, что функция $y_t = \mu^t$ является решением этого уравнения:

$$y_t = \mu^t \Leftrightarrow \ y_{t+1} = \mu^{t+1} \Leftrightarrow \mu^{t+1} = \mu \cdot \mu^t (= \mu^{t+1}).$$

Отсюда следует, что любая функция вида $A\mu^t$, где A — любое действительное число,также будет его решением.

Итак, $y_t = A\mu^t\left(A \in R\right)$ – ***общее решение однородного стационарного разностного уравнения I порядка.***

Теорема. Если $\overline{y}_t$ — частное решение неоднородного уравнения, то общее решение неоднородного уравнения имеет вид

$$\tilde{y}_t = A\mu^t + \overline{y}_t.$$

(Доказательство опирается на линейность уравнения).

Пример 3. $y_{t+1} - \mu y_t = \gamma(=const)$.

Пусть $\overline{y}_t = \tau$: $\tau - \mu\tau = \gamma$.

Отсюда $\tau = \frac{\gamma}{1-\mu}$ и общее решение имеет вид:

$$\tilde{y}_t = A\mu^t + \frac{\gamma}{1-\mu}.$$

3.4. Линейные однородные стационарные разностные уравнения второго порядка

Определение. Линейным разностным стационарным уравнением порядка n называется уравнение вида

$$y_{t+n} + a_1 y_{t+n-1} + \ldots + a_n y_t = f_t,$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n \in R$,причём $a_n \neq 0$, f_t — заданная функция аргумента $t \in \{0\} \cup N$

Такие уравнения являются наиболее важными для практики.

Определение. Если $f(t) \equiv 0$, то уравнение называется **однородным.**

Очевидно, такое уравнение всегда имеет решение $y_t \equiv 0$ на N_0.

Будем рассматривать линейные разностные стационарные уравнения второго порядка:

$$y_{t+2} + a_1 y_{t+1} + a_2 y_t = f_t, \ a_2 \neq 0. \tag{8}$$

Соответствующее однородное уравнение имеет вид:

$$y_{t+2} + a_1 y_{t+1} + a_2 y_t = 0. \tag{9}$$

Нетривиальное решение уравнения (9) будем искать в виде

$$y_t = \mu^t, \text{ где } \mu \neq 0.$$

Для нахождения μ подставим μ^t в уравнение (9):

$$\mu^{t+2} + a_1 \mu^{t+1} + a_2 \mu^t = 0.$$

Отсюда

$$\mu^t\,(\mu^2 + a_1\mu + a_2) = 0.$$

Так как $\mu^t \neq 0$, $a_2 \neq 0$,то получаем квадратное уравнение

$$\mu^2 + a_1\mu + a_2 = 0, \qquad (10)$$

которое не имеет нулевых корней.

Уравнение (10) называется характеристическим уравнением для разностного уравнения (9). Таким образом, μ^t — решение уравнения (9), когда μ — корень уравнения (10).

Возможны три случая:

1. Дискриминант D уравнения (10) положителен. Корни уравнения (10) действительные и различные:

$$\mu_1 \neq \mu_2.$$

Тогда функции μ_1^tè μ_2^t — решения уравнения (9). Они линейно независимы, так как

$$\frac{\mu_1^t}{\mu_2^t} = \left(\mu_1 : \mu_2\right)^t \neq const.$$

Теорема 1. Если $y_t^{(1)}$ и $y_t^{(2)}$ — линейно независимые действительные решения уравнения (9), то

$$y_t = C_1 y_t^{(1)} + C_2 y_t^{(2)} \text{ —}$$

его решение для любых $C_1,\ C_2 \in R$.

Доказательство следует из линейности уравнения (9).

Итак, в данном случае,

$$y_t = C_1\mu_1^t + C_2\mu_2^t \text{ —}$$

общее решение уравнения (9).

Пример. Решить уравнение $y_{t+2} + 9y_{t+1} + 8y_t = 0$.

Характеристическое уравнение

$$\mu^2 + 9\mu + 8 = 0$$

имеет два различных действительных корня $\mu_1 = -8, \mu_2 = -1$.

Тогда общее решение имеет вид:

$$y_t = \left(C_1 8^t + C_2\right)\left(-1\right)^t,\ C_1, C_2 \in R.$$

2. $D = 0$. Характеристическое уравнение имеет один двукратный действительный корень: $\mu_1 = \mu_2 = \mu$. Убедимся, что наряду с μ^t решением уравнения (9) будет функция $t\mu^t$. Подставим её в левую часть уравнения (9), раскроем скобки и сгруппируем слагаемые:

$$(t+2)\,\mu^{t+2} + a_1(t+1)\,\mu^{t+1} + a_2 t\,\mu^t =$$
$$= \mu^t\left(t\left(\mu^2 + a_1\mu + a_2\right) + \mu\left(2\mu + a_1\right)\right) =$$
$$= \mu^t\left(t\left(\mu^2 + a_1\mu + a_2\right) + \mu\left(\mu^2 + a_1\mu + a_2\right)'\right) = 0.$$

Функции $y_t^{(1)} = \mu^t$, $y_t^{(2)} = t\mu_t$ — линейно независимы, так как $y_t^{(1)} : y_t^{(2)} = t \neq const$. Отсюда следует, что общее решение уравнения (9) имеет вид:

$$y_t = \mu^t\,(C_1 + C_2 t), \quad C_1, C_2 \in R.$$

Пример 4. Решим уравнение $y_{t+2} + 6y_{t+1} + 9y_t = 0$.

Характеристическое уравнение

$$\mu^2 + 6\mu + 9 = 0$$

имеет двукратный действительный корень $\mu = -3$. Общее решение:

$$y_t = (-3)^t\,(C_1 + C_2 t),\ C_{1,}\ C_2 \in R.$$

3. $D < 0$. Характеристическое уравнение имеет два комплексных сопряжённых корня:

$$\mu_{1,2} = \alpha \pm \beta i.$$

Теорема. Функция $y_{t=} U_t + iV_t$ является комплексным решением уравнения (9) тогда и только тогда, когда функции $U_t = Re y_t$, $V_t = Im y_t$ — действительные решения (9).

Примечание: Real — действительный, Imagine — мнимый.

Доказательство следует из линейности (9).

Вывод: $y_t = C_1 \operatorname{Re}\ y_t + C_2 Im y_t$ **— общее действительное решение** уравнения (9).

Пример 5. Найдём общее решение уравнения

$$y_{t+2} + 4y_t = 0.$$

Решение. Характеристическое уравнение $\mu^2 + 4 = 0$ имеет два комплексных сопряжённых корня

$$\mu_{1,2} = \pm 2i.$$

Общее комплексное решение имеет вид

$$y_t = C_1 (2i)^t + C_2 (-2i)^t .$$

Так как $\mu = 2i = 2\,(cos\frac{\pi}{2} + isin\frac{\pi}{2})$, то

$$\mu^t = (2i)^t = 2^t \left(\cos\frac{\pi}{2}t + i\sin\frac{\pi}{2}t \right).$$

Следовательно,

$$y_t = 2^t (C_1 cos\frac{\pi}{2}t + C_2 sin\frac{\pi}{2}t),$$

где $C_1, C_2 \in R$ — общее решение однородного разностного стационарного уравнения.

3.5. Линейные неоднородные стационарные разностные уравнения второго порядка

Примем без доказательства следующую теорему.

Теорема. Если $\overline{y}_t$ — частное решение неоднородного линейного СРУ, а $y_t = C_1 y_t^{(1)} + C_2 y_t^{(2)}$ – общее решение соответствующего ему однородного уравнения, то общее решение неоднородного ЛСРУ имеет вид:

$$y_{\text{тон}} = \overline{y}_t + C_1 y_t^{(1)} + C_2 y_{t,}^{(2)},\ C_1, C_2 \in R.$$

Таким образом, зная общее решение однородного уравнения и «угадав» частное решение неоднородного, можно записать общее решение неоднородного уравнения.

Пример 6. Решим уравнение $y_{t+2} + 9\,y_{t+1} + 8y_t = 5$.

Общее решение соответствующего ему однородного уравнения найдено выше. Предположим, что частное решение данного неоднородного уравнения имеет вид:

$$\overline{y}_t = U = \text{const}.$$

Тогда $y_t = y_{t+1} = y_{t+2} = U$, и $U + 9U + 8U = 5$.

Отсюда $U = 5/18$,и общее решение неоднороного ЛСРУ найдено:

$$y_t = \frac{5}{18} + (-1)^t (C_1 8^t + C_2),\ C_1, C_2 \in R.$$

Справедлива следующая теорема, позволяющая по виду правой части неоднородного уравнения определить возможный вид его частного решения.

Теорема. Пусть в неоднородном уравнении (9) правая часть имеет вид

$$f_t = |\mu|^t \left(P_m(t) cos\alpha t + Q_n(t) sin\alpha t\right),$$

где $P_m(t), Q_n(t)$– заданные многочлены с действительными коэффициентами, степени m и n, соответственно.

Если число $\mu = |\mu|\,(cos\alpha + isin\alpha)$ не является корнем характеристического уравнения (10), то для уравнения (8) существует частное решение вида

$$\overline{y}_t = |\mu|^t \left(R_s(t) cos\alpha t + T_s(t) sin\alpha t\right),$$

где $R_s(t), T_s(t)$– многочлены с действительными коэффициентами степени $s = \min\{m.n\}$.

Если число $\mu = |\mu|\,(cos\alpha + isin\alpha)$ является корнем характеристического уравнения (10) кратности $m = 1;\ 2$, то для уравнения (8) существует частное решение вида

$$\overline{y}_t = t^m |\mu|^t \left(R_s(t) cos\alpha t + T_s(t) sin\alpha t\right),$$

где $R_s(t)$, $T_s(t)$ – многочлены с действительными коэффициентами степени $s = \min\{m.n\}$.

Пример 7. $y_{t+2} + 9y_{t+1} + 8y_t = t.$

Будем искать частное решение неоднородного уравнения в виде

$$\overline{y}_t = At + B, \text{ т. к. } \mu \neq 0.$$

$$\overline{y}_{t+1} = At + A + B,$$

$$\overline{y}_{t+2} = At + 2A + B.$$

Подставим эти выражения в уравнение. Получим

$$8At + 8A + 9At + 9A + 9B + At + 2A + B = t.$$

Приравняем коэффициенты при t и свободные члены в левой и правой частях последнего равенства. Получим систему двух линейных уравнений относительно A и B:

$$\begin{cases} 18A = 1, \\ 11A + 18B = 0. \end{cases}$$

Отсюда $A = \frac{1}{18}$, $B = \frac{1}{18} \cdot (-\frac{11}{18})$.

Ответ: $y_t^{\text{о.н.}} = (-1)^t (C_1 8^t + C_2) + \frac{1}{18}\ (t - \frac{11}{18})$, $C_1, C_2 \in R$.

3.6. Нестационарные линейные разностные уравнения первого порядка

Рассмотрим уравнение вида

$$y_{t+1} + a_t y_t = f_t, \tag{11}$$

где a_t- заданная функция аргумента $t \in N_0 = N \cup \{0\}$, причём $a_t \neq 0$ для всех $t \in N_0$, f_t — заданная функция аргумента $t \in N_0$ и y_t — искомая функция $t \in N_0$.

Уравнение (11) — неоднородное линейное разностное нестационарное уравнение первого порядка. Для него имеет место **теорема**, аналогичная теореме из п. 4.

Пусть $f_t \equiv 0$. Найдём общее решение однородного уравнения

$$y_{t+1} + a_t y_t = 0. \tag{11′}$$

Очевидно, $y_1 = -a_0 y_0$, $y_2 = -a_1 y_1 = a_0 a_1 y_0$, ... , $y_t = (-1)^t a_0 a_1 \cdot \ldots \cdot a_{t-1} y_0$. Используя символ произведения, запишем

$$y_t = (-1)^t y_0 \prod_{i=0}^{t-1} a_i, \tag{12}$$

или

$$y_t = C \cdot A_t,$$

где $C = y_0$, $A_t = (-1)^t \prod_{i=0}^{t-1} a_i$, $C \in R$, $t \in N_0$.

Формула (12) называется формулой **общего решения** уравнения (11′).

Для решения неоднородного уравнения (4) применим метод вариации постоянной: будем считать параметр C не произвольной постоянной, а некоторой функцией аргумента $t \in N_0$.

Итак, общее решение неоднородного уравнения ищем в виде

$$y_t = C_t A_t, \quad t \in N_0 \tag{12′}$$

Подставим (5′) в (4):

$$C_{t+1} A_{t+1} + a_t C_t A_t = f_t.$$

Отсюда

$$C_{t+1} A_{t+1} - C_t A_{t+1} = f_t$$

или

$$C_{t+1} = C_t + \frac{f_t}{A_{t+1}}, \tag{13}$$

поскольку $A_{t+1} \neq 0$ для всех $t \in N_0$.

Из (13) получаем

$$C_t = C_0 + \sum_{i=0}^{t-1} \frac{f_i}{A_{i+1}}$$

и, следовательно,

$$y_t = (C_0 + \sum_{i=0}^{t-1} \frac{f_i}{A_{i+1}}) A_t. \qquad (14)$$

Это **общее решение** линейного неоднородного разностного уравнения первого порядка (11).

Пример 8. Решить уравнение

$$y_{t+1} - \left(\frac{t+2}{t+1}\right)^2 y_t = \frac{2(t+2)}{t+4}.$$

Решение.

$$A_t = (-1)^t (-1)^t \prod_{i=0}^{t-1} \left(\frac{i+2}{i+1}\right)^2 = \left(\frac{2}{1}\right)^2 \left(\frac{3}{2}\right)^2 \left(\frac{4}{3}\right)^2 \ldots$$

$$\ldots \left(\frac{t-1}{t-2}\right)^2 \left(\frac{t}{t-1}\right)^2 \left(\frac{t+1}{t}\right)^2 = \ = (t+1)^2.$$

$$\sum_{i=0}^{t-1} \frac{f_t}{A_{t+1}} = \sum_{i=0}^{t-1} \frac{2(i+2)}{(i+4)(i+2)^2} = 2\sum_{i=0}^{t-1} \frac{1}{(i+2)(i+4)} = \frac{5t^2 + 13t}{6(t+3)(t+2)}.$$

Подробнее:

$$\frac{1}{(i+2)(i+4)} = \frac{A}{i+2} + \frac{B}{i+4} = \frac{A(i+4) + B(i+2)}{(i+2)(i+4)}.$$

Отсюда $1 = A\ (i+4) + B(i+2)$.

Если $i = -4$, то $1 = -2B$ и $B = -1/2$.

Если $i = -2$, то $1 = 2A$ и $A = 1/2$, то

$$\sum_{i=0}^{t-1} \frac{1}{(i+2)(i+4)} = \sum_{i=0}^{t-1} \left(\frac{1/2}{i+2} - \frac{1/2}{i+4}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \right.$$

$$+ \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8}$$

$$+ \ldots + \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} + \frac{1}{t} - \frac{1}{t+2} +$$

$$\left. + \frac{1}{t+1} - \frac{1}{t+3}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{t+2} - \frac{1}{t+3}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{5t^2 + 13t}{6(t+2)(t+3)}.$$

Ответ: $y_t = \left(C_0 + \frac{5t^2 + 13t}{6(t+3)(t+2)}\right)(t+1)^2.$

Примерная тематика контрольной работы по материалу второго раздела

1. Определить и обосновать вид дифференциального уравнения (ДУ) 1-го порядка. Найти его общее решение и, при наличии начальных условий, также и частное решение.

2. Решить однородное и неоднородное ДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами.

3. Найти общее решение стационарного линейного разностного уравнения второго порядка. Найти соответствующее указанным начальным условиям частное решение.

4. Решить линейное неоднородное разностное уравнение первого порядка.

Задания.

1.

1.1 $\cos^2 y\, ctgx dx + \sin^2 x\, tgy dy = 0,\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0,$

$(x^2 + y^2)dx - xydy = 0,\ xy' + y = \ln x + 1.$

$2(y' + y) = xy^2,\ \ y(0) = 2,$

1.2 $y' = \frac{y}{x} \ln \frac{y}{x},\ y(1) = 1,\ y' - y\, tgx = \sin x,\ (1 + e^x)\, y \frac{dy}{dx} = e^x,$

$2(y' + xy) = (x-1)e^x y^2.$

1.3 $y^{/} sin^2 x\, lny + y = 0$, $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$, $y^{/} - \frac{x}{y} = \frac{y}{x}$,

$y^{/} + 3xy = e^{\frac{-3x^2}{2}}$,

$xy' + y = 2y^2 \ln x$, $y(1) = \frac{1}{2}$.

1.4 $y^{/}\left(1 + x^2\right) + y = 0$, $y(1) = 1$, $xy^{/} = x + 2y$,

$y^{/} cosx - ysinx = sin2x$, .

1.5 $x^2 y^{/} + xy = lnx$, $(1 + y^{/})\, e^y = -1$,

$x^2 y^{/} = x^2 + xy + y^2$, $y(0) = 0$, $y' + 2xy = 2x^3 y^3$,

1.6 $ytgx + y^{/} = cos^2 x$, $(1 + x^2)\, y^{/} + y = 0$, $y(1) = 1$,

$x^2 y^{/} = y(x + y)$, $y' + xy = (1 + x)e^{-x} y^2$, $y(0) = 1$.

1.7 $xy^{/} - 2y = 2x^3 cosx$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, $x^2 y^{/} = y(x + y)$, $\frac{yy^{/}}{x} +$

$+ e^y = 0$.

$xy' + \frac{yx^2}{x^2 + 1} = y^3 \cdot \frac{x^2 + 1}{x^3}$.

1.8 $ysinx + y^{/} cosx = 1, y\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $xy^{/} = e^y + 2y^{/}$,

$\frac{y - xy^{/}}{x + yy^{/}} = 2$, $tgx \cdot y' + y = sin2x \cdot y^2$.

1.9 $xy^{/} + y - e^x = 0$, $y(1) = 2$, $y^{/} - e^{x+y} = e^{x-y}$,

$xdy = (x + 2y)dx$, $s^2 \cdot t' + \frac{1}{s} \cdot t = \frac{\sqrt[3]{t}}{s \cdot e^{\frac{1}{2s}}}$.

1.10 $(xy^2 + x)dx + \left(y - x^2 y\right)dy = 0$, $y^{/} - y\, tgx = \frac{1}{cosx}$,

$xy^{/} = yln\frac{y}{x}$, $y(1) = e$, $x' = -\frac{x}{y} + 2lny + 1$.

2.

Уравнения	$y'' + Ny' + My = 0$		$y'' + Ay' + By = f(x)$		
Параметры	N	M	A	B	$f(x)$
Вариант 1	4	4	1	1	$e^{\frac{x}{2}} cos\frac{\sqrt{3}}{2}x$
Вариант 2	2	2	4	3	$x + 3$
Вариант 3	2	1	3	4	$8e^{\frac{-3}{2}x} sin5x$
Вариант 4	7	6	6	9	$x^2 - 2x$
Вариант 5	1	8	5	6	$x^2 + 6x$
Вариант 6	10	52	1	2	$5x - 9$
Вариант 7	−4	5	8	7	$x^2 + 2x + 1$
Вариант 8	6	9	1	1	$5e^{\frac{-x}{2}} cos\frac{\sqrt{2}x}{2}$
Вариант 9	−1	5	5	4	$3e^{2x}$
Вариант 10	0	5	3	3	$e^{-\frac{3x}{2}}\left(2cos\frac{\sqrt{3}}{2}x - sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$

3.

3.1 $y_{t+2} - 6y_{t+1} + 9y_t = 3$, $y_0 = 5$, $y_1 = 9$.

3.2 $y_t + 5y_{t-1} + 6y_{t-2} = 4t$, $y_0 = 1$, $y_1 = 3$.

3.3 $y_t + 3y_{t-1} - 4y_{t-2} = 8$, $y_0 = y_1 = 4$.

3.4 $y_t + 3y_{t-1} + 5y_{t-2} = t + 1$, $y_0 = 1$, $y_1 = 2$.

3.5 $y_t + 4y_{t-1} + 3y_{t-2} = 3cost$, $y_0 = y_1 = 3$.

3.6 $2y_{t+2}+3y_{t+1}-2y_t=5,\quad y_0=4,\quad y_1=3.$

3.7 $y_t-4y_{t-1}+3y_{t-2}=6\sin 2t,\quad y_0=8,\quad y_1=2.$

3.8 $4y_t-5y_{t-1}+y_{t-2}=9t\quad y_0=2,\quad y_1=3.$

3.9 $y_t-6y_{t-1}+9y_{t-2}=7,\quad y_0=1,\quad y_1=5.$

3.10 $y_t-10y_{t-1}+25y_{t-2}=8t-5,\quad y_0=4,\quad y_1=9.$

4.

4.1 $y_{t+1}-\dfrac{t+2}{t+1}y_t=\dfrac{2}{t+3}$.

4.2 $y_{t+1}=\dfrac{t+3}{t+2}y_t+\dfrac{3}{t+4}.$

4.3 $y_{t+1}=\dfrac{2t+1}{2t+3}y_t+\dfrac{2t-1}{2t+3}.$

4.4 $y_{t+1}=\dfrac{2t+5}{2t+3}y_t+\dfrac{2t+5}{3t}.$

4.5 $y_{t+1}=\left(\dfrac{t+3}{t+2}\right)^2 y_t+\dfrac{2(t+3)}{t+5}$.

4.6 $y_{t+1}=3^t\cdot y_t+2\cdot 3^{\frac{t^2+3t}{2}},$

4.7 $y_{t+1}=\left(\dfrac{t+3}{t+2}\right)^2 y_t+(t+3)^2\cdot 2^t.$

4.8 $y_{t+1}=\dfrac{t+3}{t+2}y_t+\dfrac{2}{t+5}.$

4.9 $y_{t+1}=(t+2)y_t+(t+2)!,$

4.10 $y_{t+1}=\left(\dfrac{t+3}{t+2}\right)^2 y_t+\dfrac{3(t+3)}{t+4}.$

Тесты

Выбрать правильный вариант ответа

1. К какому типу относится данное дифференциальное уравнение: $y\cdot y'+\sin x=1$?	1. Линейное 2. Однородное 3. С разделяющимися переменными 4. Другого типа
2. Какой вид имеет общее решение однородного ДУ: $y''-4y=0$?	1. $Y=e^{2x}(C_1+C_2x)$ 2. $Y=C_1e^{2x}+C_2e^{-2x}$ 3. $Y=Cxe^{2x}$ 4. $Y=Ce^{-4x}$
3. В каком виде следует искать частное решение неоднородного ДУ: $y''-4y=x+2$?	1. $Y=Ax+B$ 2. $Y=Ax^2+Bx+C$ 3. $Y=x(Ax+B)$ 4. $Y=Ax^2+B$
4. С помощью какой подстановки решается уравнение: $xy'+y\sin\dfrac{x}{y}=x$?	1. $y=ux$ 2. $Z=x/y$ 3. $y=u\cdot v$ 4. $Y=u+v$
5. Какое уравнение моделирует ситуацию: «предельный спрос обратно пропорционален темпу его изменения»?	1. $dd'=kd''$ 2. $\dfrac{d''}{d'}=k$ 3. $d'd''=k$ 4. $d=d'd''$

6. Укажите нетривиальное частное решение разностного уравнения $y_t + 5y_{t-1} = 0$	1. $y_t = 5t$ 2. $y_t = (-5)^t$ 3. $y_t = 5^t$ 4. $y_t = t - 5$
7. Какой вид имеет общее решение уравнения $y_{t+2} + 5y_{t+1} - 6y_t = 0$?	1. $y_t = C_1 + C_2(-6)^t$ 2. $y_t = C_1 5^t + C_2 6^t$ 3. $y_t = C_1 5^t - C_2 6^t$ 4. $y_t = C_1 5^t + C_2(-6)^t$
8. Которая из функций задаёт общее решение уравнения $y_{t+1} - 3^t y_t = 0$?	1. $y_t = \mathrm{C} \cdot 3^t$ 2. $y_t = \mathrm{C}\ (-1)^t \prod_{i=0}^{t-1} 3^i$ 3. $y_t = C \prod_{t=1}^{t} 3^i$ 4. $y_t = C \sum_{i=0}^{t-1} 3^i$
9. В каком виде следует искать частное решение неоднородного разностного уравнения $y_{t+2} + y_{t+1} - 6y_t = 2^t$?	1. $y_t^{\div.i.} = A \cdot 2^t$ 2. $y_t^{\div.i.} = At \cdot 2^t$ 3. $y_t^{\div.i.} = (At + B) \cdot 2^t$ 4. $y_t^{\div.i.} = 2^{At+B}$
10. Какая из функций является решением ДУ: $y'' + 4y + 24 = 0$?	1. $y = sin2x - 6$ 2. $\mathrm{y} = e^{4x} + 6$ 3. $y = 4cosx$ 4. $\mathrm{y} = x^2 + 4x + 24$
11. Определите тип уравнения: $xy^2dx + \left(x^3 - 5y^3\right)dy = 0$.	1. С разделяющимися переменными. 2. Линейное. 3. Однородное. 4. Бернулли.

12. Определите тип уравнения: $(x+3)y^2dx + \left(x^3 \cdot 5y^3\right)dy = 0$.	1. С разделяющимися переменными. 2. Линейное. 3. Однородное. 4. Бернулли
13. Определите тип уравнения: $\left(x + y^2\right)dx + \left(x^3 - 5y^3\right)dy = 0$.	1. С разделяющимися переменными. 2. Линейное. 3. Однородное. 4. Другого типа.
14. Найдите правильное продолжение определения: «Решением обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка называется…	1. …функция двух переменных…», 2. …упорядоченный набор из двух действительных чисел…», 3. …функция одной переменной…», 4. …матрица размера 2×2…»
15. Укажите вид общего решения нестационарного разностного уравнения первого порядка: $y_{t+1} + a_t y_t = 0$.	1. $y_t = (-1)^t \sum_0^{t-1} a_i$, 2. $y_t = ((-1)^t \sum_0^{t-1} a_i)\, y_0$, 3. $y_t = (-1)^t \prod_0^{t-1} a_i$, 4. $y_t = ((-1)^t \prod_0^{t-1} a_i)\, y_0$.
16. Когда два частных решения $f_1(x)$ и $f_2(x)$ дифференциального уравнения порядка $n \geq 2$ называются линейно независимыми?	1. $f_1(x)/f_2(x) = C = const$. 2. $f_1(x) f_2(x) = 1$. 3. $f_1(x) + f_2(x) = x$. 4. $f_1(x) + f_2(x) = C = \mathrm{const}$.

17. Когда разностное уравнение называется стационарным?	1. Имеет единственное решение: y_t =const. 2. Свободный член — число. 3. Все коэффициенты — постоянны. 4. Интегральные кривые — прямые линии.
18. Которая из приведённых функций не является частным решением ОДУ II порядка $y'' + 5y' + 6y = 0$?	1. $y = e^{-2x} - e^{-3x}$, 2. $y = 5e^{-3x}$, 3. $y = 8xe^{-2x}$, 4. $y = 0{,}5e^{-3x} + 0{,}45e^{-2x}$.
19. Какая подстановка позволяет решать данное ДУ с помощью разделения переменных $\frac{dy}{dx} + \sin x \cdot y = cosx$?	1. $y = p(x)q(x)$, 2. $y = p(x) / q(x)$, 3. $y = xq(x)$, 4. $y = h(x) + q(x)$.
20. Общее решение ОДУ первого порядка имеет вид: $yln\lvert C(y-2)\rvert = e^{2x}$. Функция y = 2 также удовлетворяет этому уравнению. Входит ли эта функция в состав общего решения? Если «Да», то при каком значении параметра С?	1. Нет. 2. C = 0. 3. C = 1. 4. C = −2.
21. С помощью какой замены переменной уравнение $xy - \frac{y'}{x} = 4y^3$ преобразуется в линейное?	1. $z = y,^3$ 2. $z = y^2$, 3. $z = y^{-2}$, 4. $z = y^{-3}$.

22. Общее решение ОДУ первого порядка имеет вид: $yln\lvert C(y+5)\rvert = 3ln8y$. Функция y = 3 также удовлетворяет этому уравнению. Входит ли эта функция в состав общего решения? Если «Да», то при каком значении параметра С?	1. Нет. 2. C = 0. 3. C = 3. 4. C = −2.
23. Найти общее решение разностного уравнения $y_{t+2} - 3y_{t+1} + 2y_t = 0/$	1. $y_t = C_1 2^t + C_2(-3)^t$. 2. $y_t = C_1 t^2 + C_2 t^{-3}$. 3. $y_t = C_1 2^t + C_2$. 4. $y_t = C_1 t^2 + C_2.t$.
24. Которая функция является частным решением неоднородного стационарного разностного решения $5y_{t+2} + 8y_{t+1} - 7y_7 = 12$?	1. 2. 2. — 2. 3. 3. 4. $\frac{12}{5}$.
25. В каком виде будете искать частное решение неоднородного уравнения $y_{t+2} + 9y_t = (4t-1)cos3t$?	1. $((At + B)cos3t +$ $+ (Ct + D)sin3t)t$. 2. $(At + B)cos3t +$ $+ (Ct + D)sin3t$. 3. $(At + B)cos3t$. 4. $(At - B)tcos3t$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кремер Н.Ш., Путко Б.А., Тришин И.М., Фридман М.Н.* Высшая математика для экономического бакалавриата: Учебник и практикум. — М.: Юрайт, 2012. — 909 с.

2. *Солодовников А.С., Бабайцев В.А., Браилов А.В., Шандра И.Г.* Математика в экономике. Ч. 2. — М.: Финансы и статистика, 2013. — 560 с.

3. *Демидович Б.П., Моденов В.П.* Дифференциальные уравнения: Учебное пособие. — 3-е изд., стер. — СПб.: Лань, 2008. — 288 с.

4. *Филиппов А.Ф.* Сборник задач по дифференциальным уравнениям. — Москва — Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2005.

5. *Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я.* Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч. 1. — 6-е изд. — М.: Оникс: Мир и Образование, 2003. — 304 с.

6. *Самаров К.Л., Шапкин А.С.* Задачи с решениями по высшей математике и математическим методам в экономике. — М.: Дашков и К°, 2009. — 388 с.

7. *Романко В.К.* Разностные уравнения. — М.: Бином, 2020. — 115 с.

8. *Журавлёв С.Г., Аниковский В.В.* Дифференциальные уравнения: Сборник задач. — М: Экзамен, 2005. — 126 с.

9. *Крыньский Х.Э.* Математика для экономистов. — М: Статистика, 1970. — 582 с.

10. *Клейнер Г.Б.* Производственные функции: теория, методы. — М.: Финансы и статистика, 1986. — 239 с.

11. *Баркалов Н.Б.* Производственные функции в моделях экономического роста. — М.: Изд-во МГУ, 1981. — 128 с.

Для заметок

Учебное издание

КОРШУНОВА Наталия Ивановна

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА ДЛЯ ЭКОНОМИСТОВ

Учебное пособие для бакалавриата

Публикуется в авторской редакции
Дизайн обложки *Вершинина И.А.*
Компьютерная верстка *Вершинина И.А.*

Издательство «Прометей»
119002, г. Москва, ул. Арбат, д. 51, стр. 1
Тел./факс: +7 (495) 730-70-69
E-mail: info@prometej.su

Подписано в печать 00.00.2021
Формат 60×84/16. Объем 12,0 п.л.
Тираж 500 экз. Заказ № 000