ISSN 0037-4474

СИБИРСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

том 40 3 1999

НОВОСИБИРСК
ИЗДАТЕЛЬСТВО ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ

Сибирский математический журнал
Май—июнь, 1999. Том 40, № 3

УДК 517.518.235

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ИДЕАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВ И ЕМКОСТИ МНОЖЕСТВ

В. С. Климов, Е. С. Панасенко

В работе изучаются геометрические свойства идеальных пространств, связанные с верхними и нижними оценками норм. Рассматриваются характеристики массивности множеств, аналогичные вариационной емкости [1, с. 150; 2]. Приложения посвящены задаче описания классов областей Ω, для которых справедливо непрерывное вложение $P^1(\Omega) \subset Q(\Omega)$, где $Q(\Omega)$ — идеальное пространство функций, $P^1(\Omega)$ — пространство, аналогичное пространству Соболева $L_p^1(\Omega)$ [1–5] и возникающее при замене $L_p(\Omega, \mathbb{R}^n)$ идеальным пространством вектор-функций $P(\Omega, \mathbb{R}^n)$ [6–12]. Устанавливаемые в статье критерии справедливости теорем вложения имеют вид неравенств, связывающих нормы индикаторов и емкости компактных подмножеств области Ω. Указываются конкретизации этих критериев для пространств Орлича — Соболева и Лоренца — Соболева.

Все рассматриваемые в статье нормированные пространства предполагаются действительными. Запись $E_1 \subset E_0$ означает, что нормированное пространство E_1 непрерывно вложено в нормированное пространство E_0, включение $E_1 \overset{1}{\subset} E_0$ означает, что норма оператора вложения E_1 в E_0 не превосходит 1. Равенство $E_1 = E_0$ подразумевает не только теоретико-множественное совпадение E_1 и E_0, но и эквивалентность норм $\|\cdot; E_1\|$ и $\|\cdot; E_0\|$ в пространствах E_1 и E_0; если же при этом $\|\cdot; E_1\| = \|\cdot; E_0\|$, то используется запись $E_1 \overset{1}{=} E_0$. Через kE_0 $(k > 0)$ обозначается пространство, для которого $\|\cdot; kE_0\| = k\|\cdot; E_0\|$.

1. Напомним некоторые понятия теории идеальных пространств. Пусть (Ω, μ) — измеримое пространство с полной σ-конечной непрерывной мерой μ, $\mathbb{R}^n$ — n-мерное евклидово пространство со скалярным произведением $a \cdot b$ и нормой $|a| = \sqrt{aa}$ $(a, b \in \mathbb{R}^n)$, $S(\Omega, \mathbb{R}^n)$ — линейное метрическое пространство μ-п. в. конечных μ-измеримых функций на Ω со значениями в $\mathbb{R}^n$. Пространство $S(\Omega, \mathbb{R})$ обозначается символом $S(\Omega)$; подобные сокращения используются и для других пространств скалярных функций. Линейное пространство $E = E(\Omega, \mathbb{R}^n)$ функций класса $S(\Omega, \mathbb{R}^n)$ называют [7–9] *нормированным идеальным пространством* (НИП), если из соотношений $y \in E$, $\alpha \in S(\Omega)$, $|\alpha(x)| \leqslant 1$ μ-п. в. следует, что $\alpha y \in E$ и $\|\alpha y; E\| \leqslant \|y; E\|$. Если НИП E полно относительно нормы $\|\cdot; E\|$, то его называют *банаховым идеальным пространством* (БИП).

Пусть Z — множество целых чисел. Банахово пространство $h = h(Z)$ двусторонних последовательностей $a = (a_i)$ $(i \in Z)$ называют *симметричным* [11, с. 213], если из условий $a = (a_i) \in h$, $|b_i| \leqslant a_{\rho(i)}$ $(i \in Z$, ρ — биекция $Z)$ следует, что $b = (b_i) \in h$ и $\|b; h\| \leqslant \|a; h\|$. Например, пространства $l_p = l_p(Z)$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ симметричны; другие примеры рассматриваются в п. 2. Фундаментальная функция φ_h симметричного пространства h определяется равенством $\varphi_h(n) = \|e_1 + \dots + e_n; h\|$ ($n = 1, 2, \dots, e_i = (\delta_{ij})$ — стандартный базис в пространстве h).

Пусть h_1, h — два симметричных пространства (СП) последовательностей. *Пространством мультипликаторов* h_1/h из h в h_1 называют совокупность таких последовательностей d, что

$$\|d; h_1/h\| = \sup\{\|cd; h_1\|, \|c; h\| \leqslant 1\} < \infty;$$

здесь $c = (c_i)$, $d = (d_i)$, $cd = (c_i d_i)$ ($i \in Z$). Для любого СП h нетривиально пространство $h' = l_1/h$, называемое *двойственным к h пространством*.

Несколько более сложно НИП $E = E(\Omega, \mathbb{R}^n)$ можно сопоставить двойственное к нему пространство $E' = E'(\Omega, \mathbb{R}^n)$ [8]. Пространство E' всегда полно. Если $y \in E$, $z \in E'$, то

$$\langle y, z\rangle = \int_\Omega y(x) \cdot z(x)\, d\mu(x) < \infty, \quad \|z; E'\| = \sup\{\langle y, z\rangle, \|y; E\| \leqslant 1\}.$$

БИП E называют *совершенным*, если единичный шар $\{y \in E, \|y; E\| \leqslant 1\}$ пространства E замкнут относительно сходимости в $S(\Omega, \mathbb{R}^n)$. БИП E совершенно в том и только в том случае, когда $E \overset{1}{=} E'' \overset{1}{=} (E')'$ [8].

Вектор-функции f, g из $S(\Omega, \mathbb{R}^n)$ *дизъюнктны*, если $|f(x)| \cdot |g(x)| = 0$ μ-п. в. Конечная или бесконечная последовательность y_i из $S(\Omega, \mathbb{R}^n)$ *дизъюнктна*, если каждые два ее элемента попарно дизъюнктны. Сумма y счетного числа вектор-функций y_i из $S(\Omega, \mathbb{R}^n)$ всегда принадлежит $S(\Omega, \mathbb{R}^n)$, однако если $y_i \in E$, E — НИП, то может случиться, что $y \notin E$; тогда полагаем $\|y; E\| = \infty$.

Пусть $\tau = \tau(Z)$ представляет собой СП. НИП $E = E(\Omega, \mathbb{R}^n)$ назовем *τ-супераддитивным* (*τ-субаддитивным*), если для каждой дизъюнктной последовательности $y_i \in E$ ($i \in Z$) имеет место оценка $\|y; E\| \geqslant \|a; \tau\|$ (соответственно $\|y; E\| \leqslant \|a; \tau\|$), где

$$a = (a_i), \quad a_i = \|y_i; E\| \quad (i \in Z), \quad y = \sum_{i \in Z} y_i; \tag{1}$$

при этом считается, что если $a \notin \tau$, то $\|a; \tau\| = \infty$. Для БИП скалярных функций близкие понятия вводились многими авторами (см., например, [6, 13] и приведенную там библиографию). В данной работе используется терминология, принятая в [14].

Свойства супераддитивности и субаддитивности двойственны в следующем смысле. Если E является τ-супераддитивным (τ-субаддитивным) БИП, то E' — τ'-субаддитивное (τ'-супераддитивное) БИП [6, 13, 14].

Каждое БИП E l_∞-супераддитивно. Это вытекает из монотонности нормы $\|\cdot; E\|$. Обозначим через $l(E)$ совокупность СП τ, относительно которых E τ-супераддитивно. Любое СП последовательностей непрерывно вложено в l_∞, поэтому можно определить пересечение пространств τ класса $l(E)$ [11, с. 29]. Положим $\tau_E = \cap\tau$ ($\tau \in l(E)$), $\|a; \tau_E\| = \sup\{\|a; \tau\|, \tau \in l(E)\}$. Пространство τ_E принадлежит классу $l(E)$. Из определения τ_E вытекает неравенство $\|a; \tau_E\| \geqslant \|a; \tau\|$ ($a \in \tau_E$, $\tau \in l(E)$). Таким образом, τ_E — пространство с наибольшей в классе $l(E)$ нормой; иногда будем называть τ_E *нижним для E пространством*.

Любое БИП E l_1-субаддитивно [7, 8, 12]. В классе $\bar{l}(E)$ СП σ, относительно которых E σ-субаддитивно, естественно искать пространство с наименьшей нормой. Опишем конструкцию соответствующего пространства, называемого далее *верхним для* БИП E.

Последовательность $w_i \in E$ $(i \in Z)$ назовем *d-нормированной*, если она дизъюнктна и $\|w_i; E\| = 1$. Обозначим через $\mathscr{D}(E)$ совокупность всех d-нормированных в E последовательностей. Через σ_E обозначим множество таких последовательностей $a = (a_i)$ $(i \in Z)$, для которых имеет смысл и конечна норма

$$\|a; \sigma_E\| = \sup\Big\{\Big\|\sum_{i\in Z} a_i w_i; E\Big\|,\ \{w_i\} \in \mathscr{D}(E)\Big\};$$

структура линейного пространства в σ_E определяется стандартным образом. С указанной нормой σ_E представляет собой СП. Из определения σ_E вытекает неравенство

$$\|a; \sigma_E\| \geqslant \Big\|\sum_{i\in Z} a_i w_i; E\Big\| \quad (a = (a_i) \in \sigma_E,\ \{w_i\} \in \mathscr{D}(E)),$$

означающее, что $\sigma_E \in \bar{l}(E)$. Если $\sigma \in \bar{l}(E)$, $\{w_i\} \in \mathscr{D}(E)$, $a = (a_i) \in \sigma$, то $\big\|\sum\limits_{i\in Z} a_i w_i; E\big\| \leqslant \|a; \sigma\|$. Ввиду произвольности набора $\{w_i\}$ из $\mathscr{D}(E)$ последнее неравенство влечет оценку $\|a; \sigma_E\| \leqslant \|a; \sigma\|$ $(a \in \sigma,\ \sigma \in \bar{l}(E))$. Следовательно, σ_E — верхнее для БИП E пространство.

Пусть $P = P(\Omega, \mathbb{R}^n)$, $Q = Q(\Omega_1, \mathbb{R}^m)$ — два БИП. Говорят, что Q *мажорируется* P $(Q \prec P)$, если $\tau_P \subset \sigma_Q$. Очевидно, что $Q \prec P$ в том и только в том случае, если существуют такие СП τ, τ_0 последовательностей, что P τ-супераддитивно, Q τ_0-субаддитивно и $\tau \subset \tau_0$. Требование $Q \prec P$ означает определенную согласованность норм в пространствах P, Q. Для идеальных пространств скалярных функций ряд критериев мажорируемости установлен в [13]. В случае пространств вектор-функций некоторые достаточные условия мажорируемости содержатся в [14]; с большей полнотой этот вопрос обсуждается в следующем пункте.

Сопоставим БИП E его подпространство E_0, состоящее из всех элементов y, удовлетворяющих условию

$$\lim_{i\to\infty} \|1_{\Omega_i} y; E\| = 0$$

для любой убывающей последовательности измеримых множеств Ω_i с пустым пересечением; здесь и далее 1_X — индикатор (характеристическая функция) множества X. Пространство E называют *правильным*, если $E = E_0$, и *вполне правильным*, если оно правильно и совершенно [8].

Лемма 1. *Если $E \neq E_0$, то $\tau_E = l_\infty$.*

Доказательство. Достаточно установить включение $l_\infty \subset \tau_E$. Пусть $y \in E \setminus E_0$. Тогда существуют убывающая последовательность измеримых множеств Ω_i $(i = 1, 2, \dots)$ с пустым пересечением и число $\varepsilon_0 > 0$ такие, что $\|1_{\Omega_i} y; E\| > \varepsilon_0$. Последовательность $z_i = 1_{\Omega_i} y$ не является фундаментальной в пространстве E. Поэтому существует такая возрастающая последовательность натуральных чисел k_i, что $\|z_{k_{i+1}} - z_{k_i}; E\| > \varepsilon$ при некотором $\varepsilon > 0$. Последовательность $z_{k_{i+1}} - z_{k_i}$ $(i = 1, 2, \dots)$ состоит из попарно дизъюнктных элементов пространства E. Следовательно, τ_E содержит последовательность, бесконечное число элементов которой больше ε. Отсюда следует включение $l_\infty \subset \tau_E$. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть БИП E h-супераддитивно и $\varphi_h(n) \to \infty$ при $n \to \infty$. Тогда E — вполне правильное пространство.*

Доказательство. Ввиду отмечавшейся выше двойственности свойств супераддитивности и субаддитивности второе двойственное к E пространство $E'' \stackrel{1}{=} (E')'$ есть h''-супераддитивное пространство. Поскольку $\varphi_{h''}(n) = \varphi_h(n) \to \infty$ при $n \to \infty$, то E, E'' — правильные пространства. Поэтому сопряженные к E, E'' пространства E^*, $(E'')^*$ можно идентифицировать с двойственными к ним пространствами E', E''' [8]. Но, как известно, $E' \stackrel{1}{=} E'''$, т. е. $E^* \stackrel{1}{=} (E'')^*$ и, следовательно, $E \stackrel{1}{=} E''$. Итак, E — правильное совершенное пространство. Лемма доказана.

Лемма 1 содержит описание τ_E для неправильного пространства E. Лемма 2 означает, что τ_E существенно отличается от l_∞ лишь в случае вполне правильного пространства E.

2. Рассмотрим некоторые примеры БИП. Обозначим через $\beta(\mathbb{R}^n)$ класс выпуклых [10, 15] четных функций $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\Phi(0) = 0$, $\Phi(\xi) > 0$ при $\xi \neq 0$. Пусть $H = H(\Omega)$ — БИП скалярных измеримых относительно меры μ функций, носитель $\operatorname{supp} H$ [9, с. 137] которого совпадает с Ω. Сопоставим H и функции Φ из $\beta(\mathbb{R}^n)$ совокупность вектор-функций класса $S(\Omega, \mathbb{R}^n)$, для которых имеет смысл и конечна норма $\|y; H^\Phi\| = \inf\{k > 0 : \|\Phi(\frac{y}{k}); H\| \leqslant 1\}$. С данной нормой $H^\Phi(\Omega, \mathbb{R}^n)$ представляет собой БИП. Проверка аксиом нормы тривиальна; полнота пространства $H^\Phi(\Omega, \mathbb{R}^n)$ вытекает из результатов работы [12].

Если $H = L_1(\Omega)$ — пространство суммируемых по мере μ функций, то $H^\Phi(\Omega, \mathbb{R}^n)$ обозначают символом $L^\Phi(\Omega, \mathbb{R}^n)$ и называют *пространством Орлича* [6–12]. Важную роль далее играет класс $\beta_0(\mathbb{R}^n) \subset \beta(\mathbb{R}^n)$, состоящий из функций, удовлетворяющих оценке $\Phi(2\xi) \leqslant k_0\Phi(\xi)$ ($\xi \in \mathbb{R}^n$, $k_0 < \infty$). Если $\Phi \in \beta_0(\mathbb{R}^n)$, то $L^\Phi(\Omega, \mathbb{R}^n)$ — правильное пространство; в случае $\mu(\Omega) = \infty$ верно и обратное. Сопоставим функции Φ класса $\beta_0(\mathbb{R}^n)$ функцию

$$\Phi_1(t) = \inf_{\xi \neq 0} \frac{\Phi(t\xi)}{\Phi(\xi)} \quad (t \in \mathbb{R}). \tag{2}$$

Функция $\Phi_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ четна, положительна на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\Phi_1(1) = 1$, функция $\Phi_1(t)t^{-1}$ возрастает на $(0, \infty)$, Φ_1 эквивалентна наибольшей из выпуклых замкнутых функций, не превосходящих Φ_1, совпадающей со второй сопряженной Φ_1^{**} [15, с. 120] к функции Φ_1:

$$\Phi_1^{**}(t) \leqslant \Phi_1(t) \leqslant \Phi_1^{**}(2t). \tag{3}$$

Левое из неравенств (3) вытекает из определения Φ_1^{**}, а правое в несколько иной форме доказано в [11, с. 70].

Ниже будут использоваться аналогичные H^Φ пространства последовательностей. Пусть $M : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ — выпуклая четная функция, $M(0) = 0$, функция M непрерывна в нуле. Функции M и СП $h = h(Z)$ сопоставим множество таких последовательностей $a = (a_i)$ ($i \in Z$), для которых конечна норма

$$\|a; h^M\| = \inf\left\{k > 0, \left\|\left(M\left(\frac{a_i}{k}\right)\right); h\right\| \leqslant 1\right\}.$$

Если $h = l_1(Z)$ — пространство суммируемых последовательностей, то h^M обозначают символом l_M и называют *пространством Орлича последовательностей*; при $M(s) = |s|^p$ ($1 \leqslant p < \infty$) полагают $l_M = l_p$. В общем случае h^M является СП.

Пространства h^M применяются далее для оценки и характеристики нижнего и верхнего пространств τ_E и σ_E. В формулируемых ниже леммах $H = H(\Omega)$ — БИП скалярных измеримых относительно меры

μ функций, $\operatorname{supp} H = \Omega$, $\Phi \in \beta_0(\mathbb{R}^n)$, функции M, M_1, N определены равенствами

$$M(t) = \Phi_1^{**}(t), \quad M_1(t) = M(2t), \quad N(t) = \sup_{\xi \neq 0} \frac{\Phi(t\xi)}{\Phi(\xi)}, \tag{4}$$

функция Φ_1 задана равенством (2), τ_H и σ_H — нижнее и верхнее пространства для $H = H(\Omega)$.

Лемма 3. *Справедливы вложения*

$$\tau_{H^\Phi} \overset{1}{\subset} (\tau_H)^M, \quad (\sigma_H)^N \overset{1}{\subset} \sigma_{H^\Phi}. \tag{5}$$

Доказательство. Пусть y_i $(i \in Z)$ — дизъюнктная последовательность элементов пространства $E = H^\Phi(\Omega, \mathbb{R}^n)$, последовательность $a = (a_i)$ $(a_i > 0)$ и вектор-функция y определены равенством (1), причем $\|y; E\| < 1$. Положим $z_i = \Phi(y_i)$, $b_i = \|z_i; H\|$, $b = (b_i)$ $(i \in Z)$. Из (2), (4) вытекает неравенство $\Phi(t\xi) \geqslant \Phi(\xi) M(t)$, поэтому при любом k из $(0,1)$ имеем

$$b_i = \|\Phi(y_i); H\| \geqslant \left\| \Phi\left(\frac{y_i}{ka_i}\right) M(ka_i); H \right\| \geqslant M(ka_i).$$

Справедливы оценки

$$1 > \Big\|y; E\| \geqslant \| \sum_i z_i; H \Big\| \geqslant \|b; \tau_H\| \geqslant \|(M(ka_i)); \tau_H\|.$$

Следовательно, $\|a; (\tau_H)^M\| < 1$, если $\|y; H^\Phi\| < 1$. Это означает, что левое из включений (5) верно.

Установим теперь правое из включений (5). Пусть y_i, a_i, y, a имеют тот же смысл, что и выше, причем $\|a; (\sigma_H)^N\| < 1$. Если $0 < k < 1$, то

$$\|\Phi(ky); H\| = \left\| \sum_{i \in Z} \Phi\left(a_i \frac{ky_i}{a_i}\right); H \right\| \leqslant \left\| \left(N(a_i) \left\| \Phi\left(\frac{ky_i}{a_i}\right); H \right\| \right); \sigma_H \right\|$$
$$\leqslant \|(N(a_i)); \sigma_H\| < 1.$$

Таким образом, $\|y; H^\Phi\| \leqslant 1$, если $\|a; (\sigma_H)^N\| < 1$, а это влечет правое из включений (5). Лемма доказана.

Обозначим через $\mathfrak{U}_H$ совокупность таких множеств $X \subset \Omega$, что $1_X \in H$. Наиболее просто оценки τ_{H^Φ}, σ_{H^Φ} противоположного к (5) характера устанавливаются в случае, когда выполнено условие (Δ_H): для каждого множества $\mathscr{D}_0$ из $\mathfrak{U}_H$ и любого числа $t > 0$ найдется такое множество $\mathscr{D}$, что $\mathscr{D} \subset \Omega \setminus \mathscr{D}_0$ и $\|1_{\mathscr{D}}; H\| = t$. Условие (Δ_H) обсуждается ниже, сейчас же покажем, что при его выполнении имеет место

Лемма 4. *Справедливы вложения*

$$(\sigma_H)^{M_1} \overset{1}{\subset} \tau_{H^\Phi}, \quad \sigma_{H^\Phi} \overset{1}{\subset} (\tau_H)^N. \tag{6}$$

Доказательство. Пусть

$$a = (a_i) \in (\sigma_H)^{M_1}, \quad a_i > 0 \quad (i \in Z), \quad \|a; (\sigma_H)^{M_1}\| < 1.$$

Фиксируем число k из (0,1) так, чтобы выполнялось неравенство

$$\left\| M_1\left(\frac{a_i}{k}\right); \sigma_H \right\| < 1.$$

Подберем элемент ξ_i из $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, удовлетворяющий неравенству

$$\Phi(a_i\xi_i) \leqslant \Phi(\xi_i) M_1\left(\frac{a_i}{k}\right) \quad (i \in Z).$$

Возможность подобного выбора следует из (2)–(4). Используя условие (Δ_H), найдем последовательность $\mathscr{D}_i$ непересекающихся множеств, для которых $\|1_{\mathscr{D}_i}; H\|\Phi(\xi_i) = 1$. Из этого требования вытекает, что последовательность $\xi_i 1_{\mathscr{D}_i}$ d-нормирована в пространстве $H^\Phi(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Рассмотрим функцию

$$y(x) = \sum_{i \in Z} a_i \xi_i 1_{\mathscr{D}_i}(x). \tag{7}$$

Справедлива оценка

$$\Phi(y) = \sum_{i\in Z} \Phi(a_i\xi_i) 1_{\mathscr{D}_i} \leqslant \sum_{i\in Z} \Phi(\xi_i) M_1\left(\frac{a_i}{k}\right) 1_{\mathscr{D}_i}.$$

Используя σ_H-субаддитивность пространства H, получаем

$$\|\Phi(y); H\| \leqslant \left\| \left(M_1\left(\frac{a_i}{k}\right)\right); \sigma_H \right\| < 1,$$

следовательно, $\|y; H^\Phi\| \leqslant 1$. Из определения τ_{H^Φ} вытекает оценка

$$\|y; H^\Phi\| \geqslant \|a; \tau_{H^\Phi}\|.$$

Таким образом, $\|a; \tau_{H^\Phi}\| \leqslant 1$. Левое из включений (6) доказано. Пусть $a = (a_i) \in \sigma_{H^\Phi}$, $a_i > 0$ $(i \in Z)$, $\|a; \sigma_{H^\Phi}\| < 1$, $0 < k < 1$. Подберем ξ_i из $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ так, чтобы выполнялось неравенство $\Phi(a_i\xi_i) \geqslant \Phi(\xi_i) N(ka_i)$, а затем, используя условие (Δ_H), фиксируем последовательность $\mathscr{D}_i$ непересекающихся множеств, для которых $\|1_{\mathscr{D}_i}; H\|\Phi(\xi_i) = 1$. Если функция y определена равенством (7), то

$$\begin{aligned} 1 > \|a; \sigma_{H^\Phi}\| \geqslant \|y; H^\Phi\| &\geqslant \left\| \sum_{i\in Z} \Phi(a_i\xi_i) 1_{\mathscr{D}_i}; H \right\| \\ &\geqslant \left\| \sum_{i \in Z} \Phi(\xi_i) N(ka_i) 1_{\mathscr{D}_i}; H \right\| \geqslant \|(N(ka_i)); \tau_H\|. \end{aligned}$$

Ввиду произвольности числа k из (0,1) получаем $\|a; (\tau_H)^N\| \leqslant 1$, откуда и вытекает вложение $\sigma_{H^\Phi} \overset{1}{\subset} (\tau_H)^N$. Лемма доказана.

Теорема 1. *Пусть $\Phi \in \beta_0(\mathbb{R}^n)$, $\mu(\Omega) = \infty$, $L^\Phi = L^\Phi(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Тогда*

$$2l_M \overset{1}{\subset} \tau_{L^\Phi} \overset{1}{\subset} l_M, \quad \sigma_{L^\Phi} \overset{1}{=} l_N. \tag{8}$$

Доказательство. Если $H = L_1(\Omega)$, то $\tau_H = \sigma_H = l_1$, $\|1_{\mathscr{D}}; H\| = \mu(\mathscr{D})$, что ввиду бесконечности меры $\mu(\Omega)$ и непрерывности μ гарантирует выполнение условия (Δ_H) в данном случае. Теперь (8) вытекает из (5), (6). Теорема доказана.

При $n = 1$ близкие к (8) соотношения установлены другим методом в [13]. Если $\Phi \notin \beta_0(\mathbb{R}^n)$, то пространство L^Φ не является правильным, поэтому $\tau_{L^\Phi} = l_\infty$. Требование $\Phi \in \beta_0(\mathbb{R}^n)$ можно ослабить, если $\mu(\Omega) < \infty$; в этом случае существенно лишь поведение функции Φ на ∞.

Проверка условия (Δ_H) упрощается, если пространство H симметрично [11, с. 212]. Для СП $H = H(\Omega)$ условие (Δ_H) эквивалентно требованиям: $\mu(\Omega = \infty$, $\varphi(+0) = 0$, $\varphi_H(\infty) = \infty$, где φ_H — фундаментальная функция пространства H.

Помимо пространств $H^\Phi(\Omega,\mathbb{R}^n)$ далее рассматриваются некоторые обобщения пространств Марцинкевича. Пусть $F = F(\Omega,\mathbb{R}^n)$ — БИП, $\psi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ — квазивогнутая функция [11, с. 70]. Обозначим через $F_\psi = F_\psi(\Omega,\mathbb{R}^n)$ часть $S(\Omega,\mathbb{R}^n)$, состоящую из вектор-функций y с конечной нормой $\|y;F_\psi\| = \sup\{\frac{1}{\psi(\mu(\mathscr{D}))}\|1_\mathscr{D}y;F\|,\ 0<\mu(\mathscr{D})<\infty\}$. Если $F = L_1(\Omega,\mathbb{R}^n)$, то F_ψ совпадает с пространством Марцинкевича $M_\psi = M_\psi(\Omega,\mathbb{R}^n)$ [11, с. 154]. Пространство Лоренца $\Lambda_\psi = \Lambda_\psi(\Omega,\mathbb{R}^n)$, порождаемое вогнутой непрерывной функцией $\psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $\psi(0) = 0$, определяется как двойственное к $M_\psi(\Omega,\mathbb{R}^n)$.

Лемма 5. *Пусть l_N — пространство Орлича последовательностей, ψ — квазивогнутая функция и $\psi^{-1}(ts) \geqslant \psi^{-1}(s)N(t)$ $(s \geqslant 0,\ 0 \leqslant t \leqslant 1)$. Тогда $\sigma_F/l_N \overset{1}{\subset} \sigma_{F_\psi}$.*

Доказательство. Пусть y_i $(i \in Z)$ — дизъюнктная последовательность элементов из $E = F_\psi$; a_i, a, y определены равенством (1). Обозначим через X_i носитель $\operatorname{supp}|y_i|$ функции $|y_i|$ [9, с. 137]. Фиксируем измеримое множество $\mathscr{D}$ $(0 < \mu(\mathscr{D}) < \infty)$ и положим $s = \psi(\mu(\mathscr{D}))$, $t_i = \psi(\mu(\mathscr{D}\cap X_i))s^{-1}$, $t = (t_i)$, $i \in Z$. В [14] установлены соотношения $\|t;l_N\| \leqslant 1$, $\|1_\mathscr{D}y_i;F\| \leqslant a_it_is$. Следовательно,

$$\|1_\mathscr{D}y;F\| \leqslant s\|(a_it_i);\sigma_F\| \leqslant s\|a;\sigma_F/l_N\|\,\|t;l_N\| \leqslant \|a;\sigma_F/l_N\|\psi(\mu(\mathscr{D})),$$

т. е. $\|y;F_\psi\| \leqslant \|a;\sigma_F/l_N\|$. Лемма доказана.

Следствие. *В условиях леммы 5 $(l_N)' \overset{1}{\subset} \sigma_{M_\psi}$; если ψ — вогнутая непрерывная функция и $\psi(0) = 0$, то $\tau_{\Lambda_\psi} \overset{1}{\subset} l_N$.*

Первое утверждение вытекает из леммы 5 при $F = L_1(\Omega,\mathbb{R}^n)$, для доказательства второго можно воспользоваться равенством $\tau(\Lambda_\psi) = (\sigma_{M_\psi})'$.

Следствие приводит лишь к односторонним оценкам пространств σ_{M_ψ}, τ_{Λ_ψ}. При дополнительных предположениях относительно функции ψ пространства σ_{M_ψ}, τ_{Λ_ψ} совпадают с координатными пространствами Марцинкевича и Лоренца [13].

Объединяя лемму 3 с теоремой 1, приходим к следующим условиям мажорируемости.

Лемма 6. *Пусть $\Phi \in \beta_0(\mathbb{R}^n)$, функции M, N определены равенствами (4), P, Q — БИП функций на Ω. Тогда*

1) *$Q \prec L^\Phi(\Omega,\mathbb{R}^n)$, если БИП kQ при некотором $k > 0$ l_M-субаддитивно;*

2) *$L^\Phi(\Omega,\mathbb{R}^n) \prec P$, если БИП kP при некотором $k > 0$ l_N-супераддитивно;*

3) *если $\mu(\Omega) = \infty$, то указанные в 1, 2 условия мажорируемости не только достаточны, но и необходимы.*

Лемма 6 следует из соотношений (5), (8).

На основе следствия леммы 5 доказывается

Лемма 7. *Пусть $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ — вогнутая непрерывная функция, $\varphi(0) = 0$ и $\varphi^{-1}(ts) \geqslant \varphi^{-1}(s)N(t)$ $(s \geqslant 0,\ 0 \leqslant t \leqslant 1)$, где $N : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ — выпуклая четная функция, $N(0) = 0$. Если БИП kQ при некотором $k > 0$ l_N-субаддитивно, то $Q \prec \Lambda_\varphi(\Omega,\mathbb{R}^n)$. В частности, $H^\psi(\Omega,\mathbb{R}^m) \prec \Lambda_\varphi(\Omega,\mathbb{R}^n)$, если*

$$\psi(tr)\varphi^{-1}(s) \leqslant \psi(r)\varphi^{-1}(ts) \quad (r \in \mathbb{R}^m,\ s \geqslant 0,\ 0 \leqslant t \leqslant 1). \qquad (9)$$

Полезно заметить, что в условие (9) функция N не входит. Как установлено в [14], $H^{\psi}(\Omega, \mathbb{R}^m) \prec L^{\Phi}(\Omega, \mathbb{R}^n)$, если

$$\psi(tr)\Phi(\xi) \leqslant \psi(r)\Phi(t\xi) \quad (r \in \mathbb{R}^m,\ \xi \in \mathbb{R}^n,\ 0 \leqslant t \leqslant 1); \tag{10}$$

для функции Φ класса $\beta_0(\mathbb{R}^n)$ в качестве ψ можно взять $\psi(r) = |r|^p$ при достаточно большом p.

3. Пусть Ω — область в $\mathbb{R}^n$, $P = (\Omega, \mathbb{R}^n)$ — БИП измеримых относительно n-мерной лебеговой меры mes_n вектор-функций $y : \Omega \to \mathbb{R}^n$. Ниже всюду предполагается, что для любого компакта $\mathscr{K} \subset \Omega$ справедливы вложения $L_\infty(\mathscr{K}, \mathbb{R}^n) \subset P(\mathscr{K}, \mathbb{R}^n) \subset L_1(\mathscr{K}, \mathbb{R}^n)$, где $P(\mathscr{K}, \mathbb{R}^n)$ — пространство P на $\mathscr{K}$ [11, с. 63]. Применяются обозначения: $\mathrm{cl}_\Omega G$ — замыкание множества $G \subset \Omega$ в относительной топологии Ω, $C^{0,1}(\Omega)$ — совокупность функций, удовлетворяющих условию Липшица на любом компактном подмножестве области Ω, ∇f — градиент функции f, $C^{0,1}(\Omega, \mathscr{K}_0)$ — часть $C^{0,1}(\Omega)$, состоящая из функций, равных 0 на множестве $\mathscr{K}_0 \subset \Omega$, $\mathfrak{K}(\Omega)$ — совокупность непустых компактных подмножеств области Ω.

Будем говорить, что множества $\mathscr{K}_0$, $\mathscr{K}_1$ образуют *допустимую пару*, если $\varnothing \neq \mathscr{K}_0 = \mathrm{cl}_\Omega \mathscr{K}_0 \subset \Omega$, множество $\Omega \setminus \mathscr{K}_0$ ограничено, $\mathscr{K}_1 \in \mathfrak{K}(\Omega)$ и $\mathscr{K}_0 \cap \mathscr{K}_1 = \varnothing$. Положим

$$U(\mathscr{K}_1, \mathscr{K}_0) = \{f \in C^{0,1}(\Omega),\ f(x) \geqslant 1 \text{ при } x \in \mathscr{K}_1,\ f(x) \leqslant 0 \text{ при } x \in \mathscr{K}_0\}.$$

Число $c_P(\mathscr{K}_1, \mathscr{K}_0) = \inf\{\|\nabla f; P\|,\ f \in U(\mathscr{K}_1, \mathscr{K}_0)\}$ назовем *P-емкостью* пары $(\mathscr{K}_1, \mathscr{K}_0)$. В случае $P = L_p(\Omega, \mathbb{R}^n)$ аналогичные характеристики вводились в [1, 2, 5].

Лемма 8 (ср. с [1, с. 126]). *Пусть $f \in C^{0,1}(\Omega, \mathscr{K}_0)$, $\mathscr{K} \in \mathfrak{K}(\Omega)$ и $f(x) \geqslant t > 0$ $(x \in \mathscr{K})$. Тогда $tc_p(\mathscr{K}, \mathscr{K}_0) \leqslant \|\nabla f; P\|$.*

Доказательство. Достаточно заметить, что функция $g = ft^{-1}$ принадлежит $U(\mathscr{K}, \mathscr{K}_0)$, и поэтому $c_p(\mathscr{K}, \mathscr{K}_0) \leqslant \|\nabla g; P\| \leqslant \|\nabla f; P\| t^{-1}$.

Далее $Q = Q(\Omega)$ — БИП измеримых относительно борелевской меры μ функций, $\nu_Q : S(\Omega) \to \overline{R}$ — функционал, определяемый равенством $\nu_Q(f) = \sup\{t\|x_t; Q\|,\ t > 0\}$, в котором χ_t — индикатор лебегова множества $\{x \in \Omega,\ |f(x)| \geqslant t\}$ функции f. Функционал ν_Q положительно-однороден, удовлетворяет неравенству 2-треугольника и подчинен норме $\|\cdot; Q\| : \nu_Q(\lambda f) = |\lambda|\nu_Q(f)$, $\nu_Q(f + g) \leqslant 2(\nu_Q(f) + \nu_Q(g))$, $\nu_Q(f) \leqslant \|f; Q\|$.

Приведем условия справедливости неравенства

$$\|f; Q\| \leqslant C\|\nabla f; P\| \tag{11}$$

для всех функций f класса $C^{0,1}(\Omega, \mathscr{K}_0)$, где $\varnothing \neq \mathscr{K}_0 = \mathrm{cl}_\Omega \mathscr{K}_0 \subset \Omega$, множество $\Omega \setminus \mathscr{K}_0$ ограничено. Наряду с (11) рассмотрим геометрическое неравенство

$$\|1_{\mathscr{K}}; Q\| \leqslant Ac_p(\mathscr{K}, \mathscr{K}_0), \tag{12}$$

где A не зависит от компакта $\mathscr{K}$. Если подобных констант A не существует, полагаем $A(\mathscr{K}_0, P, Q) = \infty$, в противном случае через $A(\mathscr{K}_0, P, Q)$ обозначим минимальную из констант A. Аналогично, исходя из (11), определяем постоянную $C(\mathscr{K}_0, P, Q)$. Геометрическое неравенство (12) равносильно функциональному неравенству

$$\nu_Q(f) \leqslant B\|\nabla f; P\| \quad (f \in C^{0,1}(\Omega, \mathscr{K}_0)), \tag{13}$$

близкому к более сильному неравенству (11).

Теорема 2. *Неравенство (13) справедливо в том и только в том случае, если $A(\mathscr{K}_0, P, Q) < \infty$, при этом наименьшая из B-констант, для которых выполняется оценка (13), совпадает с $A(\mathscr{K}_0, P, Q)$.*

Доказательство. Пусть имеет место неравенство (13). Фиксируем допустимую пару $(\mathscr{K}, \mathscr{K}_0)$ и функцию f из $U(\mathscr{K}, \mathscr{K}_0)$. Тогда $f(x) \geqslant 1$ $(x \in \mathscr{K})$, поэтому $\nu_Q(f) \geqslant \|1_{\mathscr{K}}; Q\|$. Отсюда и из (13) получаем

$$\|1_{\mathscr{K}}; Q\| \leqslant \nu_Q(f) \leqslant B\|\nabla f; P\|.$$

Минимизируя по всем функциям f из $U(\mathscr{K}, \mathscr{K}_0)$, приходим к неравенству

$$\|1_{\mathscr{K}}; Q\| \leqslant Bc_p(\mathscr{K}, \mathscr{K}_0),$$

означающему, что $A(\mathscr{K}_0, P, Q) \leqslant B$.

Предположим теперь, что $A = A(\mathscr{K}_0, P, Q) < \infty$. Фиксируем функцию f из $C^{0,1}(\Omega, \mathscr{K}_0)$, $t > 0$ и положим $\mathscr{K} = \{x \in \Omega, |f(x)| \geqslant t\}$. Объединяя (12) с леммой 8, приходим к неравенству $\nu_Q(f) \leqslant A\|\nabla f; P\|$. Теорема доказана.

Если функционал ν_Q эквивалентен норме $\|\cdot; Q\|$, то из неравенства (12) вытекает его сильный аналог — неравенство (11). Требование эквивалентности ν_Q и $\|\cdot; Q\|$ выполняется для некоторых пространств [11, с. 156], однако в общем случае оно слишком ограничительно. Поэтому представляют интерес другие условия эквивалентности неравенств (11)–(13).

Теорема 3. *Пусть $Q \prec P$ и $\varkappa\tau_P \overset{1}{\subset} \sigma_Q$ при некотором $\varkappa > 0$. Тогда неравенство (11) справедливо в том и только в том случае, если $A(\mathscr{K}_0, P, Q) < \infty$, при этом $A(\mathscr{K}_0, P, Q) \leqslant C(\mathscr{K}_0, P, Q) \leqslant 4\varkappa A(\mathscr{K}_0, P, Q)$, следовательно, неравенство (11) эквивалентно геометрическому неравенству (12).*

Доказательство. Достаточно установить оценку $C(\mathscr{K}_0, P, Q)$ сверху, считая $A(\mathscr{K}_0, P, Q) < \infty$. Фиксируем функцию f из $C^{0,1}(\Omega, \mathscr{K}_0)$. Положим $\mathscr{D}_i = \{x \in \Omega, |f(x)| \geqslant 2^i\}$, $G_i = \mathrm{cl}_\Omega(\Omega \setminus \mathscr{D}_{i-1})$ $(i \in Z)$, $t_+ = \max\{0, t\}$, $\alpha(t) = \min\{1, t_+\}$. Если $\mathscr{D}_i \neq \varnothing$, то функция $u_i(x) = \alpha(2^{1-i}(|f(x)| - 2^{i-1}))$ принадлежит $U(\mathscr{D}_i, G_i)$, поэтому $\|\nabla u_i; P\| \geqslant c_P(\mathscr{D}_i, G_i)$. Как нетрудно видеть, последовательность вектор-функций $v_i = 2^{i-1}\nabla u_i$ $(i \in Z)$ дизъюнктна, $\|v_i; P\| \geqslant 2^{i-1}c_P(\mathscr{D}_i, G_i)$ и $\sum\limits_{i \in Z} v_i = \nabla|f|$. Из проведенных рассуждений вытекает оценка

$$\|\nabla f; P\| = \|\nabla|f|; P\| \geqslant \|a; \tau_P\|, \tag{14}$$

где $a = (a_i)$, $a_i = 2^{i-1}c_P(\mathscr{D}_i, G_i)$ $(i \in Z)$.

Последовательность функций $w_i = 2^{i+1}(1_{\mathscr{D}_i} - 1_{\mathscr{D}_{i+1}})$ $(i \in Z)$ дизъюнктна, $\|w_i; Q\| \leqslant 2^{i+1}\|1_{\mathscr{D}_i}; Q\|$ и $\sum\limits_{i \in Z} w_i \geqslant |u|$. Поэтому

$$\|f; Q\| \leqslant \|b; \sigma_Q\|, \tag{15}$$

где $b = (b_i)$, $b_i = 2^{i+1}\|1_{\mathscr{D}_i}; Q\|$ $(i \in Z)$. Так как $\mathscr{K}_0 \subset G_i$, из определения емкости c_P вытекает оценка $c_P(\mathscr{D}_i, G_i) \geqslant c_P(\mathscr{D}_i, \mathscr{K}_0)$. Следовательно,

$$\|1_{\mathscr{D}_i}; Q\| \leqslant A(\mathscr{K}_0, P, Q)c_P(\mathscr{D}_i, \mathscr{K}_0) \leqslant A(\mathscr{K}_0, P, Q)c_P(\mathscr{D}_i, G_i).$$

Объединяя последнее неравенство и оценки (14), (15), получаем

$$\|f; Q\| \leqslant \|b; \sigma_Q\| \leqslant \varkappa\|b; \tau_P\| \leqslant 4\varkappa A(\mathscr{K}_0, P, Q)\|a; \tau_P\| \leqslant 4\varkappa A(\mathscr{K}_0, P, Q)\|\nabla f; P\|.$$

Итак, установлены неравенство (11) и оценка

$$C(\mathscr{K}_0, P, Q) \leqslant 4\varkappa A(\mathscr{K}_0, P, Q).$$

Теорема доказана.

Для применения теорем 2, 3 полезно иметь оценки снизу емкости $c_P(\mathscr{K}, \mathscr{K}_0)$. Вначале рассмотрим случай, когда P — изотропное СП вектор-функций. Более точно, пусть

$$\|y; P\| = \| |y|; E\| \quad (y \in P(\Omega, \mathbb{R}^n)), \tag{16}$$

где $E = E(\Omega)$ — совершенное СП функций на Ω.

Пусть $m = \mathrm{mes}_n(\Omega \setminus \mathscr{K}_0)$, $\lambda : (0, m) \to \mathbb{R}$ — функция, определяемая равенством

$$\lambda(s) = \inf h_{n-1}(\partial_\Omega Y), \tag{17}$$

где Y — любое подмножество Ω с локально липшицевой относительно Ω частью границы такое, что $m \geqslant \mathrm{mes}_n Y \geqslant s$, $\partial_\Omega Y$ — относительная граница множества Y, $h_{n-1}(\partial_\Omega Y)$ — $(n-1)$-мерная мера Хаусдорфа множества $\partial_\Omega Y$. Функция λ изучена в работах [2, 5, 16]. Как показано в [16], $\lambda(s) > 0$; если область Ω удовлетворяет условию конуса, то $\lambda(s) \geqslant k_0 s^{1-1/n}$ $(k_0 > 0)$.

Равенство (16) влечет оценку [17]

$$\|\nabla f; P\| \geqslant \left\| \frac{df^*}{ds} \lambda; E(0, m) \right\|, \tag{18}$$

где $f \in C^{0,1}(\Omega, \mathscr{K}_0)$, f^* — перестановка функции $|f|$ в убывающем порядке [11, с. 83; 18, с. 332], $E(0, m)$ — порождаемое E СП функций на $(0, m)$. Отметим, что функция f^* абсолютно непрерывна на каждом отрезке $[\delta, m]$ $(0 < \delta < m)$, $f^*(m) = 0$ [17].

Лемма 9. *Пусть E' — двойственное к E СП. Тогда*

$$c_P(\mathscr{K}, \mathscr{K}_0) \geqslant \left\| \frac{1}{\lambda}; E'(t, m) \right\|^{-1}, \tag{19}$$

где $(\mathscr{K}, \mathscr{K}_0)$ — допустимая пара, $t = \mathrm{mes}_n \mathscr{K}$.

Доказательство. Пусть $f \in U(\mathscr{K}, \mathscr{K}_0)$, f^* — перестановка функции $|f|$. Поскольку $\mathrm{mes}_n\{x \in \Omega : |f(x)| \geqslant 1\} \geqslant \mathrm{mes}_n \mathscr{K} = t$, то $f^*(t) \geqslant 1$ и, следовательно,

$$1 \leqslant f^*(t) = \int\limits_t^m \left(-\frac{df^*}{ds}\right) ds \leqslant \left\| \frac{1}{\lambda}; E'(t, m) \right\| \left\| \frac{df^*}{ds} \lambda; E(t, m) \right\| \leqslant \left\| \frac{1}{\lambda}; E'(t, m) \right\| \|\nabla f; P\|.$$

Здесь используются абсолютная непрерывность функции f^* на отрезке $[t, m]$, равенство $f^*(m) = 0$, неравенство Гёльдера для БИП и оценка (18). Таким образом,

$$\|\nabla f; P\| \geqslant \left\| \frac{1}{\lambda}; E'(t, m) \right\|^{-1}.$$

Правая часть не зависит от функции $f \in U(\mathscr{K}, \mathscr{K}_0)$, что и приводит к оценке (19). Лемма доказана.

Теперь рассмотрим случай, когда $P = P_1 \times \cdots \times P_n$, где $P_i = P_i(\Omega)$ $(i = 1, \ldots, n)$ — совершенные СП функций на Ω, норма $\|y; P\|$ вектор-функции $y = (y_1, \ldots, y_n)$ связана с нормами ее компонент $y_1, \ldots, y_n$ равенством

$$\|y; P\| = \|y_1; P_1\| + \cdots + \|y_n; P_n\|. \tag{20}$$

При надлежащем определении E, λ и дополнительных положениях относительно множества $\mathscr{K}_0$ оценка (18) сохраняется и для анизотропного пространства $P = P_1 \times \cdots \times P_n$. Определим E как пространство средних Кальдерона [6, 19], состоящее из измеримых функций $v : \Omega \to \mathbb{R}$, для которых имеет смысл и конечна норма

$$\|v; E\| = \inf\{k > 0 : |v| \leqslant k \sqrt[n]{|v_1 \dots v_n|}, \|v_i; P_i\| \leqslant 1, i = 1, \dots, n\}.$$

Как известно, E — совершенное СП. Из результатов работы [20] вытекает справедливость оценки (18) для всех функций класса $C^{0,1}(\Omega, \mathscr{K}_0)$, если $\lambda(s) = ns^{1-1/n}$, $\mathscr{K}_0$ — массивное подмножество Ω в следующем смысле: для почти всех прямых Π, пересекающихся с Ω и параллельных осям координат, каждая компонента связности множества $\Omega \cap \Pi$ содержит точку из $\mathscr{K}_0$. Например, $\mathscr{K}_0$ — массивное подмножество Ω, если существует такой куб $V(h) = \{x = (x_1, \dots, x_n) : 0 < \delta_i x_i < h, |\delta_i| = 1, i = 1, \dots, n\}$, что $\Omega = (\Omega \setminus \mathscr{K}_0) + V(h)$ при некотором $h > 0$.

Лемма 10. *Пусть $P_1, \dots, P_n$ — совершенные* СП *функций на Ω, $P = P_1 \times \cdots \times P_n$, норма $\|\cdot; P\|$ определена равенством* (20) *и $E = \sqrt[n]{P_1 \dots P_n}$ — пространство средних Кальдерона. Если $\mathscr{K}_0$ — массивное подмножество области Ω, то имеет место оценка* (19), *где $(\mathscr{K}, \mathscr{K}_0)$ — допустимая пара, $t = \mathrm{mes}_n\, \mathscr{K}$, $\lambda(s) = ns^{1-1/n}$.*

Доказательство опускается ввиду его полной аналогии с доказательством леммы 9.

4. Обозначим через $W^1P(\Omega)$ совокупность локально суммируемых в области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ функций f, градиенты ∇f в смысле Соболева [3] которых принадлежат БИП $P(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Определим в $W^1P(\Omega)$ норму равенством $\|f; W^1P(\Omega)\| = \|\nabla f; P(\Omega)\| + \|f; L_1(\omega)\|$, где ω — непустое открытое множество с компактным замыканием $\bar{\omega} \in \Omega$. Разным ω соответствуют эквивалентные нормы [5, с. 136], поэтому зависимость нормы от ω несущественна. Нетрудно установить полноту пространства $W^1P(\Omega)$.

Пусть $\mathscr{P}_0^1(\Omega)$ — множество функций из $W^1P(\Omega) \cap C^{0,1}(\Omega)$ с ограниченными носителями, $P^1(\Omega)$ — замыкание $\mathscr{P}_0^1(\Omega)$ в метрике $W^1P(\Omega)$. Очевидно, что $P^1(\Omega) \subset W^1P(\Omega)$. При определенных предположениях пространства $P^1(\Omega)$, $W^1P(\Omega)$ совпадают; обсуждение этого вопроса можно найти в [4, с. 321; 5, с. 137]. Если P совпадает с пространством Орлича $L^\Phi(\Omega, \mathbb{R}^n)$ (Лоренца $\Lambda_\varphi(\Omega, \mathbb{R}^n)$), то $P^1(\Omega)$ называют *пространством Орлича — Соболева* (*Лоренца — Соболева*) и обозначают символом $L^1_\Phi(\Omega)$ ($\Lambda^1_\varphi(\Omega)$).

Ниже считаем, что $\mathrm{mes}_n\, \Omega < \infty$, $L_\infty(\Omega) \subset Q(\Omega)$. Как и в теореме 3, $C(\mathscr{K}_0 P, Q)$ — наименьшая из констант C, для которых справедливо неравенство (11). Через $\mathfrak{R}(m)$ $(0 < m < \mathrm{mes}_n\, \Omega)$ обозначается совокупность множеств $\mathscr{K}_0$, удовлетворяющих условиям $\mathscr{K}_0 = \mathrm{cl}_\Omega\, \mathscr{K}_0 \subset \Omega$, множество $\Omega \setminus \mathscr{K}_0$ ограничено и $\mathrm{mes}_n(\Omega \setminus \mathscr{K}_0) < m$.

Лемма 11. *Пространство $P^1(\Omega)$ непрерывно вложено в* БИП *$Q = Q(\Omega)$ в том и только в том случае, если при некотором m из $(0, \mathrm{mes}_n\, \Omega)$ функционал $\mathscr{K}_0 \to C(\mathscr{K}_0, P, Q)$ ограничен на $\mathfrak{R}(m)$.*

Доказательство. Пусть существуют такие постоянные m, c_0, что $0 < m < \mathrm{mes}_n\, \Omega$ и $C(\mathscr{K}_0, P, Q) \leqslant c_0$ $\forall \mathscr{K}_0 \in \mathfrak{R}(m)$.

Не ограничивая общности, будем считать, что подобласть области Ω, фигурирующая в определении нормы $\|\cdot; W^1P\|$, удовлетворяет требованию $2\,\mathrm{mes}_n(\Omega \setminus \omega) < m$. Фиксируем функцию u из $\mathscr{P}_0^1(\Omega)$ и положим $\omega_T = \{x \in \omega, |u(x)| \geqslant T\}$ $(T > 0)$. Очевидны оценки

$$\mathrm{mes}_n\{x \in \Omega : |u(x)| \geqslant T\} \leqslant \mathrm{mes}_n(\Omega \setminus \omega) + \mathrm{mes}_n\, \omega_T < \frac{m}{2} + \frac{1}{T}\|u; L_1(\omega)\|,$$

поэтому если $2\|u; L_1(\omega)\| = Tm$, то $\mathrm{mes}_n\{x \in \Omega : |u(x)| \geqslant T\} < m$. Функция $v = (|u| - T)_+$ обращается в нуль на множестве $\mathscr{K}_0 = \{x \in \Omega : |u(x)| \leqslant T\}$, множество $\Omega \setminus \mathscr{K}_0$ ограничено, и $\mathrm{mes}_n(\Omega \setminus \mathscr{K}_0) < m$, т. е. $\mathscr{K}_0 \in \mathfrak{R}(m)$. Поэтому $\|v; Q\| \leqslant c_0\|\nabla v; P\| \leqslant c_0\|\nabla u; P\|$. Так как $|u| \leqslant |v| + T$, то

$$\|u; Q\| \leqslant c_0\|\nabla u; P\| + T\|1_\Omega; Q\|.$$

Полагая $T = 2m^{-1}\|u; L_1(\omega)\|$, приходим к неравенству

$$\|u; Q\| \leqslant c_0\|\nabla u; P\| + 2m^{-1}\|1_\Omega; Q\|\,\|u; L_1(\omega)\|.$$

Последнее неравенство влечет вложение $P^1(\Omega) \subset Q(\Omega)$.

Докажем теперь, что из вложения $P^1(\Omega) \subset Q(\Omega)$ вытекает ограниченность функционала $C(\cdot, P, Q)$ на $\mathfrak{R}(m)$ при любом m из $(0, \mathrm{mes}_n \Omega)$. Пусть $\varkappa_0$ — норма оператора вложения $P^1(\Omega) \subset Q(\Omega)$, Ω_1 — ограниченная область с гладкой границей, причем

$$\bar{\omega} \subset \Omega_1, \quad \bar{\Omega}_1 \subset \Omega, \quad \mathrm{mes}_n \Omega_1 > 2^{-1}(\mathrm{mes}_n \Omega + m).$$

Если $\mathscr{K}_0 \in \mathfrak{R}(m)$, то

$$\mathrm{mes}_n(\Omega_1 \cap \mathscr{K}_0) \geqslant \mathrm{mes}_n \mathscr{K}_0 - \mathrm{mes}_n(\Omega \setminus \Omega_1) > 2^{-1}(\mathrm{mes}_n \Omega - m).$$

Для любой функции u из $W^1P(\Omega) \cap C^{0,1}(\Omega, \mathscr{K}_0)$ ее сужение на Ω_1 обращается в нуль на множестве $\Omega_1 \cap \mathscr{K}_0$, $\mathrm{mes}_n(\Omega_1 \cap \mathscr{K}_0) > 2^{-1}(\mathrm{mes}_n \Omega - m)$. В силу теорем вложения для областей с гладкой границей [5, гл. 3] справедлива оценка $\|u; L_1(\omega)\| \leqslant k\|\nabla u; L_1(\Omega_1, \mathbb{R}^n)\|$, константа k не зависит от выбора $\mathscr{K}_0$ из $\mathfrak{R}(m)$. Таким образом, имеют место неравенства

$$\|u; Q\| \leqslant \varkappa_0\|u; P^1\| \leqslant \varkappa_0\|\nabla u; P\| + \varkappa_0 k\|\nabla u; L_1(\Omega_1, \mathbb{R}^n)\| \leqslant \varkappa_1\|\nabla u; P\|;$$

последняя оценка вытекает из включения $P(\Omega, \mathbb{R}^n) \subset L_1(\Omega_1, \mathbb{R}^n)$. Следовательно, $C(\mathscr{K}_0, P, Q) \leqslant \varkappa_1\ \forall \mathscr{K}_0 \in \mathfrak{R}(m)$. Лемма доказана.

Лемма 11 означает, что теоремы вложения типа $P^1(\Omega) \subset Q(\Omega)$ равносильны функциональным неравенствам (11). Всякая равномерная на классе $\mathfrak{R}(m)$ оценка сверху функционала $C(\cdot, P, Q)$ влечет вложение $P^1(\Omega) \subset Q(\Omega)$.

Теорема 4. *Пусть $Q \prec P$. Тогда $P^1(\Omega)$ непрерывно вложено в $Q(\Omega)$ в том и только в том случае, если существуют такие постоянные m, A, что $0 < m < \mathrm{mes}_n \Omega$ и справедливо неравенство (12), в котором $(\mathscr{K}, \mathscr{K}_0)$ — произвольная допустимая пара, причем $\mathscr{K}_0 \in \mathfrak{R}(m)$.*

Теорема 4 вытекает из леммы 11 и теоремы 3.

Сформулируем следствия теоремы 4, относящиеся к пространствам Орлича — Соболева $L^1_\varphi(\Omega)$ и Лоренца — Соболева $\Lambda^1_\varphi(\Omega)$.

Следствие 1. *Пусть $\Phi \in \beta_0(\mathbb{R}^n)$, $\psi \in \beta(\mathbb{R})$ и имеет место неравенство (10). Пусть $P = L^\Phi(\Omega, \mathbb{R}^n)$, H — БИП функций на Ω, измеримых относительно меры μ, $\operatorname{supp} H = \Omega$, $Q = Q(\Omega) = H^\psi(\Omega)$. Тогда справедливо заключение теоремы 4.*

Следствие 2. *Пусть $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ — вогнутая непрерывная функция, $\varphi(0) = 0$, $\psi \in \beta(\mathbb{R})$ и имеет место неравенство (9). Пусть $P = \Lambda_\varphi(\Omega, \mathbb{R}^n)$, $Q = Q(\Omega) = H^\psi(\Omega)$. Тогда справедливо заключение теоремы 4.*

Следствия 1, 2 вытекают из теоремы 4 и указанных в п. 2 признаков мажорируемости идеальных пространств. Леммы 9, 10 вместе с теоремой 4 позволяют формулировать условия вложения типа $P^1(\Omega) \subset Q(\Omega)$ в терминах функции λ. В частности, верно

Следствие 3. *Пусть P — изотропное* СП, $\|y;P\| = \||y|;E\|$, $E = E''$ *и пусть Q —* СП *функций на* Ω, *измеримых относительно меры* mes_n, *причем* $Q \prec P$. *Пусть выполняется неравенство*

$$\sup\left\{\varphi_Q(t)\left\|\frac{1}{\lambda}; E'(t,m)\right\|,\ 0<t<m\right\} < \infty,$$

где φ_Q *— фундаментальная функция пространства* Q, m *— некотрое число из* $(0, \mathrm{mes}_n\,\Omega)$, *функция* λ *определена равенством* (17). *Тогда* $P^1(\Omega) \subset Q(\Omega)$.

Обсудим условия справедливости неравенства

$$V_Q(f) \leqslant \mathscr{B}\|f;P^1\| \quad (f \in P^1(\Omega)). \tag{21}$$

Теорема 5. *Неравенство* (21) *справедливо в том и только в том случае, если при некотором* m *из* $(0,\mathrm{mes}_n\,\Omega)$ *функционал* $A(\cdot,P,Q)$ *ограничен на* $\mathfrak{R}(m)$.

Доказательство теоремы 5 аналогично доказательству леммы 11. Единственное отличие связано с тем, что вместо неравенства треугольника для нормы $\|\cdot;Q\|$ надо использовать 2-неравенство треугольника для функционала V_Q.

Неравенство (21) в ряде ситуаций установить проще, чем вложение $P^1(\Omega) \subset Q(\Omega)$. В то же время, если $Q \prec P$, то в силу теорем 4, 5 неравенство (21) влечет вложение $P^1(\Omega) \subset Q(\Omega)$. Особенно удобно пользоваться этим замечанием в случае $P = L_1(\Omega,\mathbb{R}^n)$, $P^1(\Omega) = L_1^1(\Omega)$. Так как $Q \prec L_1$ для любого БИП, то оценка слабого типа $V_Q(f) \leqslant \mathscr{B}\|f;L_1^1\|$ влечет вложение $L_1^1(\Omega) \subset Q(\Omega)$.

По этой причине легко выводимые (например, в рамках метода интегральных представлений [3–5]) оценки слабого типа приводят к теоремам вложения $L_1^1(\Omega)$ в пространства Лоренца.

Для пространств $W^1P(\Omega)$, $P^1(\Omega)$ верны аналоги неравенств Пуанкаре и Фридрихса [1–5]. Некоторое усиление неравенства (12) влечет компактность вложения. Результаты работы по обычным схемам могут быть применены для исследования краевых и вариационных задач в соответствующих пространствах Соболева.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гольдштейн В. М., Решетняк Ю. Г.* Введение в теорию функций с обобщенными производными и квазиконформные отображения. М.: Наука, 1983.
2. *Мазья В. Г.* О задаче Неймана в областях с нерегулярными границами // Сиб. мат. журн. 1968. Т. 9, № 6. С. 1322–1350.
3. *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1988.
4. *Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1975.
5. *Мазья В. Г.* Пространства С. Л. Соболева. Л.: Ленингр. ун-т, 1985.
6. *Брудный Ю. А., Крейн С. Г., Семёнов Е. М.* Интерполяция линейных операторов // Математический анализ. М.: ВИНИТИ, 1986. Т. 24. С. 3–163. (Итоги науки и техники.)
7. *Забрейко П. П.* Идеальные пространства вектор-функций // Докл. АН БССР. 1987. Т. 31, № 4. С. 298–301.
8. *Забрейко П. П., Нгуен Хонг Тхай.* Теория двойственности идеальных пространств вектор-функций // Докл. АН СССР. 1990. Т. 311, № 6. С. 1296–1299.
9. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1977.
10. *Красносельский М. А., Рутицкий Я. Б.* Выпуклые функции и пространства Орлича. М.: Физматгиз, 1958.
11. *Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семёнов Е. М.* Интерполяция линейных операторов. М.: Наука, 1978.

12. *Нгуен Хонг Тхай.* Идеальные пространства вектор-функций: геометрия, интерполяция и применения к нелинейным операторам и уравнениям: Дис. ... д-ра. физ.-мат. наук. Минск, 1992.

13. *Бережной Е. И.* Точные оценки операторов на конусах в идеальных пространствах // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова РАН. 1993. Т. 204. С. 3–36.

14. *Климов В. С.* Функциональные неравенства и обобщенные емкости // Мат. сб. 1996. Т. 187, № 1. С. 41–54.

15. *Рокафеллар Р. Т.* Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973.

16. *Мазья В. Г.* О слабых решениях задач Дирихле и Неймана // Тр. Моск. мат. о-ва. 1969. Т. 20. С. 137–172.

17. *Климов В. С.* Теоремы вложения для пространств Орлича и их приложения к краевым задачам // Сиб. мат. журн. 1972. Т. 13, № 2. С. 334–348.

18. *Харди Г. Г., Литтльвуд Дж., Полиа Г.* Неравенства. М.: Изд-во иностр. лит., 1948.

19. *Кальдерон А. П.* Промежуточные пространства и интерполяция, комплексный метод // Математика. 1965. Т. 9, № 3. С. 56–129.

20. *Климов В. С.* К теоремам вложения анизотропных классов функций // Мат. сб. 1985. Т. 127, № 2. С. 198–208.

г. Орел

Статья поступила 2 мая 1997 г.