Математические заметки

том 72 выпуск 2 август 2002

УДК 517.518.235

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА И ОТНОСИТЕЛЬНЫЕ ЕМКОСТИ

В. С. Климов, Е. С. Панасенко

В статье изучается функциональное неравенство вида

$$\|f;Q\| \leqslant C\varphi(\|\nabla f;P\|,\|f;R\|),$$

где P, Q, R – банаховы идеальные пространства функций на области $\Omega\subset\mathbb{R}^n$, константа C одинакова для всех финитных функций f, удовлетворяющих условию Липшица, ∇f – градиент функции f, φ – непрерывная однородная первой степени функция. Приводятся условия согласования норм в пространствах P, Q, R, при выполнении которых изучаемое неравенство эквивалентно неравенству изопериметрического типа, связывающему нормы индикаторов и относительные емкости компактных подмножеств области Ω.

Библиография: 20 названий.

В статье изучается функциональное неравенство вида

$$\|f;Q\| \leqslant C\varphi(\|\nabla f;P\|,\|f;R\|), \tag{1}$$

где P, Q, R – банаховы идеальные пространства функций на области $\Omega\subset\mathbb{R}^n$, константа C одинакова для всех финитных функций f, удовлетворяющих условию Липшица, ∇f – градиент функции f, φ – непрерывная однородная первой степени функция на первом квадранте $\mathbb{R}^2_+=\{(\xi,\eta),\ \xi\geqslant 0,\ \eta\geqslant 0\}$, неубывающая по каждому аргументу. Приводятся условия согласования норм в пространствах P, Q, R, при выполнении которых функциональное неравенство (1) эквивалентно геометрическому неравенству, связывающему нормы индикаторов и относительные емкости компактных подмножеств области Ω. Наиболее обозримые результаты относятся к случаю, когда P, Q, R – симметричные пространства.

Для $Q=L_q(\Omega)$, $R=L_r(\Omega)$ аналогичные утверждения установлены в [1], [2]. В статье используются методы теории банаховых идеальных пространств и выпуклого анализа (см., например, работы [3]–[10] и приведенную там библиографию).

1. Пусть (Ω,μ) – измеримое пространство с полной σ-конечной непрерывной мерой μ; $\mathbb{R}^m$ – m-мерное евклидово действительное пространство со скалярным произведением ab и нормой $|a|=\sqrt{aa}$, $a,b\in\mathbb{R}^m$, $S(\Omega,\mathbb{R}^m)$ – линейное метрическое пространство μ п.в. (почти всюду) конечных μ-измеримых функций на Ω со значениями в $\mathbb{R}^m$. При $m=1$ полагаем $S(\Omega,\mathbb{R}^1)=S(\Omega)$; подобные сокращения используются и для других пространств скалярных функций.

Линейное пространство $E = E(\Omega, \mathbb{R}^m)$ функций класса $S(\Omega, \mathbb{R}^m)$ называют [3], [7] *нормированным идеальным пространством* (НИП), если из соотношений $y \in E$, $\alpha \in S(\Omega)$, $|\alpha(x)| \leqslant 1$ п.в. следует, что $\alpha y \in E$ и $\|\alpha y; E\| \leqslant \|y; E\|$. Если НИП E полно относительно нормы $\|\cdot\,; E\|$, то его называют *банаховым идеальным пространством* (БИП).

Пусть $\mathbb{Z}$ – множество целых чисел. Банахово пространство $\tau = \tau(\mathbb{Z})$ последовательностей $a = (a_i)$, $i \in \mathbb{Z}$, называют [4, с. 213] *симметричным*, если из условий $a = (a_i) \in \tau$, $|b_i| \leqslant |a_{\pi(i)}|$ $(i \in \mathbb{Z}, \pi$ – биекция множества $\mathbb{Z})$ следует, что $b = (b_i) \in \tau$ и $\|b; \tau\| \leqslant \|a; \tau\|$. Через $\ell_M = \ell_M(\mathbb{Z})$ далее обозначается пространство Орлича последовательностей $a = (a_i)$, $i \in \mathbb{Z}$, порожденное выпуклой четной непрерывной в нуле функцией $M : \mathbb{R} \to [0, \infty] = \overline{\mathbb{R}}_+$, $M(0) = 0$, $M(s) > 0$ при $s > 0$, с нормой

$$\|a; \ell_M\| = \inf\left\{k > 0\colon \sum_{i \in Z} M\left(\frac{a_i}{k}\right) \leqslant 1\right\}.$$

Пространство $\ell_M = \ell_M(\mathbb{Z})$ симметрично.

Функциональную последовательность y_i из $S(\Omega, \mathbb{R}^m)$, $i \in \mathbb{Z}$, назовем *дизъюнктной*, если $|y_i(x)|\,|y_j(x)| = 0$ μ п.в. при $i \neq j$. Пусть $\tau = \tau(\mathbb{Z})$ – симметричное пространство (СП) последовательностей. Банахово идеальное пространство $E = E(\Omega, \mathbb{R}^m)$ назовем *τ-супераддитивным* (*τ-субаддитивным*), если для каждой дизъюнктной последовательности $y_i \in E$, $i \in \mathbb{Z}$, имеет место оценка $\|y; E\| \geqslant \|a; \tau\|$ (соответственно $\|y; E\| \leqslant \|a; \tau\|$), где $a = (a_i)$, $a_i = \|y_i; E\|$, $i \in \mathbb{Z}$, $y = \sum_{i \in Z} y_i$; при этом считается, что если $y \notin E$, то $\|y; E\| = \infty$, аналогичное соглашение относится и к $\|a; \tau\|$. Для БИП скалярных функций близкие понятия вводились многими авторами (соответствующие ссылки можно найти в [5], [6]). В данной работе используется терминология, принятая в [11], [12].

Среди СП τ, относительно которых БИП E τ-супераддитивно (τ-субаддитивно), имеется пространство $\tau_E(\sigma_E)$ с наибольшей (наименьшей) нормой:

$$\|a; \tau\| \leqslant \|a; \tau_E\|, \quad a \in \tau_E, \qquad (\|a; \sigma_E\| \leqslant \|a; \tau\|, \quad a \in \tau)$$

соответственно. Пространство E τ-супераддитивно в том и только том случае, если $\tau_E \overset{1}{\subset} \tau$, т.е. τ_E нормально вложено в τ [4, с. 10]. Это замечание характеризует пространство τ_E, называемое *нижним* для пространства E. Аналогично, пространство E τ-субаддитивно, если и только если $\tau \overset{1}{\subset} \sigma_E$, пространство σ_E называют *верхним* для E. Оценки нижнего и верхнего пространств τ_E и σ_E можно найти в [6], [11].

Приведем ряд примеров. Обозначим через $\beta(\mathbb{R}^m)$ класс выпуклых [8]–[10] четных функций $\Phi\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $\Phi(0) = 0$, $\Phi(\xi) > 0$ при $\xi \neq 0$. Пусть $H = H(\Omega)$ есть БИП скалярных функций на Ω, носитель supp H [3, с. 137] которого совпадает с Ω. Сопоставим H и функции ψ из $\beta(\mathbb{R}^m)$ совокупность функций класса $S(\Omega, \mathbb{R}^m)$ с конечной нормой

$$\|y; H^\psi\| = \inf\left(k > 0\colon \left\|\psi\left(\frac{y}{k}\right); H\right\| \leqslant 1\right\}.$$

Если $H = L_1(\Omega)$ – пространство суммируемых по мере μ функций, то $H^\psi(\Omega, \mathbb{R}^m)$ обозначают символом $L^\psi(\Omega, \mathbb{R}^m)$ и называют *пространством Орлича*; соответствующая норма $\|\cdot\,; L^\psi\|$ совпадает с нормой Люксембурга [3, с. 150], [8, с. 95], [9, с. 202].

Предложение 1. *Пусть* $\Phi \in \beta(\mathbb{R}^m)$; $M\colon \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ – *выпуклая четная непрерывная в нуле функция*, $M(0) = 0$, $M(s) > 0$ *при* $s > 0$, $\Phi(t\xi) \geqslant \Phi(\xi)M(t)$, $\xi \in \mathbb{R}^m$, $0 \leqslant t \leqslant 1$. *Тогда пространство Орлича* $L^\Phi(\Omega, \mathbb{R}^m)$ ℓ_M-*супераддитивно.*

Предложение 2. *Пусть* $H = H(\Omega)$ *есть БИП*, $\operatorname{supp} H = \Omega$, $\psi \in \beta(\mathbb{R}^m)$, $M(t) = \sup\{\psi(t\xi)/\psi(\xi)\colon \xi \neq 0\}$. *Тогда пространство* $H^\psi(\Omega, \mathbb{R}^m)$ ℓ_M-*субаддитивно.*

Предложения 1, 2 установлены в [11], [12]. Они означают, что $\tau_{L^\Phi} \overset{1}{\subset} \ell_M$ (предложение 1), $\ell_M \overset{1}{\subset} \sigma_{H^\psi}$ (предложение 2). Как показывают результаты работы [6], даваемые предложениями 1, 2 оценки нижнего и верхнего пространств τ_{L^Φ}, σ_{H^ψ} не допускают существенного усиления, там же найдены τ_E, σ_E в случаях, когда E совпадает с пространством Лоренца (Марцинкевича).

Обозначим через $(\mathscr{L})$ совокупность непрерывных функций $\varphi\colon \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}_+$, неубывающих по каждому аргументу и однородных первой степени: $\varphi(k\xi, k\eta) = k\varphi(\xi, \eta)$, $\xi \geqslant 0$, $\eta \geqslant 0$, $k \geqslant 0$. Класс $(\mathscr{L})$ играет важную роль в теории интерполяции (см. [5], [13]–[15]). В этот класс входят, например, функции

$$\varphi_+(\xi, \eta) = \xi + \eta, \qquad \varphi_\delta(\xi, \eta) = \xi^\delta \eta^{1-\delta}, \quad 0 < \delta < 1,$$

$$\varphi_M(\xi, \eta) = \begin{cases} 0, & \text{если } \eta = 0, \\ \eta M^{-1}\left(\dfrac{\xi}{\eta}\right), & \text{если } \eta \neq 0, \end{cases}$$

где $M\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ есть N-функция [8], M^{-1} – обратная к сужению M на $\mathbb{R}_+$ функция [13]–[15].

Пусть P, Q, R – идеальные пространства вектор-функций (не исключается случай, когда область определения и размерности соответствующих областей значений рассматриваемых вектор-функций различны), $\varphi \in (\mathscr{L})$. Скажем, что пара $\{P, R\}$ φ-*мажорирует* Q $(Q \overset{\varphi}{\prec} \{P, R\})$, если найдется такая постоянная $\kappa = \kappa(P, Q, R)$, что для любых последовательностей $u = (u_i) \in \tau_P$, $v = (v_i) \in \tau_R$ выполнено неравенство

$$\|\varphi(u, v); \sigma_Q\| \leqslant \kappa\varphi(\|u; \tau_P\|, \|v; \tau_R\|), \tag{2}$$

где $\varphi(u, v) = (\varphi(u_i, v_i))$, $i \in \mathbb{Z}$, τ_P, τ_R (соответственно σ_Q) – нижние (соответственно верхнее) для P, R (соответственно для Q) СП последовательностей. В случае $\varphi(\xi, \eta) = \xi$ аналогичные понятия вводились в [6], [11], [12]. Насколько известно авторам, применительно к произвольным функциям φ класса $(\mathscr{L})$ это понятие ранее не использовалось.

Оценка (2) для $\varphi = \varphi_+$ равносильна непрерывности оператора вложения $\tau_P + \tau_R \subset \sigma_Q$, где $\tau_P + \tau_R$ – сумма пространств τ_P, τ_R, образующих банахову пару [4, с. 20]. Для $\varphi = \varphi_\delta$ оценка (2) равносильна непрерывности оператора вложения $\tau_P^\delta \tau_R^{1-\delta} \subset \sigma_Q$; здесь $\tau_P^\delta \tau_R^{1-\delta}$ – пространство средних Кальдерона [4], [5], [13]–[15]. Аналогичная интерпретация неравенства (2) возможна и в общем случае, необходимо лишь вместо конструкции Кальдерона использовать некоторые ее обобщения [14], [15].

Оценка (2) имеет место, если справедливо неравенство

$$\|\varphi(u, v); \sigma\| \leqslant \kappa\varphi(\|u; \tau_1\|, \|v; \tau_0\|), \tag{3}$$

где σ, τ_1, τ_0 – СП, $\tau_P \overset{1}{\subset} \tau_1$, $\tau_R \overset{1}{\subset} \tau_0$, $\sigma \overset{1}{\subset} \sigma_Q$. Это замечание позволяет устанавливать соотношения $Q \overset{\varphi}{\prec} \{P, R\}$, располагая лишь оценками пространств τ_P, τ_R, τ_Q. Например, если $\tau_0 = \ell_{M_0}$, $\tau_1 = \ell_{M_1}$, $\sigma = \ell_M$ – пространства Орлича, порождаемые функциями M_0, M_1, M соответственно, $\varphi = \varphi_\delta$, то (3) выполняется (с некоторой константой $\kappa > 0$), если $M^{-1}(t) \geqslant (M_1^{-1}(t))^\delta (M_0^{-1}(t))^{1-\delta}$, $0 < t < \infty$.

2. Пусть Ω – область в $\mathbb{R}^n$. Используются обозначения: $\mathfrak{K}(\Omega)$ – совокупность компактных множеств области Ω, $\overset{0}{\mathrm{Lip}}(\Omega)$ – пространство финитных функций $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$, удовлетворяющих условию Липшица. Пара множеств (K,Ω), $K \in \mathfrak{K}(\Omega)$, называется *конденсатором*; если K – замкнутый шар, Ω – концентрический ему открытый шар, то пару (K,Ω) будем именовать *шаровым конденсатором*. Индикатор (характеристическая функция) множества $\mathscr{D}$ обозначается символом $1_{\mathscr{D}}$. Всюду далее P – БИП измеримых относительно n-мерной лебеговой меры mes_n функций со значениями в $\mathbb{R}^n$. Не оговаривая особо, всюду предполагаем, что $1_K a \in P(\Omega,\mathbb{R}^n)$ для всех $K \in \mathfrak{K}(\Omega)$, $a \in \mathbb{R}^n$.

Конденсатору (K,Ω) сопоставим множество функций

$$U(K,\Omega) = \{f \in \overset{0}{\mathrm{Lip}},\quad f(x) \geqslant 1 \ \text{ при } x \in K\}$$

и число $c_P(K,\Omega) = \inf\{\|\nabla f; P\|,\ f \in U(K,\Omega)\}$, называемое далее *$P$-емкостью* компакта K относительно области Ω, или, более кратко, *P-емкостью конденсатора* (K,Ω). В случае $P = L_p(\Omega,\mathbb{R}^n)$, $1 \leqslant p < \infty$, аналогичные характеристики компактов использовались многими авторами [1], [2], [16]–[18].

Если (K_1,Ω_1), (K_2,Ω_2) – два конденсатора и $K_1 \subset K_2 \subset \Omega_2 \subset \Omega_1$, то $U(K_2,\Omega_2) \subset U(K_1,\Omega_1)$, поэтому верно неравенство $c_P(K_1,\Omega_1) \leqslant c_P(K_2,\Omega_2)$, выражающее свойство монотонности относительно емкости. Достаточно общие свойства функционала $c_P(\,\cdot\,,\Omega)\colon \mathfrak{K}(\Omega) \to \mathbb{R}$ установлены в [12]. В частности, если $P = L^{\Phi}(\Omega,\mathbb{R}^n)$, $\Phi \in \beta(\mathbb{R}^n)$, то функционал $c_P(\,\cdot\,,\Omega)$ может быть продолжен с $\mathfrak{K}(\Omega)$ на систему всех подмножеств Ω так, что продолженный функционал является обобщенной емкостью [18, с. 71].

В этом пункте формулируются критерии справедливости функционального неравенства (1), где $Q = Q(\Omega)$, $R = R(\Omega)$ – БИП измеримых относительно счетно-аддитивных мер μ_Q, μ_R функций, заданных на борелевском кольце подмножеств Ω и конечных на всех компактах $K \subset \Omega$. Ниже $\nu_Q\colon S(\Omega) \to R$ – функционал, определяемый равенством $\nu_Q(f) = \sup\{t\|\chi_t; Q\|, t > 0\}$, в котором χ_t – индикатор лебегова множества $\{x \in \Omega,\ |f(x)| \geqslant t\}$ функции f. Функционал ν_Q положительно однороден, удовлетворяет неравенству 2-треугольника и подчинен норме $\|\cdot, Q\|$:

$$\nu_Q(\lambda f) = |\lambda|\nu_Q(f), \qquad \nu_Q(f+g) \leqslant 2(\nu_Q(f)+\nu_Q(g)), \qquad \nu_Q(f) \leqslant \|f;Q\|.$$

Ослабленный вариант (1), также изучаемый далее, есть неравенство вида

$$\nu_Q(f) \leqslant B\varphi(\|\nabla f; P\|, \|f;R\|). \tag{4}$$

Если $C(P,Q,R)$, $B(P,Q,R)$ – наименьшие из констант C, B, для которых имеет место (1) (соответственно (4)), то $B(P,Q,R) \leqslant C(P,Q,R)$. Оказывается, постоянные $C(P,Q,R)$, $B(P,Q,R)$ можно оценить через постоянную $A(P,Q,R)$, определяемую как минимальная из констант A, для которых имеет место оценка

$$\|1_K; Q\| \leqslant A\varphi(c_P(K,G), \|1_G; R\|), \tag{5}$$

A не зависит от пробного конденсатора (K,G), $G \subset \Omega$. Если подобных констант A не существует, полагаем $A(P,Q,R) = \infty$; аналогичное замечание относится и к постоянным $C(P,Q,R)$, $B(P,Q,R)$.

Теорема 1. *Пусть $\varphi \in (\mathscr{L})$. Тогда неравенство* (4) *справедливо в том и только том случае, если $A(P,Q,R)<\infty$; при этом $A(P,Q,R)\leqslant B(P,Q,R)\leqslant 2A(P,Q,R)$, следовательно, функциональное неравенство* (4) *эквивалентно геометрическому неравенству* (5).

Доказательство. Пусть имеет место неравенство (4). Фиксируем пробный конденсатор (K,G), $G\subset\Omega$, и положим $V(K,G)=\{f\in U(K,G),\ 0\leqslant f(x)\leqslant 1\}$. Так как $V(K,G)\subset U(K,G)$, то $\inf\{\|\nabla f;P\|\colon f\in V(K,G)\}\geqslant c_P(K,G)$. С другой стороны, если $f\in U(K,G)$, то $f_1=\min\{|f|,1|\}\in V(K,G)$ и $\|\nabla f_1;P\|\leqslant\|\nabla f;P\|$. Следовательно, $\inf\{\|\nabla f;P\|\colon f\in V(K,G)\}=c_P(K,G)$.

Для любой функции f из $V(K,G)$ справедливы неравенства $\|1_K;Q\|\leqslant\nu_Q(f)$, $\|f;R\|\leqslant\|1_G;R\|$. Поэтому из (4) вытекает оценка

$$\|1_K;Q\|\leqslant\nu_Q(f)\leqslant B\varphi(\|\nabla f;P\|,\|f;R\|)\leqslant B\varphi(\|\nabla f;P\|,\|1_G;R\|).$$

Минимизируя правую часть по всем функциям класса $V(K,G)$, приходим к оценке $\|1_K;Q\|\leqslant B\varphi(c_P(K,G),\|1_G,R\|)$ для произвольного конденсатора (K,G). Тем самым доказаны неравенство (5) и оценка $A(P,Q,R)\leqslant B(P,Q,R)$.

Предположим теперь, что $A(P,Q,R)\leqslant\infty$. Фиксируем функцию f из $\overset{0}{\mathrm{Lip}}(\Omega)$, число $t>0$ и положим $K=\{x\in\Omega\colon|f(x)|\geqslant t\}$, $G=\{x\in\Omega\colon|f(x)|>t/2\}$. Применяя к конденсатору (K,G) оценку (5) и используя очевидное неравенство $\|1_G;R\|\leqslant 2\|f;R\|/t$, получаем $\|1_K;Q\|\leqslant A\varphi(c_P(K,G),2\|f;R\|/t)$. Функция $f_0(x)=(|f(x)|-t_1)_+/(t-t_1)$ $(t/2<t_1<t)$ принадлежит $U(K,G)$, следовательно, $c_P(K,G)\leqslant\|\nabla f_0;P\|\leqslant\|\nabla f;P\|/(t-t_1)$. Объединяя установленные оценки, получаем

$$\|1_K;Q\|\leqslant A\varphi\left(\frac{1}{t-t_1}\|\nabla f;P\|,\frac{2}{t}\|f;R\|\right).$$

Последнее неравенство при $t_1\to t/2$ влечет (4) и оценку $B(P,Q,R)\leqslant 2A(P,Q,R)$. Теорема доказана.

В ряде случаев из неравенства (4) вытекает его сильный аналог – неравенство (1). Это заведомо так, если функционал ν_Q эквивалентен норме $\|\cdot;Q\|$. Данное требование выполняется для некоторых пространств [4, с. 156], однако в общем случае оно слишком ограничительно. Поэтому представляют интерес другие условия эквивалентности неравенств (1), (4), (5).

Теорема 2. *Пусть $\varphi\in(\mathscr{L})$ и $Q\overset{\varphi}{\prec}\{P,R\}$. Тогда неравенство* (1) *имеет место в том и только том случае, если $A(P,Q,R)<\infty$; при этом*

$$A(P,Q,R)\leqslant C(P,Q,R)\leqslant 8\kappa(P,Q,R)A(P,Q,R).$$

Доказательство. Достаточно установить оценку $C(P,Q,R)$ сверху. Пусть $f\in\overset{0}{\mathrm{Lip}}(\Omega)$, $K_i=\{x\colon|f(x)|\geqslant 2^i\}$, $G_i=\{x\colon|f(x)|>2^{i-1}\}$, $D_i=K_i\setminus K_{i+1}$, $u_i=\|1_{D_{i-1}}\nabla f;P\|$, $v_i=\|1_{D_i}f;R\|$, $t_+=\max\{0,t\}$, $\alpha(t)=\min\{1,t_+\}$.

Если $K_i\neq\varnothing$, то функция $f_i(x)=\alpha(2^{1-i}(|f(x)|-2^{i-1}))$ принадлежит $U(K_i,G_i)$, поэтому

$$c_P(k_i,G_i)\leqslant\|\nabla f_i;P\|\leqslant 2^{1-i}\|1_{D_{i-1}}\nabla f;P\|=2^{1-i}u_i. \qquad (6)$$

Так как $G_i \subset \bigcup_{j=0}^{\infty} D_{i-1+j}$, то

$$\|1_{G_i}; R\| \leqslant \sum_{j=0}^{\infty} \|1_{D_{i-1+j}}; R\| \leqslant \sum_{j=0}^{\infty} 2^{1-i-j} v_{i+j-1}. \tag{7}$$

Объединяя (6), (7) с оценками

$$w_i \leqslant 2^{i+1} \|1_{K_i}; Q\|, \qquad \|1_{K_i}; Q\| \leqslant A\varphi(c_P(K_i, G_i), \|1_{G_i}; R\|),$$

приходим к неравенству

$$w_i \leqslant 4A\varphi\left(u_i, \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j} v_{i+j-1}\right), \qquad i \in \mathbb{Z}. \tag{8}$$

Используя определение пространств τ_P, τ_R, получаем

$$\begin{gathered} \|(u_i); \tau_P\| \leqslant \|\nabla f; P\|, \\ \left\| \left(\sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j} v_{i+j-1} \right); \tau_R \right\| \leqslant \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j} \|(v_{i+j-1}); \tau_R\| \leqslant \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j} \|f; R\| = 2\|f; R\|. \end{gathered} \tag{9}$$

Из σ_Q-субаддитивности пространства Q следует неравенство $\|f; Q\| \leqslant \|(w_i); \sigma_Q\|$, комбинируя которое с (9), (8) и (3), приходим к оценке

$$\|f; Q\| \leqslant 4A\kappa\varphi(\|\nabla f; P\|, 2\|f; R\|) \leqslant 8A\kappa\varphi(\|\nabla f; P\|, \|f; R\|),$$

показывающей, что $C(P, Q, P) \leqslant 8\kappa(P, Q, R)A(P, Q, R)$. Теорема доказана.

Теорема 2 означает, что при условии $Q \overset{\varphi}{\prec} \{P, R\}$ константа $C(P, Q, R)$ в функциональном неравенстве (1) имеет тот же порядок, что и постоянная $A(P, Q, R)$ в геометрическом неравенстве (5). Другим следствием теоремы является равносильность неравенств (1), (4).

Обозначим через $A_0(P, Q, R)$ наименьшую из постоянных A_0, для которых имеет место оценка

$$\|1_K; Q\| \leqslant A_0\varphi(c_P(K, \Omega), \|1_K; R\|), \tag{10}$$

A_0 не зависит от K из $\mathfrak{R}(\Omega)$. Так как $c_P(K, G) \geqslant c_P(K, \Omega)$, $\|1_G; R\| \geqslant \|1_K; R\|$ для любого конденсатора (K, G), $G \subset \Omega$, то $A(P, Q, R) \leqslant A_0(P, Q, R)$. Поэтому оценка (10) влечет оценку (5), однако обратная импликация не всегда верна; обсуждение этого вопроса для пространств Лебега можно найти в [2, с. 111]. В общем случае (10) можно рассматривать как достаточное условие для более трудно проверяемого неравенства (5).

В случае $\varphi = \varphi_+$ теорема 2 приводит к функциональному неравенству типа теорем вложения

$$\|f; Q\| \leqslant C(\|\nabla f; P\| + \|f; R\|).$$

При $\varphi = \varphi_0$ из теоремы 2 вытекает критерий справедливости мультипликативного неравенства

$$\|f; Q\| \leqslant C\|\nabla f; P\|^{\delta} \|f; R\|^{1-\delta}.$$

Для БИП P, Q, R, существенным образом отличающихся от пространств Лебега, естественно рассмотрение функций φ достаточно общего вида. Требование мажорантности $Q \overset{\varphi}{\prec} \{P, R\}$ может быть ослаблено [1], [2, с. 107], [11]. В явном виде аналоги теоремы 2 ранее не отмечались.

3. Наиболее просто оценки величины $A(P,Q,R)$ устанавливаются в случае симметричных пространств P, Q, R. Напомним, что БИП $E = E(\Omega, \mathbb{R}^m)$ называют *симметричным*, если из равноизмеримости отображений $y\colon \Omega \to \mathbb{R}^m$, $z\colon \Omega \to \mathbb{R}^m$ относительно n-мерной лебеговой меры mes_n и включения $y \in E$ следует, что $z \in E$ и $\|z; E\| = \|y; E\|$. Каждому СП $E = E(\Omega, \mathbb{R}^m)$ можно сопоставить СП вектор-функций $E(I, \mathbb{R}^m)$ на интервале $I = (0, \mu_0)$, где $\mu_0 = \mathrm{mes}_n\,\Omega$. Пространство $E(I, \mathbb{R}^m)$ определяют как совокупность измеримых относительно mes_1 отображений $u\colon I \to \mathbb{R}^m$, равноизмеримых с функциями y из $E(\Omega, \mathbb{R}^m)$ в том смысле, что для любого измеримого по Борелю множества $\mathfrak{J} \in \mathbb{R}^m$ имеем $\mathrm{mes}_n\{x \in \Omega,\, y(x) \in \mathfrak{J}\} = \mathrm{mes}_1\{t \in I, u(t) \in \mathfrak{J}\}$, норма в $E(I, \mathbb{R}^m)$ определяется равенством $\|u; E(I, \mathbb{R}^m)\| = \|y; E(\Omega, \mathbb{R}^m)\|$, где $y \in E(\Omega, \mathbb{R}^m)$ и вектор-функции y, u равноизмеримы. При $m = 1$ СП введены Е.М. Семеновым, далее они будут называться скалярными СП. Случай $m > 1$ рассматривался многими авторами. Основное внимание при этом уделялось изотропным СП, норма в которых может быть определена равенством $\|y; E\| = \|\,|y|; F\|$, где F – скалярное СП, $|y|$ – евклидова норма y в пространстве $\mathbb{R}^m$. Более общий случай возникает, если E есть прямое произведение скалярных СП E_i $(i = 1, \ldots, m)$, а норма в $E = E_1 \times \cdots \times E_m$ определяется равенством $\|y; E\| = \max_i \|y_i; E_i\|$, где y_i – компоненты вектор-функции y в некотором базисе $\mathbb{R}^m$. Пространства Орлича $L^\Phi(\Omega, \mathbb{R}^m)$ являются симметричными; в общем случае они анизотропны и не сводятся к прямому произведению скалярных СП. Симметричное пространство E называют *совершенным*, если единичный шар $\{y\colon \|y; E\| \leqslant 1\}$ пространства E замкнут относительно сходимости по мере. Пространства L_p, $1 \leqslant p < \infty$, а также пространства Орлича, Лоренца, Марцинкевича являются совершенными [4].

Набору $E_1, \ldots, E_m$ скалярных СП можно сопоставить пространство средних Кальдерона $\widetilde{E} = \sqrt[m]{E_1 \cdots E_m}$. Напомним, что $\widetilde{E}$ состоит из тех измеримых функций z, для которых имеет смысл и конечна норма

$$\|z; \widetilde{E}\| = \inf\{k > 0\colon |z| \leqslant k \sqrt[m]{z_1 \cdots z_m},\ \|z_i; E_i\| \leqslant 1,\ i = 1, \ldots, m\}.$$

Как известно, $\widetilde{E}$ есть СП. Если $E_1, \ldots, E_m$ – совершенные СП, то $\widetilde{E}$ – также совершенное СП.

В этом пункте $Q = Q(\Omega)$, $R = R(\Omega)$ – скалярные СП функций на Ω, $P = P(\Omega, \mathbb{R}^n)$ – СП вектор-функций на Ω со значениями в $\mathbb{R}^n$; мера и измеримость понимаются в смысле Лебега, $\mu_0 = \mathrm{mes}_n\,\Omega$. В работе [19] установлена оценка

$$\|\nabla f; P\| \geqslant \left\| \frac{df}{ds} \lambda; P^0 \right\|, \tag{11}$$

где $f \in \overset{0}{\mathrm{Lip}}(\Omega)$, f – перестановка функции $|f|$ в убывающем порядке [4, с. 211], $\lambda(s) = n v_n^{1/n} s^{1-1/n}$, $0 < s < \mu_0$, $v_n = \mathrm{mes}_n\{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| \leqslant 1\}$, P^0 – некоторое СП функций на $I = (0, \mu_0)$.

Опишем способ определения P^0 в достаточно характерных случаях. Если P – изотропное совершенное СП и $\|y; P\| = \|\,|y|; F\|$, то $P^0 = F(I)$ и по составу элементов, и по норме. Если $P = P_1 \times \cdots \times P_n$ – прямое произведение n совершенных СП P_i $(i = 1, \ldots, n)$, то $P^0 = \widetilde{P}(I)$, где $\widetilde{E} = \sqrt[n]{P_1 \cdots P_n}$ – пространство средних Кальдерона, при этом $\|\cdot; P^0\| = 2^{-1} v_n^{1/n} \|\cdot; \widetilde{P}(I)\|$. Наконец, если P есть пространство Орлича $L^\Phi(\Omega, \mathbb{R}^n)$, то P^0 изоморфно пространству Орлича $L^{\Phi^0}(I)$, где Φ^0 – выпуклая четная функция одного переменного, называемая *округлением* Φ и характеризуемая условием

$$\mathrm{mes}_n\{\xi\colon \Phi(\xi) \leqslant h\} = \mathrm{mes}_n\{\xi\colon \Phi^0(|\xi|) \leqslant h\}$$

при любом $h \geqslant 0$. Способ конструирования P^0, применимый к любому СП $P(\Omega, \mathbb{R}^n)$, изложен в [19]. Всюду далее оценка (11) предполагается выполненной.

Лемма 1. *Пусть (K, G) – конденсатор, $\operatorname{mes}_n K = t$, $\operatorname{mes}_n G = T$. Пусть $P^{0\prime}$ – двойственное к пространству $P^0 = P^0(G)$, $P^{0\prime}(t, T)$ – его сужение на (t, T). Тогда*

$$c_P(K, G) \geqslant \left\| \frac{1}{\lambda}; P^{0\prime}(t, T) \right\|^{-1}. \tag{12}$$

Доказательство основано на оценке (11). Оно ничем не отличается от доказательства леммы 7 работы [12], поэтому опускается.

Лемма 2. *Пусть P – изотропное СП и $\|y; P\| = \| |y|; P^0(\Omega)\|$, (K, G) – шаровой конденсатор, $\operatorname{mes}_n K = t$, $\operatorname{mes}_n G = T$. Тогда*

$$c_P(K, G) \geqslant \left\| \frac{1}{\lambda}; P^{0\prime}(t, T) \right\|^{-1}. \tag{13}$$

Доказательство. Функционал $\Lambda\colon P^0(0, T) \to \mathbb{R}$, определяемый равенством

$$\Lambda(z) = \int_t^T \frac{z(s)}{\lambda(s)}\, ds,$$

непрерывен на $P^0(0, T)$ и его норма $\|\Lambda\| = \|1/\lambda; P^{0\prime}(t, T)\|$. Для каждого $\varepsilon > 0$ можно подобрать такую неотрицательную непрерывную на I функцию z_ε, что $\operatorname{supp} z_\varepsilon \subset (t, T)$, $\Lambda(z_\varepsilon) = 1$ и $\|z_\varepsilon; P^0\| < 1/\|\lambda\| + \varepsilon$.

Положим

$$h(w) = \int_w^T \frac{z_\varepsilon(s)}{\lambda(s)}\, ds, \quad 0 \leqslant w < T, \qquad f(x) = h(v_n |x|^n), \quad x \in G.$$

Как нетрудно проверить [20], $f(w) = h(w)$, $0 \leqslant w < T$, $f \in U(K, G)$ и $\|\nabla f; P\| = \|z_\varepsilon; P^0\|$. Следовательно,

$$c_P(K, G) \leqslant \|\nabla f; P\| = \|z_\varepsilon; P^0\| < \frac{1}{\|\lambda\|} + \varepsilon.$$

Ввиду произвольности $\varepsilon > 0$ приходим к формуле (13). Лемма доказана.

Для изотропного СП P неравенство (12) выражает свойство минимальности шарового конденсатора. В случае $P = L_p(\Omega, \mathbb{R}^n)$ такого рода оценки хорошо известны [2, с. 96], [16, с. 206].

Обозначим через ψ_Q, ψ_R фундаментальные функции СП Q, R [4, с. 137]. Положим $\gamma_{P^0}(t, T) = \|1/\lambda; P^{0\prime}(t, T)\|^{-1}$. Если (K, G) – шаровой конденсатор, то $\|1_K; Q\| = \psi_Q(t)$, $\|1_G; R\| = \psi_R(T)$ $(t = \operatorname{mes}_n K, T = \operatorname{mes}_n G)$, для изотропного СП P $c_P(K, G) = \gamma_{P^0}(t, T)$. Функция γ_{P^0} определена на треугольнике $0 < t < T < \mu_0$, непрерывна по совокупности переменных, не убывает по t и не возрастает по T.

Пусть P, Q, R таковы, что

$$\psi_Q(t) \leqslant \Gamma \varphi(\gamma_{P^0}(t, T), \psi_R(T)), \qquad 0 < t < T < \mu_0, \tag{14}$$

постоянная Γ не зависит от t, T. Наименьшая из подобных постоянных Γ, обозначаемая символом $\Gamma(P, Q, R)$, оценивает сверху введенную в п. 2 постоянную $A(P, Q, R)$.

Лемма 3. 1) *Для произвольной области* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *меры* μ_0 *справедлива оценка* $A(P,Q,R) \leqslant \Gamma(P,Q,R)$.

2) *Если* Ω – *шар в пространстве* $\mathbb{R}^n$, P – *изотропное СП, то* $A(P,Q,R) = \Gamma(P,Q,R)$.

Доказательство. Первое и второе утверждения леммы вытекают из лемм 1, 2 соответственно. Лемма доказана.

Следовательно, конечность $\Gamma(P,Q,R)$ достаточна для равномерной по всем областям Ω меры μ_0 ограниченности постоянных $A(P,Q,R)$. В случае изотропного СП P условие $\Gamma(P,Q,R) < \infty$ и необходимо для ограниченности $A(P,Q,R)$. В соединении с теоремами 1, 2 это позволяет формулировать обозримые критерии справедливости функциональных неравенств (1), (4).

Теорема 3. *Пусть* $\varphi \in (\mathscr{L})$. *Тогда*

1) *если* $Q \overset{\varphi}{\prec} \{P,R\}$ *и* $\Gamma(P,Q,R) < \infty$, *то для любой области* Ω *меры* m *верна оценка* (1) *с постоянной* $c \leqslant 8\kappa(P,Q,R)\Gamma(P,Q,R)$;
2) *если* Ω – *шар меры* m, P – *изотропное СП и справедлива оценка* (4), *то* $\Gamma(P,Q,R) \leqslant B(P,Q,R)$.

Теорема 3 следует из теорем 1, 2 и леммы 3.

Так как $\gamma_{P^0}(t,T) \geqslant \gamma_{P^0}(t,\mu_0)$, $\psi_R(T) \geqslant \psi_R(t)$, $0 < t < T < \mu_0$, то для выполнения (14) достаточно, чтобы имела место оценка

$$\psi_Q(t) \leqslant \Gamma\varphi(\gamma_{P^0}(t,\mu_0), \psi_R(t)), \qquad 0 < t < \mu_0. \tag{15}$$

Если $\Gamma_0(P,Q,R)$ – наименьшая из констант Γ в неравенстве (15), то $\Gamma(P,Q,R) \leqslant \Gamma_0(P,Q,R)$.

В некоторых случаях постоянную $\Gamma_0(P,Q,R)$ можно оценить сверху через постоянную $\Gamma(P,Q,R)$. Например, это так, если найдутся такие числа $k > 1$, $k_0 < \infty$, что

$$\gamma_{P^0}(t,kt) \leqslant k_0\gamma_{P^0}(t,\mu_0), \qquad kt < \mu_0. \tag{16}$$

Действительно, если $\mu_0 \leqslant kt$, то из неравенства $t < T < \mu_0$ следует, что

$$\varphi(\gamma_{P^0}(t,T), \psi_R(T)) \leqslant \varphi(\gamma_{P^0}(t,T), \psi_R(kt)) \leqslant k\varphi(\gamma_{P^0}(t,T), \psi_R(t)),$$

поэтому (14) влечет оценку $\psi_Q(t) \leqslant k\Gamma\varphi(\gamma_{P^0}(t,T), \psi_R(t))$. Устремляя T к μ_0, приходим к неравенству

$$\psi_Q(t) \leqslant k\Gamma\varphi(\gamma_{P^0}(t,\mu_0), \psi_R(t)).$$

Если $0 < kt < \mu_0$, то, применяя (14), (16), получаем

$$\begin{aligned}\psi_Q(t) &\leqslant \Gamma\varphi(\gamma_{P^0}(t,kt), \psi_R(kt)) \leqslant \Gamma\varphi(k_0\gamma_{P^0}(t,\mu_0); k\psi_R(t)) \\ &\leqslant \max(k,k_0)\Gamma\varphi(\gamma_{P^0}(t,\mu_0), \psi_R(t)).\end{aligned}$$

Два последних неравенства означают, что (16) влечет оценку

$$\Gamma_0(P,Q,R) \leqslant \max(k,k_0)\Gamma(P,Q,R).$$

Укажем обозримое условие, гарантирующее неравенство (16). Пусть $\rho(k)$ – норма оператора растяжения $z \to z(\cdot/k)$ в пространстве $P^{0\prime}(I)$, $\gamma_0(t,T) = \|1/\lambda; P^{0\prime}(t,T)\|$. Применяя неравенство $\|z(\cdot/k); P^{0\prime}\| \leqslant \rho(k)\|z; P^{0\prime}\|$ к функции $z(s) = 1_{[t,T]}(s)/\lambda$, приходим к оценке

$$\gamma_0(kt,kT) \leqslant \rho(k)k^{1/n-1}\gamma_0(t,T).$$

Если при некотором $k > 1$

$$\varepsilon = \rho(k)k^{1/n-1} < 1, \tag{17}$$

то

$$\gamma_0(t,\mu_0) \leqslant \sum_{i\geqslant 0}\gamma_0(k^i t, k^{i+1}t) \leqslant \sum_{i\geqslant 0}\varepsilon^i\gamma_0(t,kt) = \frac{1}{1-\varepsilon}\gamma_0(t,kt).$$

Поскольку $\gamma_0(t,T)\cdot\gamma_{P^0}(t,T) = 1$, то имеет место (16) с $k_0 = (1-\varepsilon)^{-1}$. Условие (17) равносильно требованию $\beta(P^{0\prime}) < 1-1/n$, где $\beta(P^{0\prime})$ – верхний показатель растяжения пространства $P^{0\prime}(I)$ [4, с. 134].

Рассмотрим функциональное неравенство

$$\|f; L_\infty\| \leqslant C\varphi(\|\nabla f; P\|, \|f; R\|), \tag{18}$$

представляющее относящийся к случаю $Q = L_\infty(\Omega)$ вариант неравенства (1). Очевидно, что $\psi_Q(t) = 1$ при $t > 0$, поэтому (14) равносильно неравенству

$$1 \leqslant \Gamma\varphi(\gamma_{P^0}(t,T), \psi_R(T)), \qquad 0 < t < T < \mu_0.$$

Устремляя t к 0, приходим к соотношению

$$1 \leqslant \Gamma\varphi(\gamma_{P^0}(+0,T), \psi_R(T)).$$

Конечность $\Gamma(P, L_\infty, R)$ эквивалентна неравенству

$$\varphi(\gamma_{P^0}(+0,T), \psi_R(T)) \geqslant k_0, \qquad 0 < T < \mu_0, \tag{19}$$

с некоторой постоянной $k_0 > 0$.

Теорема 4. 1) *Если имеет место неравенство* (19) *с* $k_0 > 0$, *то для любой области* Ω *меры* μ_0 *верна оценка* (18) *с постоянной* C, *зависящей лишь от* k_0.

2) *Если* Ω *– открытый шар в* $\mathbb{R}^n$, P *– изотропное СП и справедлива оценка* (18), *то выполнено неравенство* (19) *с* $k_0 > 0$.

Доказательство. Поскольку $\sigma(L_\infty) = \ell_\infty$, то $L_\infty \overset{\varphi}{\prec} \{P, R\}$. Как показано выше, конечность $\Gamma(P, L_\infty, R)$ эквивалентна неравенству (19). Теперь доказываемое утверждение вытекает из теоремы 3.

Отметим элементы новизны работы:

1) введены условия согласования норм в трех идеальных пространствах;
2) установлена эквивалентность обобщенных мультипликативных неравенств, связывающих нормы функции и ее градиента в различных пространствах, и геометрических неравенств изопериметрического типа;
3) для симметричных пространств даны широкие достаточные (а иногда необходимые и достаточные) условия справедливости функциональных неравенств, аналогичных теоремам вложения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Мазья В. Г. О некоторых интегральных неравенствах для функций многих переменных // Проблемы матем. анализа. Вып. 3. Л.: Изд-во ЛГУ, 1972. С. 33–68.

[2] Мазья В. Г. Пространства С. Л. Соболева. Ленинград: Изд-во ЛГУ, 1985.

[3] Канторович Л. В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1977.

[4] Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М. Интерполяция линейных операторов. М.: Наука, 1978.

[5] Брудный Ю. А., Петунин Ю. И., Семенов Е. М. Интерполяция линейных операторов // Итоги науки и техники. Матем. анализ. Т. 24. М.: ВИНИТИ, 1986. С. 3–163.

[6] Бережной Е. И. Точные оценки операторов на конусах в идеальных пространствах // Тр. МИАН. 1993. Т. 204. С. 3–36.

[7] Забрейко П. П. Идеальные пространства вектор-функций // Докл. АН БССР. 1987. Т. 31. №4. С. 298–301.

[8] Красносельский М. А., Рутицкий Я. Б. Выпуклые функции и пространства Орлича. М.: Физматгиз, 1958.

[9] Левин В. Л. Выпуклый анализ в пространствах измеримых функций и его применения в математике и экономике. М.: Наука, 1985.

[10] Рокафеллар Р. Г. Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973.

[11] Климов В. С. Емкости множеств и теоремы вложения для идеальных пространств // Докл. РАН. 1995. Т. 341. №5. С. 588–589.

[12] Климов В. С. Функциональные неравенства и обобщенные емкости // Матем. сб. 1996. Т. 187. №1. С. 41–54.

[13] Кальдерон А. П. Промежуточные пространства и интерполяция. Комплексный метод // Математика (сб. переводов). Т. 9. №3, 1965. С. 56–129.

[14] Дмитриев В. И., Крейн С. Г., Овчинников В. И. Основы теории интерполяции линейных операторов // Геометрия линейных пространств и теория операторов. Ярославль: Изд-во Ярославского ун-та, 1977. С. 31–74.

[15] Лозановский Г. Я. Преобразование банаховых идеальных пространств с помощью выпуклых функций // Качественные и приближенные методы исследования операторных уравнений. №3. Ярославль: Изд-во Ярославского ун-та, 1978. С. 122–148.

[16] Полиа Г., Сегё Г. Изопериметрические неравенства в математической физике. М.: Мир, 1962.

[17] Гольдштейн В. М., Решетняк Ю. Г. Введение в теорию функций с обобщенными производными и квазиконформные отображения. М.: Наука, 1983.

[18] Брело М. Основы классической теории потенциала. М.: Мир, 1964.

[19] Климов В. С. Теоремы вложения и геометрические неравенства // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1976. Т. 40. №3. С. 645–671.

[20] Климов В. С. О перестановках дифференцируемых функций // Матем. заметки. 1971. Т. 9. №6. С. 629–638.

(В. С. Климов) Ярославский государственный университет

(Е. С. Панасенко) Орловский государственный университет

Поступило 02.03.1998