Решение финансово-экономических оптимизационных задач при помощи дифференциального исчисления

Выполнили:
Шемонаева А.Ю.
Щербакова Т.С.

Дифференциальное исчисление – это раздел высшей математики, базирующийся на использовании таких ключевых для всей высшей математики понятий, как производные и дифференциалы функций.

Исаак Ньютон

Готфридом Лейбницем

При исследовании приращения зависимой величины Δy, обусловленного приращением независимой переменной Δx , часто возникает необходимость определения предела отношения этих величин $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Этот предел называется производной, а операция его вычисления – дифференцированием функции.

Функция

с одной переменной

$y=f(x)$

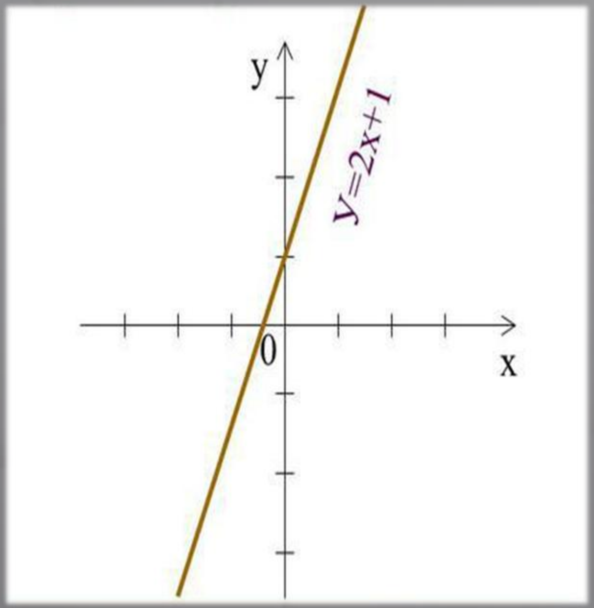
с несколькими переменными

$z=f(x,y)$

Функция с одной переменной

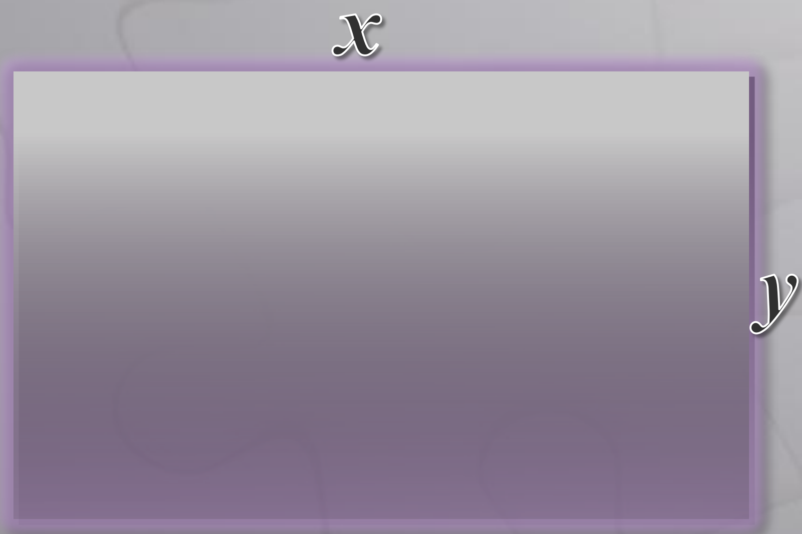
Функцией $y=f(x)$ называют такую зависимость переменной y от переменной x, при которой каждому допустимому значению x соответствует единственное значение y.

$$y = 2x+1$$

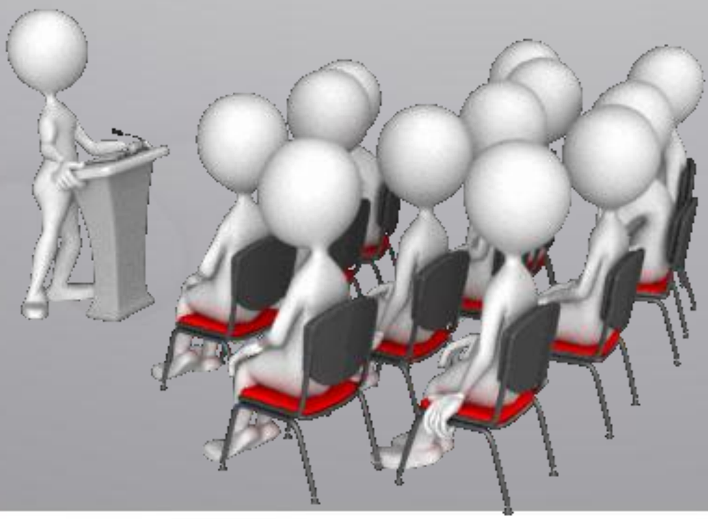


Функция с несколькими переменными

Площадь S прямоугольника есть функция двух независимо друг от друга изменяющихся переменных – длин сторон прямоугольника *x* и *y*, которая выражается формулой:



$$S=xy$$



Геометрический смысл производной:

Из курса алгебры известно, что уравнение прямой имеет вид:

$$y=kx+b$$

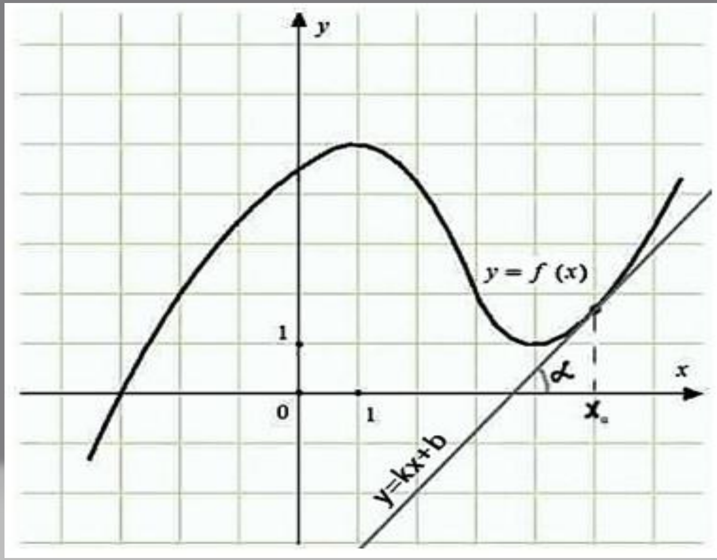
Производная функции в точке есть угловой есть коэффициент касательнй к графику этой функции в этой точке.

То есть производная функция y=f(x) в точке x_0 равно угловому коэффициенту касательной:

$$y' = f'(x) = k$$

А угловой коэффициент в свою очередь равен тангису угла α, то есть:

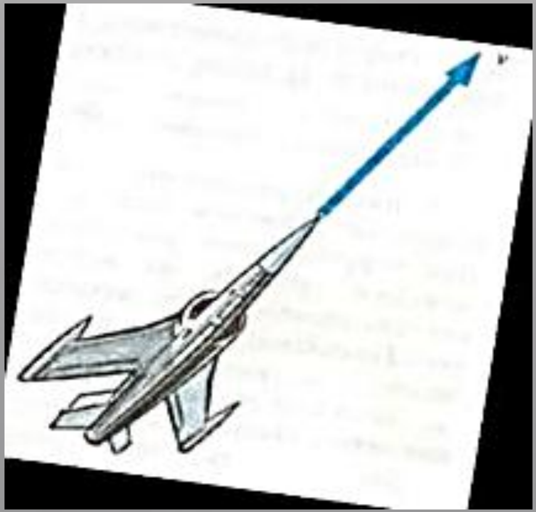
$$y' = f'(x) = k = tg\ \alpha$$

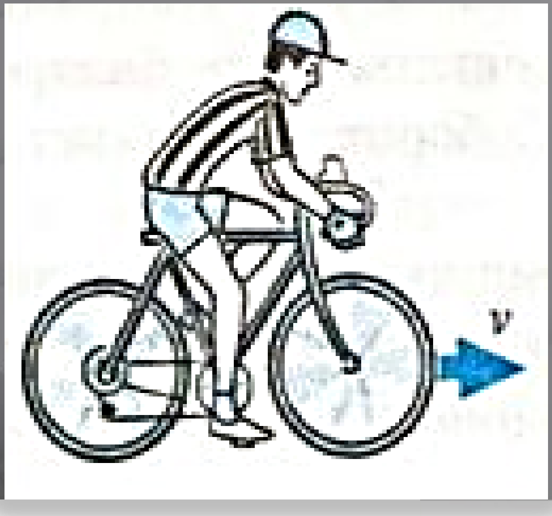


Физический смысл производной:

Скорость есть производная от пути времени:

$$v(t) = S'(t)$$





Ускорение есть производная скорости по времени:

$$a(t) = v'(t) = S''(t)$$

Экономический смысл производной:

Пусть функция $V = V(t)$ выражает количество произведенной продукции V за время t. Найдем производительность труда в момент времени t_0

$$\Pi(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta V}{\Delta t}$$

Производная объема произведенной продукции по времени $V'(t)$ есть производительность труда в момент t_0

$$\Pi(t) = V'(t)$$

Экономический смысл производной:

Издержки производства y будем рассматривать как функцию количества выпускаемой продукции x.

Пусть Δx – прирост продукции, тогда Δy – приращение издержек производства и $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ – среднее приращение издержек производства на единицу продукции.

Производная $\boxed{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}}$ выражает предельные издержки производства и характеризует приближенно дополнительные затраты на производство единицы дополнительной продукции.

Пример экономического смысла производной:

Зависимость между издержками производства y (ден. ед.) и объемом выпускаемой продукции x (ед.) выражается функцией $\boxed{y = 50x - 0{,}05x\hat{\ }2}$. Определить средние и предельные издержки при объеме продукции, равном 10 ед.

Решение:

Функция средних издержек выражается отношением

$$y = \frac{y}{x} = 50 - 0{,}05x^2,\ y\,(10) = 50 - 0{,}05 * 100 = 45\ (\text{ден. ед.})$$

Функция предельных издержек выражается производной

$\boxed{y'(x) = 50 - 0{,}15x^2}$, $y'(10) = 50 - 0{,}15 * 100 = 35$ (ден.ед.)

Пример решения задач при помощи дифференциального исчисления функций одной переменной

Завод изготавливает и продает полупроводниковые приборы. Удельные расходы (в расчете на один прибор) зависят от объема производства и включают в себя постоянную часть в размере 1000 $(руб/прибор)$ и переменную часть $2n$ $(руб/прибор)$, где n – число приборов, изготовленных за месяц. Цена прибора, в свою очередь, зависит от объема производства по закону $p(n) = 10000 - n$ $(руб/прибор)$. Определить, при каком объеме производства прибыль будет максимальной?

Решение.

Доход от продажи приборов, изготовленных в течение месяца, равен

$$R(n) = np(n) = n(10000 - n).$$

Месячные расходы при этом составляют

$$C(n) = n(1000 + 2n).$$

Тогда прибыль определяется формулой

$$P(n) = R(n) - C(n) = n(10000 - n) - n(1000 + 2n) = 10000n - n^2 - 1000n - 2n^2 = 9000n - 3n^2.$$

Исследуем функцию прибыли на экстремум. При этом будем считать, что n является действительным числом. Дифференцируя по n, получаем:

$$P'(n) = \left(9000n - 3n^2\right)' = 9000 - 6n = 0, \ \Rightarrow n = \frac{9000}{6} = 1500.$$

Вычислим также вторую производную:

$$P''(n) = (9000 - 6n)' = -6 < 0.$$

Поскольку вторая производная всюду отрицательна, то решение $n = 1500$ является точкой максимума, то есть при производстве 1500 приборов в месяц прибыль предприятия будет максимальной.

Зная, точку максимума n,можно узнать максимальную прибыль продукции, подставив в формулу 1500:

$9000n-3n^2$=

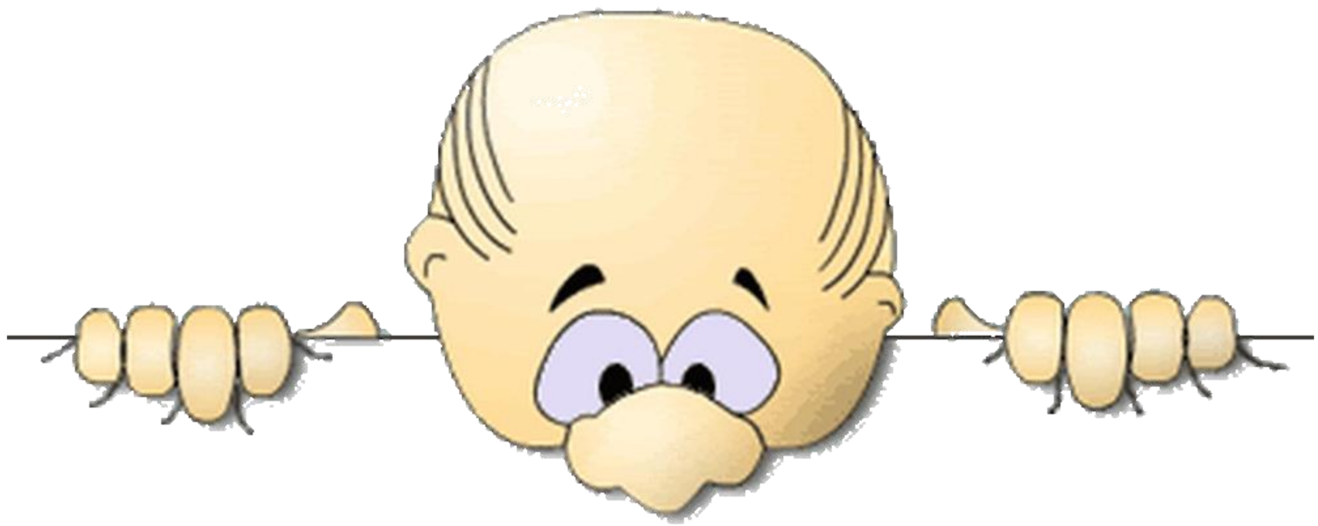
$9000*1500-3*1500^2$ = **6 750 000** ден.ед.

Функции нескольких переменных в экономике

Частная производная *$z=f(x,y)$* по переменной *x* в точке $M_0(x_0,y_0)$ называют предел отношения частного приращения функции $\Delta_x z$ к соответствующему приращению аргумента Δx, при $\Delta x \to 0$

Функции нескольких переменных в экономике

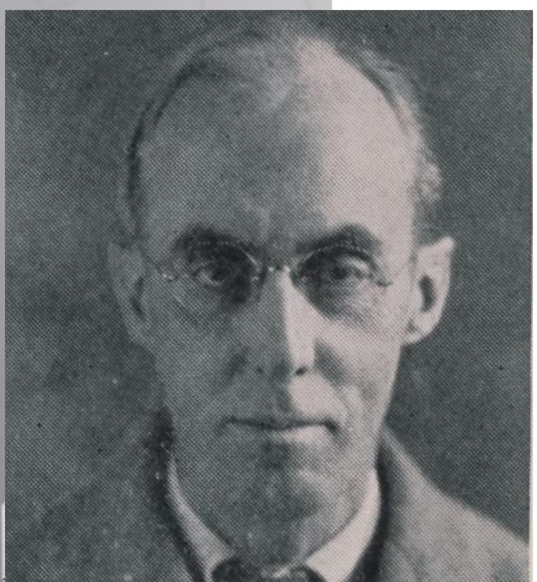
Производственной функцией называется зависимость результата производственной деятельности — выпуска продукции и от обусловивших его факторов — затрат ресурсов $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Производственная функция может быть задана как в натуральных, так и в денежных единицах. В последнем случае она представляет собой доход от использования ресурсов.



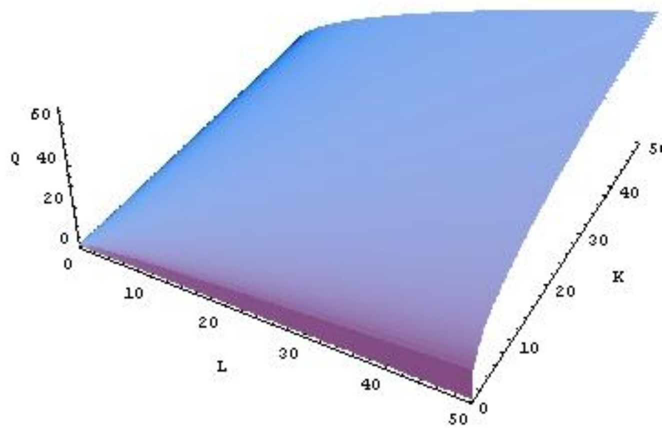
Функции нескольких переменных в экономике

Производственная функция

$K(x,y) = Ax^{\alpha}y^{\beta}$ называется ***функцией Кобба — Дугласа.*** Параметры α и β представляют собой частные эластичности выпуска продукции по отношению к затратам труда x и капитала y.



Чарльз Кобб (1875-1949 г.г.) Американский математик и экономист



Пол Дуглас (1892-1976 г.г.) Американский экономист

Заключение

Дифференциальное исчисление помогает находить наиболее оптимальный путь развития организации.

С помощью дифференциального исчисления можно максимально сокращать издержки производства, что мы увидели на примере.