

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ОРЛОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ И. С. ТУРГЕНЕВА»

Современные проблемы физико-математических наук

Материалы II международной
научно-практической конференции
24 – 27 ноября 2016 г., Орел

Орел – 2016

УДК 51+53+681.3
ББК 22.1+22.3+32.81(072.8)
С56

Редакционная коллегия:

Дорофеева В. И., кандидат физико-математических наук, доцент
Зарубин А. Н., доктор физико-математических наук, профессор
Можарова Т. Н., кандидат физико-математических наук, профессор
Марков О. И., доктор физико-математических наук, профессор
Селютин В. Д., доктор педагогических наук, профессор
Тарасова О. В., доктор педагогических наук, профессор

Современные проблемы физико-математических наук. Материалы II международной научно-практической конференции, 24-27 ноября 2016 г. / под общ. ред. Т.Н. Можаровой. — Орел: ОГУ, 2016. — 375 с.

В сборнике содержатся тексты докладов, прочитанных на юбилейной конференции физико-математического факультета Орловского государственного университета имени И. С. Тургенева.

© ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет
им. И.С. Тургенева», 2016 г.
© Коллектив авторов, 2016 г.

Оглавление

Предисловие	9
Математический анализ и дифференциальные уравнения.	
Топология и геометрия	11
Аксенов Н. А. Применение модификации метода Фурье к исследованию одного дифференциально-операторного аналога уравнения переноса	11
Батуров Д. П. О мощности дискретных множеств, лежащих в плотных подпространствах произведений	17
Жуков П. И. Краевая задача для дифференциально-разностного опережающе-запаздывающего эллипτικο-параболического уравнения	20
Зарубин А. Н. Задача Трикоми для функционально-дифференциального опережающе-запаздывающего уравнения Лаврентьева-Бицадзе	25
Кабанова М. С. Начально-краевая задача для дифференциально-разностного опережающе-запаздывающего эллипτικο-параболического уравнения	38
Meshkov A. G., Sokolov V. V. Classification the third order vectorial Hamiltonian equations	45
Можарова Т. Н. Об операторе $\varphi(A)$ с целой векторнозначной характеристической функцией, имеющей высокий порядок и конечный тип роста	50
Пономарева Т. А. Задача Трикоми для нелинейного опережающе-запаздывающего уравнения смешанного типа	53
Рыжикова П. В. Задача Трикоми для дифференциально-разностного уравнения смешанного типа	57
Рыжкова Е. В. Метод функций Грина в одной многоточечной задаче	63
Солдатов А. П., Аверьянов Г. Н. Асимптотика решений задачи линейного сопряжения в угловых точках кривой	66
Соломатин О. Д. Рост суммы и произведения функций действительного переменного	67
Толпаев В. А., Кравцов А. М., Петросянц М. Т. Построение экономизированных приближений функций многих переменных .	70

Чаплыгина Е. В. Задача Геллерстедта для нелинейного уравнения смешанного типа с функциональным запаздыванием и опережением	75
Черкасова В. В. О вычислении кривизны криволинейного мультипликативного интеграла с помощью инвариантов поверхностей	79

Методы дискретных особенностей в задачах

математической физики	84
Афанаскина И. В., Чистякова К. Г. Исследование влияния наличия включений и дренажной системы на процесс оседания бугра грунтовых вод	84
Крыштопин Д. В., Федяев Ю. С. Исследование эволюции границы раздела разнвязких жидкостей к стоку	87
Пивень В. Ф. Граничные задачи двумерной фильтрации в анизотропной неоднородной пористой среде	92
Пивень В. Ф., Лекомцев Д. Г. Математическое моделирование работы совершенной скважины в анизотропном грунте	95
Ставцев С. Л. Применение малоранговых аппроксимаций к решению интегральных уравнений в задачах аэродинамики и электродинамики	98
Федяев Ю. С. Исследование эволюции границы раздела различных жидкостей в анизотропном слое пористой среды	107

Физика конденсированного состояния.

Математическое моделирование в машиностроении и приборостроении	111
Марков О. И., Хрипунов Ю. В. Структурирование поверхности монокристалла висмута методом сухого травления	111
Муравский Ал. А., Муравский Ан. А., Беляев В. В., Чаусов Д. Н., Чаусова О. В., Курилов А. Д., Чигринов В. Г., Fan F. Температурный датчик для тонких жидкокристаллических дисплеев .	117
Преснецова В. Ю., Ромашин С. Н., Фроленкова Л. Ю., Шоркин В. С. Моделирование процессов адгезии материалов сложного химического состава	121

Сергеев В. О., Соколов А. А., Харламов Ф. В., Харламов В. Ф. Электронные явления в мелкодисперсных полупроводниках, насыщенных водородом	125
Толпаев В. А., Ахмедов К. С., Кравцов А. М., Петросянц М. Т. Волновые модели потоков газа в технических системах	129
Турин В. О., Рахметов Б. А., Зебрев Г. И., Ким Ч. Ч., Шур М. С. Учет сопротивлений истока и стока в режиме насыщения при моделировании надпорогового тока в улучшенной компактной модели органического полевого транзистора	135
Чаусов Д. Н., Беляев В. В., Чаусова О. В., Осипов М. А., Дадива- нян А. К. Энергия межмолекулярного взаимодействия мезоге- нов в зависимости от параметра порядка	152
Чаусов Д. Н., Курилов А. Д., Чаусова О. В., Беляев В. В., Kumar S. К вопросу определения молекулярного трения жидкокристал- лических смесей	159
Якушина С. И., Преснецова В. Ю. Связь теоретического и реаль- ного пределов прочности упругих материалов	163

Информатика и информационные технологии **167**

Барабанова А. С. Исследование численного решения интегрально- го уравнения с помощью квадратурных формул (посредством языка программирования Python)	167
Донцова Ю. А. О решении прикладных задач путем моделирования на графах	170
Емельянов Н. А. О проблеме создания информационной карты зда- ния	173
Жердев Н. Л. Создание новых карт для 3D Studio Max в изучении дисциплины «Компьютерная графика»	176
Котов Р. И. Разработка пользовательского интерфейса веб-приложения для кафедры университета»	180
Марьянов П. А. Метод уплотнения структуры данных лучевого по- иска	183
Ольхова А. С., Помазнев Г. О. О разработке информационной си- стемы «Виртуальный музей физико-математического факуль- тета»	187

Рюмшина О. А. Об особенностях интерпретации исключяющей категориальной связи при моделировании предметной области . . .	190
Тарасов А. И. Разработка веб-приложения для распределения нагрузки преподавателя	195
Тимашов А. С. Разложение сигналов по сдвигам функций Гаусса . . .	198

Математические и инструментальные методы

ЭКОНОМИКИ	201
Алехин Е. И., Алексахин А. Н. Повышение эффективности управления в сфере общественного питания на основе современных информационных технологий	201
Гришин А. А. К вопросу о сложности NP-полных задач с рекомбинацией теории расписаний и алгоритмы их решения	213
Денисенко С. С., Мясникова Н. О., Яковлева Ю. О. Анализ и моделирование процесса освоения производственных мощностей на примере швейного цеха	217
Зубкова Л. Н. Алгоритмы генерации правил базы знаний нечеткой продукционной системы	220
Мишина С. В., Корниенко Д. В. Некоторые подходы автоматизации учета в организациях	223
Русских Т. Н., Строев С. П. Построение рейтинга муниципальных районов Орловской области по показателям деятельности медицинских учреждений	230
Чернобровкина И. И., Чернобровкина Ю. В. Моделирование предпочтений абитуриентов при выборе ВУЗа	237
Шуметов В. Г. Множественные сравнения средних в системе анализа данных общественных наук SPSS BASE	240

Методика преподавания математики, информатики,

физики в школе и ВУЗе	245
Абраменкова Ю. В. Применение дифференциала функций двух переменных при решении задач физической химии	245
Аксюхин А. А. Особенности преподавания дисциплины «Алгоритмизация и программирование» в гуманитарном ВУЗе	249
Бакуров А. Н., Бакурова Т. М. Динамические компьютерные модели как основа формирования стереометрических понятий . . .	254

Балашова М. А. Реализация стандартов второго поколения ООО. Анализ сценария урока алгебры в 8 классе	259
Балашова М. А. Формирование универсальных учебных действий на уроках математики в средней школе	266
Ваграменко Я. А., Афонин А. Н. Методические приемы реализа- ции личностно-ориентированного обучения в среде компью- терного класса	272
Данилова О. Ю., Телкова С. А. Особенности преподавания мате- матических основ криптографии при реализации межпредмет- ных связей в ведомственных ВУЗах	275
Дзундза А. И., Цапов В. А. Формирование процедурных знаний как средство повышения продуктивности математического образо- вания	279
Думанская Т. В., Швец В. А. Целесообразность использования компетентно-ориентированных дифференцированных зада- ний по высшей математике для студентов экономических спе- циальностей	282
Евсеева Е. Г. Методика обучения математике студентов высшей тех- нической школы на основе деятельностного подхода	288
Ефимова И. В. Формирование проектной деятельности в соответ- ствии с требованиями ФГОС при изучении начального курса математике	292
Игнатова Е. С. Роль внеурочной деятельности по математике в усло- виях внедрения ФГОС основного образования	297
Кириухина Г. А. Повышение интереса к математике у обучающихся при проведении практических занятий	303
Логунов И. С. Требования к геометрическому чертежу	307
Овсянникова Т. Л., Тугарев А. С. Перспективы электронного обу- чения математике в системе российской высшей школы	309
Проскуракова Л. К., Морозова Н. Н. Методические аспекты мо- делирования физических процессов с использованием диффе- ренциальных уравнений	315
Русаков А. А., Русакова В. Н., Саватеева Е. С. Формирование ИКТ- компетенций при изучении методов дисперсионного анализа	324
Селютин В. Д., Терехова Л. А. Исторические предпосылки введе- ния стохастики в школьную математику	331

Селякова Л. И. О роли курса алгебры при подготовке будущего учителя математики	335
Симанева Т. А. Организация профильного обучения информатике в условиях внедрения ФГОС	341
Скафа Е. И. Дидактический аспект применения эвристических задач в обучении математике	347
Ставцева Д. В. Краеведческие экскурсии на уроках математики в начальной школе	351
Тарасова О. В. Преподавание геометрии в трудовой школе в 20-30 годы XX века	354
Терехов С. В. Антропный принцип как научная и философская проблема	361
Тимошенко А. А. Способ анализа эффективности мер по актуализации математических знаний у студентов, обучающихся на радиотехнических специальностях	366
Фарафонова И. В. Проектная деятельность младших школьников на внеурочных занятиях	368
Шурко Г. К. Роль дополнительного довузовского образования в системе подготовки будущих учителей математики и информатики	372

Предисловие

2016 год — юбилейный год Орловского государственного университета имени И. С. Тургенева. Долгий путь от индустриально-педагогического института до классического университета отражает качественное изменение научно-исследовательского, образовательного и методического потенциала преподавателей университета.

Отмечает 85-летие и физико-математический факультет — один из старейших факультетов ВУЗа. Физмат имеет богатую историю, на факультете сформированы определенные традиции, научные школы, методические объединения и творческие коллективы.

В настоящее время физико-математический факультет является динамично развивающимся подразделением ОГУ и с готовностью входит в инновационные преобразования в соответствии с Программой развития опорного университета.

На факультете проводятся как фундаментальные, так и прикладные исследования по приоритетным направлениям развития науки. Результаты этих исследований нашли свое отражение в материалах II Международной научно-практической конференции «Современные проблемы физико-математических наук», посвященной 85-летию физико-математического факультета.

В рамках секции «Математический анализ и дифференциальные уравнения. Топология и геометрия» были рассмотрены вопросы, отражающие наиболее актуальные направления развития современной математической науки: задачи, связанные с различными видами дифференциально-разностных уравнений и уравнений смешанного типа; исследования в области действительного и комплексного анализа.

В рамках работы секции «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики» были заслушаны доклады по широкому спектру проблем теории фильтрации, аэро-и гидродинамики, электродинамики. Они исследуются методами дискретных особенностей с применением интегральных уравнений, аналитических и численных методов математической физики.

Отличительной особенностью секции «Физика конденсированного состояния. Математическое моделирование в машиностроении и приборострое-

ния» является ее междисциплинарность, тесная взаимосвязь между теоретическими аспектами и прикладными исследованиями. Здесь представлены доклады, посвященные экспериментальным исследованиям в области нанотехнологий (О. И. Марков, Ю. В. Хрипунов и В. Ф. Харламов с сотр.). Вместе с тем, очевидно, что нанонаука возникла на основе традиционных научных направлений, таких как физикохимия поверхностей, физика структур конденсированных сред и др. В этом направлении выполнены традиционные исследования по моделированию процессов адгезии (В. Ю. Преснецова и др.), молекулярных процессов в жидких кристаллах (Д. Н. Чаусов и др.) и разработке датчиков на их основе (Ал. А. Муравский и др.), изучению пределов прочности упругих материалов (С. И. Якушина и др.). Математическое моделирование в машиностроении и приборостроении представлено работами по моделированию органического полевого транзистора (В. О. Турин и др.) и моделированию потоков газа в технических системах (В. А. Толпаев и др.).

В ходе работы секции «Математические и инструментальные методы экономики» обсуждались вопросы автоматизации отдельных информационных процессов в деятельности организаций (Е. И. Алехин и А. Н. Алексахин, С. В. Мишина и Д. В. Корниенко), технологии анализа и обработки эмпирических данных (Л. Н. Зубкова, Т. Н. Русских и С. П. Строев, И. И. Чернобровкина и Ю. В. Чернобровкина, В. Г. Шуметов), аспекты математического моделирования производственных систем (А. А. Гришин, С. С. Денисенко, Н. О. Мясникова, Ю. О. Яковлева).

В рамках отдельной секции обсуждены дидактические проблемы продуктивного обучения математике, информатике и физике в школе и в ВУЗе. В частности, в докладах И. В. Ефимовой, Д. В. Ставцевой и И. В. Фарафоновой рассматривались вопросы проектной деятельности обучающихся в начальной школе; методические основы преподавания в высшей школе освещены в докладах Е. Г. Евсеевой, Т. Л. Овсянниковой, А. А. Тимошенко, В. А. Швеца; исторические аспекты обучения математике затрагиваются в работах В. Д. Селютина, Л. А. Тереховой и О. В. Тарасовой.

Редколлегия

Математический анализ и дифференциальные уравнения. Топология и геометрия

УДК 517.98

ПРИМЕНЕНИЕ МОДИФИКАЦИИ МЕТОДА ФУРЬЕ К ИССЛЕДОВАНИЮ ОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ОПЕРАТОРНОГО АНАЛОГА УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА

Н.А. Аксенов, к.ф.-м.н.

Орловский филиал Финансового университета при Правительстве
Российской Федерации
e-mail: *aksenovna@inbox.ru*

В работе описывается применение модификации метода Фурье разделения переменных к нахождению частного решения аналитической задачи Коши, поставленной для одного дифференциально-операторного уравнения.

Традиционно задачи для дифференциально-операторных уравнений в абстрактных пространствах исследуется относительно векторнозначных функций одной переменной. Тем самым, следуя общепринятой терминологии, входящие в эти задачи дифференциально-операторные уравнения можно назвать обыкновенными.

В случае, когда неизвестная векторнозначная функция зависит от нескольких переменных, дифференциально-операторное уравнение становится уравнением в частных производных. Как показывает обзор научной литературы, теория дифференциально-операторных уравнений в частных производных является заметно менее развитой по сравнению с одномерным случаем. Известные сейчас результаты получены для задач, решения которых удовлетворяют условиям корректности по Адамару, и относятся, преимущественно, к уравнениям в классе вектор-функций действительных аргументов. Так, в трудах М.В. Фалалеева [1], Ф.Е. Ломовцева, А.В. Мотевича [2]-[4] освеще-

ны результаты для уравнений в нормированных пространствах, в работе Я.В. Радыно [5] — в локально выпуклых пространствах.

В настоящей работе изучается комплексная задача Коши для дифференциально-операторного уравнения в частных производных

$$\frac{\partial u(z_1, z_2)}{\partial z_1} = B \frac{\partial u(z_1, z_2)}{\partial z_2},$$

выступающего аналогом классического уравнения переноса

$$u_t(x, t) = cu_x(x, t).$$

Дополняя это уравнение “нетипичным” для уравнений в частных производных начальным условием $u(a_1, a_2) = x_0$ (т.е. задавая его сразу по двум переменным), получаем неклассическую задачу Коши. Вполне очевидно, что в подобной постановке эта задача априори не может иметь единственного решения (является некорректной по Адамару), и по сути, в работе изучается одно из её частных решений.

Для нахождения частного решения поставленной задачи в работе была использована модификация метода Фурье разделения переменных. Непосредственный перенос этого метода с классического скалярного случая на векторнозначный является весьма проблематичным, поскольку значениями векторнозначной функции на любом фиксированном наборе ее переменных являются не числа, а векторы, принадлежащие рассматриваемому пространству. Это обстоятельство привело к необходимости искать частное решение в форме, позволяющей записать для рассматриваемого уравнения его скалярный аналог (характеристическое уравнение), к решению которого далее и был применен метод Фурье.

Итак, пусть \mathbf{H} — произвольное счётно-полное локально выпуклое пространство. Наведём на этом пространстве топологию с помощью мультинормы $\{\|\cdot\|_p\}$, $p \in \mathcal{P}$ и рассмотрим в нём дифференциальное уравнение в частных производных с операторным коэффициентом

$$\frac{\partial u(z_1, z_2)}{\partial z_1} = B \frac{\partial u(z_1, z_2)}{\partial z_2}. \quad (1)$$

Здесь B — линейный замкнутый оператор (необязательно непрерывный) с областью определения $D(B) \subseteq \mathbf{H}$, $u(z_1, z_2) : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbf{H}$ — векторнозначная

функция двух независимых комплексных аргументов, значения которой на каждом фиксированном наборе z_1, z_2 принадлежат пространству \mathbf{H} .

В сочетании с начальным условием

$$u(a_1, a_2) = x_0, \quad a_1, a_2 \in \mathbb{C}, \quad x_0 \in D(B^{-1}) = \text{Im } B, \quad (2)$$

где B^{-1} — оператор, обратный к оператору B , уравнение (1) образует комплексную задачу Коши (1)-(2), изучаемую в различных пространствах достаточно общей природы.

Решение задачи Коши (1)-(2) описывает

Теорема 1. Пусть B^{-1} — оператор, обратный к оператору B , и пусть x_0 — собственный вектор оператора B , отвечающий собственному значению $\mu \neq 0$. Тогда задача Коши (1)-(2) имеет решение $\forall x_0 \in D(B^{-1})$. Оно является целой векторнозначной функцией двух комплексных переменных со значениями в пространстве \mathbf{H} и определяется формулой

$$u(z_1, z_2) = \mu e^{\lambda(z_1 - a_1 + \mu^{-1}(z_2 - a_2))} B^{-1}(x_0), \quad (3)$$

где $\lambda \in \mathbb{C}$ — произвольная постоянная.

Доказательство. Пусть вектор $y \neq x_0$ также является собственным вектором оператора B , отвечающим тому же собственному значению $\mu \neq 0$, что и вектор x_0 (существование такого вектора y будет доказано ниже). Тогда решение задачи Коши (1)-(2) будем искать в виде

$$u(z_1, z_2) = \mu y v(z_1, z_2), \quad (4)$$

где $v(z_1, z_2)$ — неизвестная скалярная функция двух независимых комплексных аргументов. Вектор y и функция $v(z_1, z_2)$ подлежат определению.

Подставляя функцию (4) в уравнение (1), получим:

$$\mu y \frac{\partial v(z_1, z_2)}{\partial z_1} = \mu B(y) \frac{\partial v(z_1, z_2)}{\partial z_2}. \quad (5)$$

Так как y — собственный вектор оператора B , а $\mu \neq 0$ — собственное значение оператора B , то по определению

$$B(y) = \mu y. \quad (6)$$

Принимая во внимание равенство (6), уравнение (5) преобразуем к виду

$$\left(\frac{\partial v(z_1, z_2)}{\partial z_1} - \mu \frac{\partial v(z_1, z_2)}{\partial z_2} \right) y = 0. \quad (7)$$

По определению собственный вектор оператора не может быть нулевым, поэтому из уравнения (7) следует, что

$$\frac{\partial v(z_1, z_2)}{\partial z_1} = \mu \frac{\partial v(z_1, z_2)}{\partial z_2}. \quad (8)$$

Решение уравнения (8) построим методом Фурье разделения переменных. Именно, будем искать функцию $v(z_1, z_2)$ в виде:

$$v(z_1, z_2) = t_1(z_1)t_2(z_2). \quad (9)$$

Подставляя функцию (9) в уравнение (8), приходим к соотношению

$$\frac{t_1'(z_1)}{t_1(z_1)} = \mu \frac{t_2'(z_2)}{t_2(z_2)} = \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \quad (10)$$

Следуя далее методу Фурье, из соотношения (10) приходим к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} t_1'(z_1) = \lambda t_1(z_1) \\ t_2'(z_2) = \lambda \mu^{-1} t_2(z_2) \end{cases},$$

единственное решение которой имеет вид:

$$\begin{cases} t_1(z_1) = e^{\lambda z_1} \\ t_2(z_2) = e^{\lambda \mu^{-1} z_2} \end{cases}. \quad (11)$$

В силу (11) и (9) решение (4) уравнения (1) имеет вид:

$$u(z_1, z_2) = \mu y e^{\lambda(z_1 + \mu^{-1} z_2)}. \quad (12)$$

Определим неизвестный вектор y так, чтобы функция (12) удовлетворяла начальному условию (2). Учитывая в (12) равенство (6) и полагая $z_1 =$

$a_1, z_2 = a_2$, приходим к соотношению

$$B(y)e^{\lambda(a_1+\mu^{-1}a_2)} = x_0,$$

откуда

$$y = e^{\lambda(-a_1-\mu^{-1}a_2)}B^{-1}(x_0). \quad (13)$$

Подставляя теперь (13) в (12), приходим к решению задачи Коши (1)-(2) в форме (3).

Непосредственной подстановкой, в силу следующего из равенства (6) соотношения $x_0 = \mu B^{-1}(x_0)$ (так как вектор x_0 — собственный вектор оператора B , отвечающий собственному значению μ), можно показать, что вектор-функция (3) является решением задачи Коши (1)-(2).

Теорема 2. Пусть обратный оператор B^{-1} однозначно определен и ограничен на всем пространстве \mathbf{H} . Тогда решение задачи Коши (1)-(2) непрерывно зависит от начального вектора x_0 .

Доказательство. Так как по условию обратный оператор B^{-1} определен и ограничен на всем пространстве \mathbf{H} , справедлива следующая оценка:

$$\forall p, \exists q, \exists M = M(p), \forall x_0 \in \mathbf{H} : \|B^{-1}(x_0)\|_p \leq M\|x_0\|_q. \quad (14)$$

Тогда, в силу (14) и того, что

$$|e^z| = \left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^n}{n!} = e^{|z|}$$

будет справедлива оценка: $\forall p, \exists q, \exists M = M(p), \forall x_0 \in \mathbf{H}$

$$\begin{aligned} & \max_{|z_1-a_1| \leq r_1, |z_2-a_2| \leq r_2} \|u(z_1, z_2)\|_p = \\ & = \max_{|z_1-a_1| \leq r_1, |z_2-a_2| \leq r_2} |\mu| \left| e^{\lambda(z_1-a_1+\mu^{-1}(z_2-a_2))} \right| \|B^{-1}(x_0)\|_p \leq \\ & \leq \max_{|z_1-a_1| \leq r_1, |z_2-a_2| \leq r_2} |\mu| e^{|\lambda|(|z_1-a_1+\mu^{-1}(z_2-a_2)|)} \|B^{-1}(x_0)\|_p \leq \\ & \leq \max_{|z_1-a_1| \leq r_1, |z_2-a_2| \leq r_2} |\mu| M e^{|\lambda|(|z_1-a_1|+|\mu^{-1}|z_2-a_2|)} \|x_0\|_q \leq \\ & \leq |\mu| M e^{|\lambda|(r_1+|\mu^{-1}|r_2)} \|x_0\|_q. \end{aligned}$$

Из полученной цепочки неравенств следует, что малому изменению на-

чального значения будет соответствовать малое изменение решения рассматриваемой задачи. Тем самым, решение задачи Коши (1)-(2) действительно непрерывно зависит от начального вектора x_0 .

ЛИТЕРАТУРА

1. Фалалеев М.В. Теория фундаментальных оператор-функций вырожденных интегро-дифференциальных операторов в банаховых пространствах / Автореферат дисс.... докт. физ.-мат. наук. Иркутск: Изд-во ИГУ. 2008. 34 с.
2. Ломовцев Ф.Е. Задача Гурса для двумерных гиперболических дифференциально-операторных уравнений второго порядка с переменными областями // Дифференциальные уравнения. 2012. Т. 48. №1. С. 44–54.
3. Ломовцев Ф.Е., Мотевич А.В. Двумерная задача Гурса для полных дифференциально-операторных уравнений второго порядка с переменными областями определения операторов // Вестник БГУ. Серия “Математика. Физика”. 2013. №2. С. 109–117.
4. Ломовцев Ф.Е., Мотевич А.В. Задача Гурса для трехмерных дифференциально-операторных уравнений в частных производных второго порядка с переменными областями определения // Веснік ВДУ. 2013. №1(73). С. 12–22.
5. Радыно Я.В. Линейные уравнения и борнология / Минск: Изд-во БГУ им. В.И. Ленина. 1982. 200 с.

О МОЩНОСТИ ДИСКРЕТНЫХ МНОЖЕСТВ, ЛЕЖАЩИХ В ПЛОТНЫХ ПОДПРОСТРАНСТВАХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ

Д.П. Батуров, к.ф.-м.н., доц.

ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет им. И. С. Тургенева»
e-mail: dbaturov@rambler.ru

В этой статье рассматриваются плотные подпространства топологических произведений $\prod\{M_x : x \in A\}$, где каждое M_x — сепарабельное метрическое пространство. Довольно долгое время оставалась нерешенной следующая проблема, сформулированная А.В. Архангельским [1, Задача 1.5.25]: верно ли, что всякое нормальное плотное подпространство произведения $\prod\{M_x : x \in A\}$ сепарабельных метрических пространств является коллективно нормальным? В работе [2] построен пример нормального плотного подпространства произведения сепарабельных метрических пространств, содержащего замкнутое дискретное множество мощности \mathfrak{c} . Это дает отрицательный ответ на вопрос А.В. Архангельского. Работа [3] посвящена следующему вопросу: может ли нормальное плотное подпространство произведения сепарабельных метрических пространств содержать замкнутое дискретное множество мощности больше \mathfrak{c} ? В ней доказано, что если τ — бесконечный кардинал, $\{M_x : x \in A\}$ — семейство нетривиальных сепарабельных метрических пространств и $|A| = 2^\tau$, то в $\prod\{M_x : x \in A\}$ есть нормальное плотное подпространство, содержащее замкнутое дискретное множество мощности τ .

Рассмотрим теперь такой вопрос: пусть τ — бесконечный кардинал и $|A| = \tau$, существует ли нормальное плотное подпространство произведения $\prod\{M_x : x \in A\}$ сепарабельных метрических пространств, содержащее замкнутое дискретное множество мощности τ ?

Теорема 1. Пусть τ — бесконечный кардинал и $\text{cf}(\tau) > \aleph_0$. Если $\{M_x : x \in A\}$ — семейство тихоновских пространств, каждое M_x имеет счетную сеть, $|A| \leq \tau$ и P — нормальное плотное подпространство произведения $\prod\{M_x : x \in A\}$, то P не может содержать замкнутое дискретное множество мощности τ .

Доказательство. Пусть F — замкнутое дискретное подмножество в P и $|F| = \tau$. По условию каждое M_x имеет счетную сеть \mathcal{M}_x . Все множества вида $W(x_1, \dots, x_n; U_1, \dots, U_n) = \{f \in P : f(x_i) \in U_i \text{ для всех } i = 1, \dots, n\}$,

где $x_i \in A$ and $U_i \in \mathcal{M}_{x_i}$, образуют сеть \mathcal{M} в P и $|\mathcal{M}| \leq \tau$. Обозначим $\mathcal{M}^* = \{W \in \mathcal{M} : |F \cap W| = \tau\}$. По трансфинитной рекурсии выберем $F_1 \subset F$ такое, что $|F_1| = \tau$, $W \cap F_1 \neq \emptyset$ и $W \cap (F \setminus F_1) \neq \emptyset$ для любого $W \in \mathcal{M}^*$.

Так как P нормально, существует счетное $S \subset A$ такое, что $\pi_S(F_1) \cap \pi_S(F \setminus F_1) = \emptyset$ [1, Лемма 1.6.1]. Пусть \mathcal{N} — семейство всех множеств $W(x_1, \dots, x_n; U_1, \dots, U_n)$, для которых $x_i \in S$ и $U_i \in \mathcal{M}_{x_i}$. Тогда семейство $\{\pi_S(W) : W \in \mathcal{N}\}$ есть счетная сеть в $\pi_S(P)$, $|F_1| = \tau$, $\text{cf}(\tau) > \aleph_0$, поэтому найдется $f \in F_1$ такая, что для любого $W \in \mathcal{N}$ если $f \in W$, то $|W \cap F_1| = \tau$, но это значит, что $W \in \mathcal{M}^*$, поэтому $W \cap (F \setminus F_1) \neq \emptyset$. Итак, любой элемент сети в $\pi_S(P)$, содержащий $\pi_S(f)$, пересекается с $\pi_S(F \setminus F_1)$, т. е. $\pi_S(f) \in \pi_S(F_1) \cap \pi_S(F \setminus F_1)$ — противоречие с тем, что $\pi_S(F_1) \cap \pi_S(F \setminus F_1) = \emptyset$.

Теорема 2. Пусть τ — несчетный сильно предельный кардинал и $\text{cf}(\tau) = \aleph_0$. Тогда если $\{M_x : x \in A\}$ — семейство нетривиальных сепарабельных метрических пространств, $|A| = \tau$, то $\prod\{M_x : x \in A\}$ содержит нормальное плотное подпространство P , в котором есть замкнутое дискретное множество мощности τ .

Доказательство. Поскольку $\tau > \aleph_0$ и $\text{cf}(\tau) = \aleph_0$, выберем бесконечные кардиналы $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots$ такие, что $\tau = \sup_n \lambda_n$. Так как τ — сильно предельный, $\tau = \sup_n 2^{\lambda_n}$. Построим нормальное плотное подпространство Z произведения $\prod\{M_x : x \in A\}$ такое, что $Z = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, для любого n пространство $\bigcup_{i=1}^n F_i$ дискретно и $|F_n| = \lambda_n$. Наше рассуждение является модификацией доказательства теоремы 2.1 из [3]. Термины и обозначения, которые используются ниже, определены в [3].

Представим A в виде $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n$, где все Y_n попарно дизъюнкты и $|Y_{2n-1}| = |Y_{2n}| = 2^{\lambda_n}$. Положим $X_n = \bigcup_{k=1}^{2^{n-1}} Y_k$. Для любого $n \geq 2$ зафиксируем биекцию θ_n , отображающую множество $\mathcal{E}(X_n)$ на Y_{2n} . Для любого $x \in A$ зафиксируем две различные точки $p_x, q_x \in M_x$ и счетную базу $\mathcal{M}_x = \{O_1^x, O_2^x, \dots\}$ пространства M_x . Индукцией по n построим вложения множеств F_n мощности λ_n в $\prod\{M_x : x \in A\}$. Для любого $n \geq 2$ зафиксируем отображение ϕ_n множества Y_{2n-1} на семейство $\text{exp } Z_n$ всех подмножеств множества $Z_n = \bigcup_{i=1}^n F_i$.

Для $n = 1$ возьмем произвольное плотное подпространство \tilde{D}_1 произведения $\prod\{M_x : x \in Y_1 \cup Y_2\}$ такое, что $|\tilde{D}_1| = \lambda_1$ и зафиксируем биекцию ψ_1 , отображающую F_1 на \tilde{D}_1 . Для любых $f \in F_1$ и $x \in A$ определим $f(x)$ следующим образом: если $x \in Y_1 \cup Y_2$, то $f(x) = \psi_1(f)(x)$, если $x \in Y_{2m-1}$

($m \geq 2$), то $f(x) = p_x$ если $f \in \phi_m(x)$ и $f(x) = q_x$ если $f \notin \phi_m(x)$, если $x \in Y_{2m}$ ($m \geq 2$), то $f(x) = q_x$.

Предположим теперь, что уже определено вложение F_n и $\pi_{X_n \cup Y_{2n}}(F_n)$ плотно в $\prod\{M_x : x \in X_n \cup Y_{2n}\}$. Возьмем произвольное плотное подпространство D_{n+1} произведения $\prod\{M_x : x \in X_{n+1}\}$ такое, что $\pi_{X_n \cup Y_{2n}}(D_{n+1}) = \pi_{X_n \cup Y_{2n}}(F_n)$ и $|D_{n+1}| = \lambda_{n+1}$. Применяя лемму 2.5 из [3] для D_{n+1} , получим $\tilde{D}_{n+1} \subset \prod\{M_x : x \in X_{n+1} \cup Y_{2n+2}\}$. Зафиксируем биекцию ψ_{n+1} , отображающую F_{n+1} на \tilde{D}_{n+1} . Для любых $f \in F_{n+1}$ и $x \in A$ определим $f(x)$ следующим образом: если $x \in X_{n+1} \cup Y_{2n+2}$, то $f(x) = \psi_{n+1}(f)(x)$, если $x \in Y_{2m-1}$ ($m \geq n+2$), то $f(x) = p_x$ если $f \in \phi_m(x)$ и $f(x) = q_x$ если $f \notin \phi_m(x)$, если $x \in Y_{2m}$ ($m \geq n+2$), то $f(x) = q_x$. Вложение $Z = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ в $\prod\{M_x : x \in A\}$ определено.

Подпространство Z плотно в $\prod\{M_x : x \in A\}$ [3, Предложение 2.7] и нормально [3, Предложение 2.10]. Для любого n пространство $\bigcup_{i=1}^n F_i$ дискретно [3, Предложение 2.8], отсюда каждое F_n замкнуто в Z , поэтому любое открытое в Z множество U представляется в виде объединения счетного числа замкнутых в Z множеств: $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} (U \cap F_n)$, т. е. Z совершенно нормально. Каждое F_n дискретно, $|F_n| = \lambda_n$ и $\tau = \sup_n \lambda_n$, поэтому Z содержит дискретное множество G мощности τ . Положим $P = (Z \setminus \overline{G}) \cup G$. Тогда P плотно в $\prod\{M_x : x \in A\}$, нормально и G замкнуто в P .

ЛИТЕРАТУРА

1. Архангельский А. В. Топологические пространства функций.—М.: Изд-во МГУ, 1989.—222 с.
2. Baturov D. P. On perfectly normal dense subspaces of products. *Topol. Appl.* 2007. V. 154. P. 374–383.
3. Baturov D. P. On closed discrete subsets of normal dense subspaces of products. *Topol. Appl.* 2015. V. 191. P. 28–36.

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНОГО ОПЕРЕЖАЮЩЕ-ЗАПАЗДЫВАЮЩЕГО ЭЛЛИПТИКО-ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

П.И. Жуков, магистрант

ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет им. И.С. Тургенева»

e-mail: *rahanorzm@mail.ru*

В статье исследуется задача для эллиптико-параболического уравнения. Существование решения задачи связано с разрешением матричного уравнения. Приведено доказательство единственности решения задачи в параболической области.

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\begin{aligned} U_{yy} + H(-x)U_{xx} - H(x)U_x = \\ = H(y - \pi)U(x, y - \pi) + H(\pi - y)U(x, \pi + y), \end{aligned} \quad (1)$$

$H(\xi)$ - функция Хэвисайда, в области $\mathcal{D} = \mathcal{D}^+ \cup \mathcal{D}^- \cup \mathcal{J}$, где

$$\mathcal{D}^- = \{(x, y): -\pi < x < 0, 0 < y < 2\pi\} = \mathcal{D}_0^- \cup \mathcal{D}_1^-,$$

$\mathcal{D}^+ = \{(x, y): 0 < x < h, 0 < y < 2\pi\} = \mathcal{D}_0^+ \cup \mathcal{D}_1^+$ ($0 < h \equiv \text{const}$)-область эллиптичности и параболичности \mathcal{D} , а $\mathcal{J} = \{(x, y): x = 0, 0 < y < 2\pi\} = \mathcal{J}_0 \cup \mathcal{J}_1$ -линия изменения типа области.

Обозначим $\mathcal{D}_k = \mathcal{D}_k^- \cup \mathcal{D}_k^+ \cup \mathcal{J}_k$ ($k = 0, 1$), где

$$\mathcal{D}_k^- = \{(x, y): -\pi < x < 0, \quad k\pi < y < (k+1)\pi\} \quad (k = 0, 1),$$

$$\mathcal{D}_k^+ = \{(x, y): 0 < x < h, \quad 0 < y < 2\pi\} \quad (k = 0, 1),$$

$$\mathcal{J}_k = \{(x, y): x = 0, \quad k\pi < y < (k+1)\pi\} \quad (k = 0, 1),$$

$$I = \{(x, y): -\pi < x < h, \quad y = \pi\}.$$

Задача. Найти в смешанной области \mathcal{D} функцию

$$U(x, y) \in C(\overline{\mathcal{D}}) \cap C^1(\mathcal{D} \setminus I) \cap C^2(\mathcal{D} \setminus (\mathcal{J} \cup I)),$$

удовлетворяющую уравнению (1), крайевым условиям

$$U(x, 0) = U(x, 2\pi) = 0, \quad -\pi \leq x \leq h, \quad (2)$$

$$U(-\pi, y) = \varphi(y), \quad 0 \leq y \leq 2\pi, \quad (3)$$

условиям сопряжения

$$U(-0, y) = U(+0, y) = \omega(y), \quad 0 \leq y \leq 2\pi, \quad (4)$$

$$U_x(-0, y) = U_x(+0, y) = \nu(y), \quad 0 < y < 2\pi, \quad y \neq \pi, \quad (5)$$

условиям согласования

$$\varphi(0) = \varphi(2\pi) = 0, \quad (6)$$

где $\varphi(y)$ - заданная непрерывная достаточно гладкая функция.

Обозначим

$$U_k^\pm(x, y) = U(x, y), \quad (x, y) \in \mathcal{D}_k^\pm, \quad (k = 0, 1), \quad (7)$$

причём

$$\overline{U}^\pm(x, y) = (U_0^\pm(x, y), U_1^\pm(x, \pi + y))^T, \quad (x, y) \in \mathcal{D}_0, \quad (8)$$

Тогда уравнение (1) в терминах функций (7) запишем в матричной форме

$$\overline{U_{yy}^{\pm}}(x, y) + H(-x)\overline{U_{xx}^{\pm}}(x, y) - H(x)\overline{U_x^{\pm}}(x, y) = A\overline{U^{\pm}}(x, y), \quad (9)$$

$(x, y) \in \mathcal{D}_0,$

где $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Найдем в области \mathcal{D}_0^+ операторным методом общее решение уравнения (9).

Уравнение (9) в области \mathcal{D}_0^+ имеет вид

$$\overline{U_{yy}^+}(x, y) - \overline{U_x^+}(x, y) = A\overline{U^+}(x, y), \quad (x, y) \in \mathcal{D}_0^+, \quad (10)$$

или

$$B\overline{U^+}(x, y) = \overline{U_x^+}(x, y), \quad (11)$$

где

$$B = \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - A \right).$$

Общее решение уравнения (11) можно записать в форме [1, с. 31]

$$\overline{U^+}(x, y) = e^{xB}\overline{C}(y), \quad (12)$$

где $\overline{C}(y)$ - произвольная векторная функция.

Задача Коши. Если функция $\overline{\omega}(y) = (\omega(y), \omega(\pi + y))^T \in C[0, \pi] \cap C^2(0, \pi)$, $\overline{\omega}(0) = \overline{\omega}(\pi) = 0$ и абсолютно интегрируема на $[0, \pi]$, то существует единственное решение задачи Коши для уравнения (12) в \mathcal{D}_0^+ , которое имеет вид

$$\overline{U^+}(x, y) = e^{xB}\overline{\omega}(y), \quad (x, y) \in \mathcal{D}_0^+. \quad (13)$$

Доказательство.

Действительно, используя (12) и (13), а также условие задачи и условия сопряжения (4), из общего решения (12) для уравнения (11) получим

$$\overline{U^+}(x, y) = e^{xB}\overline{\omega}(y).$$

Выразим

$$\begin{aligned} e^{xB} &= e^{x\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - A\right)} = e^{x\frac{\partial^2}{\partial y^2}} e^{-xA} = \\ &= \left[e^{x\frac{\partial^2}{\partial y^2}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^k, \quad [2, \quad \text{с. 36,} \quad \text{формула 1.211.1}] \right] = \\ &= e^{-xA} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^k. \end{aligned}$$

Функцию $\overline{\omega}(y)$ представим в виде

$$\overline{\omega}(y) = \int_0^\pi \overline{\omega}(\xi) [\delta(\xi - y) - \delta(\xi + y)] d\xi =$$

$$\begin{aligned}
& \left[\begin{array}{l} \delta(z) - \text{дельта - функция Дирака [3, с. 50 - 56], } \lambda_m = m, \\ \delta(z) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{+\infty} \cos \lambda_m z = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^{+\infty} (e^{imz} + e^{-imz}) \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{imz} \end{array} \right] \\
& = \\
& = \int_0^\pi \bar{\omega}(\xi) \left[\frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} (e^{im(\xi-y)} - e^{im(\xi+y)}) \right] d\xi, \quad y \in (0, \pi).
\end{aligned}$$

С учетом представления e^{xB} в виде ряда и интегрального представления функции $\bar{\omega}(y)$ выражение (13) запишем в форме

$$\begin{aligned}
& \overline{U^+}(x, y) = \\
& = e^{-xA} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)^k \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \bar{\omega}(\xi) \sum_{m=-\infty}^{+\infty} (e^{im(\xi-y)} - e^{im(\xi+y)}) d\xi \right]. \quad (14)
\end{aligned}$$

Предполагая, что ряд в выражении (14) сходится равномерно в \mathcal{D}_0^+ , т.е. допускается возможность перестановки операций суммирования, дифференцирования и интегрирования, имеем

$$\begin{aligned}
\overline{U^+}(x, y) &= \frac{1}{2\pi} e^{-xA} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} \int_0^\pi \bar{\omega}(\xi) \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)^k [(e^{im(\xi-y)} - e^{im(\xi+y)})] d\xi \\
&= \\
&= \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)^k [(e^{im(\xi-y)} - e^{im(\xi+y)})] = (-m^2)^k (e^{im(\xi-y)} - e^{im(\xi+y)}) \right] = \\
&= \frac{1}{2\pi} e^{-xA} \int_0^\pi \bar{\omega}(\xi) \left(\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} (-m^2)^k (e^{im(\xi-y)} - e^{im(\xi+y)}) \right) d\xi = \\
&= \left[\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} (-m^2)^k = e^{-m^2 x}, \quad [2, \quad \text{с. 36,} \quad \text{формула 1.211.1}] \right] = \\
&= \frac{1}{2\pi} e^{-xA} \int_0^\pi \bar{\omega}(\xi) \left(\sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{-m^2 x} (e^{im(\xi-y)} - e^{im(\xi+y)}) \right) d\xi = \\
&= \left[\text{т. к. } \delta(z) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{+\infty} \cos \lambda_m z = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{imz} \right] = \\
&= \frac{1}{\pi} e^{-xA} \int_0^\pi \bar{\omega}(\xi) \sum_{m=1}^{+\infty} e^{-m^2 x} (\cos m(\xi-y) - \cos m(\xi+y)) d\xi = \\
&= \frac{2}{\pi} e^{-xA} \int_0^\pi \bar{\omega}(\xi) \left(\sum_{m=1}^{+\infty} e^{-m^2 x} \sin m y \sin m \xi \right) d\xi.
\end{aligned}$$

Запишем полученное значение для функции $\overline{U^+}(x, y)$

$$\overline{U}^+(x, y) = \frac{2}{\pi} e^{-xA} \int_0^\pi \overline{\omega}(\xi) \left(\sum_{m=1}^{+\infty} e^{-m^2 x} \sin my \sin m\xi \right) d\xi. \quad (15)$$

Матрица A в показателе экспоненты в выражении (15) имеет различные собственные числа $\lambda_{1,2} = \pm 1$, поэтому она приводима к диагональному виду, т.е. существует невырожденная матрица T ($|T| \neq 0$), такая что

$$T^{-1}AT = \Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

где T^{-1} - матрица обратная T .

Так как $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, а $T^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, то

$$e^{-xA} = e^{-xT\Lambda T^{-1}} = T e^{-x\Lambda} T^{-1} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} x & -\operatorname{sh} x \\ -\operatorname{sh} x & \operatorname{ch} x \end{pmatrix}.$$

Тогда с учетом полученного значения e^{-xA} , из выражения (15), запишем формальное решение задачи Коши

$$U_0^+(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (\omega(\xi) \operatorname{ch} x - \omega(\pi + \xi) \operatorname{sh} x) G(x, y, \xi) d\xi, \quad (16)$$

$$U_1^+(x, \pi + y) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (-\omega(\xi) \operatorname{sh} x + \omega(\pi + \xi) \operatorname{ch} x) G(x, y, \xi) d\xi, \quad (17)$$

а функция

$$G(x, y, \xi) = \sum_{m=1}^{+\infty} e^{-m^2 x} \sin my \sin m\xi. \quad (18)$$

Ряды из выражений (16) и (17) сходятся, так как мажорирующий числовой ряд сходится по признаку Вейерштрасса [4, с.366], т.е.

$$\left| \sum_{m=1}^{+\infty} e^{-m^2 x} \right| \leq \sum_{m=1}^{+\infty} e^{-mx},$$

при возрастании m , элемент функционального ряда, будет меньше соответствующего элемента числового ряда.

Кроме того при подстановке (15) в (4), с учетом (16)-(18) получим

$$\overline{U}^+(0, y) = \begin{pmatrix} U_0^+(0, y) \\ U_1^+(0, \pi + y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega(y) \\ \omega(\pi + y) \end{pmatrix} = \overline{\omega}(y),$$

$$\begin{aligned} U_0^+(0, y) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (\omega(\xi) \operatorname{ch} 0 - \omega(\pi + \xi) \operatorname{sh} 0) G(0, y, \xi) d\xi = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \omega(\xi) G(0, y, \xi) d\xi = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \omega(\xi) \sum_{m=1}^{+\infty} \sin my \sin m\xi d\xi = \omega(y), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_1^+(0, \pi + y) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (-\omega(\xi) \operatorname{sh} 0 + \omega(\pi + \xi) \operatorname{ch} 0) G(0, y, \xi) d\xi = \\
&= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \omega(\pi + \xi) G(0, y, \xi) d\xi = \\
&= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \omega(\xi + \pi) \sum_{m=1}^{+\infty} \sin m y \sin m \xi d\xi = \omega(\pi + y),
\end{aligned}$$

получили разложение функций $\omega(y)$ и $\omega(\pi + y)$ соответственно, по системе собственных функций $\{\sin m y\}_1^{+\infty}$ на отрезке $[0, \pi]$ [1, с.85-86].

Из условия задачи $\bar{\omega}(0) = \bar{\omega}(\pi) = 0$, тогда на основании равномерной сходимости рядов (16) и (17) в области \mathcal{D}_0^+ , а также значений

$$\begin{aligned}
\overline{U^+}(x, 0) &= e^{xB} \bar{\omega}(0) = 0, \\
\overline{U^+}(x, \pi) &= e^{xB} \bar{\omega}(\pi) = 0,
\end{aligned}$$

полученных из (13), делаем вывод, что функция $\overline{U^+}(x, y) = \begin{pmatrix} U_0^+(x, y) \\ U_1^+(x, \pi + y) \end{pmatrix}$ является решением задачи Коши для уравнения (10) в области \mathcal{D}_0^+ .

ЛИТЕРАТУРА

1. Зарубин А.Н. Дифференциальные и дифференциально-разностные уравнения в частных производных Опорный конспект лекций с примерами, задачами и заданиями для самостоятельного решения. – Орёл: ФГБОУ ВПО «ОГУ», 2011. – 124 с.
2. Градштейн И. С. Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений (4-е изд.). – М.: Наука, 1963. – 1100 с.
3. Агранович М. С. Обобщённые функции. М.: МЦНМО, 2008.
4. Зорич В. А. Математический анализ: Учебник. Ч. II. – М.: Наука Главная редакция физико-математической литературы, 1984. – 640 с.

ЗАДАЧА ТРИКОМИ ДЛЯ ФУНКЦИОНАЛЬНО–ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРЕЖАЮЩЕ-ЗАПАЗДЫВАЮЩЕГО УРАВНЕНИЯ ЛАВРЕНТЬЕВА–БИЦАДЗЕ

А.Н. Зарубин, д.ф.-м.н., проф.

ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет им. И. С. Тургенева»

e-mail: *aleks_zarubin@mail.ru*

Исследуется краевая задача для уравнения смешанного типа с функциональным запаздыванием и опережением в главной части. Построено общее решение. Задача однозначно разрешима.

1 Введение. Постановка задачи.

Уравнение

$$L(A(x)U(x, y) - B(x)U(\alpha_1(x), y) + C(x)U(\alpha_2(x), y)) = 0, \quad (1)$$

где $L \equiv \partial^2/\partial x^2 + \operatorname{sgn}(y)\partial^2/\partial y^2$ – оператор [1] Лаврентьева–Бицадзе; $\alpha_1(x) < x$, $\alpha_1'(x) > 1$ ($\alpha_1'(x) < 1$) и $\alpha_2(x) > x$, $\alpha_2'(x) < 1$ ($\alpha_2'(x) > 1$) – гомеоморфные растягивающе(сжимающе)–запаздывающее и сжимающе(растягивающе)–опережающее отображения сохраняющие ориентацию, причем

$$\alpha_1(\alpha_2(x)) = \alpha_2(\alpha_1(x)) = x \quad (2)$$

и

$$x_n = \alpha_1(x_{n+1}), x_{n+1} = \alpha_2(x_n) \quad (n = -1, 0, 1, 2, 3), \quad (3)$$

то есть $x_{-1} = \alpha_1(x_0) < 0 = x_0 < x_1 = \alpha_2^1(x_0) < x_2 = \alpha_2^2(x_0) < x_3 = \alpha_2^3(x_0) < x_4 = \alpha_2^4(x_0)$, если, в силу (2), (3),

$$\alpha_2^1(x_0) = \alpha_2(x_0) = x_1,$$

$$\alpha_2^2(x_0) = \alpha_2(\alpha_2(x_0)) = \alpha_2(x_1) = x_2,$$

$$\alpha_2^3(x_0) = \alpha_2(\alpha_2(\alpha_2(x_0))) = \alpha_2(\alpha_2(x_1)) = \alpha_2(x_2) = x_3,$$

$$\alpha_2^4(x_0) = \alpha_2(\alpha_2(\alpha_2(\alpha_2(x_0)))) = \alpha_2(\alpha_2(\alpha_2(x_1))) = \alpha_2(\alpha_2(x_2)) = \alpha_2(x_3) = x_4;$$

рассмотрим в эллиптико–гиперболической области $D = D^+ \cup D^- \cup I$, где

$$D^+ = D_0^+ \cup D_1^+ \cup D_2^+ \cup J = \{(x, y) : x_0 < x < x_3, 0 < y < h\} (0 < h \equiv const)$$

и $D^- = D_0^- \cup D_1^- \cup D_2^-$ – эллиптическая и гиперболическая части области D , причем

$$\begin{aligned} D_k^+ &= \{(x, y) : x_k < x < x_{k+1}, 0 < y < h\} (k = -1, 0, 1, 2, 3), \\ D_k^- &= \{(x, y) : -y < \alpha_1^k(x) < y + x_1, -x_1/2 < y < 0\} (k = -1, 0, 1, 2, 3), \\ I &= \{(x, y) : x_0 < x < x_3, y = 0\}, J = J_1 \cup J_2 \end{aligned}$$

и $J_k = \{(x, y) : x = x_k, 0 < y < h\} (k = 1, 2)$.

Пусть $D_k = D_k^+ \cup D_k^- \cup I_k$, $I_k = \{(x, y) : x_k < x < x_{k+1}, y = 0\} (k = -1, 0, 1, 2, 3)$, а $\alpha_1^{-1}(x) = \alpha_2(x)$, $\alpha_1^0(x) = x$, $\alpha_1^1(x) = \alpha_1(x)$, $\alpha_1^2(x) = \alpha_1(\alpha_1(x))$, $\alpha_1^3(x) = \alpha_1(\alpha_1(\alpha_1(x)))$.

Тип функционального отклонения очевиден из представлений

$$U(\alpha_1(x), y) = U(x - (x - \alpha_1(x)), y) = U(x - \tau_1(x), y),$$

$$U(\alpha_2(x), y) = U(x + (\alpha_2(x) - x), y) = U(x + \tau_2(x), y),$$

где $\tau_1(x) = x - \alpha_1(x) > 0$, $\tau_2(x) = \alpha_2(x) - x$.

Примеры отображений $\alpha_1(x)$, $\alpha_2(x)$ приведены в [1].

Задача Т. Найти в области D решение $U(x, y) \in C(\bar{D}) \cap C^1(D \setminus J) \cap C^2(D \setminus (I \cup J))$ уравнения (1), удовлетворяющее крайевым условиям

$$U(x, h) = \varphi(x), \quad x_0 \leq x \leq x_3, \quad (4)$$

$$U(x_0, y) = U(x_3, y) = 0, \quad 0 \leq y \leq h, \quad (5)$$

$$U(x, -\alpha_1^k(x)) = \psi_k(x), \quad x_k \leq x \leq \alpha_2^k(x_1/2) (k = 0, 1, 2), \quad (6)$$

$$\alpha_2^0(x_1/2) = x_1/2, \quad \alpha_2^1(x_1/2) = \alpha_2(x_1/2), \quad \alpha_2^2(x_1/2) = \alpha_2(\alpha_2(x_1/2)),$$

$$U(x, y) = r(x, y), \quad (x, y) \in \bar{D}_{-1}, \quad (7)$$

$$U(x, y) = q(x, y), \quad (x, y) \in \bar{D}_3, \quad (8)$$

условиям сопряжения

$$U(x, 0-) = U(x, 0+) = \omega(x), \quad x_0 \leq x \leq x_3, \quad (9)$$

$$U_y(x, 0-) = U_y(x, 0+) = \nu(x), \quad x_0 < x < x_3, \quad x \neq x_1, x_2, \quad (10)$$

условиям согласования

$$\varphi(x_0) = \varphi(x_3) = \psi_0(x_0) = 0, \quad r(x_0, y) = q(x_3, y) = 0, \quad (11)$$

где $\varphi(x)$, $\psi_k(x)$, $r(x, y)$, $q(x, y)$ — заданные непрерывные достаточно гладкие функции.

2 Общее решение.

Уравнение (1) в терминах функций

$$U_k^\pm(x, y) = U(x, y), \quad (x, y) \in D_k^\pm \quad (k = 0, 1, 2), \quad (12)$$

можно записать, с учетом (7), (8), в форме системы

$$LR(x)\bar{U}(x, y) = L\bar{\Phi}(x, y), \quad (x, y) \in D_0^\pm, \quad (13)$$

где

$$\bar{U}^\pm(x, y) = (U_0^\pm(x, y), U_1^\pm(\alpha_2(x), y), U_2^\pm(\alpha_2^2(x), y))^T, \quad (14)$$

$$R(x) = \begin{pmatrix} A(x) & C(x) & 0 \\ -B(\alpha_2(x)) & A(\alpha_2(x)) & C(\alpha_2(x)) \\ 0 & -B(\alpha_2^2(x)) & A(\alpha_2^2(x)) \end{pmatrix}, \quad (15)$$

$$\bar{\Phi}(x, y) = (B(x)r(\alpha_1(x), y), 0, -C(\alpha_2^2(x))q(\alpha_2^3(x), y))^T. \quad (16)$$

Очевидно из (13) имеем

$$R(x)\bar{U}^\pm(x, y) = \bar{\Phi}(x, y) + \bar{F}^\pm(x, y), \quad (17)$$

где

$$\bar{F}^\pm(x, y) = (f^\pm(x, y), f^\pm(\alpha_2(x), y), f^\pm(\alpha_2^2(x), y))^T, \quad (18)$$

а

$$f^\pm(x, y) = g_1(x + y\sqrt{-sgn(y)}) + g_2(x - y\sqrt{-sgn(y)}), \quad (19)$$

причем $g_1(t)$, $g_2(t)$ — произвольные дважды непрерывно дифференцируемые

функции.

Если $|R(x)| \neq 0$, то система (17) имеет единственное решение

$$\bar{U}^\pm(x, y) = R^{-1}(x)(\bar{\Phi}(x, y) + \bar{F}^\pm(x, y)), (x, y) \in D_0^\pm, \quad (20)$$

где

$$\begin{aligned} & |R(x)|R^{-1}(x) = \\ & = \begin{pmatrix} A(\alpha_2(x))A(\alpha_2^2(x))+C(\alpha_2(x))B(\alpha_2^2(x)) & -C(x)A(\alpha_2^2(x)) & C(x)C(\alpha_2(x)) \\ B(\alpha_2(x))A(\alpha_2^2(x)) & A(x)A(\alpha_2^2(x)) & -A(x)C(\alpha_2(x)) \\ B(\alpha_2(x))B(\alpha_2^2(x)) & A(x)B(\alpha_2^2(x)) & A(x)A(\alpha_2(x))+C(x)B(\alpha_2(x)) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (21)$$

причем

$$\begin{aligned} |R(x)| &= A(x)A(\alpha_2(x))A(\alpha_2^2(x)) + C(x)B(\alpha_2(x))A(\alpha_2^2(x)) + \\ &+ A(x)C(\alpha_2(x))B(\alpha_2^2(x)) \neq 0, \quad x_0 \leq x \leq x_1. \end{aligned} \quad (22)$$

Равенство (20) является общим решением системы (13), которое в силу (14), (16), (18), представимо в виде

$$U_0^\pm(x, y) = R_1^{-1}(x)\bar{\Phi}(x, y) + R_1^{-1}(x)\bar{F}^\pm(x, y), (x, y) \in D_0^\pm, \quad (23)$$

$$U_1^\pm(\alpha_2(x), y) = R_2^{-1}(x)\bar{\Phi}(x, y) + R_2^{-1}(x)\bar{F}^\pm(x, y), (x, y) \in D_0^\pm, \quad (24)$$

$$U_2^\pm(\alpha_2^2(x), y) = R_3^{-1}(x)\bar{\Phi}(x, y) + R_3^{-1}(x)\bar{F}^\pm(x, y), (x, y) \in D_0^\pm, \quad (25)$$

то есть

$$U_0^\pm(x, y) = R_1^{-1}(x)\bar{\Phi}(x, y) + R_1^{-1}(x)\bar{F}^\pm(x, y), (x, y) \in D_0^\pm, \quad (23')$$

$$\begin{aligned} U_1^\pm(x, y) &= R_2^{-1}(\alpha_1(x))\bar{\Phi}(\alpha_1(x), y) + \\ &+ R_2^{-1}(\alpha_1(x))\bar{F}^\pm(\alpha_1(x), y), (x, y) \in D_1^\pm, \end{aligned} \quad (24')$$

$$\begin{aligned} U_2^\pm(x, y) &= R_3^{-1}(\alpha_1^2(x))\bar{\Phi}(\alpha_1^2(x), y) + \\ &+ R_3^{-1}(\alpha_1^2(x))\bar{F}^\pm(\alpha_1^2(x), y), (x, y) \in D_2^\pm, \end{aligned} \quad (25')$$

где $R_1^{-1}(x), R_2^{-1}(x), R_3^{-1}(x)$ — первая, вторая, третья строки матрицы $R^{-1}(x)$ из (21).

Из (23)–(25) следует, что

$$\begin{aligned}
U_0^\pm(x_1 - 0, y) &= U_1^\pm(x_1 + 0, y) = 0, \\
U_1^\pm(x_2 - 0, y) &= U_2^\pm(x_2 + 0, y) = 0, 0 \leq y \leq h, \\
U_{0x}^\pm(x_1 - 0, y) &\neq U_{1x}^\pm(x_1 + 0, y), \\
U_{1x}^\pm(x_2 - 0, y) &\neq U_{2x}^\pm(x_2 + 0, y), 0 < y < h.
\end{aligned} \tag{26}$$

3 Однозначная разрешимость задачи Т.

Теорема 1. Если $\varphi(x) \in C[x_0, x_3] \cap C^2(x_0, x_3)$; $\psi_k(x) \in C[x_k, \alpha_2^k(x_1/2)] \cap C^2(x_k, \alpha_2^k(x_1/2))$ ($k = 0, 1, 2$); $r(x, y) \in C(\bar{D}_{-1}) \cap C^2(D_{-1})$, $q(x, y) \in C(\bar{D}_3) \cap C(D_3)$, абсолютно интегрируемы на своих промежутках; $\varphi(x_0) = \varphi(x_3) = \psi_0(x_0) = 0$, $r(x_0, y) = q(x_3, y) = 0$ и $\psi'_k(x)$ при $x \rightarrow x_k$ ($k = 0, 1, 2$) допускает интегрируемую особенность, то существует единственное решение задачи Т.

Единственность решения задачи Т следует из того, что однородная задача Т имеет тривиальное решение. Доказательство этого факта основано на установлении знакоопределенности интеграла

$$\begin{aligned}
\beta + \int_{x_0}^{x_3} (A(x)\omega(x) - B(x)H(x - x_1)\omega(\alpha_1(x)) + C(x)H(x_2 - x)\omega(\alpha_2(x))) \times \\
\times (A(x)\nu(x) - B(x)H(x - x_1)\nu(\alpha_1(x)) + C(x)H(x_2 - x)\nu(\alpha_2(x))) dx.
\end{aligned}$$

Лемма 1. Если $U(x, y)$ — решение уравнения (1) в области $D^- = D_0^- \cup D_1^- \cup D_2^-$ из класса $C(\bar{D}^-) \cap C^2(D^-)$, обращающееся в нуль на $y = -\alpha_1^k(x)$, $x_k < x < \alpha_2^k(x_1/2)$ ($k = 0, 1, 2$) и в $\bar{D}_{-1}^-, \bar{D}_3^-$, то $\beta \geq 0$.

Лемма 2. Если $U(x, y)$ — решение уравнения (1) в области D^+ из класса $C(\bar{D}^+) \cap C^2(D^+ \setminus J)$ обращающееся в нуль при $x = x_k$ ($0 \leq y \leq h$) ($k = 0, 3$), $y = h$ ($x_0 \leq x \leq x_3$) и в областях $\bar{D}_{-1}^+, \bar{D}_3^+$, то $\beta \leq 0$ и

$$\beta + \iint_{D^+} [n_x^2(x, y) + n_y^2(x, y)] dx dy = 0,$$

где

$$n(x, y) = A(x)U(x, y) - B(x)U(\alpha_1(x), y) + C(x)U(\alpha_2(x), y).$$

Доказательство леммы 1 аналогично приведенному в [3, с.128–130] (по схеме [4, с.491–493]), а леммы 2 — [5].

Вопрос существования решения задачи Γ в области $D = D_0 \cup D_1 \cup D_2 \cup J$ связан с построением в областях $D_k = D_k^+ \cup D_k^- \cup I_k$ ($k = 0, 1, 2$) на основании общих решений (23)–(25) (или (23')–(25')) функций $U_k^\pm(x, y)$, $(x, y) \in D_k^\pm$ ($k = 0, 1, 2$), удовлетворяющих условиям (4)–(11), (12), (26) в которых функции $\varphi(x)$, $\psi_k(x)$ ($k = 0, 1, 2$), $r(x, y)$, $q(x, y)$ заданы, а $\omega(x)$, $\nu(x)$ подлежат определению. Поскольку условия (26) на $x = x_1, x_2$ ($0 \leq y \leq h$) известны, то достаточно решить задачу Γ для уравнения (1) в областях D_0, D_1, D_2 , то есть найти функции $U_k^\pm(x, y)$, $(x, y) \in D_k^\pm$ ($k = 0, 1, 2$).

Проведем построение решения задачи Γ для уравнения (1) в области $D_0 = D_0^+ \cup D_0^- \cup I_0$, то есть найдем функции $U_k^\pm(\alpha_2^k(x), y)$, $(x, y) \in D_0^\pm$ при условиях (4)–(11), (12), (26):

$$U_k^+(\alpha_2^k(x), h) = \varphi(\alpha_2^k(x)), \quad x_0 \leq x \leq x_1, \quad (27)$$

$$U_k^+(\alpha_2^k(x_0), y) = U_k^+(\alpha_2^k(x_1), y) = 0, \quad 0 \leq y \leq h, \quad (28)$$

$$U_k^-(\alpha_2^k(x), -x) = \psi_k(\alpha_2^k(x)), \quad x_0 \leq x \leq (x_0 + x_1)/2, \quad (29)$$

$$U_k^-(\alpha_2^k(x), 0-) = U_k^+(\alpha_2^k(x), 0+) = \omega(\alpha_2^k(x)), \quad x_0 \leq x \leq x_1, \quad (30)$$

$$U_{ky}^-(\alpha_2^k(x), 0-) = U_{ky}^+(\alpha_2^k(x), 0+) = \nu(\alpha_2^k(x)), \quad x_0 < x < x_1, \quad (31)$$

$$\omega(\alpha_2^k(x_0)) = \omega(\alpha_2^k(x_1)) = \psi_k(\alpha_2^k(x_0)) = \varphi(\alpha_2^k(x_0)) = \varphi(\alpha_2^k(x_1)) = 0. \quad (32)$$

Задача Коши. Найти в области D_0^- решение $U_k^-(\alpha_2^k(x), y)$ уравнения (1) из класса $C(\bar{D}_0^-) \cap C^2(D_0^-)$, удовлетворяющее условиям (30), (31), то есть

$$U_k^-(\alpha_2^k(x), 0-) = \omega(\alpha_2^k(x)), \quad x_0 \leq x \leq x_1,$$

$$U_{ky}^-(\alpha_2^k(x), 0-) = \nu(\alpha_2^k(x)), \quad x_0 < x < x_1,$$

где $\omega(\alpha_2^k(x))$, $\nu(\alpha_2^k(x))$ — непрерывные достаточно гладкие функции, причем $\omega(\alpha_2^k(x_0)) = \omega(\alpha_2^k(x_1)) = 0$ ($k = 0, 1, 2$) и $\alpha_2^0(x) = x$, $\alpha_2^1(x) = \alpha_2(x)$, $\alpha_2^2(x) = \alpha_2(\alpha_2(x))$.

Теорема 2. Если $\omega(\alpha_2^k(x)) \in C[x_0, x_1] \cap C^2(x_0, x_1)$; $\nu(\alpha_2^k(x)) \in C^1(x_0, x_1)$ $\omega(\alpha_2^k(x_0)) = \omega(\alpha_2^k(x_1)) = 0$, то существует единственное решение задачи

Коши $U_k^-(\alpha_2^k(x), y) \in C(\bar{D}_0^-) \cap C^2(D_0^-)$ ($k = 0, 1, 2$) вида

$$U_k^-(\alpha_2^k(x), y) = R_k^{-1}(x)\bar{\Phi}(x, y) + R_k^{-1}(x)\bar{F}^-(x, y), \quad (33)$$

где

$$\bar{F}^-(x, y) = (f^-(x, y), f^-(\alpha_2(x), y), f^-(\alpha_2^2(x), y))^T, \quad (18)$$

а $f^-(\alpha_2^k(x), y)$ ($k = 0, 1, 2$) определены (39).

Доказательство следует из (23)–(25). Действительно, для определения произвольных функций $f^-(\alpha_2^k(x), y)$ ($k = 0, 1, 2$) в $\bar{F}^-(x, y)$, учтем в общем решении (23)–(25) условия задачи Коши (30), (31).

Тогда получим равенства

$$\begin{aligned} U_k^-(\alpha_2^k(x), 0) &= \omega(\alpha_2^k(x)) = \\ &= R_{k+1}^{-1}(x)\bar{\Phi}(x, 0) + R_{k+1}^{-1}(x)\bar{F}^-(x, 0), x_0 \leq x \leq x_1, \\ U_{ky}^-(\alpha_2^k(x), 0) &= \nu(\alpha_2^k(x)) = \\ &= R_{k+1}^{-1}(x)\bar{\Phi}_y(x, 0) + R_{k+1}^{-1}(x)\bar{F}_y^-(x, 0), x_0 < x < x_1 (k = 0, 1, 2), \end{aligned}$$

то есть системы

$$\begin{aligned} R^{-1}(x)\bar{F}^-(x, 0) &= \bar{\omega}(x) - R^{-1}(x)\bar{\Phi}(x, 0), x_0 \leq x \leq x_1, \\ R^{-1}(x)\bar{F}_y^-(x, 0) &= \bar{\nu}(x) - R^{-1}(x)\bar{\Phi}_y(x, 0), x_0 < x < x_1, \end{aligned}$$

решения которых имеют вид

$$\bar{F}^-(x, 0) = R(x)\bar{\omega}(x) - \bar{\Phi}(x, 0), x_0 \leq x \leq x_1, \quad (34)$$

$$\bar{F}_y^-(x, 0) = R(x)\bar{\nu}(x) - \bar{\Phi}_y(x, 0), x_0 < x < x_1, \quad (35)$$

где

$$\bar{\omega}(x) = (\omega(x), \omega(\alpha_2(x)), \omega(\alpha_2^2(x)))^T, \quad (36)$$

$$\bar{\nu}(x) = (\nu(x), \nu(\alpha_2(x)), \nu(\alpha_2^2(x)))^T. \quad (37)$$

В силу (18)–(19) из (34)–(35) найдем

$$\begin{cases} f^-(\alpha_2^k(x), 0) = R_k(x)\bar{\omega}(x) - \bar{\Phi}_k(x, 0), x_0 \leq x \leq x_1, \\ f_y^-(\alpha_2^k(x), 0) = R_k(x)\bar{\nu}(x) - \bar{\Phi}_{ky}(x, 0), x_0 < x < x_1; \end{cases}$$

ТО ЕСТЬ

$$\begin{cases} g_1(\alpha_2^k(x)) + g_2(\alpha_2^k(x)) = R_k(x)\bar{\omega}(x) - \Phi_k(x, 0), x_0 \leq x \leq x_1, \\ (g_1(\alpha_2^k(x)))'_x - (g_2(\alpha_2^k(x)))'_x = R_k(x)\bar{\nu}(x) - \Phi_{ky}(x, 0), x_0 < x < x_1; \end{cases}$$

И ПОТОМУ

$$\begin{cases} g_1(\alpha_2^k(x)) + g_2(\alpha_2^k(x)) = R_k(x)\bar{\omega}(x) - \Phi_k(x, 0), x_0 \leq x \leq x_1, \\ g_1(\alpha_2^k(x)) - g_2(\alpha_2^k(x)) = \int_0^x R_k(t)\bar{\nu}(t)dt - \int_0^x \Phi_{ky}(t, 0)dt + C, \end{cases} \quad (38)$$

$$x_0 \leq x \leq x_1 (k = 0, 1, 2), C \equiv const,$$

а $R_0(x), R_1(x), R_2(x)$ и $\Phi_0(x, 0), \Phi_1(x, 0), \Phi_2(x, 0)$ (и производные по y) — первая, вторая, третья строки матриц $R(x)$ из (15) и $\Phi(x, y)$ из (16) соответственно.

Из системы (38) найдем

$$\begin{cases} g_1(\alpha_2^k(x)) = \frac{1}{2}R_k(x)\bar{\omega}(x) - \frac{1}{2}\Phi_k(x, 0) + \frac{1}{2}\int_0^x R_k(t)\bar{\nu}(t)dt - \frac{1}{2}\int_0^x \Phi_{ky}(t, 0)dt + C/2, \\ g_2(\alpha_2^k(x)) = \frac{1}{2}R_k(x)\bar{\omega}(x) - \frac{1}{2}\Phi_k(x, 0) - \frac{1}{2}\int_0^x R_k(t)\bar{\nu}(t)dt + \frac{1}{2}\int_0^x \Phi_{ky}(t, 0)dt - C/2. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f^-(\alpha_2^k(x), y) &= g_1(\alpha_2^k(x) + y) + g_2(\alpha_2^k(x) - y) = \frac{1}{2}R_k(\alpha_1^k(\alpha_2^k(x) + y)) \times \\ &\times \bar{\omega}(\alpha_1^k(\alpha_2^k(x) + y)) + \frac{1}{2}R_k(\alpha_1^k(\alpha_2^k(x) - y))\bar{\omega}(\alpha_1^k(\alpha_2^k(x) - y)) + \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\alpha_1^k(\alpha_2^k(x)-y)}^{\alpha_1^k(\alpha_2^k(x)+y)} R_k(t)\bar{\nu}(t)dt - \frac{1}{2}\Phi_k(\alpha_1^k(\alpha_2^k(x) + y), 0) - \\ &- \frac{1}{2}\Phi_k(\alpha_1^k(\alpha_2^k(x) - y), 0) - \frac{1}{2} \int_{\alpha_1^k(\alpha_2^k(x)-y)}^{\alpha_1^k(\alpha_2^k(x)+y)} \Phi_{ky}(t, 0)dt, x_0 \leq x \leq x_1. \end{aligned} \quad (39)$$

Подставляя (39) в (23)–(25), получим решение (33) задачи Коши.

Функциональное соотношение между $\omega(\alpha_2^k(x))$ и $\nu(\alpha_2^k(x))$, принесенное из D_0^- на линию изменения типа уравнения (1) $y = 0, x_0 < x < x_1$, получим

из (33), полагая $y = -x$ и учитывая условие (29) задачи Г:

$$\psi_k(\alpha_2^k(x)) = R_k^{-1}(x)\bar{\Phi}(x, -x) + R_k^{-1}(x)\bar{F}^-(x, -x), x_0 \leq x \leq (x_0 + x_1)/2,$$

то есть

$$R^{-1}(x)\bar{F}^-(x, -x) = \bar{\psi}(x) - R^{-1}(x)\bar{\Phi}(x, -x).$$

Отсюда

$$\bar{F}^-(x, -x) = R(x)\bar{\psi}(x) - \bar{\Phi}(x, -x), x_0 \leq x \leq (x_0 + x_1)/2, \quad (40)$$

где

$$\bar{\psi}(x) = (\psi_0(x), \psi_1(\alpha_2(x)), \psi_2(\alpha_2^2(x)))^T.$$

Учитывая (16), (18), (39), из (40) имеем

$$f^-(\alpha_2^k(x), -x) = R_k(x)\bar{\psi}(x) - \bar{\Phi}_k(x, -x), x_0 \leq x \leq (x_0 + x_1)/2,$$

то есть

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}R_k(\alpha_1^k(\alpha_2^k(x) - x))\bar{\omega}(\alpha_1^k(\alpha_2^k(x) - x)) + \frac{1}{2}R_k(\alpha_1^k(\alpha_2^k(x) + x)) \times \\ & \times \bar{\omega}(\alpha_1^k(\alpha_2^k(x) + x)) + \frac{1}{2} \int_{\alpha_1^k(\alpha_2^k(x)+x)}^{\alpha_1^k(\alpha_2^k(x)-x)} R_k(t)\bar{\nu}(t)dt = Q_k(x) \equiv R_k(x)\bar{\psi}(x) - \\ & - \bar{\Phi}_k(x, -x) + \frac{1}{2}\bar{\Phi}_k(\alpha_1^k(\alpha_2^k(x) - x), 0) - \frac{1}{2}\bar{\Phi}_k(\alpha_1^k(\alpha_2^k(x) + x), 0) - \\ & - \frac{1}{2} \int_{\alpha_1^k(\alpha_2^k(x)+x)}^{\alpha_1^k(\alpha_2^k(x)-x)} \bar{\Phi}_{kx}(t, 0)dt, x_0 \leq x \leq (x_0 + x_1)/2. \end{aligned} \quad (41)$$

Задача Дирихле. В области D_0^+ найти решение $U_k^+(\alpha_2^k(x), y)$ уравнения (1) из класса $C(\bar{D}_0^+) \cap C^2(D_0^+)$, удовлетворяющее условиям (27), (28), (30), то есть

$$U_k^+(\alpha_2^k(x), h) = \varphi(\alpha_2^k(x)), U_k^+(\alpha_2^k(x), 0+) = \omega(\alpha_2^k(x)), x_0 \leq x \leq x_1,$$

$$U_k^+(\alpha_2^k(x_0), y) = U_k^+(\alpha_2^k(x_1), y) = 0, 0 \leq y \leq h,$$

где $\varphi(\alpha_2^k(x)), \omega(\alpha_2^k(x))$ — непрерывные достаточно гладкие функции, причем

$$\omega(\alpha_2^k(x_0)) = \omega(\alpha_2^k(x_1)) = \varphi(\alpha_2^k(x_0)) = \varphi(\alpha_2^k(x_1)) = 0.$$

Теорема 3. Если $\varphi(\alpha_2^k(x)), \omega(\alpha_2^k(x)) \in C[x_0, x_1] \cap C^2(x_0, x_1)$ и $\omega(\alpha_2^k(x_0)) = \omega(\alpha_2^k(x_1)) = \varphi(\alpha_2^k(x_0)) = \varphi(\alpha_2^k(x_1)) = 0$, то существует единственное решение $U_k^+(\alpha_2^k(x), y) \in C(\bar{D}_0^+) \cap C^2(D_0^+)$ задачи Дирихле вида

$$U_k^+(\alpha_2^k(x), y) = R_k^{-1}(x)\bar{\Phi}(x, y) + R_k^{-1}(x)\bar{F}^+(x, y), \quad (42)$$

где $\bar{F}^+(x, y) = (f^+(x, y), f^+(\alpha_2(x), y), f^+(\alpha_2^2(x), y))^T$, а $f^+(\alpha_2^k(x), y)$ ($k = 0, 1, 2$) определены (52).

Доказательство следует из (23)–(25).

Действительно, для определения произвольных функций $f^+(\alpha_2^k(x), y)$ ($k = 0, 1, 2$) в $\bar{F}^+(x, y)$, учтем в общем решении (23)–(25) условия задачи Дирихле (27), (30).

Тогда получим равенства

$$U_k^+(\alpha_2^k(x), 0) = \omega(\alpha_2^k(x)) = R_{k+1}^{-1}(x)\bar{\Phi}(x, 0) + R_{k+1}^{-1}(x)\bar{F}^+(x, 0), \quad x_0 \leq x \leq x_1,$$

$$U_k^+(\alpha_2^k(x), h) = \varphi(\alpha_2^k(x)) = R_{k+1}^{-1}(x)\bar{\Phi}(x, h) + R_{k+1}^{-1}(x)\bar{F}^+(x, h), \quad x_0 \leq x \leq x_1;$$

то есть системы

$$R^{-1}(x)\bar{F}^+(x, 0) = \bar{\omega}(x) - R^{-1}(x)\bar{\Phi}(x, 0), \quad x_0 \leq x \leq x_1,$$

$$R^{-1}(x)\bar{F}^+(x, h) = \bar{\varphi}(x) - R^{-1}(x)\bar{\Phi}(x, h), \quad x_0 \leq x \leq x_1;$$

решения которых имеют вид

$$\bar{F}^+(x, 0) = R(x)\bar{\omega}(x) - \bar{\Phi}(x, 0), \quad x_0 \leq x \leq x_1, \quad (43)$$

$$\bar{F}^+(x, h) = R(x)\bar{\varphi}(x) - \bar{\Phi}(x, h), \quad x_0 \leq x \leq x_1, \quad (44)$$

где

$$\bar{\varphi}(x) = (\varphi(x), \varphi(\alpha_2(x)), \varphi(\alpha_2^2(x)))^T, \quad (45)$$

а $\bar{\omega}(x)$ определено (36).

В силу (18)–(19), из (43)–(44) найдем

$$\begin{cases} f^+(\alpha_2^k(x), 0) = R_k(x)\bar{\omega}(x) - \Phi_k(x, 0), x_0 \leq x \leq x_1; \\ f^+(\alpha_2^k(x), h) = R_k(x)\bar{\varphi}(x) - \Phi_k(x, h), x_0 \leq x \leq x_1; \end{cases}$$

то есть

$$\begin{cases} g_1(\alpha_2^k(x)) + g_2(\alpha_2^k(x)) = R_k(x)\bar{\omega}(x) - \Phi_k(x, 0), x_0 \leq x \leq x_1; \\ g_1(\alpha_2^k(x) + ih) + g_2(\alpha_2^k(x) - ih) = R_k(x)\bar{\varphi}(x) - \Phi_k(x, h), x_0 \leq x \leq x_1. \end{cases} \quad (46)$$

Подставляя из первого уравнения

$$g_1(\alpha_2^k(x)) = R_k(x)\bar{\omega}(x) - \Phi_k(x, 0) - g_2(\alpha_2^k(x)), \quad (47)$$

во второе уравнение системы (46), приходим к разностному уравнению

$$g_2(\alpha_2^k(x)) = g_2(\alpha_2^k(x) - 2ih) + \gamma(\alpha_2(x)), \quad (48)$$

где

$$\begin{aligned} \gamma(\alpha_2(x)) = & R_k(x)\bar{\omega}(x) - \Phi(x, 0) - \\ & - R_k(\alpha_1^k(\alpha_2^k(x) - ih))\bar{\varphi}(\alpha_1^k(\alpha_2^k(x) - ih)) + \Phi_k(\alpha_1^k(\alpha_2^k(x) - ih), h), \end{aligned} \quad (49)$$

решение [6] которого

$$g_2(\alpha_2^k(x)) = \sum_{m=0}^{+\infty} P_{\alpha_2^k(x)}^{2ihm} \gamma(\alpha_2(x)), \quad (50)$$

а, на основании (47),

$$g_1(\alpha_2^k(x)) = R_k(x)\bar{\omega}(x) - \Phi_k(x, 0) - \sum_{m=0}^{+\infty} P_{\alpha_2^k(x)}^{2ihm} \gamma(\alpha_2(x)), \quad (51)$$

причем P_t^α — оператор сдвига по t : $P_t^\alpha \gamma(t) = \gamma(t - \alpha)$.

Значит,

$$\begin{aligned}
f^+(\alpha_2^k(x), y) &= g_1(\alpha_2^k(x) + iy) + g_2(\alpha_2^k(x) - iy) = \\
&= R_k(\alpha_1^k(\alpha_2^k(x) + iy))\bar{\omega}(\alpha_1^k(\alpha_2^k(x) + iy)) - \Phi_k(\alpha_1^k(\alpha_2^k(x) + iy), 0) - \\
&\quad - \sum_{m=0}^{+\infty} P_{\alpha_2^k(x)}^{2ihm} [\gamma(\alpha_2(x) + iy) - \gamma(\alpha_2(x) - iy)].
\end{aligned} \tag{52}$$

Подставляя (52) в (23)–(25) получим решение (42) задачи Дирихле.

Найдем **функциональное соотношение** между $\omega(\alpha_2^k(x))$ и $\nu(\alpha_2^k(x))$, принесенное из D_0^+ на линию изменения типа $y = 0$, $x_0 < x < x_1$.

Учитывая в (42) условие (31) получаем

$$U_{ky}^+(\alpha_2^k(x), 0) = \nu(\alpha_2^k(x)) = R_k^{-1}(x)\bar{\Phi}_y(x, 0) + R_k^{-1}(x)\bar{F}_y^+(x, 0), \quad x_0 < x < x_1,$$

то есть

$$R^{-1}(x)\bar{F}_y^+(x, 0) = \bar{\nu}(x) - R^{-1}(x)\bar{\Phi}_y(x, 0).$$

Отсюда,

$$\bar{F}_y^+(x, 0) = R(x)\bar{\nu}(x) - \bar{\Phi}_y(x, 0), \quad x_0 < x < x_1, \tag{53}$$

где $\bar{\nu}(x)$ определяется (37).

Учитывая (18), (52), из (53) имеем

$$f_y^+(\alpha_2^k(x), 0) = R_k(x)\bar{\nu}(x) - \Phi_{ky}(x, 0), \quad x_0 < x < x_1,$$

то есть

$$\begin{aligned}
i(R_k(x)\bar{\omega}(x))'_x - i\Phi_{kx}(x, 0) - 2i \sum_{m=0}^{+\infty} P_{\alpha_2^k(x)}^{2ihm} (\gamma(\alpha_2(x)))'_x &= \\
&= R_k(x)\bar{\nu}(x) - \Phi_{kx}(x, 0), \quad x_0 < x < x_1,
\end{aligned}$$

или, учитывая (49)

$$\begin{aligned} R_k(x)\bar{v}(x) = & i(R_k(x)\bar{\omega}(x))' - i\Phi_{kx}(x, 0) + \Phi_{kx}(x, 0) + \\ & + 2i \sum_{m=0}^{+\infty} P_{\alpha_2^k(x)}^{2ihm} [R_k(x)\bar{\omega}(x) - \Phi_k(x, 0) - \\ & - R_k(\alpha_1^k(\alpha_2^k(x) - ih))\varphi(\alpha_1^k(\alpha_2^k(x) - ih)) + \Phi_k(\alpha_1^k(\alpha_2^k(x) - ih), h)]'. \end{aligned}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Бицадзе А.В. Уравнения смешанного типа. М., 1959.
2. Зарубин А.Н. Задача Трикоми для опережающе–запаздывающего уравнения смешанного типа с переменным отклонением аргумента // Дифференциальные уравнения. 2016. т. 52. №10. с.1364–1376.
3. Зарубин А.Н. Уравнения смешанного типа с запаздывающим аргументом. Орел, 1997.
4. Франкль Ф.И. Избранные труды по газовой динамике. М., 1973.
5. Зарубин А.Н. Краевая задача для опережающе–запаздывающего уравнения смешанного типа с негладкой линией вырождения // Дифференциальные уравнения. 2014. т. 50. №10. с.1362–1372.
6. Зарубин А.Н. Краевая задача для уравнения смешанного типа с опережающе-запаздывающим аргументом // Дифференциальные уравнения. 2012. т. 48 №10. с.1404–1411.

НАЧАЛЬНО-КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНОГО ОПЕРЕЖАЮЩЕ-ЗАПАЗДЫВАЮЩЕГО ЭЛЛИПТИКО-ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

М.С. Кабанова, магистрант

ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет им. И. С. Тургенева»

e-mail: *kabanova_m_s@rambler.ru*

Исследуется начально-краевая задача для дифференциально-разностного опережающе-запаздывающего эллипτικο-параболического уравнения. Построено общее решение в эллиптической области. Задача Дирихле однозначно разрешима.

Рассмотрим уравнение

$$\begin{aligned} U_{xx}(x, y) + H(-y)U_{yy}(x, y) - H(y)U_y(x, y) = \\ = H(x - \pi)U(x - \pi, y) + H(\pi - x)U(x + \pi, y) \end{aligned} \quad (1)$$

в области $D = D^+ \cup D^- \cup J$, где

$$D^+ = D_0^+ \cup D_1^+ \cup I^+ = \{(x, y) : 0 < x < 2\pi, 0 < y < h\} \quad (0 < h \equiv \text{const}),$$

$$D^- = D_0^- \cup D_1^- \cup I^- = \{(x, y) : 0 < x < 2\pi, -\pi < y < 0\} -$$

параболическая и эллиптическая части области D , причем

$$D_k^+ = \{(x, y) : k\pi < x < (k+1)\pi, 0 < y < h\} \quad (k = 0, 1),$$

$$D_k^- = \{(x, y) : k\pi < x < (k+1)\pi, -\pi < y < 0\} \quad (k = 0, 1),$$

$$J = J_0 \cup J_1 = \{(x, y) : 0 < x < 2\pi, y = 0\},$$

$$J_k = \{(x, y) : k\pi < x < (k+1)\pi, y = 0\} \quad (k = 0; 1),$$

$$I = I^+ \cup I^- = \{(x, y) : x = \pi, -\pi < y < h\} \quad (0 < h \equiv \text{const}),$$

$$I^+ = \{(x, y) : x = \pi, 0 < y < h\}, \quad I^- = \{(x, y) : x = \pi, -\pi < y < 0\}$$

Задача. Найти в области D функцию $U(x, y) \in C(\bar{D}) \cap C^1(D \setminus I) \cap C^2(D \setminus (I \cup J))$, удовлетворяющую уравнению (1), краевым условиям

$$U(0, y) = U(2\pi, y) = 0, \quad -\pi < y < h \quad (0 < h \equiv \text{const}), \quad (2)$$

$$U(x, -\pi) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 2\pi, \quad (3)$$

условиям сопряжения

$$U(x, 0+) = U(x, 0-) = \omega(x), \quad 0 \leq x \leq 2\pi, \quad (4)$$

$$U_y(x, 0+) = U_y(x, 0-) = \nu(x), \quad 0 < x < 2\pi, x \neq \pi, \quad (5)$$

условиям согласования

$$\varphi(0) = \varphi(2\pi) = 0, \quad (6)$$

где $\varphi(x)$ - непрерывная достаточно гладкая функция.

Уравнение (1) в терминах функций

$$U_k^\pm(x, y) = U(x, y), \quad (x, y) \in D_k^\pm \quad (k = 0, 1), \quad (7)$$

можно записать [1] в виде системы

$$\bar{U}_{xx}^\pm(x, y) + H(-y)\bar{U}_{yy}^\pm(x, y) - H(y)\bar{U}_y^\pm(x, y) = A\bar{U}^\pm(x, y), \quad (x, y) \in D_0^-, \quad (8)$$

где

$$\bar{U}^\pm(x, y) = (U_0^\pm(x, y), U_1^\pm(x + \pi, y))^T, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Задача Дирихле. Найти в области D_0^- функцию $\bar{U}^-(x, y) \in C(\bar{D}_0^-) \cap C^2(D_0^-)$, удовлетворяющую уравнению

$$\bar{U}_{xx}^-(x, y) + \bar{U}_{yy}^-(x, y) = A\bar{U}^\pm(x, y), \quad (x, y) \in D_0^-, \quad (10)$$

краевым условиям

$$\bar{U}^-(0, y) = \bar{U}^-(\pi, y) = \bar{0}, \quad -\pi < y < h \quad (0 < h \equiv \text{const}), \quad (11)$$

$$\bar{U}^-(x, 0) = \bar{\omega}(x), \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad (12)$$

$$\bar{U}^-(x, -\pi) = \bar{\varphi}(x), \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad (13)$$

где $\bar{\omega}(x) = (\omega(x), \omega(x + \pi))^T$ согласования

$$\bar{\omega}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ \omega(\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega(\pi) \\ 0 \end{pmatrix} = \bar{\omega}(\pi),$$

$$\bar{\omega}(0) = \bar{\omega}(\pi) = \bar{0}, \quad (14)$$

$$\bar{\varphi}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi(\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi(\pi) \\ 0 \end{pmatrix} = \bar{\omega}(\pi)$$

$$\bar{\varphi}(0) = \bar{\varphi}(\pi) = \bar{0}, \quad (15)$$

где $\bar{\omega}(x), \bar{\varphi}(x)$ - непрерывные достаточно гладкие функции.

Теорема. Если $\bar{\varphi}(x), \bar{\omega}(x) \in C[0, \pi] \cap C^2(0, \pi)$ и выполняются условия (14), (15), то существует единственное решение задачи Дирихле вида

$$\begin{aligned} \bar{U}^-(x, y) = & \int_0^{x+iy} \mathcal{J}_0(i\sqrt{(x+iy-t)(x-iy)}) \sum_{n=0}^{+\infty} [R_t^{2in\pi} \bar{P}'(t) - R_t^{(2n+1)i\pi} \bar{Q}'(t)] dt + \\ & + \int_0^{x-iy} \mathcal{J}_0(i\sqrt{(x-iy-t)(x+iy)}) \sum_{n=0}^{+\infty} [R_t^{(2n+1)i\pi} \bar{Q}'(t) - R_t^{2(n+1)i\pi} \bar{P}'(t)] dt, \end{aligned} \quad (16)$$

где R_x^θ - оператор сдвига по x : $R_x^\theta p(x) = p(x - \theta)$,

$$\bar{P}(x) = \bar{\omega}(x) + \int_0^x \bar{\omega}(t) \frac{x}{t} \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{J}_0(i\sqrt{(t-x)t}) dt, \quad (17)$$

$$\bar{Q}(x) = \bar{\varphi}(x) + \frac{i\sqrt{(x^2 + \pi^2)}}{2} \int_0^1 \frac{\bar{\varphi}(sx)}{\sqrt{s(1-s)}} \mathcal{I}_1(i\sqrt{(x^2 + \pi^2)s(1-s)}) ds, \quad (18)$$

где $\mathcal{J}_0(z)$ - функция Бесселя первого рода нулевого порядка, $\mathcal{I}_1(z)$ - модифицированная функция Бесселя первого рода первого порядка.

Доказательство проведем руководствуясь работой [1]. В переменных

$$\xi = x + iy, \eta = x - iy \quad (19)$$

уравнение (10) имеет вид матричного уравнения

$$4\bar{U}_{\xi\eta}(\xi, \eta) = A\bar{U}(\xi, \eta). \quad (20)$$

Решение этого уравнения, найденное методом последовательных приближений или с помощью работы [2, с.67-68], можно представить формулой

$$\begin{aligned} \bar{U}^-(\xi, \eta) = & \bar{U}^-(0, 0)\mathcal{J}_0(i\sqrt{A\xi\eta}) + \int_0^\xi \mathcal{J}_0(i\sqrt{A\eta(\xi-t)})\bar{f}(t)dt + \\ & + \int_0^\eta \mathcal{J}_0(i\sqrt{A\xi(\eta-t)})\bar{g}(t)dt, \end{aligned}$$

или, учитывая, что $\bar{U}^-(0, 0) \equiv \bar{0}$, запишем

$$\bar{U}^-(\xi, \eta) = \int_0^\xi \mathcal{J}_0(i\sqrt{A\eta(\xi-t)})\bar{f}(t)dt + \int_0^\eta \mathcal{J}_0(i\sqrt{A\xi(\eta-t)})\bar{g}(t)dt, \quad (21)$$

где $\bar{f}(t), \bar{g}(t)$ - произвольные дважды непрерывно-дифференцируемые вектор-функции; $i = \sqrt{-1}$, $\mathcal{J}_0(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k (z/2)^{2k} / (k!\Gamma(k+1))$ - функция Бесселя первого рода нулевого порядка.

Поскольку матрица A из (9) имеет различные собственные значения $\lambda_{1,2} = \pm 1$, то она приводима к диагональному виду, т.е. существует матрица T_A ($|T_A| \neq 0$) такая, что

$$T_A^{-1}AT_A = \Lambda_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

причем

$$T_A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad T_A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Значит,

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_0(i\sqrt{At}) &= \mathcal{J}_0(i\sqrt{T_A^{-1}\Lambda_A T_A t}) = T_A^{-1} \mathcal{J}_0(i\sqrt{\Lambda_A t}) T_A = \\ &= T_A^{-1} \begin{pmatrix} \mathcal{J}_0(i\sqrt{\lambda_1 t}) & 0 \\ 0 & \mathcal{J}_0(i\sqrt{\lambda_2 t}) \end{pmatrix} T_A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \gamma_2(t) & \gamma_1(t) \\ \gamma_1(t) & \gamma_2(t) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (22)$$

где

$$\gamma_n = \mathcal{J}_0(i\sqrt{\lambda_1 t}) + (-1)^n \mathcal{J}_0(i\sqrt{\lambda_2 t}) \quad (n = 1, 2). \quad (23)$$

Поэтому из равенства (21) в силу (22)-(23) и возвращения к старым переменным (19) найдем общее решение уравнения (10)

$$\begin{aligned} \bar{U}^-(x, y) &= \int_0^{x+iy} \mathcal{J}_0(i\sqrt{(x+iy-t)(x-iy)}) \bar{f}(t) dt + \\ &+ \int_0^{x-iy} \mathcal{J}_0(i\sqrt{(x-iy-t)(x+iy)}) \bar{g}(t) dt, \quad (x, y) \in D_0^-. \end{aligned} \quad (24)$$

Условия (12), (13) позволяют записать систему

$$\begin{cases} \int_0^x \mathcal{J}_0(i\sqrt{(x-t)x}) \bar{f}(t) dt + \int_0^x \mathcal{J}_0(i\sqrt{(x-t)x}) \bar{g}(t) dt = \omega(x), \\ \int_0^{x-i\pi} \mathcal{J}_0(i\sqrt{(x-i\pi-t)(x+i\pi)}) \bar{f}(t) dt + \\ + \int_0^{x+i\pi} \mathcal{J}_0(i\sqrt{(x+i\pi-t)(x-i\pi)}) \bar{g}(t) dt = \bar{\varphi}(x). \end{cases} \quad (25)$$

Первое уравнение системы (25) после интегрирования по частям принимает вид

$$\int_0^x (\bar{f}(\xi) + \bar{g}(\xi)) d\xi - \int_0^x \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{J}_0(i\sqrt{(x-t)x}) dt \int_0^t (\bar{f}(\xi) + \bar{g}(\xi)) d\xi = \bar{\omega}(x). \quad (26)$$

Относительно $\int_0^x (\bar{f}(\xi) + \bar{g}(\xi)) d\xi$ из(26), после применения формулы обра-

щения (12*.11) из [2,с. 69] найдем

$$\int_0^x (\bar{f}(\xi) + \bar{g}(\xi))d\xi = \bar{\omega}(x) + \int_0^x \bar{\omega}(t) \frac{x}{t} \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{J}_0(i\sqrt{(t-x)t})dt. \quad (27)$$

Интегрирование по частям второго уравнения системы (25), приводит к равенству

$$\begin{aligned} \int_0^{x-i\pi} \bar{f}(\xi)d\xi + \int_0^{x+i\pi} \bar{g}(\xi)d\xi - \int_0^{x-i\pi} \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{J}_0(i\sqrt{(x-i\pi-t)(x+i\pi)})dt \int_0^t \bar{f}(\xi)d\xi - \\ - \int_0^{x+i\pi} \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{J}_0(i\sqrt{(x+i\pi-t)(x-i\pi)})dt \int_0^t \bar{g}(\xi)d\xi = \bar{\varphi}(x). \end{aligned} \quad (28)$$

Проведя в третьем и четвертом интегралах замены $t = s(x - i\pi)$ и $t = s(x + i\pi)$ соответственно, получим

$$\begin{aligned} \int_0^{x-i\pi} \bar{f}(\xi)d\xi + \int_0^{x+i\pi} \bar{g}(\xi)d\xi - \int_0^1 \left\{ \int_0^{s(x-i\pi)} \bar{f}(\xi)d\xi \right\} \frac{\partial}{\partial s} \mathcal{J}_0(i\sqrt{A(1-s)(x^2 + \pi^2)})ds - \\ - \int_0^1 \left\{ \int_0^{s(x+i\pi)} \bar{g}(\xi)d\xi \right\} \frac{\partial}{\partial s} \mathcal{J}_0(i\sqrt{A(1-s)(x^2 + \pi^2)})ds = \bar{\varphi}(x). \end{aligned} \quad (29)$$

Использование для уравнения (29) формулы обращения (12*.13) из [2, с.69] приводит к

$$\begin{aligned} \int_0^{x-i\pi} \bar{f}(\xi)d\xi + \int_0^{x+i\pi} \bar{g}(\xi)d\xi = \bar{\varphi}(x) + \\ + \frac{i\sqrt{(x^2 + \pi^2)}}{2} \int_0^1 \frac{\bar{\varphi}(sx)}{\sqrt{s(1-s)}} \mathcal{I}_1(i\sqrt{(x^2 + \pi^2)s(1-s)})ds. \end{aligned} \quad (30)$$

Тогда система (25) в силу (27), (30) и (7), (18) будет иметь вид

$$\begin{cases} \int_0^x (\bar{f}(\xi) + \bar{g}(\xi)) d\xi = \bar{P}(x), \\ \int_0^{x-i\pi} \bar{f}(\xi) d\xi + \int_0^{x+i\pi} \bar{g}(\xi) d\xi = \bar{Q}(x). \end{cases} \quad (31)$$

Дифференцируя систему (31), приходим к системе

$$\begin{cases} \bar{f}(x) + \bar{g}(x) = \bar{P}'(x), \\ \bar{f}(x - i\pi) + \bar{g}(x + i\pi) = \bar{Q}'(x), \end{cases} \quad (32)$$

решение которой можно записать в виде

$$\begin{aligned} \bar{f}(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left[R_x^{2i\pi n} \bar{P}'(x) - R_x^{2i(n+1)\pi} \bar{Q}'(x) \right], \\ \bar{g}(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left[R_x^{(2n+1)i\pi} \bar{Q}'(x) - R_x^{2(n+1)i\pi} \bar{P}'(x) \right]. \end{aligned} \quad (33)$$

Подставляя (33) в (24) получим искомое решение (16).

ЛИТЕРАТУРА

1. Зарубин А.Н. Задача Трикоми для опережающе-запаздывающего уравнения смешанного типа с переменным отклонением аргумента// Дифференциальные уравнения, 2016. Т. 52. №10. с.1364-1376
2. Векуа И.Н. Новые методы решения эллиптических уравнений. — М.— Л.: ОГИЗ, 1948.

ON THIRD ORDER INTEGRABLE VECTORIAL HAMILTONIAN EQUATIONS

A.G. Meshkov

Turgenev Orel State University
e-mail: *Anatolmeshkov@yandex.ru*

V.V. Sokolov

L.D. Landau Institute for Theoretical Physics
e-mail: *sokolov@itp.ac.ru*

A complete list of the third order vectorial Hamiltonian equations with the Hamiltonian operator D_x having an infinite series of higher conservation laws is presented. A new vector integrable equation on the sphere is found.

1 Introduction

Consider evolution vector equations of the following form

$$\mathbf{u}_t = f_0 \mathbf{u} + f_1 \mathbf{u}_1 + f_2 \mathbf{u}_2 + f_3 \mathbf{u}_3. \quad (1)$$

Here $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^N$ is unknown vector-function of two variables t and x , \mathbf{u}_n is its n -th x -derivative, $\mathbf{u}_0 \equiv \mathbf{u}$, and \mathbf{u}_t is the t -derivative of \mathbf{u} . The coefficients f_i , $i = 0, \dots, 3$ are some scalar valued functions depending on several scalar products $(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_k) \equiv u_{[i,k]}$, $0 \leq i \leq k \leq 3$. Under additional restriction $u_{0,0} = 1$ integrable equations (1) have been investigated in [1]. A classification of some special classes of integrable equations (1) can be found in [2, 3]. Any complete classification of integrable equations (1) is not done yet.

In this paper we consider equations (1) Hamiltonian with respect to the Gardner-Faddeev-Zakharov Poisson bracket. Any such equation has the form

$$\mathbf{u}_t = D_x \frac{\delta}{\delta \mathbf{u}} H(u_{[0,0]}, u_{[0,1]}, u_{[1,1]}), \quad (2)$$

where D_x is the total derivative with respect to x and $\frac{\delta}{\delta \mathbf{u}}$ is the vectorial variational derivative

$$\frac{\delta}{\delta \mathbf{u}} = \sum_{0 \leq i \leq k < \infty} \left[(-D_x)^i \mathbf{u}_k \frac{\partial}{\partial u_{[i,k]}} + (-D_x)^k \mathbf{u}_i \frac{\partial}{\partial u_{[i,k]}} \right].$$

For the first order Hamiltonians we have

$$\frac{\delta}{\delta \mathbf{u}} H = 2 \frac{\partial H}{\partial u_{[0,0]}} \mathbf{u} + \frac{\partial H}{\partial u_{[0,1]}} \mathbf{u}_x - D_x \left(\frac{\partial H}{\partial u_{[0,1]}} \mathbf{u} \right) - 2 D_x \left(\frac{\partial H}{\partial u_{[1,1]}} \mathbf{u}_x \right).$$

We find a complete (up to canonical transformations) list of Hamiltonians H such that the corresponding equations (2) possesses infinitely many higher local conservation laws of the form

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial \sigma}{\partial x}.$$

Here ρ and σ are scalar-valued functions depending on a finite number of the scalar products $u_{[i,k]}$. We call such equations *integrable*. A transformation of t, x, \mathbf{u} that do not change the form of the Hamiltonian operator D_x is said to be the *canonical*. In particular, the transformations

$$x \rightarrow k_1 x, \quad t \rightarrow k_2 t, \quad \mathbf{u} \rightarrow k_3 \mathbf{u}, \quad (3)$$

and the Galilei transform

$$x \rightarrow x + k_4 t, \quad (4)$$

with k_i being constants, are canonical ones.

It is easy to verify that for any c_1 Hamiltonians H and $\tilde{H} = H + c_1 u_{[0,0]}$ are equivalent with respect to the Galilei transform. If $\tilde{H} = H + D_x f(u_{[i,j]}) + c_2$, then $\frac{\delta H}{\delta \mathbf{u}} = \frac{\delta \tilde{H}}{\delta \mathbf{u}}$ and the corresponding Hamiltonian equations (2) coincide. If $\tilde{H} - H = D_x(f) + c_1 u_{[0,0]} + c_2$, we call H and \tilde{H} *equivalent*.

Let us formulate the main classification result.

Theorem. If the nonlinear equation (2) admits infinitely many local conservation laws, then the Hamiltonian up to transformations (3) and (4) is equivalent to one of the following Hamiltonians:

$$H_1 = \frac{\mathbf{u}_x^2}{(\mathbf{u}^2 + c)^3}, \quad (5)$$

$$H_2 = \frac{\mathbf{u}_x^2}{|\mathbf{u}|^3} + q(\mathbf{u}^2, (\mathbf{u}, \mathbf{u}_x)), \quad (6)$$

$$H_3 = |\mathbf{u}_x|^{1/2}, \quad (7)$$

$$H_4 = (\mathbf{u}_x^2 + 2(\mathbf{u}, \mathbf{u}_x) + \mathbf{u}^2)^{1/4}, \quad (8)$$

$$H_5 = (\mathbf{u}_x^2 + 2\mathbf{u}^2(\mathbf{u}, \mathbf{u}_x) + |\mathbf{u}|^6)^{1/4}, \quad (9)$$

$$H_6 = 2(\mathbf{u}_x^2 - \mathbf{u}^{-2}(\mathbf{u}, \mathbf{u}_x)^2)^{1/4} + q(\mathbf{u}^2, (\mathbf{u}, \mathbf{u}_x)), \quad (10)$$

where c is a constant, q is an arbitrary function of two variables.

2 Integrability conditions

To find all integrable Hamiltonian equations (2) we use the componentless version of the symmetry approach for classification of the integrable equations [4]. This approach is based on the notion of the so-called *canonical conservation laws*

$$D_t \rho_i = D_x \theta_i, \quad i = -1, 0, 1, \dots \quad (11)$$

In the scalar equations this notion has been introduced in [11, 6]. In this case ρ_i and θ_i depend on unknown function u and finite number of its x -derivatives and can be found recursively. In [1, 2] this approach has been generalized to the vector equations. An algorithm for obtaining the canonical densities ρ_i has been presented in [7].

For equation (1) we have

$$\rho_{-1} = a, \quad \rho_0 = -\frac{1}{3}a^3 f_2 - D_x \ln a.$$

where $a = f_3^{-1/3}$ and $\rho_i, i > 0$ are obtained from the following recursion formula:

$$\begin{aligned} \rho_{n+2} = & \frac{a}{3} \theta_n - \frac{1}{3} a^{-2} D_x^2 \rho_n - \frac{a}{3} \left(f_0 \delta_{n,0} + f_1 \rho_n + f_2 D_x \rho_n + f_2 \sum_{-1}^n \rho_i \rho_j \right) \\ & - \frac{1}{2} a^{-2} D_x \sum_{-1}^n \rho_i \rho_j + \frac{1}{3} a^{-2} \left(3 \rho_{-1}^2 \rho_{n+2} - \sum_{-1}^n \rho_i \rho_j \rho_k \right), \end{aligned} \quad (12)$$

where

$$\sum_a^b \rho_{I_1} \cdots \rho_{I_k} = \sum_{\substack{I_s \geq a, 1 \leq s \leq k, \\ I_1 + \cdots + I_k = b}} \rho_{I_1} \cdots \rho_{I_k}.$$

For example, taking $n = -1$ in (12) we obtain

$$\rho_1 = \frac{a}{3} \theta_{-1} + \frac{1}{9} a^5 f_2^2 - \frac{1}{3} a^2 f_1 + \frac{1}{3} a^2 D_x f_2 + a f_2 D_x a + \frac{2}{3} a^{-2} D_x^2 a - a^{-3} (D_x a)^2.$$

Notice that each canonical density ρ_n with $n \geq 1$ contains the currents $\theta_i, -1 \leq i \leq n - 2$. Hence, before an analysis of the equation $D_t \rho_n = D_x \theta_n$ we have to calculate the currents $\theta_{-1}, \dots, \theta_{n-2}$ from the previous equations (11).

For equations (2) the canonical densities can be easily expressed in terms of the Hamiltonian H . In particular,

$$\rho_{-1} = \left(\frac{\partial H}{\partial u_{[1,1]}} \right)^{-1/3}, \quad \rho_0 = -\frac{1}{3} D_x \ln \left(\frac{\partial H}{\partial u_{[1,1]}} \right) = D_x \ln(\rho_{-1}).$$

So, ρ_0 is the trivial density for any H . Others canonical densities are too cumbersome to be present here. For example, the canonical density ρ_1 is the third order expression containing 30 terms. Subtracting a total x -derivative, one can reduce ρ_1 to a second order expression quadratic in $u_{[1,2]}$ and $u_{[0,2]}$.

Since the vectorial variational derivative maps any expression of the form $D_x F$ into zero, it follows from (11) that

$$\frac{\delta}{\delta \mathbf{u}} D_t \rho_n = 0, \quad n = -1, 0, \dots \quad (13)$$

Splitting equations (13) with respect to the vectorial variables \mathbf{u} , \mathbf{u}_1 , \mathbf{u}_2, \dots and higher order scalar products $u_{[0,2]}, u_{[1,2]}, u_{[2,2]}, \dots$, we obtain differential equations for H . Solving these equations, we arrive at the list (5) – (10).

3 Discussion

It was shown in [8] that the scalar equation

$$u_t = D_x \left(\frac{\delta H(u, u_x)}{\delta u} \right),$$

for an unknown function $u(x, t)$ is integrable iff H belongs to one of the following two classes:

$$H = -\frac{u_x^2}{2a^3} + \frac{P(u)}{a}, \quad (14)$$

$$H = \sqrt{u_x + P(u)}, \quad (15)$$

where P and a are arbitrary polynomials such that $\deg P \leq 4$ and $\deg a \leq 2$.

If the vector \mathbf{u} in the list of Theorem 1 is one-dimensional, the Hamiltonians H_1 , H_3 , H_4 and H_5 are very special cases of (14) and (15). Namely, such scalar limits of the Hamiltonians $H_i \rightarrow \mathcal{H}_i$ are given by

$$\mathcal{H}_1 = \frac{u_x^2}{(u^2 + c)^3}, \quad \mathcal{H}_3 = \sqrt{u_x}, \quad \mathcal{H}_4 = \sqrt{u_x + u}, \quad \mathcal{H}_5 = \sqrt{u_x + u^3}$$

correspondingly. The scalar limit for H_6 is an arbitrary function $q(u, u_x)$.

We have proved the complete integrability for $H_1 - H_4$ and H_6 using the spherical coordinates in \mathbb{R}^n and the so-called reciprocal transformations. To justify an integrability of the Hamiltonian equations with $H_1 - H_4$ and H_6 we

have found a first order auto-Bäcklund transformations. The detailed results will be presented in arXiv.org during a month.

The Hamiltonian equation with H_5 does not admit a reciprocal transformation. Therefore an auto-Bäcklund transformation does not exist for this equation and its integrability is not proved.

Acknowledgments. VS was supported by RFBI-grant 16-01-00289. He is thankful to MPIM (Bonn) for its support and hospitality.

REFERENCES

1. A.G. Meshkov, V.V. Sokolov. Commun. Math. Phys., **232**,1, (2002), 1–18.
2. A.G. Meshkov, V.V. Sokolov. Theor. Math. Phys., **139**, 2, (2004), 609–622.
3. M.Yu. Balakhnev. Theor. Math. Phys. **142**, 1, (2005), 8–14.
4. N. Kh. Ibragimov and A. B. Shabat. **14**(4), (1980), 79–80.
5. V.V. Sokolov, A.B. Shabat. Soviet Scientific Reviews, Section C, **4**, (1984), 221–280.
6. A.V. Mikhailov, A.B. Shabat, V.V. Sokolov. In book "What is integrability?", Springer-Verlag (Springer Series in Nonlinear Dynamics). 115–184, 1991.
7. A.G. Meshkov, V.V. Sokolov. Ufimskii Mathematical Journal. **4**, 3, (2012), 104–153, Appendix 3, (in Russian).
8. A.G. Meshkov, V.V. Sokolov. J. Geom. Phys. **85**, (2014), 245–251.
9. A.G. Meshkov, V.V. Sokolov. Russian J. Math. Phys. **22**, 2, (2015), 201–214.
10. S.I. Svinolupov, V.V. Sokolov. Func. analiz i pril., (1982), **16**(6), 86–87.
11. V.V. Sokolov, A.B. Shabat. Soviet Scientific Reviews, Section C, (1984), **4**, 221–280.
12. V.G. Drinfeld, V.V. Sokolov. J. Sov. Math., **30**, (1985), 1975–2036.

**ОБ ОПЕРАТОРЕ $\varphi(A)$ С ЦЕЛОЙ ВЕКТОРНОЗНАЧНОЙ
ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИЕЙ,
ИМЕЮЩЕЙ ВЫСОКИЙ ПОРЯДОК И КОНЕЧНЫЙ ТИП РОСТА**

Т.Н. Можарова, к.ф.-м.н., доц.

ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет им. И.С. Тургенева»
e-mail: tatjana.mozharova@yandex.ru

В данной работе продолжено исследование условий существования и непрерывности линейного оператора $\varphi(A)$ с целой векторнозначной характеристической функцией. Ранее автором был получен [2] класс целых векторнозначных функций, которому должна принадлежать характеристическая функция оператора $\varphi(A)$. Рассматривалась также ситуация, когда характеристическая функция $\varphi(t)$ имела более высокий тип роста [2], а также случай более высокого порядка роста целой векторнозначной функции $\varphi(t)$ [1]. В настоящей работе рассматривается оператор $\varphi(A)$ с характеристической функцией высокого порядка и конечного типа роста.

Пусть H – полная, локально-выпуклая алгебра над полем комплексных чисел, топология которой задается счетной системой норм $\{\|\cdot\|_p\}$, $p = 1, 2, \dots$, причем

$$\forall x, y \in H, \forall p, \exists p_1, p_2: \|xy\|_p \leq \|x\|_{p_1} \cdot \|y\|_{p_2}.$$

A – линейный непрерывный оператор, действующий в H .

Пусть $A: H \rightarrow H$ – линейный непрерывный оператор порядка роста [1] $\beta \neq 0, \infty$ и типа α и

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k \cdot t^k, x_k \in H, -$$

целая векторнозначная функция со значениями в H порядка $\rho > \frac{1}{\beta}$ и типа σ .

Построим пространство, на котором оператор

$$\varphi(A)(x) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} x_k \cdot A^k(x), x_k \in H, \quad (1)$$

с такой характеристической функцией будет определен и непрерывен.

Рассмотрим пространства

$$H_{\gamma}^{\beta_1} = \left\{ x \in H : \|A^k(x)\|_p \leq C(x, p, \varepsilon) [(\gamma_p + \varepsilon)k]^{\beta_1 k}; \forall k; \forall p; \forall \varepsilon > 0 \right\},$$

где $\beta_1 = \frac{1}{\rho} < \beta$, а $\{\gamma_p\}$ – фиксированная последовательность положительных чисел, удовлетворяющих условию:

$$\gamma_p \rightarrow \gamma < \frac{\beta_1}{\sigma \varepsilon}, p \rightarrow \infty.$$

Топологию каждого из пространств $H_\gamma^{\beta_1}$ зададим бесконечной системой норм:

$$\|x\|_{p,\varepsilon}^{\gamma,\beta_1} = \sup_{(k)} \left\{ \frac{\|A^k(x)\|_p}{[(\gamma_p + \varepsilon)k]^{\beta_1 k}} \right\} < \infty, \quad \forall x \in H_\gamma^{\beta_1},$$

где p, ε – любые, но фиксированные.

$$\text{Введем пространство } \mathcal{H}_\sigma^\rho = \bigcup_{\gamma < \frac{\beta_1}{\sigma \varepsilon}} H_\gamma^{\beta_1} = \lim_{\gamma} \text{ind } H_\gamma^{\beta_1}.$$

В данных обозначениях справедлива

Теорема.

Пусть H – полная локально-выпуклая алгебра, топология которой задана бесконечной счетной системой норм $\{\|\cdot\|_p\}$, $p = 1, 2, \dots$, и $A: H \rightarrow H$ – линейный непрерывный оператор порядка $\beta \neq 0, \infty$ и типа α . Пусть функция

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k \cdot t^k, \quad x_k \in H, -$$

целая векторнозначная со значениями в H , имеющая порядок роста $\rho > \frac{1}{\beta}$

и тип $\sigma < \infty$. Тогда определен оператор $\varphi(A): \mathcal{H}_\sigma^\rho \rightarrow H$, являющийся линейным и непрерывным.

Доказательство.

С учетом топологии пространства \mathcal{H}_σ^ρ как индуктивного предела пространств $H_\gamma^{\beta_1}$, $\gamma < \frac{\beta_1}{\sigma \varepsilon}$, $\beta_1 = \frac{1}{\rho}$, получаем:

$$\begin{aligned} \forall p, \exists p_1, p_2 \quad & \|x_k A^k(x)\|_p \leq \|x_k\|_{p_1} \cdot \|A^k(x)\|_{p_2} < \\ < \left[\frac{(\sigma_{p_1} + \varepsilon) e \rho}{k} \right]^{\frac{k}{\rho}} \cdot [(\gamma_{p_2} + \varepsilon) k]^{\frac{k}{\rho}} \cdot \|x\|_{p_2, \varepsilon}^{\gamma, \beta_1} = \left[(\sigma_{p_1} + \varepsilon) e \rho (\gamma_{p_2} + \varepsilon) \right]^{\frac{k}{\rho}} \cdot \|x\|_{p_2, \varepsilon}^{\gamma, \beta_1}, \end{aligned}$$

$\forall k > k_0(\varepsilon), \forall \varepsilon > 0, \gamma < \frac{\beta_1}{\sigma \varepsilon}$ – любое, но фиксированное; $\forall x \in H_\gamma^{\beta_1}$.

$$\text{Так как } \sigma_{p_1} \leq \sigma, \gamma_{p_2} \leq \gamma, \text{ то } \sigma_{p_1} e \rho \gamma_{p_2} \leq \sigma e \rho \gamma = \frac{\sigma e \gamma}{\beta_1} < 1.$$

Следовательно, при достаточно малом $\varepsilon > 0$ $(\sigma_{p_1} + \varepsilon) e \rho (\gamma_{p_2} + \varepsilon) < 1$.

Последнее неравенство означает, что ряд (1) сходится абсолютно по топологии пространства H , причем справедлива оценка

$$\|\varphi(A)(x)\|_p \leq C_p \|x\|_{p_2, \varepsilon}^{\gamma, \beta_1}, \quad \forall p, \exists p_2, \forall x \in H_\gamma^{\beta_1}, \gamma < \frac{\beta_1}{\sigma e}, \beta_1 = \frac{1}{\rho}.$$

Теорема доказана.

В качестве частного случая рассмотрим пространство $H(C)$ целых функций, $\|F\|_p = \max_{|z| \leq p < \infty} |F(z)|$, $F \in H(C)$, и оператор $A = \frac{d}{dz}$, $\beta = 1$, $\alpha = 0$ [2].

$$\varphi\left(\frac{d}{dz}\right)(F) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z) F^{(k)}(z), \quad c_k(z) \in H(C), -$$

оператор с целой векторнозначной характеристической функцией $\varphi(t)$ со значениями в $H(C)$, порядок роста которой $\rho > 1$, а тип σ .

Для целой функции F , имеющей порядок роста $\nu > 1$, а тип k , известно [2], что ее операторные порядок и тип относительно оператора $A = \frac{d}{dz}$

имеют вид:

$$\beta(F) = \frac{\nu - 1}{\nu}; \quad \alpha(F) = \frac{(ke\nu)^{\frac{1}{\nu}}}{e}.$$

$$\text{Так как} \quad \beta(F) \leq \beta_1 = \frac{1}{\rho} < 1 \quad \text{и} \quad \alpha(F) \leq \gamma < \frac{\beta_1}{\sigma e},$$

то легко показать, что \mathcal{H}_σ^ρ состоит из целых функций, порядок роста которых не выше $\frac{\rho}{\rho - 1}$, а при порядке $\frac{\rho}{\rho - 1}$ тип меньше, чем

$$\left(\frac{1}{\sigma \rho}\right)^{\frac{\rho}{\rho - 1}} \cdot \frac{\rho - 1}{e \rho}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Можарова Т. Н. Оператор $\varphi(A)$ с характеристической функцией заданного порядка роста. – Вестник науки. Выпуск 2. – Орёл, ОГУ, 2002. – С.23– 27.
2. Можарова Т. Н. О применимости и непрерывности операторов с переменными коэффициентами в локально-выпуклых пространствах. – Научный альманах Орловского государственного университета. Серия: Естественные науки. Выпуск 3. – Орёл, 2000. – с. 22 – 27.

ЗАДАЧА ТРИКОМИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО ОПЕРЕЖАЮЩЕ-ЗАПАЗДЫВАЮЩЕГО УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА

Т.А. Пономарева, магистрант

ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет им. И.С. Тургенева»

e-mail: *tanya210779@rambler.ru*

Исследуется краевая задача для нелинейного опережающе-запаздывающего уравнения смешанного типа с оператором Лаврентьева – Бицадзе в главной части и сосредоточенным отклонением. Построено общее решение уравнения, найдены формулы взаимного обращения.

1. Введение. Постановка задачи.

В смешанной эллипτικο–гиперболической области $D = D^+ \cup D^- \cup I$,

где

$$D^+ = D_0^+ \cup D_1^+ \cup J = \{(x, y): 0 < x < 2\pi, 0 < y < h\}, (0 < h \equiv \text{const}), \text{ и}$$

$D^- = D_0^- \cup D_1^-$ - эллиптическая и гиперболическая части области D , при-

чем

$$D_k^+ = \{(x, y): k\pi < x < (k+1)\pi, 0 < y < h\}, (k = -1, 0, 1, 2),$$

$$D_k^- = \left\{ (x, y): k\pi - y < x < (k+1)\pi + y, -\frac{\pi}{2} < y < 0 \right\}, (k = -1, 0, 1, 2),$$

$$J = \{(x, y): x = \pi, 0 < y < h\}, I_k = \{(x, y): k\pi < x < (k+1)\pi, y = 0\}, (k = -1, 0, 1, 2),$$

рассмотрим уравнение

$$LU(x, y) \equiv U_{xx}(x, y) + \operatorname{sgn} y U_{yy}(x, y) = U(x - \pi, y)U(x + \pi, y). \quad (1)$$

Задача Т. Найти в области D решение $U(x, y)$ уравнения (1) из класса $C(\bar{D}) \cap C^1(D \setminus J) \cap C^2(D \setminus (J \cup I))$, удовлетворяющее краевым условиям

$$U(x, h) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 2\pi, \quad (2)$$

$$U(0, y) = U(2\pi, y) = 0, \quad 0 \leq y \leq h, \quad (3)$$

$$U(x, -x) = \psi_0(x), \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \quad (4)$$

$$U(x, \pi - x) = \psi_1(x), \quad \pi \leq x \leq \frac{3\pi}{2}, \quad (5)$$

$$U(x, y) = f((x + \pi) + y\sqrt{-\operatorname{sgn} y}) \cdot f((x + \pi) - y\sqrt{-\operatorname{sgn} y}), (x, y) \in \bar{D}_{-1}, \quad (6)$$

$$U(x, y) = f((x - 2\pi) + y\sqrt{-\operatorname{sgn} y}) \cdot f((x - 2\pi) - y\sqrt{-\operatorname{sgn} y}), (x, y) \in \bar{D}_2, \quad (7)$$

условиям сопряжения

$$U(x, -0) = U(x, +0), \quad 0 < x < 2\pi, x \neq \pi, \quad (8)$$

$$U_y(x, -0) = U_y(x, +0), \quad 0 \leq x \leq 2\pi, \quad (9)$$

условиям согласования

$$\varphi(0) = \varphi(2\pi) = \psi_0(0) = 0, \quad (10)$$

где $\varphi(x), \psi_k(x), (k=0), f(x)$ - заданные непрерывные достаточно гладкие функции.

2. Общее решение и формулы взаимного обращения.

Используя идеи работ [3] И.Н. Векуа, [6], [7], [8] А.Н. Зарубина, найдем общее решение уравнения (1) и формулы взаимного обращения для него.

Уравнение (1) в терминах функций

$$U_k^\pm(x, y) = U(x, y), (x, y) \in D_k^\pm (k=0,1), \quad (11)$$

можно [8] записать, с учетом (6), (7), в форме системы

$$L\bar{U}^\pm(x, y) = f(x + y\sqrt{-\operatorname{sgn} y})f(x - y\sqrt{-\operatorname{sgn} y})A\bar{U}^\pm(x, y), (x, y) \in D_0^\pm, \quad (12)$$

где

$$\bar{U}^\pm(x, y) = (U_0^\pm(x, y), U_1^\pm(x + \pi, y))^T, A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (13)$$

которая в характеристических переменных

$$\xi = x - y\sqrt{-\operatorname{sgn} y}, \eta = x + y\sqrt{-\operatorname{sgn} y}, \quad (14)$$

будет иметь вид, согласно (12), матричного уравнения

$$4\bar{U}_{\xi\eta}^\pm(\xi, \eta) = f(\xi)f(\eta)A\bar{U}^\pm(\xi, \eta). \quad (15)$$

Используя известную [1] для уравнения (15) функцию Римана

$$R(t, q; \xi, \eta) = J_0(i\sqrt{A\sigma(t, q; \xi, \eta)}), \quad (16)$$

где

$$\sigma(t, q; \xi, \eta) = \int_t^\xi f(r)dr \int_q^\eta f(s)ds = (F(\xi) - F(t))(F(\eta) - F(q)), \quad (17)$$

а $F(x)$ - первообразная [2, с.289,353] функции $f(x)$, причем $F(0) = 0$, на основании [3, с.43] можно записать общее решение уравнения (15) в форме

$$\begin{aligned} \bar{U}^\pm(\xi, \eta) = & J_0(i\sqrt{A\sigma(0,0;\xi,\eta)})\bar{U}^\pm(0,0) + \int_0^\xi J_0(i\sqrt{A\sigma(t,0;\xi,\eta)})\bar{\phi}_1^\pm(t)dt + \\ & + \int_0^\eta J_0(i\sqrt{A\sigma(0,q;\xi,\eta)})\bar{\phi}_2^\pm(q)dq, \end{aligned} \quad (18)$$

где $\bar{\phi}_1^\pm(t), \bar{\phi}_2^\pm(t)$ - произвольные дважды непрерывно дифференцируемые вектор - функции; $i = \sqrt{-1}$, $J_0(z)$ - функция Бесселя [4, с.727] первого рода нулевого порядка.

Так как матрица A из (13) имеет различные собственные значения $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$, то она может быть приведена к диагональному виду, т.е.

существует матрица T_A ($|T_A| \neq 0$) такая, что $T_A^{-1}AT_A = \Lambda_A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$,

причем $T_A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, а $T_A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Значит,

$$\begin{aligned} J_0(i\sqrt{A\sigma}) &= J_0(i\sqrt{T_A\Lambda_A T_A^{-1}\sigma}) = T_A J_0(i\sqrt{\Lambda_A\sigma}) T_A^{-1} = \\ &= T_A \begin{pmatrix} J_0(i\sqrt{\lambda_1\sigma}) & 0 \\ 0 & J_0(i\sqrt{\lambda_2\sigma}) \end{pmatrix} T_A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \alpha_1(\sigma) & \alpha_2(\sigma) \\ \alpha_2(\sigma) & \alpha_1(\sigma) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (19)$$

где

$$\alpha_n(\sigma) = J_0(i\sqrt{\lambda_1\sigma}) - (-1)^n J_0(i\sqrt{\lambda_2\sigma}) \quad (n=1,2). \quad (20)$$

Поэтому из равенства (18), в силу (19), (20), (11) и возвращения к старым (13) переменным, найдем общее решение уравнения в форме

$$\begin{aligned} U_k^\pm(x,y) &= \int_0^{z_k^\pm} \phi_1^\pm(t) J_0(i\sqrt{\sigma(t,0;z_k^\pm, \bar{z}_k^\pm)}) dt + \\ &+ \int_0^{\bar{z}_k^\pm} \phi_2^\pm(t) J_0(i\sqrt{\sigma(0,t;z_k^\pm, \bar{z}_k^\pm)}) dt, \quad (x,y) \in D_k^\pm \quad (k=0,1), \end{aligned} \quad (21)$$

где $\phi_1^\pm(t)$, $\phi_2^\pm(t)$ – произвольные дважды непрерывно дифференцируемые функции; $z_k^+ = x - k\pi + iy$, $\bar{z}_k^+ = x - k\pi - iy$; $z_k^- = x - k\pi + y$, $\bar{z}_k^- = x - k\pi - y$ ($k=0,1$), и

$$U_0^\pm(0-,y) = U_1^\pm(0+,y) = 0, \quad 0 \leq y \leq h; \quad U_{0x}^\pm(0-,y) \neq U_{1x}^\pm(0+,y), \quad 0 < y < h. \quad (22)$$

В (21) учтено, что $\bar{U}^\pm(0,0) = 0$, в силу условий (5), (22) и согласно (13).

Равенство (21) на основании (17) можно записать в виде

$$\begin{aligned} U_k^\pm(x,y) &= \int_0^{z_0^\pm} \phi_1^\pm(t) J_0(i\sqrt{F(z_0^\pm)(F(z_0^\pm) - F(t))}) dt + \\ &+ \int_0^{\bar{z}_0^\pm} \phi_2^\pm(t) J_0(i\sqrt{F(z_0^\pm)(F(\bar{z}_0^\pm) - F(t))}) dt, \quad (x,y) \in D_0^\pm \quad (k=0,1). \end{aligned}$$

Получим формулу *взаимного обращения* общего решения (21), когда $y=0$. При $y=0$, в силу (17) равенство (21) ($k=0$) будет иметь вид

$$U_0^\pm(x,0) = \int_0^x [\phi_1^\pm(t) + \phi_2^\pm(t)] J_0(i\sqrt{F(x)(F(x) - F(t))}) dt. \quad (23)$$

Интегрируя по частям, получим

$$U_0^\pm(x,0) = M_0(x) - \int_0^x \frac{\partial}{\partial t} J_0(i\sqrt{F(x)(F(x) - F(t))}) M_0(t) dt, \quad 0 < x < \pi, \quad (24)$$

где
$$M_0(x) = \int_0^x [\phi_1^\pm(t) + \phi_2^\pm(t)] dt. \quad (25)$$

Подстановка

$$\xi = F(x), \eta = F(t), \quad (26)$$

и, значит, $x = F^{-1}(\xi), t = F^{-1}(\eta)$ приводит равенство (24) к выражению

$$U_0^\pm(F^{-1}(\xi)) = M_0(F^{-1}(\xi)) - \int_0^\xi \frac{\partial}{\partial \eta} J_0(i\sqrt{\xi(\xi - \eta)}) M(F^{-1}(\eta)) d\eta, \quad (27)$$

совпадающему по форме с уравнением (12*.9) из [3, с.69]. Используя формулу обращения (12*.11) из [3, с.69] найдем равенство

$$M_0(F^{-1}(\xi)) = U_0^+(F^{-1}(\xi)) + \int_0^{F^{-1}(\xi)} U_0^+(F^{-1}(\eta)) \frac{\xi}{\eta} \frac{\partial}{\partial \xi} I_0(i\sqrt{\eta(\xi - \eta)}) d\eta, \quad (28)$$

которое в переменных (26) примет вид

$$M_0(x) = U_0^\pm(x, 0) + \int_0^x U_0^\pm(t) \frac{F(x)f(t)}{F(t)f(x)} \frac{\partial}{\partial x} I_0(i\sqrt{F(t)(F(x) - F(t))}) dt, 0 < x < \pi. \quad (29)$$

Формула (29) является формулой *взаимного обращения* для уравнения (24).

Аналогично можно найти формулы *взаимного обращения*:

$$U_{0y}^\pm(x, 0) = M_{0y}^\pm(x, 0) - \int_0^x M_{0y}^\pm(t) \frac{f(x)F(t)}{F(x)f(t)} \frac{\partial}{\partial t} J_0(i\sqrt{F(x)(F(x) - F(t))}) dt, \quad (32)$$

$$M_{0y}^\pm(x, 0) = U_{0y}^\pm(x, 0) + \int_0^x U_{0y}^\pm(t) \frac{\partial}{\partial x} I_0(i\sqrt{F(t)(F(x) - F(t))}) dt, 0 < x < \pi. \quad (33)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Чуриков Ф.С., Кокинасида П.Д. О построении функции Римана для компактных уравнений методом промежуточного аргумента // Труды Кубанского университета. – Т. 222, 1976. – С. 5–12.
2. Тер-Крикоров А.М., Шабунин М.И. Курс математического анализа. М., 1988.
3. Векуа И.Н. Новые методы решения эллиптических уравнений. – ОГИЗ, М.-Л., 1948.
4. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Специальные функции. – Наука, М., 1983.
5. Зарубин А.Н. Уравнения смешанного типа с запаздывающим аргументом. – Изд. Орловского гос. университета, Орел. 1999.
6. Зарубин А.Н. Краевая задача для опережающе - запаздывающего уравнения смешанного типа с негладкой линией вырождения // Дифференциальные уравнения, Т.50, №10, 2014. – С. 1362–1372.
7. Зарубин А.Н. Краевая задача для уравнения смешанного типа с опережающе - запаздывающим аргументом // Дифференциальные уравнения. Т.48. - №10. 2012. – С. 1401-1411.

8. Зарубин А.Н. Задача Трикоми для опережающе-запаздывающего уравнения смешанного типа с переменным отклонением аргумента // Дифференциальные уравнения. Т. 51, №10, 2015. – С. 1315-1327.

ЗАДАЧА ТРИКОМИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА

П.В. Рыжикова, магистрант

ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет им. И.С. Тургенева»

Проводится исследование задачи Трикоми для дифференциально-разностного уравнения эллиптико-гиперболического типа. Построено решение задачи Дирихле.

В области $D = D^+ \cup D^- \cup J$, где $D^+ = \{(x, y) : x > 0, 0 < y < h\}$,
 $D^- = \{(x, y) : x > 0, y < -x\}$, $J = \{(x, y) : 0 < x < +\infty, y = 0\}$, рассмотрим уравнение

$$U_{xx}(x, y) + \operatorname{sgn} y U_{yy}(x, y) = H(x - \tau)U(x - \tau, y), \quad (1)$$

где $H(\xi)$ – функция Хевисайда, $0 < \tau \equiv \text{const}$.

Задача Т. Найти в области D исчезающую при $x \rightarrow +\infty$ непрерывную в замкнутой области \bar{D} функцию $U(x, y)$, имеющую непрерывные производные в D (при $x \rightarrow +\infty$ $U_y(x, y)$ может иметь особенность порядка меньше единицы), удовлетворяющую условиям

$$U(0, y) = 0, \quad 0 \leq y \leq h, \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} U(x, y) = 0, \quad 0 \leq y \leq h, \quad (3)$$

$$U(x, h) = \varphi(x), \quad x \geq 0, \quad (4)$$

$$U(x, -x) = \psi(x), \quad x \geq 0, \quad (5)$$

условиям сопряжения

$$\lim_{y \rightarrow 0^-} U(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0^+} U(x, y) = \omega(x), \quad x \geq 0, \quad (6)$$

$$\lim_{y \rightarrow 0^-} U_y(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0^+} U_y(x, y) = \nu(x), \quad x > 0, \quad (7)$$

условиям согласования

$$\varphi(0) = \varphi(+\infty) = 0, \quad \psi(0) = \psi(+\infty) = 0,$$

где $\psi(x), \varphi(x)$ – заданные непрерывные достаточно гладкие функции.

Задача Д. Найти в области D^+ решение $U(x, y)$ из $C(\bar{D}^+) \cap C^2(D^+)$ уравнения

$$LU(x, y) \equiv U_{xx}(x, y) + U_{yy}(x, y) - H(x - \tau)U(x - \tau, y) = 0, \quad (8)$$

удовлетворяющее условиям

$$U(0, y) = 0, \quad 0 \leq y \leq h, \quad (9)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} U(x, y) = 0, \quad 0 \leq y \leq h, \quad (10)$$

$$U(x, h) = \varphi(x), \quad x \geq 0, \quad (11)$$

$$U(x, 0) = \omega(x), \quad x \geq 0, \quad (12)$$

где $\varphi(x), \omega(x)$ - заданные непрерывные достаточно гладкие функции, $\varphi(0) = \omega(0) = \varphi(+\infty) = \omega(+\infty) = 0$.

Теорема 1. Однородная задача Дирихле имеет тривиальное решение.

Доказательство. В области D^+ справедливо тождество [4, с. 115]

$$\begin{aligned} U(x, y)LU(x, y) &\equiv U(x, y)U_{xx}(x, y) + U(x, y)U_{yy}(x, y) - \\ &- U(x, y)H(x - \tau)U(x - \tau, y) = (U(x, y)U_x(x, y))_x - U_x^2(x, y) + \\ &+ U(x, y)U_y(x, y)_y - U_y^2(x, y) - U(x, y)H(x - \tau)U(x - \tau, y) = 0. \end{aligned}$$

Интегрируя это тождество по области $D_{\varepsilon\delta}^+ = \{(x, y) : \varepsilon \leq x \leq \delta, \varepsilon \leq y \leq h - \varepsilon\}$, $\varepsilon, \delta \equiv \text{const} > 0$, применяя формулу Грина и переходя к пределу при $\delta \rightarrow +\infty, \varepsilon \rightarrow 0$ будем иметь

$$\begin{aligned} &\int_{\partial D^+} U(x, y)U_x(x, y)dy - U(x, y)U_y(x, y)dx = -\int_{\varepsilon}^{\delta} U(x, \varepsilon)U_y(x, \varepsilon)dx + \\ &+ \int_{\varepsilon}^{\delta} U(\delta, y)U_x(\delta, y)dy - \int_{\delta}^{\varepsilon} U(x, \delta)U_y(x, \delta)dx + \int_{\delta}^{\varepsilon} U(\varepsilon, y)U_x(\varepsilon, y)dy = 0, \\ &0 = \iint_{D^+} U(x, y)H(x - \tau)U(x - \tau, y)dxdy = \\ &= \frac{1}{2} \iint_{D^+} H(x - \tau) \left[U^2(x, y) + U^2(x - \tau, y) - (U(x, y) - U(x - \tau, y))^2 \right] dxdy = \\ &= \frac{1}{2} \iint_{D^+} H(x - \tau) \left[U^2(x, y) + \left(\int_{x-\tau}^{+\infty} U_{\xi}(\xi, y)d\xi \right)^2 - \left(\int_{x-\tau}^x U_{\xi}(\xi, y)d\xi \right)^2 \right] dxdy \geq \\ &\geq \frac{1}{2} \iint_{D^+} H(x - \tau) \left[U^2(x, y) + \left(\int_{x-\tau}^{+\infty} |U_{\xi}(\xi, y)|d\xi \right)^2 - \left(\int_{x-\tau}^x |U_{\xi}(\xi, y)|d\xi \right)^2 \right] dxdy \geq 0. \end{aligned}$$

Получаем, что подынтегральная функция положительно определена. Интеграл положительно определен и равен нулю, решение принадлежит классу $C(\overline{D^+})$ условия (9)-(12) однородны, следовательно $U(x, y) \equiv 0$ в области $\overline{D^+}$.

Теорема 2. Если $\varphi(x), \omega(x) \in C[0, +\infty) \cap C^2(0, +\infty)$ абсолютно интегрируемы на $[0, +\infty)$ и $\varphi(0) = \omega(0) = \varphi(+\infty) = \omega(+\infty) = 0$, то существует решение задачи Дирихле (8)-(12).

Доказательство. Общее решение уравнения (8) в области D^+ имеет вид [4, с.115]

$$U(x, y) = \left\{ U_k(x, y), (x, y) \in D_k^+ (k = 0, 1, 2, \dots) \right\} \quad (13)$$

$$U_k(x, y) = \sum_{m=0}^k \gamma_m H(x - m\tau) I_{0, x-m\tau; 0}^m \Phi(x, y), \quad (14)$$

$$\Phi(x, y) = c_1(x - iy) + c_2(x + iy), \quad (15)$$

$$I_{0, x-m\tau; \alpha}^m \Phi(x, y) = \frac{2}{\Gamma(m)} \int_0^{x-m\tau} \eta \left((x - m\tau + \alpha)^2 - (\eta + \alpha)^2 \right)^{m-1} \Phi(\eta, y) d\eta -$$

интеграл Эрдейи-Кобера [7], $I_{0, x; 0}^0 \Phi(x, y) = \Phi(x, y)$, $\gamma_m = (m! 2^{2m})^{-1}$, $c_1(t), c_2(t)$ – произвольные дважды непрерывно-дифференцируемые функции.

Для определения функций $c_1(t), c_2(t)$ воспользуемся условиями (11)-(12), подставим их в (13)-(15), получим

$$U_k(x, 0) = \omega(x) = \sum_{m=0}^k \gamma_m H(x - m\tau) I_{0, x-m\tau; 0}^m Z^\omega(x), \quad k\tau \leq x \leq (k+1)\tau, \quad (16)$$

$$U_k(x, h) = \varphi(x) = \sum_{m=0}^k \gamma_m H(x - m\tau) I_{0, x-m\tau; 0}^m Z^\varphi(x), \quad k\tau \leq x \leq (k+1)\tau. \quad (17)$$

Здесь

$$Z^\omega(x) = \Phi(x, 0) = c_1(x) + c_2(x), \quad (18)$$

$$Z^\varphi(x) = \Phi(x, h) = c_1(x - ih) + c_2(x + ih), \quad (19)$$

причём

$$Z^\theta(x) = \left\{ Z_k^\theta(x), \quad k\tau \leq x \leq (k+1)\tau \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \right\}, \quad (20)$$

где $\theta(x) = \omega(x), \varphi(x)$.

Интегральные уравнения (16)-(17) с запаздывающим аргументом представляют собой соотношения, пошаговое обращение которых [3, с.17] приводит к решению вида (20), где

$$Z_k^\omega(x) = \sum_{m=0}^k (-1)^m \gamma_m H(x - m\tau) I_{0, x-m\tau; m\tau}^m \omega(x), \quad k\tau \leq x \leq (k+1)\tau, \quad (21)$$

$$Z_k^\varphi(x) = \sum_{m=0}^k (-1)^m \gamma_m H(x - m\tau) I_{0, x-m\tau; m\tau}^m \varphi(x), \quad k\tau \leq x \leq (k+1)\tau. \quad (22)$$

Выразим $c_1(x)$ из уравнения (18) и подставим в (19)

$$c_1(x) = Z^\omega(x) - c_2(x), \quad (23)$$

$$Z^\omega(x - ih) - c_2(x - ih) + c_2(x + ih) = Z^\varphi(x). \quad (24)$$

Разностное уравнение

$$c_2(x) = R_x^{2ih} c_2(x) + \beta(x),$$

где

$$\beta(x) = Z^\varphi(x - ih) - Z^\omega(x - 2ih) = R_x^{ih} Z^\varphi(x) - R_x^{2ih} Z^\omega(x), \quad (25)$$

а R_x^τ – оператор сдвига, действующий по переменной x : $R_x^{ih} q(x) = q(x - ih)$, имеет единственное решение [5, с.1404-1411], полученное методом последовательных приближений

$$c_2(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} R_x^{2ihn} \beta(x).$$

С учетом (25) и (23)

$$c_2(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} R_x^{ih(2n+1)} Z^\varphi(x) - \sum_{n=0}^{+\infty} R_x^{2ih(n+1)} Z^\omega(x), \quad (26)$$

$$c_1(x) = Z^\omega(x) - \sum_{n=0}^{+\infty} R_x^{ih(2n+1)} Z^\varphi(x) + \sum_{n=0}^{+\infty} R_x^{2ih(n+1)} Z^\omega(x). \quad (27)$$

Подставив в (15) выражения (26)-(27) получим решение задачи Дирихле в форме (13)-(14), где

$$\begin{aligned} \Phi(x, y) &= c_1(x - iy) + c_2(x + iy) = \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} R_x^{ih(2n+1)} [Z^\varphi(x + iy) - Z^\varphi(x - iy)] + Z^\omega(x - iy) + \\ &+ \sum_{n=0}^{+\infty} [R_x^{2ih(n+1)} Z^\omega(x - iy) - R_x^{2ih(n+1)} Z^\omega(x + iy)] = \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} R_x^{ih(2n+1)} [z^\varphi(x + iy) - z^\varphi(x - iy)] + \\ &+ \sum_{n=0}^{+\infty} [R_x^{2ihn} Z^\omega(x - iy) - R_x^{2ih(n+1)} Z^\omega(x + iy)] = \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{n=0}^{+\infty} R_x^{ih(2n+1)} [Z^\varphi(x + iy) - Z^\varphi(x - iy)] + \\ &+ \sum_{n=0}^{+\infty} R_x^{ih(2n+1)} [Z^\omega(x + i(h - y)) - Z^\omega(x - i(h - y))] = \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \{ R_x^{i[h(2n+1)-y]} - R_x^{i[h(2n+1)+y]} \} Z^\varphi(x) + \\ &+ \sum_{n=0}^{+\infty} \{ R_x^{i[h(2n+1)-(h-y)]} - R_x^{i[h(2n+1)+(h-y)]} \} Z^\omega(x). \end{aligned} \quad (29)$$

При выполнении условий теоремы ($\varphi(x), \omega(x) \in C[0, +\infty) \cap C^2(0, +\infty)$ абсолютно интегрируемы на $[0, +\infty)$ и $\varphi(0) = \varphi(+\infty) = 0, \omega(0) = \omega(+\infty) = 0$), на функции (они могут быть представлены интегралами Фурье) ряды в (28) равномерно сходятся на $[0, +\infty)$, их можно почленно дифференцировать по x и y дважды. Так как $Z^\omega(x), Z^\varphi(x) \in C[0, +\infty) \cap C^2(0, +\infty)$, абсолютно интегрируемы на $[0, +\infty)$ и $Z^\omega(0) = Z^\varphi(0) = Z^\omega(+\infty) = Z^\varphi(+\infty) = 0$, операторы Эрдейи-Кобера ограничены [7, с. 246], то выражение (13) удовлетворяет уравнению (8) и условиям (9)-(12).

Решение задачи Дирихле в области D^+ имеет вид

$$U_k(x, y) = \sum_{m=0}^k \gamma_m H(x - m\tau) I_{0, x-m\tau; 0}^m \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \{R_x^{i[h(2n+1)-y]} - R_x^{i[h(2n+1)+y]}\} Z^\varphi(x) + \sum_{n=0}^{+\infty} \{R_x^{i[h(2n+1)-(h-y)]} - R_x^{i[h(2n+1)+(h-y)]}\} Z^\omega(x) \right), k\tau \leq x \leq (k+1)\tau.$$

Интегральное представление решения задачи Дирихле найдем исходя из того, что любая непрерывная [2, с. 254] на $[0, +\infty)$ функция

$$r(x) = (r(\xi), \delta(\xi - x) - \delta(\xi + x)) = \int_0^{+\infty} r(\xi) [\delta(\xi - x) - \delta(\xi + x)] d\xi, \quad (30)$$

$$\delta(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \cos \lambda z d\lambda = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda z} d\lambda - \text{дельта-функция Дирака. [2, с. 254]} \quad (31)$$

Для первого слагаемого выражения (28) в силу (30)-(31) и формул (5.4.12.4; 2.5.46.8) из [6] получим

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{+\infty} \{R_x^{i[h(2n+1)-y]} - R_x^{i[h(2n+1)+y]}\} Z^\varphi(x) = \\ & = \frac{\sin(\pi y/h)}{2h} \int_0^{+\infty} Z^\varphi(\xi) \left[\frac{1}{ch((\xi - x)\pi/h) + \cos(y\pi/h)} - \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{ch((\xi + x)\pi/h) + \cos(y\pi/h)} \right] d\xi. \end{aligned}$$

Второе слагаемое после преобразования будет иметь вид

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{+\infty} \{R_x^{i[h(2n+1)-(h-y)]} - R_x^{i[h(2n+1)+(h-y)]}\} Z^\omega(x) = \\ & = \frac{\sin(\pi y/h)}{2h} \int_0^{+\infty} Z^\omega(\xi) \left[\frac{1}{ch((\xi - x)\pi/h) - \cos(y\pi/h)} - \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{ch((\xi + x)\pi/h) - \cos(y\pi/h)} \right] d\xi. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \Phi(x, y) = & \frac{\sin(\pi y / h)}{2h} \int_0^{+\infty} Z^\varphi(\xi) \left[\frac{1}{\operatorname{ch}((\xi - x)\pi / h) + \cos(y\pi / h)} - \right. \\ & \left. - \frac{1}{\operatorname{ch}((\xi + x)\pi / h) + \cos(y\pi / h)} \right] d\xi + \\ & + \frac{\sin(\pi y / h)}{2h} \int_0^{+\infty} Z^\omega(\xi) \left[\frac{1}{\operatorname{ch}((\xi - x)\pi / h) - \cos(y\pi / h)} - \right. \\ & \left. - \frac{1}{\operatorname{ch}((\xi + x)\pi / h) - \cos(y\pi / h)} \right] d\xi. \end{aligned} \quad (32)$$

Решение задачи Дирихле в области D^+ интегральной форме будет иметь вид

$$\begin{aligned} U_k(x, y) = & \sum_{m=0}^k \gamma_m H(x - m\tau) I_{0, x-m\tau; 0}^m \left(\frac{\sin(\pi y / h)}{2h} \times \right. \\ & \times \int_0^{+\infty} Z^\varphi(\xi) \left[\frac{1}{\operatorname{ch}((\xi - x)\pi / h) + \cos(y\pi / h)} - \frac{1}{\operatorname{ch}((\xi + x)\pi / h) + \cos(y\pi / h)} \right] d\xi + \\ & + \frac{\sin(\pi y / h)}{2h} \int_0^{+\infty} z^\omega(\xi) \left[\frac{1}{\operatorname{ch}((\xi - x)\pi / h) - \cos(y\pi / h)} - \right. \\ & \left. - \frac{1}{\operatorname{ch}((\xi + x)\pi / h) - \cos(y\pi / h)} \right] d\xi \Bigg), \quad k\tau \leq x \leq (k+1)\tau. \end{aligned} \quad (33)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Агранович М.С. Обобщенные функции. М.: МЦНМО, 2008. – 128 с.
2. Гахов Ф.Д., Черский Ю. И. Уравнения типа свертки. М.: Наука, 1978. – 295 с.
3. Зарубин А.Н. Уравнения смешанного типа с запаздывающим аргументом. Орёл: ОГУ, 1997. – 225 с.
4. Зарубин А.Н. Дифференциальные и дифференциально-разностные уравнения в частных производных. Опорный конспект лекций с примерами, задачами и заданиями для самостоятельного решения. Орёл: ФГБОУ ВПО «ОГУ», 2011. – 124 с.
5. Зарубин А.Н. Краевая задача для уравнения смешанного типа с опережающе-запаздывающим аргументом // Дифференциальные уравнения. 2012. Т.48, №10. – с. 1404-1411.
6. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Элементарные функции. М.: Наука, 1981. – 800 с.
7. Самко С.Г., Килбас А. А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.

МЕТОД ФУНКЦИЙ ГРИНА В ОДНОЙ МНОГОТОЧЕЧНОЙ ЗАДАЧЕ

Е.В. Рыжкова, к.п.н., доц.

Воронежский институт МВД России

e-mail: *heiligenkreuz@gmail.com*

Рассмотрим на промежутке $[0, l]$ дифференциальные уравнения разного порядка

$$(p_1 u_1'')'' = f_1(x), \quad x \neq \xi, \quad (1)$$

$$-(p_2 u_2')' = f_2(x), \quad x \neq \xi. \quad (2)$$

Первое из них возникает при описании поперечных деформаций классического стержня, а второе — обычной струны (или продольных деформаций стержня). В точке ξ (где, естественно, $0 < \xi < l$) оба уравнения выключаются, так что фактически (1), (2) — это система четырех уравнений. Однако нас интересуют лишь решения, непрерывно склеенные в точке $x = \xi$, что значит $u_1(\xi - 0) = u_1(\xi + 0)$, $u_2(\xi - 0) = u_2(\xi + 0)$. Более того, в этой точке непрерывно склеены и решения разностных уравнений, т. е.

$$u_1(\xi \pm 0) = u_2(\xi \pm 0). \quad (3)$$

В этой же точке мы предполагаем выполненным условие взаимодействия (трансмиссии)

$$\delta(p_1 u_1'')'(\xi) + \delta(p_2 u_2')(\xi) = 0, \quad (4)$$

где через $\delta\varphi(\xi)$ обозначается скачок φ в точке ξ , т. е. $\delta\varphi(\xi) \doteq \varphi(\xi + 0) - \varphi(\xi - 0)$. Допуская у $u_1(x)$ потерю гладкости в точке ξ , мы предполагаем при этом

$$(p_1 u_1'')(\xi - 0) = (p_1 u_1'')(\xi + 0) = 0. \quad (5)$$

Если на концах $x = 0$, $x = l$ отрезка поставить стандартные условия закрепления, т. е.

$$u_1(0) = u_1'(0) = 0, \quad u_1(l) = u_1'(l) = 0, \quad u_2(0) = u_2(l) = 0, \quad (6)$$

то мы сможем смотреть на систему (1) – (6) как на краевую задачу, моделирующую, например, деформации большого канатного моста. При $f_2 \equiv 0$

второе уравнение (2) вместе с условиями (3), (4) заменяются, как несложно проверить, условием

$$\delta(p_1 u_1'')'(\xi) + \gamma u_1(\xi) = 0, \quad \gamma > 0,$$

что вместе с (5) приводит (1) к модели двухзвенной цепочки стержней с упругой опорой в месте стыка ($x = \xi$). Подобные нестандартные задачи для одного скалярного уравнения изучались ранее в [1–2], см. также [3].

Задача (1) – (6) рассматривается в классе достаточно гладких (при $x \neq \xi$) функций $u(x) = \{u_1(x), u_2(x)\}$ на $[0, l]$. Далее в формулировках и условиях мы предполагаем, что $x \neq \xi$ без дополнительных оговорок.

Всюду далее считаем, что $p_1(\cdot)$ и $p_2(\cdot)$ строго положительны.

Приведем основные результаты.

Теорема 1. Обозначим $f_1 = F_1'$ и $f_2 = F_2'$. Тогда для любых F_1, F_2 из $BV[0, l]$ (определение см. в [1]) задача (1) – (6) однозначно разрешима.

Теорема 2. Пусть F_1 и F_2 – первообразные функций f_1 и f_2 . Тогда для любых неубывающих F_1, F_2 при наличии хотя бы одной точки роста F_1 или F_2 решение задачи (1) – (6) $u(x) = \{u_1(x), u_2(x)\}$ строго положительно в $(0, l)$, т. е. $u_1(x) > 0$ и $u_2(x) > 0$ на $(0, l)$.

Результаты могут быть применены для уравнений с краевыми условиями третьего рода [4], в теории операторов преобразования [5–7], при изучении разложений по неполным системам [8–10]. При получении оценок могут быть использованы неравенства для специальных функций из работ [11–12].

ЛИТЕРАТУРА

1. Покорный Ю.В., Пенкин О.М., Прядиев В.Л., Боровских А.В., Лазарев К.П., Шабров С.А. Дифференциальные уравнения на геометрических графах. М: Физматлит, 2004. 272 с.
2. Покорный Ю.В., Белоглазова Т.В., Дикарева Е.В., Перловская Т.В. О функции Грина для локально взаимодействующей системы обыкновенных уравнений разного порядка // Матем. заметки. 2003. Т. 74, №1. С. 146–148.
3. Кулаев Р.Ч. О знаке функции Грина краевой задачи на графе для уравнения четвертого порядка // Владикавк. матем. журн. 2013. Т. 15, №4. С. 19–29.

4. Найдюк Ф.О., Прядиев В.Л., Ситник С.М. Описание профилей прямой и обратной волн для волнового уравнения на отрезке с краевыми условиями первого или второго рода - на одном конце и третьего рода или присоединенной массы - на другом // Черноземный альманах научных исследований. Серия: "Фундаментальная математика". 2005. №1 (1). С. 53–68.
5. Sitnik S.M. Buschman–Erdelyi transmutations, classification and applications // In the Book: Analytic Methods Of Analysis And Differential Equations: AMADE 2012. (Edited by M.V.Dubatovskaya, S.V.Rogosin). 2013. Cambridge Scientific Publishers, P. 171–201.
6. Sitnik S.M. *Transmutations and Applications: a survey* // arXiv:1012.3741, 2012. 141 P.
7. Ситник С.М. Факторизация и оценки норм в весовых лебеговых пространствах операторов Бушмана–Эрдейи // Доклады Академии Наук СССР. 1991. Т. 320, №6. С. 1326–1330.
8. Zhuravlev M.V., Kiselev E.A., Minin L.A., Sitnik S.M. Jacobi theta–functions and systems of integral shifts of Gaussian functions. *Journal of Mathematical Sciences*, Springer. 2011. Vol. 173, №2. P. 231–241.
9. Киселев Е.А., Минин Л.А., Новиков И. Я., Ситник С. М. О константах Рисса для некоторых систем целочисленных сдвигов// Математические заметки. 2014, Том 96, выпуск 2, С. 239-250.
10. Минин Л.А., Ситник С.М., Ушаков С.Н. Поведение коэффициентов узловых функций, построенных из равномерных сдвигов функций Гаусса и Лоренца // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика, Физика. 2014, №7 (183), Выпуск 35, С. 214–217.
11. Sitnik S.M. Generalized Young and Cauchy–Bunyakovsky Inequalities with Applications: a survey. arXiv:1012.3864, 2012. 51 p.
12. Ситник С.М. Неравенства для функций Бесселя // Доклады РАН. 1995. Т. 340. №1. С. 29–32.

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО СОПРЯЖЕНИЯ В УГЛОВЫХ ТОЧКАХ КРИВОЙ

А.П. Солдатов, д.ф.-м.н., проф.

НИУ БелГУ

e-mail: *Soldatov48@gmail.com*

Г.Н. Аверьянов, аспирант

НИУ БелГУ

Рассмотрим классическую задачу линейного сопряжения для аналитических функций

$$\phi^+ - G\phi^- = f \quad (1)$$

на ориентированной кусочно-гладкой кривой Γ в семействе весовых пространств $C'_\lambda{}^\mu$, элементы ϕ которых допускают поведение $\phi(z) = O(1)(z - \tau)^{\lambda\tau}$ при $z \rightarrow \tau \in F$, где $F \subseteq \Gamma$ – конечное множество, содержащее все угловые точки кривой.

Эта задача хорошо изучена [1] как в пространствах Гельдера, так и в весовых гильбертовых пространствах функций при $-1 < \lambda_\tau < 0$.

В статье описана степенно-логарифмическая асимптотика в точках $\tau \in F$ решений задачи (1) при условии, что аналогичное поведение имеет правая часть f задачи (1). Пусть гладкая дуга Γ_0 с концами $\tau \neq \tau'$ ориентирована от τ к τ' , задана простая область $D_0 \subseteq \mathbb{C} \setminus \Gamma_0$, причем $\Gamma_0 \cap \partial D_0$ является дугой с концами τ и $\tau'_1 \neq \tau'$. Рассмотрим поведение интеграла типа Коши

$$\phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} \frac{\varphi(t) dt}{t - z}, \quad z \in D_0,$$

при $z \rightarrow \tau$ в ситуации, когда функция $\varphi \in C^\mu_{\lambda-0}(\Gamma_0, \tau)$ допускает степенно логарифмическую асимптотику вида

$$\varphi(t) = (t - \tau)^\zeta q[\ln(t - \tau)] + \varphi_0(t), \quad \varphi_0 \in C^\mu_\nu(\Gamma_0, \tau),$$

с некоторым многочленом $q \in P_n$ и $\operatorname{Re} \zeta = \lambda$.

Теорема. Пусть $-1 < \operatorname{Re} \zeta = \lambda < \nu < 0$. Тогда

$$\phi(z) = (z - \tau)^\zeta p[\ln(z - \tau)] + \phi_0(z), \quad \phi_0 \in C^\mu_\nu(\overline{D}_0, \tau),$$

где многочлен p также принадлежит P_n и однозначно определяется из уравнения

$$p(u) - e^{2\pi i \zeta} p(u + 2\pi i) = q(u).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968.

РОСТ СУММЫ И ПРОИЗВЕДЕНИЯ ФУНКЦИЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ПЕРЕМЕННОГО

О.Д. Соломатин, к.ф.-м.н., доц.

ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет им. И.С. Тургенева»

e-mail: *matdiff@yandex.ru*

В статье приведены и доказаны теоремы о порядке роста суммы и произведения функций действительного переменного.

Пусть $f(x)$ – неотрицательная функция при $x > 0$. Для характеристики скорости роста этой функции будем сравнивать ее с функциями вида σx^ρ . Порядок роста функции находим по формуле

$$\rho = \overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln f(x)}{\ln x}.$$

Нетрудно видеть, что тип σ функции $f(x)$ порядка ρ ($0 < \rho < \infty$) определяется равенством

$$\sigma = \overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^\rho}.$$

Пусть $f_1(x)$ и $f_2(x)$ – две неотрицательные функции при $x > 0$. Будем говорить, что рост функции $f_2(x)$ больше, чем рост функции $f_1(x)$, если порядок $f_2(x)$ больше порядка $f_1(x)$ либо порядки равны, но тип $f_2(x)$ больше типа $f_1(x)$. Справедлива следующая теорема

Теорема 1. Порядок суммы двух функций различных порядков равен наибольшему из порядков слагаемых, а при одинаковом порядке тип суммы функций равен сумме типов слагаемых.

Доказательство. Пусть функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ имеют соответственно порядки ρ_1 и ρ_2 , причем $\rho_1 < \rho_2$. Покажем, что порядок ρ функции $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ равен ρ_2 . Действительно, по определению порядка функции имеем:

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) < x^{\rho_1 + \varepsilon} + x^{\rho_2 + \varepsilon} < 2x^{\rho_2 + \varepsilon} = x^{\rho_2 + \varepsilon_1}, \quad \forall x > x_0(\varepsilon_1),$$

то есть выполнена оценка сверху. Проведем теперь оценку снизу для функции $f(x)$:

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) > x^{\rho_1 - \varepsilon} + x^{\rho_2 - \varepsilon} = x^{\rho_2 - \varepsilon} (x^{\rho_1 - \rho_2} + 1) = x^{\rho_2 - \varepsilon_2},$$

$x = x_n \rightarrow +\infty$, $\varepsilon_2 > 0$ – любое. Значит, порядок функции $f(x)$ в случае различных порядков слагаемых равен наибольшему из них.

Докажем теперь вторую часть теоремы. Пусть порядки слагаемых одинаковы ($\rho_1 = \rho_2 = \rho$), но типы их σ_1 и σ_2 при этом различны (пусть, для определенности, $\sigma_1 < \sigma_2$). Тогда по определению типа функции получаем соответствующие оценки сверху и снизу:

$$f(x) = f(x_1) + f(x_2) < (\sigma_1 + \varepsilon')x^\rho + (\sigma_2 + \varepsilon')x^\rho < (\sigma_1 + \sigma_2 + \varepsilon_1')x^\rho, \\ \forall x > x_0(\varepsilon_1');$$

$$f(x) = f(x_1) + f(x_2) > (\sigma_1 - \varepsilon'')x^\rho + (\sigma_2 - \varepsilon'')x^\rho = (\sigma_1 + \sigma_2 - \varepsilon_2'')x^\rho, \\ x = x_n \rightarrow +\infty.$$

Значит, тип суммы функций при одинаковом порядке ρ равен $\sigma_1 + \sigma_2$.

Теорема 1 доказана.

Теорема 2. Пусть $f_1(x)$ и $f_2(x)$ – две неотрицательные функции при $x > 0$, имеющие соответственно порядки ρ_1 и ρ_2 , и типы σ_1 и σ_2 ($0 < \rho_1 < \infty$, $0 < \rho_2 < \infty$). Тогда порядок ρ и тип σ произведения $f_1(x)f_2(x)$ вычисляются по формулам:

$$\rho = \rho_1 + \rho_2, \quad \sigma = \sigma_1\sigma_2.$$

Доказательство. По определению порядка функции имеем:

$$\rho = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(f_1(x)f_2(x))}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln f_1(x) + \ln f_2(x)}{\ln x} = \\ = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln f_1(x)}{\ln x} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln f_2(x)}{\ln x} = \rho_1 + \rho_2.$$

Далее, по определению типа функции находим:

$$\sigma = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_1(x)f_2(x)}{x^\rho} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_1(x)f_2(x)}{x^{\rho_1+\rho_2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_1(x)}{x^{\rho_1}} \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_2(x)}{x^{\rho_2}} = \sigma_1\sigma_2.$$

Теорема 2 доказана.

Следствие. В условиях теоремы 2 порядок ρ и тип σ функции $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ ($f_2(x) \neq 0$, $x > 0$) вычисляются по формулам:

$$\rho = \rho_1 - \rho_2, \quad \sigma = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \quad (0 \leq \sigma_2 \leq +\infty).$$

Замечание. 1) Используя теоремы о росте суммы и произведения двух функций, можно находить порядки и типы всевозможных композиций элементарных функций, и, следовательно, сравнивать их рост.

2) Все теоремы, сформулированные выше для двух функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$, остаются справедливыми для трех и большего конечного числа функций.

Определение. Функцию $y = f(x)$ называют ограниченной на множестве X , если существует такое число A , что для всех $x \in X$ выполняется неравенство $f(x) \leq A$.

Теорема 3. Порядок ограниченной монотонно неубывающей на действительной положительной полуоси функции равен нулю.

Доказательство. Пусть $f(x)$ – ограниченная неотрицательная при $x > 0$ функция, то есть $f(x) \leq A, \forall x > 0$. Тогда по определению порядка функции имеем:

$$\rho = \overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln f(x)}{\ln x} \leq \overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln A}{\ln x} = 0,$$

то есть $\rho = 0$. \square

Например, ограниченными являются функции

$$f(x) = \operatorname{arctg} x \quad (x > 0), \quad f(x) = \operatorname{arctg} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \quad (x > 1),$$

$$f(x) = \exp\left\{-\frac{1}{x^2}\right\} \quad (x > 0).$$

Теорема 4. Пусть $f_1(x)$ и $f_2(x)$ – две неотрицательные монотонно неубывающие функции при $x > 0$ соответственно порядков роста ρ_1 и ρ_2 , и типов σ_1 и σ_2 . Если

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = A \neq 0; \infty,$$

то функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ имеют одинаковые порядки роста, то есть $\rho_1 = \rho_2$ (в этом случае $A = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}$, в частности, при $A = 1$ $\sigma_1 = \sigma_2$).

Если $A = 0$, то порядок функции $f_1(x)$ меньше порядка функции $f_2(x)$, то есть $\rho_1 < \rho_2$.

Если $A = +\infty$, то порядок функции $f_1(x)$ больше порядка функции $f_2(x)$, то есть $\rho_1 > \rho_2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Громов В.П., Соломатин О.Д. Логарифмический порядок и тип и характеристики роста целой функции бесконечного порядка. – Орел: ГОУ ВПО «Орловский государственный университет», 2007.
2. Ронкин Л.И. Введение в теорию целых функций многих переменных. – М.: Наука, 1971.

ПОСТРОЕНИЕ ЭКОНОМИЗИРОВАННЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

В.А. Толпаев, д.ф.-м.н., проф.

ОАО «СевКавНИПИГаз»
e-mail: *TolpaevVA@scnipigaz.ru*

А.М. Кравцов, к.ф.-м.н.

ОАО «СевКавНИПИГаз»
e-mail: *KravcovAM@scnipigaz.ru*

М.Т. Петросянц, аспирант

ОАО «СевКавНИПИГаз»
e-mail: *PetrosyancMT@scnipigaz.ru*

В работе предлагается способ экономизации записи полиномиальных аппроксимаций функций многих переменных, основывающийся на представлении функций обобщениями полиномов Бернштейна.

При вычислениях с функциями многих переменных задача экономной записи полиномиальных выражений приобретает особую актуальность, так общая форма записи многочлена уже от 5 переменных степени 25 содержит 142506 слагаемых. Большие степени полинома обуславливаются требованиями к точности вычислений значений аппроксимантов функций. В качестве основной формы представления полиномов в R^n в работе предлагается использовать обобщения полиномов Бернштейна (ОПБ) [1].

Определение. Обобщением полинома Бернштейна функции $f(x)$ заданной в конусе $\Omega \in R^n$,

$$\Omega = \left\{ \mathbf{x} \mid \mathbf{x} = \lambda_1(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{X}_1 + \lambda_2(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{X}_2 + \dots + \lambda_M(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{X}_M, \lambda_i \in [0,1], \sum_{i=1}^M \lambda_i = 1, \mathbf{X}_j \in R^n \right\},$$

степени N будем называть полином

$$P_N(\mathbf{x}) = \sum_{|\mathbf{k}|=N} f(\mathbf{x}_k) \cdot (N; k_1, k_2, \dots, k_M) \cdot \lambda_1^{k_1} \cdot \lambda_2^{k_2} \cdot \dots \cdot \lambda_M^{k_M}. \quad (1)$$

Здесь суммирование выполняется по всем значениям мультииндекса $\mathbf{k}=(k_1, k_2, \dots, k_M)$ высотой N , $|\mathbf{k}| = k_1+k_2+\dots+k_M = N$, узлы ОПБ $\mathbf{x}_k = \frac{k_1}{N} \cdot \mathbf{X}_1 + \frac{k_2}{N} \cdot \mathbf{X}_2 + \dots + \frac{k_M}{N} \cdot \mathbf{X}_M$, мультиномиальный коэффициент

$(N; k_1, k_2, \dots, k_M) = (N; \mathbf{k}) = \frac{N!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_M!}$, переменные λ_i , вообще говоря, могут быть заданы не единственным способом.

Последовательность ОПБ функции $f(x)$ сходится равномерно в конусе Ω к функции $f(x)$ [1].

Теорема. Для всякой непрерывной в конусе

$$\Omega = \left\{ \mathbf{x} \mid \mathbf{x} = \lambda_1(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{X}_1 + \lambda_2(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{X}_2 + \dots + \lambda_M(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{X}_M, \lambda_i \in [0,1], \sum_{i=1}^M \lambda_i = 1, \mathbf{X}_j \in R^n \right\}$$

функции $f(\mathbf{x})$ при любом $\varepsilon > 0$ существует $P_N(\mathbf{x}) = \sum_{|\mathbf{k}|=N} f(\mathbf{x}_k) \cdot (N; \mathbf{k}) \cdot \lambda_1^{k_1} \cdot \lambda_2^{k_2} \cdot \dots \cdot \lambda_M^{k_M}$

(ОПБ функции $f(\mathbf{x})$ степени N), такой, что при выполнении условия для его узлов \mathbf{x}_k

$$\sum_{|\mathbf{k}|=N} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_k\|_E^2 \cdot (N; \mathbf{k}) \cdot \lambda_1^{k_1} \cdot \lambda_2^{k_2} \cdot \dots \cdot \lambda_M^{k_M} \leq \frac{C}{N}, \quad (2)$$

где константа C не зависит от точки \mathbf{x} , справедливо

$$\max_{\mathbf{x} \in \Omega} |f(\mathbf{x}_k) - P_N(\mathbf{x})| < \varepsilon. \quad (3)$$

В задаче экономизации полиномиальных рядов, представляющих заданную функцию приближенно, требуется определить ряд удовлетворяющий следующим условиям

- 1) ряд должен содержать меньше слагаемых, чем исходный;
- 2) при вычислениях значения экономизированного ряда должны мало отличаться от значений исходного ряда во всех точках рассматриваемой области значений аргументов.

Задача. Пусть приближаемая функция $f(\mathbf{x})$ представлена своим ОПБ степени N с коэффициентами a_k

$$P_N(\mathbf{x}) = \sum_{|\mathbf{k}|=N} a_k \cdot (N; \mathbf{k}) \cdot \lambda_1^{k_1} \cdot \lambda_2^{k_2} \cdot \dots \cdot \lambda_M^{k_M}, \quad (4)$$

требуется найти экономизированное представление ОПБ функции $f(\mathbf{x})$ меньшего порядка $N_0 < N$ с коэффициентами b_k

$$P_{N_0}(\mathbf{x}) = \sum_{|\mathbf{k}|=N_0} b_k \cdot (N; \mathbf{k}) \cdot \lambda_1^{k_1} \cdot \lambda_2^{k_2} \cdot \dots \cdot \lambda_M^{k_M}, \quad (5)$$

которое представляет приближаемую функцию с заданной точностью ε в следующем смысле

$$\forall \mathbf{x} \in \Omega : \|P_N(\mathbf{x}) - P_{N_0}(\mathbf{x})\|_C \leq \varepsilon. \quad (6)$$

Запишем исходный ряд и экономизированный ряд в виде ОПБ одного и того же порядка. Для этого умножим $P_{N_0}(\mathbf{x})$ на полином $(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_M)^{N-N_0}$, тождественно равный 1 в конусе Ω

$$P_{N_0}(\mathbf{x}) = P_{N_0}(\mathbf{x}) \cdot (\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_M)^{N-N_0} = \sum_{|\mathbf{k}|=N} b'_k \cdot (N; \mathbf{k}) \cdot \lambda_1^{k_1} \cdot \lambda_2^{k_2} \cdot \dots \cdot \lambda_M^{k_M}, \quad (7)$$

$$\text{где } b'_k = \sum_{|\mathbf{m}|=N_0} b_m \cdot \frac{(N_0; \mathbf{m}) \cdot (N - N_0; \mathbf{k} - \mathbf{m})}{(N; \mathbf{k})}$$

Здесь в сумме обнуляются слагаемые для которых компоненты мультииндексов \mathbf{m} и \mathbf{k} не удовлетворяют условию $k_i - m_i \geq 0$.

Подставим представления для $P_N(\mathbf{x})$ (4) и $P_{N_0}(\mathbf{x})$ (7) в (6) получим

$$\begin{aligned}
& \forall \mathbf{x} \in \Omega: \left\| P_N(\mathbf{x}) - P_{N_0}(\mathbf{x}) \right\|_C = \\
& = \left\| \sum_{|\mathbf{k}|=N} a_{\mathbf{k}} \cdot (N; \mathbf{k}) \cdot \lambda_1^{k_1} \cdot \lambda_2^{k_2} \cdot \dots \cdot \lambda_M^{k_M} - \sum_{|\mathbf{k}|=N} b'_{\mathbf{k}} \cdot (N; \mathbf{k}) \cdot \lambda_1^{k_1} \cdot \lambda_2^{k_2} \cdot \dots \cdot \lambda_M^{k_M} \right\|_C = \\
& = \left\| \sum_{|\mathbf{k}|=N} (a_{\mathbf{k}} - b'_{\mathbf{k}}) \cdot (N; \mathbf{k}) \cdot \lambda_1^{k_1} \cdot \lambda_2^{k_2} \cdot \dots \cdot \lambda_M^{k_M} \right\|_C \leq \max_{|\mathbf{k}|=N} \sum |a_{\mathbf{k}} - b'_{\mathbf{k}}| \cdot (N; \mathbf{k}) \cdot \lambda_1^{k_1} \cdot \lambda_2^{k_2} \cdot \dots \cdot \lambda_M^{k_M} \leq \\
& \leq \max_{|\mathbf{k}|=N} |a_{\mathbf{k}} - b'_{\mathbf{k}}| \cdot \sum_{|\mathbf{k}|=N} (N; \mathbf{k}) \cdot \lambda_1^{k_1} \cdot \lambda_2^{k_2} \cdot \dots \cdot \lambda_M^{k_M} = \max_{|\mathbf{k}|=N} |a_{\mathbf{k}} - b'_{\mathbf{k}}| = d
\end{aligned} \tag{8}$$

Таким образом, для того, чтобы набор коэффициентов $b_{\mathbf{k}}$ удовлетворял условию (6) достаточно потребовать $\max_{|\mathbf{k}|=N} |a_{\mathbf{k}} - b'_{\mathbf{k}}| = d \leq \varepsilon$.

Запишем задачу поиска наименьшего уклонения $\max_{|\mathbf{k}|=N} |a_{\mathbf{k}} - b'_{\mathbf{k}}| = d$ в виде

$$\left| a_{\mathbf{k}} - \sum_{|\mathbf{m}|=N_0} b_{\mathbf{m}} \cdot \frac{(N_0; \mathbf{m}) \cdot (N - N_0; \mathbf{k} - \mathbf{m})}{(N; \mathbf{k})} \right| \rightarrow \min, |\mathbf{k}| = N \tag{9}$$

Решение задачи (9) можно аппроксимировать решением СЛАУ

$$\sum_{|\mathbf{m}|=N_0} b_{\mathbf{m}} \cdot \frac{(N_0; \mathbf{m}) \cdot (N - N_0; \mathbf{k} - \mathbf{m})}{(N; \mathbf{k})} \approx a_{\mathbf{k}}, |\mathbf{k}| = N.$$

Приближенное решение для СЛАУ можно получить, например, при помощи метода наименьших квадратов (МНК). Такое решение будет квазиоптимальным. Оптимальное решение определяется условиями чебышевского альтернанса для функции многих переменных [2], в нашем случае

$$P_{N_0}(\mathbf{x}_j) - P_N(\mathbf{x}_j) = (-1)^j \cdot d, \quad j = 0 \dots r + 2. \tag{10}$$

Здесь \mathbf{x}_j узлы чебышевского альтернанса, r ранг системы элементарных полиномов ОПБ $(N; k_1, k_2, \dots, k_M) \cdot \lambda_1^{k_1} \cdot \lambda_2^{k_2} \cdot \dots \cdot \lambda_M^{k_M}$ (максимальное число линейно-независимых функций системы), d – наименьшее возможное максимальное уклонение.

С учетом представлений (4), (7) формулы (10) запишутся так

$$\left(\sum_{|\mathbf{k}|=N} a_{\mathbf{k}} \cdot (N; \mathbf{k}) \cdot \lambda_1^{k_1} \cdot \lambda_2^{k_2} \cdot \dots \cdot \lambda_M^{k_M} - \sum_{|\mathbf{k}|=N} b'_{\mathbf{k}} \cdot (N; \mathbf{k}) \cdot \lambda_1^{k_1} \cdot \lambda_2^{k_2} \cdot \dots \cdot \lambda_M^{k_M} \right)_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_j} = (-1)^j \cdot d. \tag{11}$$

Умножим правую часть (11) на полином тождественно равный 1 в конусе Ω $(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_M)^N = \sum_{|\mathbf{k}|=N} (N; \mathbf{k}) \cdot \lambda_1^{k_1} \cdot \lambda_2^{k_2} \cdot \dots \cdot \lambda_M^{k_M}$, это позволит уравнять степени левой и правой частей уравнения. Затем перенесем все члены уравнения в левую часть

$$\left(\sum_{|\mathbf{k}|=N} a_{\mathbf{k}} \cdot (N; \mathbf{k}) \cdot \lambda_1^{k_1} \cdot \lambda_2^{k_2} \cdot \dots \cdot \lambda_M^{k_M} - \sum_{|\mathbf{k}|=N} b'_{\mathbf{k}} \cdot (N; \mathbf{k}) \cdot \lambda_1^{k_1} \cdot \lambda_2^{k_2} \cdot \dots \cdot \lambda_M^{k_M} \right)_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_j} -$$

$$- (-1)^j \cdot d \cdot \left(\sum_{|\mathbf{k}|=N} (N; \mathbf{k}) \cdot \lambda_1^{k_1} \cdot \lambda_2^{k_2} \cdot \dots \cdot \lambda_M^{k_M} \right)_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_j} = 0 \quad (12)$$

Объединяя суммы, получим

$$\sum_{|\mathbf{k}|=N} (a_{\mathbf{k}} - b'_{\mathbf{k}} - (-1)^j \cdot d) \cdot (N; \mathbf{k}) \cdot (\lambda_1^{k_1} \cdot \lambda_2^{k_2} \cdot \dots \cdot \lambda_M^{k_M})_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_j} = 0. \quad (13)$$

Условия (13) можно приближенно заменить задачей линейного программирования. Учтем, что для элементарных полиномов справедливо неравенство

$$(N; \mathbf{k}) \cdot (\lambda_1^{k_1} \cdot \lambda_2^{k_2} \cdot \dots \cdot \lambda_M^{k_M}) \leq \frac{(N; \mathbf{k})}{N^N} k_1^{k_1} \cdot k_2^{k_2} \cdot \dots \cdot k_M^{k_M}, k_1 + k_2 + \dots + k_M = N.$$

Тогда (13) с необходимостью выполняется при условии, что d и \mathbf{b} являются решениями задачи линейного программирования

$$\min d,$$

$$\sum_{|\mathbf{m}|=N_0} b_{\mathbf{m}} \cdot (N_0; \mathbf{m}) \cdot (N - N_0; \mathbf{k} - \mathbf{m}) \geq (N; \mathbf{k}) \cdot (a_{\mathbf{k}} - d), \quad (14)$$

$$\sum_{|\mathbf{m}|=N_0} b_{\mathbf{m}} \cdot (N_0; \mathbf{m}) \cdot (N - N_0; \mathbf{k} - \mathbf{m}) \leq (N; \mathbf{k}) \cdot (a_{\mathbf{k}} + d),$$

$$d \geq 0, |\mathbf{k}| \leq N.$$

Предлагаемая формулировка задачи не требует при построении аппроксиманты функции определения точек альтернанса \mathbf{x}_j .

Пример. В работе [3] получено наилучшее приближение для функции e^{-x^2-y} в квадрате $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ в следующем виде $\alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4(2x^2 - 1) + \alpha_5 xy + \alpha_6(2y^2 - 1)$. Вычисления проводились с точностью $0.5 \cdot 10^{-6}$ и для коэффициентов были получены значения $\alpha_1=0.985738, \alpha_2=-0.347940, \alpha_3=-0.902683, \alpha_4=-0.144633, \alpha_5=0.424562, \alpha_6=0.112918$, максимальное отклонение при этом наблюдалось в семи точках чебышевского альтернанса и составило $d = 0.027275$.

Для сравнения решалась задача экономизации степенного разложения функции $e^{-x^2-y} = \sum_{k=0}^{10} \frac{(-x^2-y)^k}{k!} + R_{10}$, причем в квадрате $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ для остаточного члена выполняется условие $|R_{10}| \leq 0.000045$. Выражение для экономизированной функции выбиралось в виде $\alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4(2x^2 - 1) + \alpha_5 xy + \alpha_6(2y^2 - 1)$.

Для рассматриваемой области переменные λ имели представление

$$\lambda_1 = x(1-y), \lambda_2 = xy, \lambda_3 = y(1-x), \lambda_4 = (1-x)(1-y).$$

Связь x, y с переменными λ имеет вид

$$x = \lambda_1 + \lambda_2, y = \lambda_3 + \lambda_2.$$

Выражение исходной функции в задаче экономизации содержало 1771 сла-

гаемых степени 20 по переменным λ , соответственно задача линейного программирования (14) содержит 3542 линейных ограничения для 7 переменных $d, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_6$.

В результате решения задачи были получены коэффициенты экономизированной функции и оценка для максимального отклонения d

$\alpha_1=0.993211, \alpha_2=-0.353916, \alpha_3=-0.915978, \alpha_4=-0.144254, \alpha_5=0.434006, \alpha_6=0.116154$, оценка для максимального отклонения $d = 0.030238$. Приведем рисунки графиков погрешностей (рисунок 1).

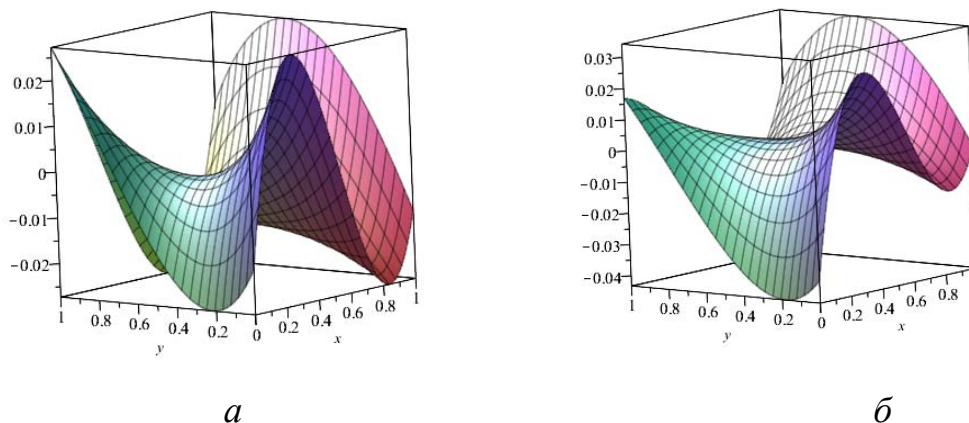


Рисунок 1 – Графики погрешностей: *а* – для погрешности наилучшего приближения [3], *б* – для погрешности экономизированной функции

Сравнение графиков погрешностей дает представление о степени близости точек экстремума погрешности экономизированной функции к точкам альтернанса для наилучшего приближения.

Заключение. Предложенный в работе способ решения задачи экономизации записи функций многих переменных позволяет получать решение близкое к наилучшему приближению. Использование ОПБ позволяет при этом избежать трудоемкого поиска приближений для точек альтернанса. В процессе построения решения осуществляется построение оценки погрешности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Захаров В.В. Обобщения полиномов Бернштейна в задачах многокритериальной оптимизации / В.В.Захаров, А.М.Кравцов, С.А.Приймак // Наука и мир, международный научный журнал, №2(6), Том1, Волгоград, 2014.
2. Ремез Е.Я. Основы численных методов чебышевского приближения/Киев: Изд-во «Наукова думка», 1969. – 623с.
3. Каленчук-Порханова А.А. Наилучшая чебышевская аппроксимация функций одной и многих переменных//Кибернетика и системный анализ, №6, Киев, 2009, с.155.
4. Watson G.A. A multiple exchange algorithm for multivariate Chebyshev approximation//SIAM J.Numer.Anal.Vol.12,No.1,1975, p.46-52.

ЗАДАЧА ГЕЛЛЕРСТЕДТА ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА С ФУНКЦИОНАЛЬНЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ И ОПЕРЕЖЕНИЕМ

Е.В. Чаплыгина, к.ф.-м.н.

ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет им. И.С. Тургенева»
e-mail: *lena260581@yandex.ru*

Рассматривается задача Геллерстедта для нелинейного уравнения смешанного типа с оператором Лаврентьева-Бицадзе в главной части и функциональным запаздыванием, опережением. Построено общее решение уравнения и найдены формулы взаимного обращения.

В области $D = D^+ \cup D^- \cup J$, где $D^+ = \{(x, y) : x_0 < x < x_2, 0 < y < h\} = D_0^+ \cup D_1^+ \cup J$ ($0 < h \equiv const$), $D^- = D_0^- \cup D_1^-$ - эллиптическая и гиперболическая части области D , причем $D_k^+ = \{(x, y) : x_k < x < x_{k+1}, 0 < y < h\}$ ($k = -1, 0, 1, 2$)
 $D_k^- = \{(x, y) : -y < \alpha_1^k(x) < y + x_1, -x_1/2 < y < 0\}$ ($k = -1, 0, 1, 2$),
 $I = \{(x, y) : x_0 < x < x_2, y = 0\}$, $J = \{(x, y) : x = x_1, 0 < y < h\}$,
 $\alpha_1^{-1}(x) = \alpha_2(x) = e^x$, $\alpha_1^0(x) = x$, $\alpha_1^1(x) = \alpha_1(x) = \ln(x)$, $\alpha_1^2(x) = \alpha_1(\alpha_1(x)) = \ln(\ln(x))$ и $x_{-1} = -\infty, x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = e, x_3 = e^e$, рассмотрим уравнение

$$Lu(x, y) \equiv u_{xx}(x, y) + \operatorname{sgn}(y)u_{yy}(x, y) = u(\ln x, y)u(e^x, y). \quad (1)$$

Пусть $D_k = D_k^+ \cup D_k^- \cup I_k$, где $I_k = \{(x, y) : x_k < x < x_{k+1}, y = 0\}$ ($k = -1, 0, 1, 2$). Тип функционального запаздывания и опережения следует из представлений

$$u(\ln x, y) = u(x - (x - \ln x), y) = u(x - \tau_1(x), y), \\ u(e^x, y) = u(x + (e^x - x), y) = u(x + \tau_2(x), y),$$

где

$$\tau_1(x) = x - \ln x > 0, \quad \tau_2(x) = e^x - x > 0.$$

Задача Г. Найти в области D функцию $u(x, y) \in C(\bar{D}) \cap C^1(D \setminus J) \cap C^2(D \setminus (I \cup J))$, удовлетворяющую уравнению (1), краевым условиям

$$u(x, h) = \varphi(x), x_0 \leq x \leq x_2, \quad (2)$$

$$u(x, -x) = \psi_0(x), x_0 \leq x \leq x_1/2, \quad (3)$$

$$u(x, \ln x - x_1) = \psi_1(x), e^{x_1/2} \leq x \leq x_2, \quad (4)$$

$$u(x_0, y) = u(x_2, y) = 0, 0 \leq y \leq h, \quad (5)$$

$$u(x, y) = \cos(e^x + y\sqrt{-\operatorname{sgn}(y)}) \cos(e^x - y\sqrt{-\operatorname{sgn}(y)}), (x, y) \in \bar{D}_{-1}, \quad (6)$$

$$u(x, y) = \cos(\ln(\ln x) + y\sqrt{-\operatorname{sgn}(y)}) \cos(\ln(\ln x) - y\sqrt{-\operatorname{sgn}(y)}), (x, y) \in \bar{D}_2, \quad (7)$$

условиям сопряжения

$$u(x, 0-) = u(x, 0+) = \omega(x), x_0 \leq x \leq x_2, \quad (8)$$

$$u_y(x,0-) = u_y(x,0+) = v(x), x_0 < x < x_2, x \neq x_1, \quad (9)$$

условиям согласования

$$\varphi(x_0) = \varphi(x_2) = \psi_0(x_0) = \psi_1(x_2) = 0, \quad (10)$$

где $\varphi(x), \psi_k(x)$ ($k = 0,1$) - заданные непрерывные достаточно гладкие функции.

Уравнение (1) в терминах функций

$$u_k^\pm(x, y) = u(x, y), (x, y) \in D_k^\pm \quad (k = 0,1), \quad (11)$$

с учетом (6) и (7), можно записать в форме системы

$$L\bar{u}^\pm(x, y) = \cos(x + y\sqrt{-\operatorname{sgn}(y)}) \cos(x - y\sqrt{-\operatorname{sgn}(y)}) A\bar{u}^\pm(x, y), (x, y) \in D_0^\pm, \quad (12)$$

где

$$\bar{u}^\pm(x, y) = (u_0^\pm(x, y), u_1^\pm(e^x, y))^T, A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (13)$$

которая в характеристических переменных

$$\xi = x + y\sqrt{-\operatorname{sgn}(y)}, \eta = x - y\sqrt{-\operatorname{sgn}(y)} \quad (14)$$

будет иметь вид матричного уравнения

$$4\bar{u}_{\xi\eta}^\pm(\xi, \eta) = \cos \xi \cos \eta A\bar{u}^\pm(\xi, \eta). \quad (15)$$

Используя известную [1] для уравнения (15) функцию Римана

$$R(t, q; \xi, \eta) = J_0(i\sqrt{A\sigma(t, q; \xi, \eta)}),$$

где

$$\sigma(t, q; \xi, \eta) = \int_t^\xi \cos r dr \int_q^\eta \cos s ds = (\sin \xi - \sin t)(\sin \eta - \sin q), \quad (16)$$

согласно [2, с.43] можно записать общее решение уравнения (15) в форме

$$\begin{aligned} \bar{u}^\pm(\xi, \eta) = & J_0(i\sqrt{A\sigma(0,0;\xi,\eta)})\bar{u}^\pm(0,0) + \\ & + \int_0^\xi J_0(i\sqrt{A\sigma(t,0;\xi,\eta)})\bar{\phi}_1^\pm(t)dt + \int_0^\eta J_0(i\sqrt{A\sigma(0,q;\xi,\eta)})\bar{\phi}_2^\pm(q)dq, \end{aligned} \quad (17)$$

где $\bar{\phi}_1^\pm(t), \bar{\phi}_2^\pm(t)$ - произвольные дважды непрерывно дифференцируемые вектор-функции; $i = \sqrt{-1}$, $J_0(z)$ - функция Бесселя [3, с.727] первого рода нулевого порядка.

Поскольку матрица A из (13) имеет различные собственные значения $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$, то она приводима к диагональному виду, т.е. существует

матрица T_A ($|T_A| \neq 0$) такая, что $T_A^{-1}AT_A = \Lambda_A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, причем $T_A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, а

$$T_A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Значит,

$$J_0(i\sqrt{A\sigma}) = J_0(i\sqrt{T_A\Lambda_A T_A^{-1}\sigma}) = T_A J_0(i\sqrt{\Lambda_A\sigma}) T_A^{-1} =$$

$$= T_A \begin{pmatrix} J_0(i\sqrt{\lambda_1\sigma}) & 0 \\ 0 & J_0(i\sqrt{\lambda_2\sigma}) \end{pmatrix} T_A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \gamma_1(\sigma) & \gamma_2(\sigma) \\ \gamma_2(\sigma) & \gamma_1(\sigma) \end{pmatrix}, \quad (18)$$

где

$$\gamma_n(\sigma) = J_0(i\sqrt{\lambda_1\sigma}) - (-1)^n J_0(i\sqrt{\lambda_2\sigma}) \quad (n=1,2). \quad (19)$$

Поэтому из равенства (17), в силу (18), (19), (11) и возвращения к старым переменным по формулам (14), найдем общее решение уравнения в форме

$$u_k^\pm(\alpha_2^k(x), y) = \int_0^{z_0^\pm} \phi_1^\pm(t) J_0(i\sqrt{\sigma(t, 0; z_0^\pm, \bar{z}_0^\pm)}) dt + \\ + \int_0^{\bar{z}_0^\pm} \phi_2^\pm(t) J_0(i\sqrt{\sigma(0, t; z_0^\pm, \bar{z}_0^\pm)}) dt, \quad (x, y) \in D_0^\pm \quad (k=0,1) \quad (20)$$

или

$$u_k^\pm(x, y) = \int_0^{z_k^\pm} \phi_1^\pm(t) J_0(i\sqrt{\sigma(t, 0; z_k^\pm, \bar{z}_k^\pm)}) dt + \\ + \int_0^{\bar{z}_k^\pm} \phi_2^\pm(t) J_0(i\sqrt{\sigma(0, t; z_k^\pm, \bar{z}_k^\pm)}) dt, \quad (x, y) \in D_k^\pm \quad (k=0,1), \quad (20')$$

где $\alpha_2^0(x) = x$, $\alpha_2^1(x) = \alpha_2(x) = e^x$; $\phi_1^\pm(t)$, $\phi_2^\pm(t)$ – произвольные дважды непрерывно дифференцируемые функции; $z_k^+ = \alpha_1^k(x) + iy$, $\bar{z}_k^+ = \alpha_1^k(x) - iy$, $z_k^- = \alpha_1^k(x) + y$, $\bar{z}_k^- = \alpha_1^k(x) - y$ ($k=0,1$), причем $\alpha_1^0(x) = x$, $\alpha_1^1(x) = \alpha_1(x) = \ln x$ и

$$u_0^\pm(x_1 - 0, y) = u_1^\pm(x_1 + 0, y) = 0, \quad 0 \leq y \leq h, \quad \frac{\partial}{\partial x}(u_0^\pm(x_1 - 0, y)) \neq \frac{\partial}{\partial x}(u_1^\pm(x_1 + 0, y)), \quad 0 < y < h. \quad (21)$$

В равенствах (20), (20') учтено, что $\bar{u}^\pm(0,0)$ из (17), т.е. в старых переменных $\bar{u}^\pm(0,0) = 0$ в силу условий (5) и (21).

На основании (16) равенство (20) можно записать в форме

$$u_k^\pm(\alpha_2^k(x), y) = \int_0^{z_0^\pm} \phi_1^\pm(t) J_0(i\sqrt{\sin \bar{z}_0^\pm (\sin z_0^\pm - \sin t)}) dt + \\ + \int_0^{\bar{z}_0^\pm} \phi_2^\pm(t) J_0(i\sqrt{\sin z_0^\pm (\sin \bar{z}_0^\pm - \sin t)}) dt, \quad (x, y) \in D_0^\pm \quad (k=0,1)$$

или, после интегрирования по частям и соответствующих замен, в виде

$$u_k^\pm(\alpha_2^k(x), y) = M_0(\sin z_0^\pm, \sin \bar{z}_0^\pm) - \\ - \int_0^1 M_0(s \cdot \sin z_0^\pm, s \cdot \sin \bar{z}_0^\pm) \frac{\partial}{\partial s} J_0(i\sqrt{(1-s) \sin z_0^\pm \sin \bar{z}_0^\pm}) ds, \quad (x, y) \in D_0^\pm \quad (k=0,1). \quad (22)$$

Для уравнения (22) имеет место формула обращения

$$M_0(\sin z_0^\pm, \sin \bar{z}_0^\pm) = u_k^\pm(\alpha_2^k(x), y) [или u_k^\pm(\sin z_0^\pm, \sin \bar{z}_0^\pm)] + \\ + \frac{i\sqrt{\sin z_0^\pm \cdot \sin \bar{z}_0^\pm}}{2} \int_0^1 \frac{u_k^\pm(s \cdot \sin z_0^\pm, s \cdot \sin \bar{z}_0^\pm)}{\sqrt{s(1-s)}} I_1(i\sqrt{s(1-s) \sin z_0^\pm \sin \bar{z}_0^\pm}) ds, \quad (x, y) \in D_0^\pm, \quad (23)$$

где

$$M_0(s \cdot \sin z_0^\pm, s \cdot \sin \bar{z}_0^\pm) = \int_0^{\arcsin(s \cdot \sin z_0^\pm)} \phi_1^\pm(r) dr + \int_0^{\arcsin(s \cdot \sin \bar{z}_0^\pm)} \phi_2^\pm(r) dr, \quad (24)$$

$$u_k^\pm(s \cdot \sin z_0^\pm, s \cdot \sin \bar{z}_0^\pm) = u_k^\pm \left(\alpha_2^k \left(\frac{1}{2} [\arcsin(s \cdot \sin z_0^\pm) + \arcsin(s \cdot \sin \bar{z}_0^\pm)] \right), \right. \\ \left. \mp \frac{i^{(1\pm)/2}}{2} [\arcsin(s \cdot \sin z_0^\pm) - \arcsin(s \cdot \sin \bar{z}_0^\pm)] \right) \quad (k=0,1), \quad (25)$$

причем при $s=1$ из (24), (25) получим

$$M_0(\sin z_0^\pm, \sin \bar{z}_0^\pm) = \int_0^{\bar{z}_0^\pm} \phi_1^\pm(r) dr + \int_0^{\bar{z}_0^\pm} \phi_2^\pm(r) dr, \quad u_k^\pm(\sin z_0^\pm, \sin \bar{z}_0^\pm) = u_k^\pm(\alpha_2^k(x), y);$$

$I_1(s) = \frac{d}{ds} I_0(s)$; $I_0(s)$, $I_1(s)$ – модифицированные функции Бесселя [3, с.730] первого рода нулевого и первого порядка.

При $y=0$ выражения (22), (23) после преобразований представимы равенствами

$$u_k^\pm(\alpha_2^k(x), 0) = \bar{M}_0^\pm(x, 0) - \int_0^x \bar{M}_0^\pm(t, 0) \frac{\partial}{\partial t} J_0(i\sqrt{\sin x(\sin x - \sin t)}) dt, \quad 0 < x < x_1,$$

$$\bar{M}_0^\pm(x, 0) = u_k^\pm(\alpha_2^k(x), 0) + \int_0^x u_k^\pm(\alpha_2^k(t), 0) \frac{\sin x \cdot \cos t}{\sin t \cdot \cos x} \frac{\partial}{\partial x} I_0(i\sqrt{\sin t(\sin x - \sin t)}) dt, \quad 0 < x < x_1,$$

где
$$\bar{M}_0^\pm(x, 0) = M_0(\sin x, \sin x) = \int_0^x [\phi_1^\pm(r) + \phi_2^\pm(r)] dr.$$

Кроме того, из (22), (23) можно получить следующие формулы взаимного обращения

$$u_{ky}^\pm(\alpha_2^k(x), 0) = \bar{M}_{0y}^\pm(x, 0) - \\ - \int_0^x \bar{M}_{0y}^\pm(t, 0) \frac{\cos x \cdot \sin t}{\sin x \cdot \cos t} \frac{\partial}{\partial t} J_0(i\sqrt{\sin x(\sin x - \sin t)}) dt, \quad 0 < x < x_1,$$

$$\bar{M}_{0y}^\pm(x, 0) = u_{ky}^\pm(\alpha_2^k(x), 0) + \int_0^x u_{0y}^\pm(\alpha_2^k(t), 0) \frac{\partial}{\partial x} I_0(i\sqrt{\sin t(\sin x - \sin t)}) dt, \quad 0 < x < x_1,$$

где
$$\bar{M}_{0y}^\pm(x, 0) = M_{0y}(\sin z_0^\pm, \sin \bar{z}_0^\pm) \Big|_{y=0} = i^{(1\pm)/2} [\phi_1^\pm(x) - \phi_2^\pm(x)].$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Чуриков Ф.С., Кокинасиди П.Д. О построении функции Римана для компактных уравнений методом промежуточного аргумента // Труды Кубинского университета. – Т. 222, 1976, с. 5-12.
2. Векуа И.Н. Новые методы решения эллиптических уравнений. – ОГИЗ, М.-Л., 1948. 296 с.
3. Прудников А.Н., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Специальные функции. Москва: Наука, 1983. 750 с.

О ВЫЧИСЛЕНИИ КРИВИЗНЫ КРИВОЛИНЕЙНОГО МУЛЬТИПЛИКАТИВНОГО ИНТЕГРАЛА С ПОМОЩЬЮ ИНВАРИАНТОВ ПОВЕРХНОСТЕЙ

В.В. Черкасова

ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет им. И. С. Тургенева»

Мультипликативный интеграл является одним из универсальных математических понятий [2]. Основные идеи и конструкции, связанные с ним, достаточно просты и естественны.

В настоящий момент особый интерес представляют собой задачи, связанные с геометрическим приложением мультипликативного интеграла. Однако и на сегодняшний день данная проблема является мало изученной, поскольку во многих случаях геометрическая природа мультипликативного интеграла попросту игнорируется.

Ранее в статье [1] была рассмотрена одна из задач механики неголономных систем – задача о качении шара по поверхности, в которой интеграл качения представляет собой криволинейный мультипликативный интеграл вида:

$$Y = \int_{\gamma}^{\eta} E + P_1(u, v)du + P_2(u, v)dv.$$

Однако при рассмотрении совместно с качением шара движения жестко закрепленного с ним репера, задача приобретает новый геометрический смысл, так как позволяет оценивать инварианты поверхности качения. При построении решения, исследовании характеристик и инвариантов поверхности качения был использован криволинейный мультипликативный интеграл [3].

ТЕОРЕМА. Для криволинейного мультипликативного интеграла качения

$$Y = \int_{\gamma}^{\eta} E + P_1(u, v)du + P_2(u, v)dv$$

кривизна может быть вычислена по формуле:

$$K = (2H - 1)\Phi([\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v])$$

где $H = \frac{1}{2} \frac{GL-2MF+EN}{EG-F^2}$ – средняя кривизна поверхности качения $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$,

$$P_1(u, v) = \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}} \Phi(\mathbf{r}_u \times [\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v]) + \Lambda_u,$$

$$P_2(u, v) = \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}} \Phi(\mathbf{r}_v \times [\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v]) + \Lambda_v,$$

$$\Phi : x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & z & -y & 0 \\ -z & 0 & x & 0 \\ y & -x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ x(u, v) & y(u, v) & z(u, v) & 0 \end{pmatrix}, ds^2 = Edu^2 + 2Fdu dv + Gdv^2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению кривизна криволинейного мультипликативного интеграла

$$Y = \int_{\gamma}^{\cap} E + P_1(u, v)du + P_2(u, v)dv$$

будет находится по формуле:

$$K = \frac{\partial P_2}{\partial u} - \frac{\partial P_1}{\partial v} - [P_1, P_2] = \frac{\partial \Phi(\mathbf{r}_v \times \mathbf{n})}{\partial u} + \frac{\partial \Lambda_v}{\partial u} - \frac{\partial \Phi(\mathbf{r}_u \times \mathbf{n})}{\partial v} - \frac{\partial \Lambda_u}{\partial v} - [P_1, P_2].$$

Учитывая правило дифференцирования векторного произведения векторной функции скалярного аргумента

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r}_1(t) \times \mathbf{r}_2(t)) = \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} \times \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_1 \times \frac{d\mathbf{r}_2}{dt},$$

и свойства отображения Φ :

1. $\forall \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ и $\alpha, \beta = \text{const}$: $\Phi(\alpha \mathbf{r}_1 + \beta \mathbf{r}_2) = \alpha \Phi(\mathbf{r}_1) + \beta \Phi(\mathbf{r}_2)$.
2. $\forall \mathbf{r}(t)$,

$$\frac{\partial}{\partial t} \Phi(\mathbf{r}(t)) = \Phi \left(\frac{\partial \mathbf{r}(t)}{\partial t} \right),$$

получим:

$$K = \Phi(\mathbf{r}_{vu} \times \mathbf{n} + \mathbf{r}_v \times \mathbf{n}_u) - \Phi(\mathbf{r}_{uv} \times \mathbf{n} + \mathbf{r}_u \times \mathbf{n}_v) - [P_1, P_2].$$

Будем предполагать, что вектор функция $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ непрерывна и смешанные частные производные второго порядка $\mathbf{r}_{uv} = \mathbf{r}_{vu}$, тогда

$$K = \Phi(\mathbf{r}_v \times \mathbf{n}_u) - \Phi(\mathbf{r}_u \times \mathbf{n}_v) - [P_1, P_2].$$

Для сопровождающего базиса $\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v, \mathbf{n}$ произвольной поверхности $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ справедливы деривационные формулы Вейнгартена:

$$\mathbf{n}_u = \frac{FM - GL}{EG - F^2} \mathbf{r}_u + \frac{FL - EM}{EG - F^2} \mathbf{r}_v,$$

$$\mathbf{n}_v = \frac{FN - GM}{EG - F^2} \mathbf{r}_u + \frac{FM - EN}{EG - F^2} \mathbf{r}_v,$$

где $(-d\mathbf{r}, d\mathbf{n}) = L(u, v)du^2 + 2M(u, v)dudv + N(u, v)dv^2$ —вторая квадратичная форма поверхности.

Тогда, учитывая $\mathbf{r} \times \mathbf{r} = 0$, справедливо равенство

$$K = \frac{-FM + GL}{EG - F^2} \Phi(\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) - \frac{FM - EN}{EG - F^2} \Phi(\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) - [P_1, P_2].$$

Выражение $[P_1, P_2]$ представляет собой коммутатор двух матриц и находится по формуле:

$$[P_1, P_2] = P_1P_2 - P_2P_1.$$

В данном случае,

$$\begin{aligned} [P_1, P_2] = & \left(\frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \Phi(\mathbf{r}_u \times [\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v]) + \Lambda_u \right) \times \\ & \times \left(\frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \Phi(\mathbf{r}_v \times [\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v]) + \Lambda_v \right) - \\ & - \left(\frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \Phi(\mathbf{r}_v \times [\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v]) + \Lambda_v \right) \times \\ & \times \left(\frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \Phi(\mathbf{r}_u \times [\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v]) + \Lambda_u \right). \end{aligned}$$

Необходимо также отметить, что на основании свойства векторного произведения $[a \times [b \times c]] = (b(a \cdot c)) - (c(a \cdot b))$, для векторных произведений $\mathbf{r}_u \times [\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v]$ и $\mathbf{r}_v \times [\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v]$ справедливы формулы:

$$\mathbf{r}_u \times [\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v] = \mathbf{r}_u(\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v) - \mathbf{r}_v(\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_u) = F\mathbf{r}_u - E\mathbf{r}_v,$$

$$\mathbf{r}_v \times [\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v] = \mathbf{r}_u(\mathbf{r}_v, \mathbf{r}_v) - \mathbf{r}_v(\mathbf{r}_v, \mathbf{r}_u) = G\mathbf{r}_u - F\mathbf{r}_v.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} [P_1, P_2] &= \left(\frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \Phi(F\mathbf{r}_u - E\mathbf{r}_v) \right) \left(\frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \Phi(F\mathbf{r}_u - E\mathbf{r}_v) + \Lambda_v \right) - \\ &- \left(\frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \Phi(F\mathbf{r}_u - E\mathbf{r}_v) + \Lambda_v \right) \left(\frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \Phi(F\mathbf{r}_u - E\mathbf{r}_v) \right) = \\ &= -\Phi(\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v). \end{aligned}$$

Учитывая, данное равенство получим

$$\begin{aligned} K &= \frac{GL - FM}{EG - F^2} \Phi(\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) - \frac{FM - EN}{EG - F^2} \Phi(\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) + \Phi(\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) = . \\ &= \left(\frac{GL - 2FM + EN}{EG - F^2} - 1 \right) \Phi(\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) = (2H - 1) \Phi(\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v), \end{aligned}$$

где $H = \frac{1}{2} \frac{GL + EN - 2FM}{EG - F^2}$ - средняя кривизна поверхности $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$. Теорема доказана.

В частном случае, когда поверхность качения задана уравнением $z = f(x, y)$, для криволинейного мультипликативного интеграла

$$Y = \int_{\gamma}^{\cap} E + P_1(x, y)dx + P_2(x, y)dy$$

кривизна может быть вычислена по формуле:

$$\begin{aligned} K &= -2H \begin{pmatrix} 0 & -1 & -f_y & 0 \\ 1 & 0 & f_x & 0 \\ f_y & -f_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & -f_y & 0 \\ 1 & 0 & f_x & 0 \\ f_y & -f_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= (1 - 2H) \begin{pmatrix} 0 & -1 & -f_y & 0 \\ 1 & 0 & f_x & 0 \\ f_y & -f_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

где $H = \frac{1}{2} \frac{GL - 2MF + EN}{EG - F^2} = \frac{1}{2} \frac{(1 + f_y^2)f_{xx} - 2f_x f_y f_{xy} + (1 + f_x^2)f_{yy}}{(1 + f_x^2 + f_y^2)^{3/2}}$ - средняя кривизна поверхности качения $z = f(x, y)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мантуров О.В.* Об одной задаче теории мультипликативного интеграла. Дифференциальная геометрия и приложения. – М. 1982. с. 3 – 17. – Деп. в ВИНТИ 22.03.83, е 1442 – 83 Деп.
2. *Мантуров О.В.* Мультипликативный интеграл. Итоги науки и техники. Сер. Пробл. геом. 1990.–с. 167–215.
3. *Черкасова В.В.* О связностях, индуцированных качением шара по поверхности. – Известия вузов. Математика, 2009. – с. 79 –84

Методы дискретных особенностей в задачах математической физики

УДК 532.546

ИССЛЕДОВАНИЯ ВЛИЯНИЯ НАЛИЧИЯ ВКЛЮЧЕНИЙ И ДРЕНАЖНОЙ СИСТЕМЫ НА ПРОЦЕСС ОСЕДАНИЯ БУГРА ГРУНТОВЫХ ВОД

И. В. Афанаскина

ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет им. И. С. Тургенева»
e-mail: *kartinka0893@rambler.ru*

К. Г. Чистякова

ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет им. И. С. Тургенева»
e-mail: *kapitosh.ka@yandex.ru*

В данной работе исследуется влияние включений различной природы и дренажного устройства на процесс оседания бугра грунтовых вод под действием силы тяжести.

Рассмотрим двумерную задачу об одновременной фильтрации двух жидкостей в пористой среде в постановке Лейбензона-Маскета при наличии дренажного устройства и одного или нескольких полупроницаемых включений произвольной формы [1]. При пренебрежении вязкостью и плотностью внешней жидкости получаем систему интегрального и дифференциального уравнений, которая описывает опускание грунтовых вод под действием силы тяжести и при наличии дренажного устройства для откачки воды и одного полупроницаемого включения в пласте грунта:

$$g_t(\bar{x}, t) - 2 \sum_{k=S_1, t} G[g_k, L_k](\bar{x}, t) = -2\Pi(\bar{x})K_1 + 2\phi_0,$$

$$g_{S_1}(\bar{x}, t) - 2\lambda_{S_1} \sum_{k=S_1, t} G[g_k, L_k](\bar{x}, t) = 0,$$

где $\lambda_{S_1} = \frac{(K(\bar{x}) - K_1(\bar{x}))}{(K(\bar{x}) + K_1(\bar{x}))}$, $G[g_k, L_k](\bar{x}, t) = \int_{L_k} g_k(\bar{y})\Omega(\bar{x}, \bar{y})dl_y$, $\Omega(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{\partial\Phi_1(\bar{x}, \bar{y})}{\partial\mathbf{n}_y}$, $\Phi_1(\bar{x}, \bar{y})$ — функция Грина — потенциал стока с полным расхо-

дом, равным -1 , $\Pi(\bar{x}) = -x_2$ — потенциал силы тяжести, $K(\bar{x})$ — проницаемость вне замкнутого контура L_{S_1} , $K_1(\bar{x})$ — проницаемость внутри замкнутого контура L_{S_1} , границы L_{S_1} и L_t входят в область протекания процесса. Дифференциальное уравнение движения границы L_t :

$$\frac{\partial \bar{x}}{\partial t} = V_0 + \sum_{k=S_1,t} \mathbf{V}[g_k, L_k](\bar{x}) \quad \text{на } L_t,$$

Здесь $V_0 = K \text{grad} \phi_0$ — скорость квазипотенциала невозмущенного течения ϕ_0 .

Область совместной фильтрации жидкостей ограничена непроницаемой прямой L_I , разделяющей грунт и непроницаемые породы. Задача исследовалась при наличии одного включения при $\lambda_{S_1} = 0.8$. Первоначальная высота бугра $H_0 = 1.35$. На рисунке 1 построены последовательные положения подвижной границы L_t при $n = 400$, $q = 1.5$. $T = 1.97$ — время достижения стока, а на рисунке 2 — поле скоростей в момент времени $t = 0$.

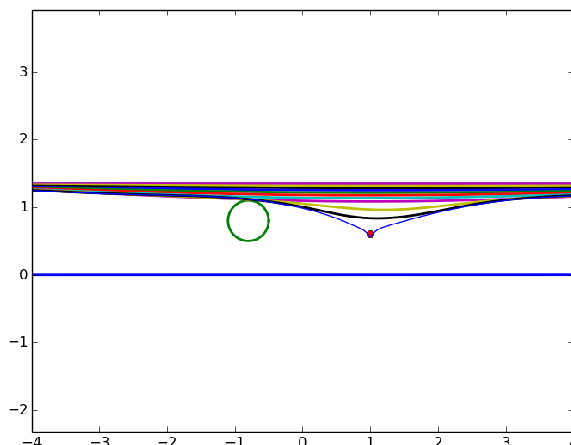


Рисунок 1 — Процесс оседания грунтовых вод в однородном слое при $n = 400$, $dt = 0.01$, $\lambda_{S_1} = 0.8$, $q = 1.5$

Далее проводилось исследование с двумя включениями с применением среднеквадратического приближения функций для повышения точности счета при построения линии эволюции. Построены последовательные положения L_t при $n = 400$, $q = 1.0$, $\lambda_{S_1} = -0.4$, $\lambda_{S_2} = -0.4$. $T = 0.116$ — время достижения стока (рисунок 3).

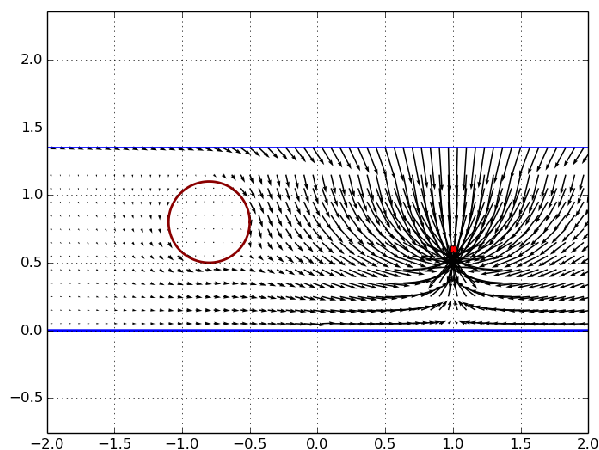


Рисунок 2 — Поле скоростей в момент времени $t=0$ при $n = 400$, $q = 1.5$, $\lambda_{S_1} = 0.8$

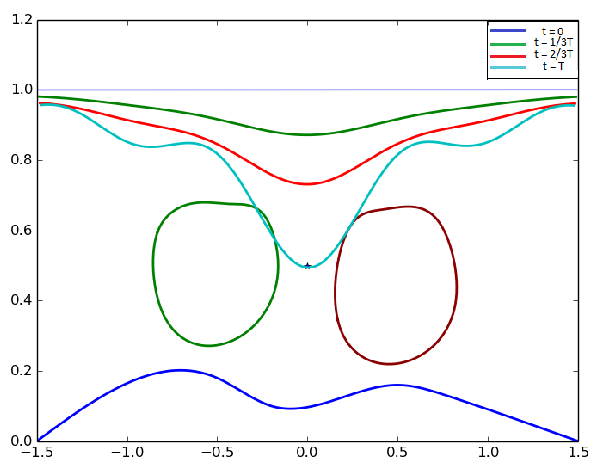


Рисунок 3 — Процесс оседания грунтовых вод в однородном слое при $n = 400$, $dt = 0.005$, $\lambda_{S_1} = -0.4$, $\lambda_{S_2} = -0.4$, $q = 1$

Таким образом полученные результаты говорят о непосредственном влиянии наличия включений и дренажной системы на скорость оседания бугра грунтовых вод.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дорофеева В.И., Афанаскина И.В., Чистякова К.Г. Исследование задачи оседания грунтовых вод при наличии полупроницаемых включений и дренажной системы // Теория операторов, комплексный анализ и математическое моделирование.— 2016. — С. 143–144.

ИССЛЕДОВАНИЕ ЭВОЛЮЦИИ ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА РАЗНОВЯЗКИХ ЖИДКОСТЕЙ К СТОКУ

Д.В. Крыштопин, аспирант

ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет им. И.С. Тургенева»

e-mail: *Vopros317@mail.ru*

Ю.С. Федяев, к.ф.-м.н., доц.

ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет им. И.С. Тургенева»

e-mail: *FedyaevYS@gmail.com*

В работе для поля скоростей поставлена задача об эволюции границы раздела жидкостей различных вязкостей в пористой среде. Задача решается на основе метода дискретных особенностей и параметрических сплайнов. Исследовано стягивание к стоку первоначально круглой границы. Произведено сопоставление результатов численного счёта с известными решениями.

Постановка задачи. Рассмотрим плоскопараллельную линейную напорную фильтрацию жидкости постоянной вязкости и плотности в однородном слое пористого грунта постоянной толщины. Скорость фильтрации \vec{v} в области течения D определяется законом Дарси и удовлетворяет уравнению неразрывности, которые в безразмерных величинах имеют вид [1]:

$$\vec{v}(M, t) = \frac{K}{\mu} \nabla \varphi(M, t), \quad M \in D, \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(v_x(M, t)) + \frac{\partial}{\partial y}(v_y(M, t)) = 0, \quad M \in D, \quad (2)$$

где $K = \text{const}$ – проницаемость грунта, μ – вязкость, $\varphi(M, t)$ – потенциал скорости фильтрации, t – время, M – точка наблюдения. Из уравнения (1) следует, что

$$\frac{\partial}{\partial x}(v_y(M, t)) - \frac{\partial}{\partial y}(v_x(M, t)) = 0, \quad M \in D. \quad (3)$$

Физическая скорость и скорость фильтрации взаимосвязаны равенством

$$\frac{d\vec{r}_M}{dt} = \vec{v}(M, t), \quad M \in D, \quad (4)$$

где $\vec{r}_M = x\vec{i} + y\vec{j}$ – радиус-вектор точки M (\vec{i}, \vec{j} – орты декартовой системы координат Oxy).

Рассмотрим течение двух несмешивающихся жидкостей. Жидкость вязкости μ_1 занимает область D_1 , а жидкость вязкости μ_2 – область D_2 ($D = D_1 \cup D_2$). На границе раздела жидкостей капиллярные силы пренеб-

режимо малы. При движении одна из них полностью замещает другую. На подвижной границе раздела жидкостей Γ_t выполняются условия непрерывности давления и расхода жидкости, которые для касательной v_τ и нормальной v_n составляющей скорости фильтрации имеют вид:

$$\mu_1 v_\tau^+(M, t) = \mu_2 v_\tau^-(M, t), \quad v_n^+(M, t) = v_n^-(M, t), \quad M \in \Gamma_t. \quad (5)$$

Здесь и далее «+» («-») обозначают предельные значения функций при подходе к границе Γ_t со стороны (противоположной стороны) нормали \vec{n} . Орт \vec{n} к границе Γ_t направлен в область D_1 и образует с ортом $\vec{\tau}$ правую двойку.

Полагаем, что в любой момент времени $t \geq 0$ границу Γ_t можно моделировать гладкой кривой. Параметрическое уравнение границы имеет вид (l – параметр)

$$\vec{r}_M = \vec{r}_M(l, t), \quad M \in \Gamma_t. \quad (6)$$

Положение границы в начальный момент времени $t = 0$ задаётся уравнением

$$\vec{r}_M = \vec{r}_0(l, 0), \quad M \in \Gamma_0. \quad (7)$$

В последующие моменты времени $t > 0$ движение границы Γ_t описывается уравнением

$$\frac{d\vec{r}_M}{dt} = \frac{\vec{v}^+(M, t) + \vec{v}^-(M, t)}{2}, \quad M \in \Gamma_t. \quad (8)$$

Задача эволюции границы Γ_t состоит в том, что по заданным источникам (стокам) течения и её начальному положению (7) надо найти положение границы в последующие моменты времени (6). Для этого необходимо решить систему уравнений (2), (3), (8) с учётом граничных условий (5) и начального условия (7).

Исследование задачи. Поставленная задача сводится к решению системы интегрального уравнения на подвижной границе Γ_t и дифференциального уравнения движения этой границы с начальными условиями. Разработана численная схема решения задачи на основе метода дискретных особенностей и параметрических сплайнов [2].

Пусть эксплуатационная скважина дебита q расположена в начале координат. Её работу моделируем точечным стоком мощности $\Pi = -q$ (q – модуль мощности). Обозначим d – кратчайшее расстояние от границы Γ_t до точки расположения стока. Граница Γ_t в начальный момент времени представляет собой окружность радиуса R с центром в точке $(0, 0)$ (рисунок 1). Контур скважины представляет собой окружность радиуса R_C , $R_C \ll d$.

Картина течения в этом случае представляет собой радиальное стягивание. В любой момент времени радиус границы Γ_t может быть вычислен по формуле [3]

$$r_a = \sqrt{R_0^2 - \frac{q}{\pi}t}, \quad (9)$$

где R_0 – первоначальный радиус.

Время достижения границей Γ_t контура скважины назовём временем заводнения T_a , которое при $r_a = R_C$ и $R_0 = d$ можно выразить из формулы (9):

$$T_a = \frac{\pi}{q} (d^2 - R_C^2). \quad (10)$$

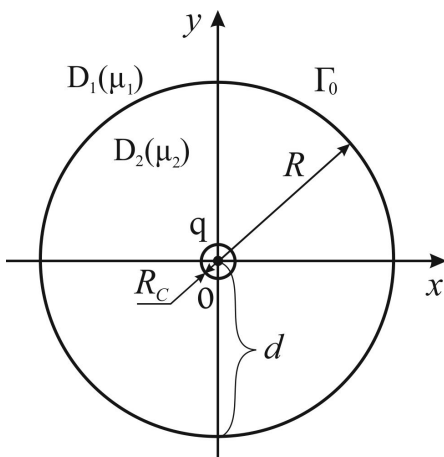


Рисунок 1 – Постановка задачи

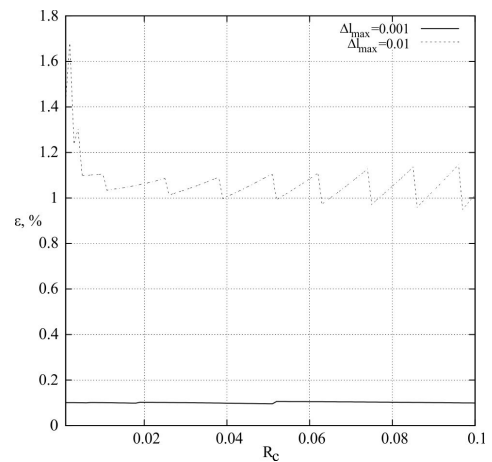


Рисунок 2 – Погрешность вычисления времени T . Кубические параметрические сплайны

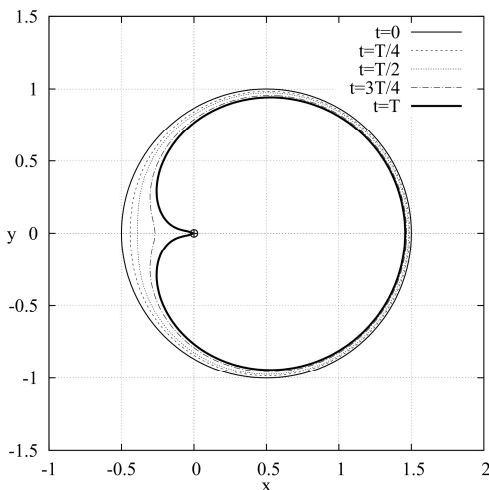


Рисунок 3 – Эволюция границы Γ_t при $\lambda = 0.5$

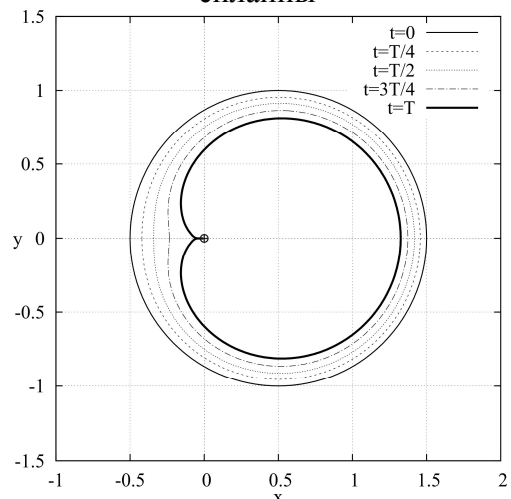


Рисунок 4 – Эволюция границы Γ_t при $\lambda = -0.5$

Обозначим через T время заводнения, посчитанное численно. Оно определяется как наименьшее время, за которое любая из точек границы

Γ_t попадает в круг радиуса R_C . Исследуем зависимость этого времени от различных параметров задачи.

Время T зависит от радиуса скважины R_C . На рисунке 2 показана зависимость относительной погрешности $\varepsilon = |T_a/T - 1| \cdot 100\%$ от радиуса скважины R_C . Расчёты проведены с использованием кубических параметрических сплайнов при $R=1$, $q=-\pi$, $\lambda=0$, $n=400$, $\Delta l_{\max} = 0.01$; 0.001 . Здесь параметр $\lambda = (\mu_2 - \mu_1)/(\mu_2 + \mu_1)$, n – число точек равномерного разбиения границы Γ_0 , Δl_{\max} – ограничение на максимальное смещение точек границы [2].

В случае $\Delta l_{\max} = 0.01$ численный расчёт плохо согласуется с аналитическим решением. Относительная погрешность ε велика при малом радиусе скважины. При больших R_C погрешность имеет «пилообразный» характер, что связано с дискретностью схемы. В случае $\Delta l_{\max} = 0.001$ численный расчёт лучше согласуется с аналитическим решением, и относительная погрешность ε не превышает 0.11%. В этом случае радиус скважины R_C можно выбирать любым, но с соблюдением условия, что $R_C \ll d$. Для численных расчётов оптимальным является радиус скважины порядка Δl_{\max} .

Поместим центр окружности радиуса R в точку $(0.5, 0)$. В этом случае для модели «разноцветных» жидкостей ($\mu_1 = \mu_2$) справедлива формула (10). Учитывая, что $R_C \ll d$, из (10) получаем

$$T_a \approx \pi d^2 / q. \quad (11)$$

Формула (11) задаёт характерное время заводнения скважины.

На рисунках 3 и 4 представлена эволюция границы при $\lambda = 0.5$ и $\lambda = -0.5$ соответственно. Расчёты проведены с использованием кубических параметрических сплайнов при $R=1$, $q=-\pi/4$, $n=400$, $R_C = 0.001$, $\Delta l_{\max} = 0.001$. Видим, что прорыв жидкости к скважине происходит по кратчайшему расстоянию.

На рисунке 5 представлена зависимость времени заводнения T от параметра λ . Расчёты проведены с помощью кубических параметрических сплайнов при $R=1$, $q=-\pi/4$, $n=400$, $R_C = 0.001$, $\Delta l_{\max} = 0.001$. При $\lambda < 0$ (более вязкая жидкость снаружи по отношению к границе Γ_t) время T больше единицы, а при $\lambda > 0$ (менее вязкая жидкость снаружи по отношению к границе Γ_t) – меньше единицы.

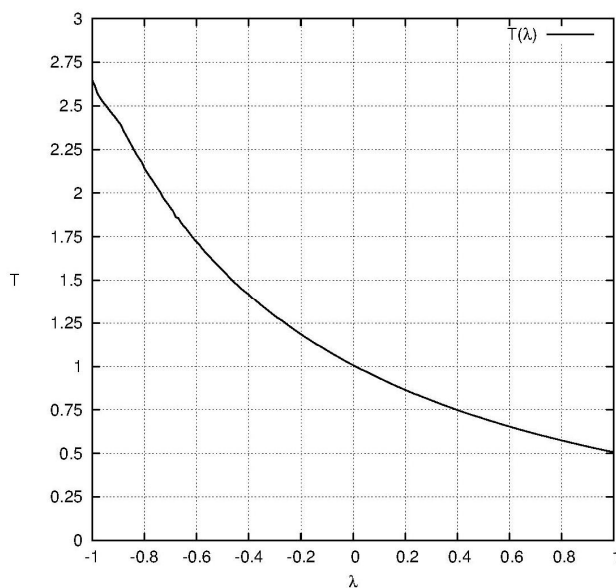


Рисунок 5 – Зависимость времени T от параметра λ

В таблице 1 дано сопоставление полученных результатов с уже известными [3, 4, 5]. Параметр $\eta_{F(D,N)} = \left| T/T_{F(D,N)} - 1 \right| \cdot 100\%$ характеризует расхождение результатов. Здесь T_F обозначает время заводнения, приведённое в работе Федяева Ю.С., T_D – в работе Данилова В.Л. и Каца Р.М., T_N – в работе Никольского Д.Н. Видим, что результаты хорошо согласуются, и $\eta_F < 6\%$, $\eta_D < 5\%$, $\eta_N < 7\%$.

Таблица 1 – Сопоставление с известными результатами

λ	1	0,75	0,5	0,25	0	-0,25	-0,5	-0,75	-1
T	0,507	0,594	0,7	0,835	1	1,238	1,557	2,029	2,648
$\eta_F, \%$	5,6	4,3	1,4	0,6	0,0	0,2	1,1	2,0	—
$\eta_D, \%$	3,5	4,2	4,5	4,4	0,0	0,7	1,5	—	—
$\eta_N, \%$	6,1	4,2	1,4	0,6	0,0	1,0	2,7	3,8	—

Из проведённых вычислительных экспериментов следует, что используемый численный метод позволяет моделировать эволюцию границы раздела Γ_t разнотипных жидкостей при стягивании её к стоку. Полученные результаты хорошо согласуются с известными численными и аналитическими решениями [3, 4, 5]. В дальнейшем планируется исследовать течения различных жидкостей в неоднородном и анизотропном грунте.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пивень В.Ф. Математические модели фильтрации жидкости. Орёл: Изд-во ФГБОУ ВПО «Орловский государственный университет», ПФ «Картуш», 2015. 408 с.

2. Крыштопин Д.В., Федяев Ю.С. Исследование эволюции границы раздела разнвязких жидкостей в поступательном потоке // Избранные труды физико-математического факультета Орловского государственного университета / под общ. ред. Т.Н. Можаровой. Орёл: ОГУ, 2016. С. 43-52.
3. Федяев Ю.С. Математическое моделирование эволюции двумерной границы раздела жидкостей различной вязкости в кусочно-однородных и кусочно-неоднородных слоях грунта. Дисс. ... канд. физ.-мат. наук: 05.13.18. Орёл, 2005. 191 с.
4. Данилов В.Л., Кац Р.М. Гидродинамические расчеты взаимного вытеснения жидкостей в пористой среде. М.: Недра, 1980. 264 с.
5. Никольский Д.Н. Математическое моделирование работы системы скважин в однородных и неоднородных слоях с подвижной границей раздела жидкостей различной вязкости. Дисс. ... канд. физ.-мат. наук: 05.13.18. Орёл, 2001. 191 с.

УДК 532.546

ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ДВУМЕРНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ В АНИЗОТРОПНОЙ НЕОДНОРОДНОЙ ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

В.Ф. Пивень, д.ф.-м.н., проф.

ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет им. И.С. Тургенева»
e-mail: *PivenVF@gmail.com*

Ставятся граничные задачи фильтрации (первая и вторая краевые задачи, задача сопряжения, задача эволюции границы раздела жидкостей) в анизотропной неоднородной пористой среде и указывается единый для них метод исследования.

Ключевые слова: граничные задачи, метод исследования, фильтрация, анизотропная неоднородная среда.

1. Двумерную фильтрацию в анизотропном неоднородном пористом слое проводимости $P = HK$ (H – толщина слоя, $K = (K_{ij})$ – тензор его проницаемости) описывают в области D плоскости основания слоя обобщённый потенциал φ и функция тока ψ , которые как функции декартовых координат точки $M = (x, y)$ и времени t (t – параметр) удовлетворяют эллиптической системе уравнений [1].

$$P_{11} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + P_{12} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad P_{21} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + P_{22} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad M \in D, \quad (1.1)$$

где $P_{11} > 0$ ($P_{22} > 0$), $D(P_s) \equiv P_{11}P_{22} - (P_{12} + P_{21})^2 / 4 > 0$.

В случае стационарной фильтрации для уравнений (1.1) имеют место задачи: первая и вторая краевые задачи с условиями на границах σ_1 и σ_2 области D :

$$\varphi^+(M) = f_1(M), \quad M \in \sigma_1, \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial \varphi(M)}{\partial v_M} = f_2(M) \quad (v_M\text{-конормаль}), \quad M \in \sigma_2, \quad (1.3)$$

Задача сопряжения на границе Γ раздела областей D_1 и D_2 ($D_1 \cup D_2 = D$), проводимости слоя в которых P_1 и P_2 ($P_v = k_v P, k_v > 0$ - константы, $v=1,2$), с условиями (орт к Γ направлен в область D_1)

$$\varphi^+(M) = \varphi^-(M), \quad \psi^+(M) = \psi^-(M), \quad M \in \Gamma. \quad (1.4)$$

В ряде случаев к условиям (1.2) – (1.4) необходимо присоединить следующие условия. В случае неоднородного слоя, когда область D ограничена сингулярной линией $\sigma_0 = \sigma_{01} \cup \sigma_{02}$, на которой проводимость $P = \infty$ (на части σ_{01}) и $P = 0$ (на части σ_{02}), то

$$\varphi^+(M) = 0, \quad M \in \sigma_{01}; \quad \psi^+(M) = 0, \quad M \in \sigma_{02}. \quad (1.5)$$

Если область D содержит бесконечно удалённую точку, то

$$\varphi(M) = O(1/r), \quad |K(M) \cdot \nabla \varphi(M)| = O(1/r^2) \quad \text{при } r \rightarrow \infty \quad (1.6)$$

В поставленных стационарных задачах по заданной проводимости слоя $P = P(M)$ и условиям (1.2) – (1.6) отыскиваются функции $\varphi(M)$ и/или $\psi(M)$.

В задаче эволюции границы $\Gamma_t: \overline{r}_M = \overline{r}_M(t, s)$ (s – параметр) раздела жидкостей необходимо по заданным проводимости слоя $P(M)$, вязкостям μ_1, μ_2 и плотностям ρ_1, ρ_2 жидкостей и начальному положению:

$$\text{При } t = 0 \quad \Gamma_t = \Gamma_0: \overline{r}_M(t, s) = \overline{r}_M(0, s) \quad (1.7)$$

найти положение Γ_t при $t > 0$. Для этого следует решить систему уравнений (1.1) и дифференциального уравнения движения границы Γ_t ($\overline{v}^\pm(M, t)$ – предельные значения скорости на Γ_t):

$$\frac{d\overline{r}_M(t, s)}{dt} = \frac{\overline{v}^+(M, t) + \overline{v}^-(M, t)}{2}, \quad M \in \Gamma_t \quad (1.8)$$

с начальным условием (1.7) и граничными условиями

$$\mu_1 \varphi^+(M, t) - \mu_2 \varphi^-(M, t) = (\rho_2 - \rho_1) \Pi(M, t), \quad (1.9)$$

$$\psi^+(M, t) = \psi^-(M, t), \quad M \in \Gamma_t$$

где $\Pi(M, t)$ – потенциал массовой силы, действующей на жидкость; орт нормали к Γ_t направлен в область фильтрации жидкости с μ_1 и ρ_1 . В случае задачи эволюции могут иметь место также условия (1.2) – (1.6), записанные для функций $\varphi(M, t)$ и $\psi(M, t)$.

2. Исследование поставленных граничных задач вызывает значительные математические трудности, обусловленные сложностью системы уравнений (1.1). Приведём эти уравнения, а значит граничные задачи к каноническому (простейшему) виду [1]. Перейдём от переменных x, y (ком-

плескной плоскости $z = x + iy$) к новым переменным ξ, η (комплексной плоскости $\zeta = \xi + i\eta$), которые взаимосвязаны гомеоморфным (взаимно однозначным и непрерывным) преобразованием $\xi = \xi(x, y)$, $\eta = \eta(x, y)$ или $\zeta = \zeta(z)$, удовлетворяющим уравнению Бельтрами вида

$$\frac{\partial \zeta}{\partial z} - \mu(z) \frac{\partial \zeta}{\partial \bar{z}} = 0 \quad \left(\mu(z) = \frac{P_{22} - P_{11} - i(P_{12} + P_{21})}{P_{22} + P_{11} + 2\sqrt{D(P_S)}}, |\mu(z)| < 1 \right).$$

В плоскости ζ получим относительно комплексного потенциала

$$W = \varphi + i \frac{\Psi}{P'} \quad \left(P' = \sqrt{D(P_S)} - i\sqrt{D(P_a)}, D(P_a) = (P_{12} - P_{21})^2 / 4 \right)$$

уравнение

$$\frac{\partial W}{\partial \zeta} + A(W - \bar{W}) = 0 \quad \left(A = \frac{\bar{P}'}{P' + \bar{P}'} \frac{\partial \ln P'}{\partial \zeta} \right), \quad (2.1)$$

которые являются комплексным представлением в плоскости ζ канонических уравнений.

Далее, условия (1.2) – (1.7), (1.9) и уравнения (1.8) записываем в плоскости ζ относительно функций $\varphi(\zeta)$, $\psi(\zeta)$ и, следовательно, комплексного потенциала $W(\zeta)$. Тем самым граничные задачи принимают в плоскости ζ канонический вид.

3. В случае ортотропного однородного слоя (P_{ij} – константа, $P_{12} = P_{21}$) получены в конечном виде решения ряда граничных задач [1]. В общем случае анизотропного неоднородного слоя граничные задачи исследованы [1, 2] на основе представления решений обобщённым интегралом типа Коши, ядра которого выражаются через фундаментальные решения уравнения (2.1).

Исследованные граничные задачи являются математическими моделями добычи флюидов (воды, нефти) из природных пластов грунта сложной геологической структуры, а также прогнозирования и мониторинга миграции загрязнения в таких пластах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пивень В.Ф. Математические модели фильтрации жидкости. – Орёл: Издательство ФГБОУ ВПО Орловский государственный университет, 2015. – 408 с.
2. Пивень В.Ф. Исследование граничной задачи сопряжения двумерных течений в кусочно-анизотропном и неоднородном пористом слое // Дифференциальные уравнения. – 2016. – Т.52, №9. – с.1207-1212.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАБОТЫ СОВЕРШЕННОЙ СКВАЖИНЫ В АНИЗОТРОПНОМ ГРУНТЕ

В.Ф. Пивень, д.ф.-м.н., проф.

ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет им. И.С. Тургенева»

e-mail: *PivenVF@gmail.com*

Д.Г. Лекомцев, ст. преп.

ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет им. И.С. Тургенева»

e-mail: *lekomtcevdg@yandex.ru*

Поставленная плоскопараллельная задача о дебите скважин в анизотропном однородном пласте грунта с произвольным контуром питания, исследуется в случае замкнутого (гладкого и кусочно-гладкого) контура питания. Изучено влияние анизотропии грунта на дебит скважины.

Экспериментальные данные свидетельствуют [1-3], что реальные породы нефтяные породы-коллекторы и породы, слагающие водоносные горизонты, характеризуется весьма сложной структурой. Свойства горных пород, слагающих такие пласты, сильно зависят от выбранного направления. Совершенная (по степени вскрытия пласта) эксплуатационная скважина дебита Q расположена в горизонтальном пласте постоянной толщины. Дебит Q приходится на единицу толщины пласта. Грунт пласта недеформируемый анизотропный и однородный, характеризуется коэффициентом проницаемости K – тензором второго ранга (вообще говоря, несимметричным). В предположении плоскопараллельности задачи $K = (K_{ij})$, $i, j = 1, 2$. Компоненты тензора (K_{ij}) – постоянные.

Согласно [4] обобщенный потенциал ϕ удовлетворяет всюду в области D (за исключением изолированных особых точек ϕ) уравнению

$$\nabla \cdot (K \cdot \nabla \phi(z)) = 0, \quad z \in D. \quad (1)$$

Это уравнение относится к эллиптическому типу, если компоненты тензора проницаемости (K_{ij}) удовлетворяют условиям [5]:

$$K_{11} > 0 \quad (K_{22} > 0), \quad D(K_s) = K_{11}K_{22} - \left(\frac{K_{12} + K_{21}}{2} \right)^2 > 0,$$

где $D(K_s)$ - определитель симметричной части $K_s = (K + K^T)/2$ тензора $K = (K_{ij})$, $K^T = (K_{ji})$ - транспонированный тензор.

Для обобщенного потенциала ϕ заданы граничные условия

$$\phi^+(z) = \alpha_n(z), \quad z \in \sigma_n, \quad (2)$$

$$\phi(z) = \alpha_c(z), \quad z \in \sigma_c, \quad (3)$$

где $\alpha_n(z)$ и $\alpha_c(z)$ - непрерывные периодические функции, знаком “+” отмечено предельное значение функции при подходе к контуру питания изнутри области.

Трудность решения поставленной задачи обусловлена сложным видом уравнения (1). Исследование задачи значительно упрощается, если уравнение (1) привести к каноническому виду (уравнению Лапласа). Для этого введем вспомогательную комплексную плоскость $\zeta = \xi + i\eta$, которая взаимосвязана с физической плоскостью z гомеоморфным (аффинным) преобразованием координат (прямым и обратным) [5]:

$$\zeta = z + \mu_0 \bar{z}, \quad z = \frac{\zeta - \mu \bar{\zeta}}{1 - |\mu|^2}, \quad \left(\mu_0 = \frac{K_{22} - K_{11} - i(K_{12} + K_{21})}{K_{22} + K_{11} + 2\sqrt{D(K_s)}}, |\mu_0| < 1 \right). \quad (4)$$

Задача имеет аналитическое решение в частных случаях. Когда контур питания σ_n - прямая для случая одной скважины [6] или для прямолинейной батареи скважин, расположенной параллельно бесконечному прямолинейному контуру питания [7]. Если скважина расположена вблизи прямолинейной непроницаемой границы [8], или в случае кусочно-однородного ортотропного грунта с прямолинейной границей раздела областей фильтрации [9] можно найти решение с использованием теоремы сопряжения на прямой [4]. Если контур σ'_n питания принимает форму окружности на вспомогательной плоскости ζ , также может быть найдено аналитическое решение [10].

Данные аналитические решения частных задач можно использовать как тестовые. В общем случае произвольной замкнутой гладкой границы σ_n решение задачи находится численным методом дискретных особенностей [11]. Данный метод численного решения задачи о работе скважины в анизотропной среде можно использовать также в случае, если контуром питания σ_n является кусочно-гладким, например прямоугольным [10]. При равных площадях, форма контура питания не оказывает принципиального воздействия на ход кривых, отображающих изменение дебита скважины в анизотропном грунте [12-14]. Анизотропия может оказывать существенное влияние на картину течения. В отличие от изотропного случая в анизотропном грунте линии тока и обобщенного потенциала взаимно не перпендикулярны [15]. Диагональные элементы тензора проницаемости приводят к наиболее существенному изменению картины, а также оказывает определяющее влияние дебита скважины [6]. Влияние недиагональных компонентов тензора проницаемости приводит к повороту всей картины течения на некоторый угол, а также к закручиванию линий тока. При этом влияние антисимметричной части тензора проницаемости на дебит крайне незначительно [12].

ЛИТЕРАТУРА

1. Дмитриев Н.М., Максимов В.М., Дмитриев М.Н., Кузьмичев А.Н., Мурадов А.В., Кравченко М.Н. Двухфазная фильтрация в анизотропных средах. Теория и эксперимент. XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики: Тезисы докладов, 20-24 августа 2015 г., Казань. – С. 1201-1203.
2. Дмитриев Н.М., Мамедов М.Т., Максимов В.М. Фильтрация с предельным градиентом в анизотропных средах. Теория и эксперимент. Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. – 2011. – №4(3). – С. 749-750.
3. Семенов А.А. Экспериментальные исследования фильтрационных течений в анизотропных пористых средах: Автореф. дис. канд. тех. наук. – Москва, РГУ нефти и газа им. И. М. Губкина, 2007. – 26 с.
4. Пивень В.Ф. Математические модели фильтрации жидкости. – Орёл: Издательство ФГБОУ ВПО Орловский государственный университет, 2015. – 408 с.
5. Пивень В.Ф. Исследование граничных задач плоскопараллельных течений жидкости в анизотропной пористой среде. Дифференциальные уравнения. – 2009. – Т.45, №9. – С. 1286-1297.
6. Пивень В.Ф., Лекомцев Д.Г. Математическое моделирование работы совершенной скважины с прямолинейным контуром питания в анизотропном пласте грунта. Ученые записки Орловского государственного университета. – 2012. – №3. – С.69-74.
7. Лекомцев Д.Г. Математическое моделирование работы батареи совершенных скважин в анизотропном грунте. Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. – 2015. – №1. – С. 94-102.
8. Лекомцев Д.Г. Работа совершенной скважины вблизи прямолинейной, непроницаемой границы, в анизотропной пористой среде. IX международная конференция «Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий»: Тезисы докладов, 20-26 сентября 2016 г., Воронеж. – С. 207-209.
9. Лекомцев Д.Г. Работа совершенной скважины в ортотропном кусочно-однородном пласте грунта. IV Всероссийской научно-практической конференции с международным участием «Моделирование и наукоемкие информационные технологии в технических и социально-экономических системах»: Тезисы докладов, 12-15 апреля 2016 г., Новокузнецк. – С. 240-245.
10. Пивень В.Ф., Лекомцев Д.Г. Аналитическое и численное моделирование работы совершенной скважины в анизотропном однородном пласте грунта. Вычислительная механика сплошных сред. – 2016. – Т. 9, № 4. – С. 389-399.

11. Лифанов И.К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. – М.: ТОО Янус, 1995. – 520 с.
12. Пивень В.Ф., Лекомцев Д.Г. Исследование работы совершенной скважины в анизотропном однородном пласте грунта. Ученые записки Орловского государственного университета. – 2014. – Т.59, №3. – С.83-88.
13. Лекомцев Д.Г. Работа совершенной скважины с прямоугольным контуром питания в анизотропном грунте. XII международной конференции «Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования»: Тезисы докладов, 12-18 июля 2015 г., Владикавказ. - С. 201-202.
14. Лекомцев Д.Г. Влияние формы контура питания на работу совершенной скважины в анизотропном пласте. Международная конференция «Алгебра, анализ и смежные вопросы математического моделирования»: Тезисы докладов, 26-27 июля 2015 г., Владикавказ. – С. 70-72.
15. Лекомцев Д.Г. Математическое моделирование фильтрационных течений в анизотропно-однородном слое пористой среды. НАУКА – ОБЩЕСТВУ. Труды V Региональной междисциплинарной конференции молодых ученых, 9-11 октября 2015 г., Владикавказ. – С. 9-18.

УДК 519.6

ПРИМЕНЕНИЕ МАЛОРАНГОВЫХ АППРОКСИМАЦИЙ К РЕШЕНИЮ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЗАДАЧАХ АЭРОДИНАМИКИ И ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

С.Л. Ставцев, к.ф.-м.н., доц.

Институт вычислительной математики РАН

e-mail: sstass2000@mail.ru

В работе описываются особенности применения малоранговых аппроксимаций к решению задач аэродинамики и электродинамики. Особое внимание уделено построению параллельных алгоритмов построения аппроксимаций для прикладных задач.

В ИВМ РАН разработаны численные методы аппроксимации больших плотных матриц. Эти методы получили свое развитие благодаря решению ряда прикладных задач (задач аэродинамики, задач дифракции), в которых возникает необходимость работать с большими плотными матрицами. Подобного рода матрицы встречаются при решении интегральных уравнений.

Интерес к интегральным уравнениям обусловлен несколькими причинами:

- интегральные уравнения позволяют понизить размерность задачи, сводя, например, трехмерную задачу к интегральным уравнениям, записанным на границе области — двумерном многообразии;
- интегральные уравнения позволяют сводить краевые задачи в бесконечных областях к задачам на ограниченном носителе, как, например, метод объемного интегрального уравнения для задачи рассеяния;
- численные методы решения задач математической физики, основанные на использовании интегральных уравнений, являются хорошо масштабируемыми, что дает для них преимущество при реализации на многопроцессорной технике.

Серьезным фактором, затрудняющим применение интегральных уравнений в практических расчетах, являются затраты на вычисление, хранение и умножение на матрицу возникающей линейной системы. В подавляющем большинстве случаев она плотная, а, значит, при числе неизвестных n в общем случае на ее хранение требуется n^2 ячеек памяти. Долгое время именно за счет этого интегральные уравнения проигрывали в глазах инженеров-вычислителей подходам, основанным на дифференциальных уравнениях. Последние при дискретизации приводят к разреженным матрицам, на хранение которых требуется лишь $O(n)$ элементов памяти.

В ИВМ РАН научной группой под руководством Е.Е. Тыртышников разработан численный метод построения аппроксимации плотных матриц ([1]). Его основное достоинство заключается в том, что его можно использовать как «черный ящик», что дает определенное преимущество перед другими известными методами аппроксимаций. Во-первых, для его реализации достаточно знать информацию о взаимном расположении вихрей относительно расчетных точек и функцию вычисления скорости. После этого он может работать как "черный ящик". Во-вторых, для построения приближения достаточно вычислить малое число значений приближаемой функции. В-третьих, приближение строится с заранее заданной точностью. Методы малоранговых аппроксимаций матриц нашли широкое применение при решении задач аэродинамики [2, 3, 4] и дифракции волн [5, 6], т. е. в тех прикладных областях математического моделирования, где интегральные уравнения нашли широкое применение.

Обратимся к применению малоранговых аппроксимаций для решения аэродинамических задач. Вихревые методы являются одной из групп численных методов для решения аэрогидродинамических задач. Одним из наиболее активно развивающихся и широко применяемых направлений среди вихревых методов являются метод дискретных вихрей (МДВ) [7] и его модификации [8]. Метод дискретных вихрей нашел применение в аэродинамике летательных аппаратов, парашютов, в исследованиях ветровой

обстановки в условиях городской застройки, при моделировании перемещения смерчей, торнадо.

При моделировании вихревых течений методом дискретных вихрей основные вычислительные затраты приходятся на преобразование формы вихревых структур для каждого временного шага. Таким образом, возникает вопрос об ускорении вычислений в вихревых методах.

В методе дискретных вихрей [9-11] самой трудоемкой операцией является вычисление полей скоростей от вихревых рамок, расположенных на теле и вихревых элементах пелены в точках вихревой пелены:

$$\mathbf{w}(\mathbf{x}_i) = \mathbf{w}_\infty(\mathbf{x}_i) + \sum_{j=1}^n \Gamma_j \mathbf{w}_j(\mathbf{x}_i), i = 1, \dots, m, \quad (1)$$

где $\mathbf{w}_\infty(\mathbf{x}_i)$ – невозмущенная скорость набегающего потока, Γ_j – интенсивность j -го вихревого элемента (циркуляция рамки или интенсивность вихревого отрезка в пелене), $\mathbf{w}_j(\mathbf{x}_i)$ – скорость, индуцируемая в рассматриваемой точке пелены \mathbf{x}_i вихревым отрезком единичной интенсивности, которая вычисляется согласно закону Био-Савара по формуле:

$$\mathbf{w}_j(\mathbf{x}_i) = -\frac{1}{4\pi} \int_{[\mathbf{x}_j^-, \mathbf{x}_j^+]} \frac{d\mathbf{l}_y \times (\mathbf{x}_i - \mathbf{y})}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{y}|^3}. \quad (2)$$

В (2) $\int_{[\mathbf{x}_j^-, \mathbf{x}_j^+]}$ – криволинейный интеграл по отрезку $[\mathbf{x}_j^-, \mathbf{x}_j^+]$ (в (1) четырехугольной рамке соответствуют 4 слагаемых формулы (2)).

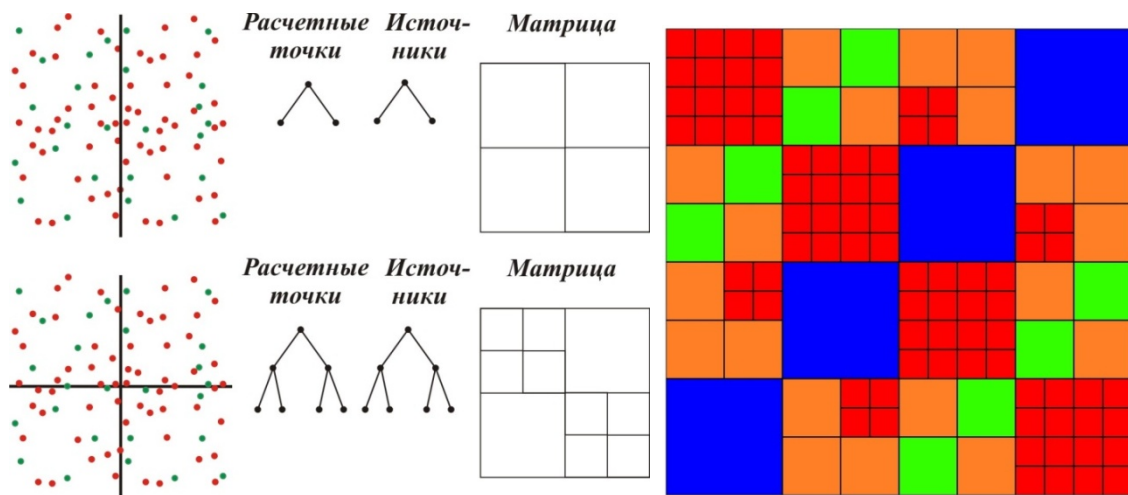


Рисунок 1 – Метод мозаичных аппроксимаций

Явный алгоритм расчета поля скоростей (1) выполняется за $O(mn)$ операций. Для расчета скоростей за $o(mn)$ операций применим алгоритм неполной крестовой аппроксимации [1], [12]. Сформулируем задачу (1) на матричном языке. На первый взгляд можно найти приближение к матрице, элементы которой являются векторами и вычисляются согласно формуле (2). Однако, как показывают численные реализации быстрых алгоритмов,

на аппроксимацию матрицы уходит 95% времени и только 5% – на умножение полученного приближения на вектор. Поэтому экономнее сжать одну матрицу, даже если это приведет к нескольким умножениям матрицы на вектор.

Каждый вектор скорости (1) с помощью матрицы A рассчитывается по формуле:

$$\mathbf{w}(\mathbf{x}_i) = \mathbf{w}_\infty(\mathbf{x}_i) + \mathbf{c}_i \times \mathbf{x}_i + \mathbf{d}_i, \quad \mathbf{c}_i = (A\mathbf{a})_i, \quad \mathbf{d}_i = (A\mathbf{b})_i, \quad (3)$$

где \mathbf{a} и \mathbf{b} – вектор-столбцы длиной n с векторными элементами $\mathbf{a}_j = \Gamma_j \mathbf{l}_j$ и $\mathbf{b}_j = \mathbf{a}_j \times \mathbf{x}_j$, $j = 1, \dots, n$ соответственно.

На каждом временном шаге расчет аппроксимации матрицы выполняется согласно стандартному алгоритму, описанному в [1], [12]. При этом вся матрица разбивается на блоки. Если блок соответствует разделенным источникам и приемникам, то его можно сжать, не вычисляя всех его элементов (см. рисунок 1). На рисунке красным цветом выделены плотные блоки, другими цветами – малоранговые блоки. Процедура сжатия блоков в формализованном виде приведена в виде алгоритма 1.

Алгоритм 1

Построение малоранговой аппроксимации матрицы с заданной точностью

На входе: Функция вычисления элементов матрицы $A = (a_{ij})$ (согласно формуле (3)), размер матрицы $m \times n$, точность вычисляемого приближения ε .

На выходе: множители, где $\tilde{A} = UV^T$ – приближения матрицы A т.е. $\|A - \tilde{A}\|_F \leq \varepsilon \|A\|_F$; U и V имеют размеры $m \times r$ и $n \times r$ соответственно (r – ранг построенного приближения).

1. $p := 1$; $j_1 := \lceil n/2 \rceil$; $\tilde{A} := 0$ {инициализация: p – номер итерации; j_1 – начальный столбец}
2. **repeat**
3. $u_{ip} := a_{ij_p} - \sum_{k=1}^{p-1} u_{ik} v_{j_p k}$, $i = 1, \dots, m$ {вычисляем столбец матрицы, по нему очередной вектор $u_p = (u_{ip})$ в U }
4. $i_p = \max_i |u_{ip}|$ {определяем номер очередной строки i_p }
5. $v_{ip} := a_{i_p j} - \sum_{k=1}^{p-1} u_{i_p k} v_{jk}$, $i = 1, \dots, n$ {вычисляем строку матрицы, по ней очередной вектор $v_p = (v_{ip})$ в V }
6. $j_{p+1} = \max_i |v_{ip}|$ {определяем номер столбца j_{p+1} для следующей итерации}
7. $U_p = (U_{p-1} \ u_p)$; $V_p = (V_{p-1} \ v_p)$
8. $p := p + 1$
9. **until** $(\sqrt{\min(m, n) - (p-1)} (\|U_p V_p^T\|_F - \|U_{p-1} V_{p-1}^T\|_F) \geq \varepsilon \|U_p V_p^T\|_F)$ AND $(p < \min(m, n))$

10. **return** $U := U_p, V := V_p$

Из анализа алгоритма 1 видно, что для построения приближения достаточно знать функцию вычисления матричного элемента a_{ij} . Таким образом, алгоритм работает как "черный ящик", что дает ему несомненное преимущество перед остальными методами. Более того, для построения мало-ранговой аппроксимации нет необходимости вычислять все mn элементов матрицы, а достаточно вычислить только их малую часть, а именно, $r(m+n)$ элементов. При $r \ll m$ и $r \ll n$ значительно выигрыш получается в вычислении вектора $y = UV^T x$: требуется только $r(m+n)$ действий вместо mn .

Особенность решения задачи аэродинамики заключается в том, что на каждом временном шаге необходимо вычислять новую матрицу, а умножение с вычисленной матрицей выполняется только один раз. С другой стороны матричные блоки вычисляются независимо друг от друга. Эти особенности вычислений приводят к тому, что для решения аэродинамической задачи нет необходимости хранить блоки: достаточно после вычисления блоков сразу выполнить необходимое умножение блока на часть вектора, а после этого данные блоков удалить. В результате умножение матрицы на вектор будет выполняться очень быстро, а дополнительной памяти для этого почти не потребуется.

Другое преимущество независимости вычисления блоков заключается в улучшении параллельных свойств алгоритма: данный алгоритм имеет хорошо масштабируемую параллельную реализацию.

Эффективность представленного алгоритма тестировалась на задаче обтекания трехкупольной парашютной системы (рисунок 2).

На рисунке 3 приведено безразмерное время расчета за n временных шагов разными методами (время расчета первого шага принято за 1) и ускорение расчетов с помощью скелетонного метода. При $n=240$ размер сжимаемой матрицы составляет 140457×79767 .

В таблице 1 приведены результаты расчетов, демонстрирующие масштабируемость параллельного алгоритма построения аппроксимации матрицы (размер матрицы 63590×27026).

Таблица 1 – Время расчета матрицы

Число процессоров	1	2	4	8	16	32	64	128	256
Время (сек)	140,1	71,36	36,21	18,51	10,52	5,25	3,01	1,97	1,90
Ускорение	1	1,96	3,87	7,57	13,3	26,7	46,5	71,1	73,7

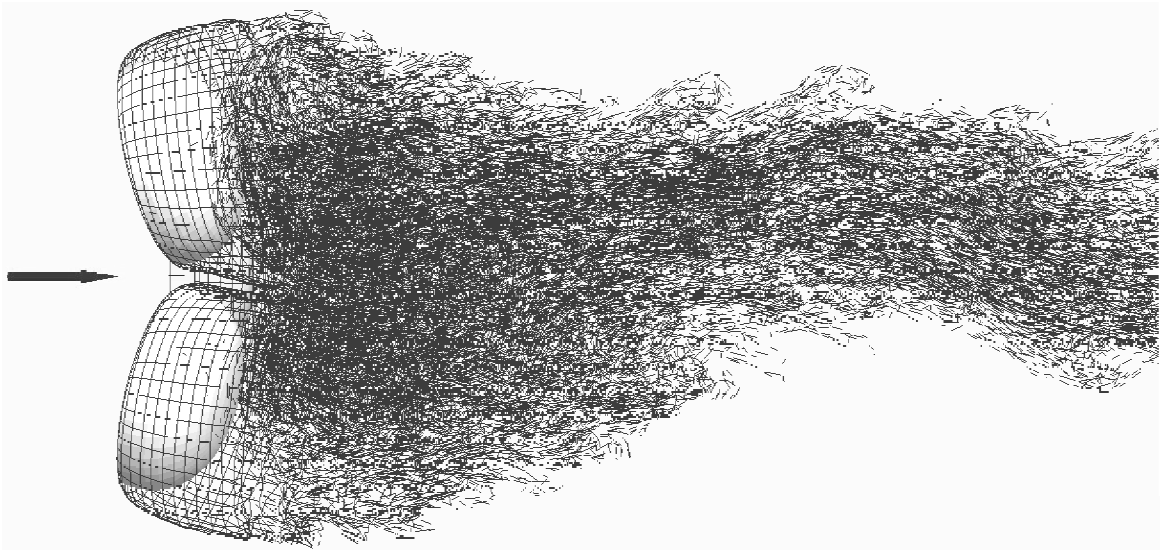


Рисунок 2 – Вихревая пелена при обтекании трехкупольной парашютной системы

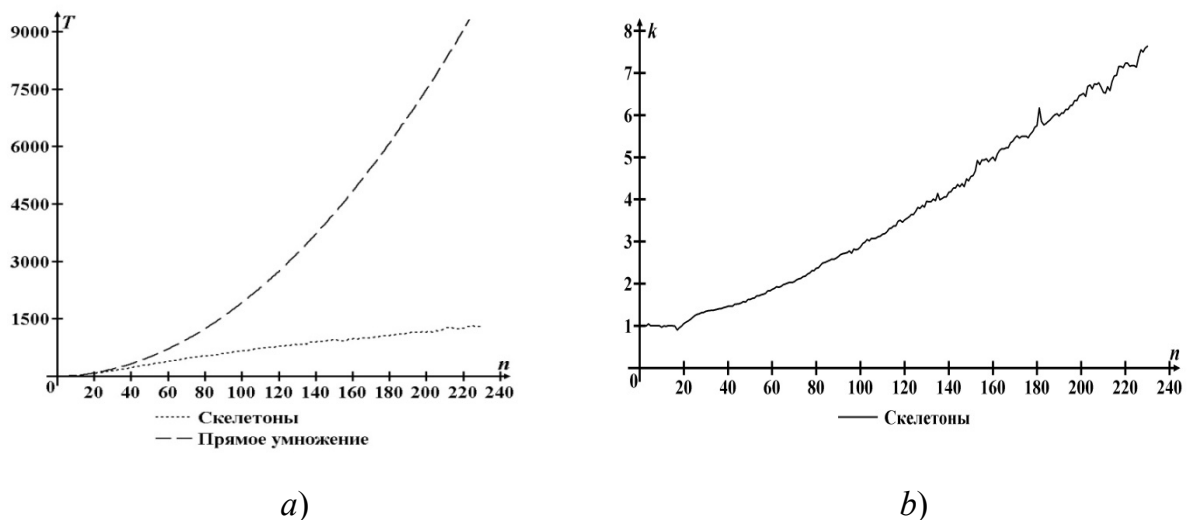


Рисунок 3 – Ускорение расчетов в задаче аэродинамики для разного числа шагов:

a) – время расчета, *b)* – ускорение вычисления от 1 шага до шага n

Другой пример, для которого широко применяются интегральные уравнения и малоранговые аппроксимации – это задачи дифракции. При решении задач дифракции необходимость быстрого решения возникающих систем алгебраических уравнений выходит на первое место. В этих задачах размер матрицы определяется не только формой объекта, но и частотой рассеиваемого излучения: размерность матрицы растет пропорционально квадрату частоты. В результате необходимо вычислить большую матрицу (размера 10^6 - 10^7), а также решить систему с такой матрицей.

Задача о дифракции плоской монохроматической волны состоит в отыскании электромагнитного поля в области Ω вне помещенных в среду тел

$$\vec{E}_{full} = \vec{E}_0 + \vec{E}, \quad \vec{H}_{full} = \vec{H}_0 + \vec{H}, \quad (4)$$

где $\vec{E}_0(M)$ и $\vec{H}_0(M)$ - заданные первичные (падающие) электрические и магнитные поля, определяемые выражениями $\vec{E}_0(M) = \vec{E}_0 e^{i\vec{k}\vec{r}}$ и $\vec{H}_0(M) = \vec{E}_0 e^{i\vec{k}\vec{r}} \vec{k} \times H_0(M)$, \vec{E} и \vec{H} - неизвестные вторичные (отраженные) электрическое и магнитное поля, удовлетворяющие

1) уравнениям

$$\Delta \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0, \quad \text{div} \vec{E} = 0, \quad (5)$$

где $k = \frac{\omega}{c}$, $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0}} = \frac{c_0}{\sqrt{\epsilon \mu}}$, c - скорость света в данной среде;

2) условиям Зоммерфельда на бесконечности:

$$E(M) \rightarrow 0, \quad H(M) \rightarrow 0,$$

$$\frac{\partial E(M)}{\partial \vec{\tau}} + ikE(M) = o\left(\frac{1}{|OM|}\right), \quad \frac{\partial H(M)}{\partial \vec{\tau}} + ikH(M) = o\left(\frac{1}{|OM|}\right) \quad \text{при } |OM| \rightarrow \infty \quad (6)$$

где O - точка начала координат, $\vec{\tau} = \overline{OM} / |OM|$, а также

3) условию Майкснера

$$\int_D (\nabla \vec{E})^2 dv < \infty, \quad \int_D (\nabla \vec{H})^2 dv < \infty \quad (7)$$

для любой ограниченной области D , лежащей вне тел (в области решения задачи), dv - элемент объема.

На поверхности тел Σ , которая предполагается идеально проводящей, должно выполняться условие равенства нулю касательной компоненты суммарного электрического поля, которое можно записать в виде: $\vec{E}_{full} \times \vec{n} = 0$, где \vec{n} - вектор нормали к поверхности. Данное условие равносильно условию

$$\vec{E}_\omega \times \vec{n} = \vec{f}, \quad (8)$$

где $\vec{f} = -\vec{E}_0 \times \vec{n}$.

Задача (4)-(8) сводится к решению интегрального уравнения

$$\frac{i}{\omega \epsilon} \int_{\Sigma} \{ \text{grad}_x \text{div}_x [\vec{j}(y) \Phi(x-y)] + k^2 \vec{j}(y) \Phi(x-y) \} d\sigma_y = \vec{f}(x), \quad x \in \Sigma, \quad (9)$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{4\pi} \frac{\exp(ikx)}{x}$. Интеграл в левой части (9) понимается в смысле конечного значения по Адамару [13]. Для численного решения этого уравнения используется вычислительная схема, представленная в [14].

В отличие от задачи аэродинамики в представленной задаче электродинамики необходимо один раз представить матрицу в малоранговом формате, а затем использовать полученное представление для решения системы. В качестве метода решения системы используется итерационный алгоритм, например, GMRES, в котором за счет малорангового представления матрицы процедура умножения матрицы на вектор выполняется гораздо быстрее.

Для такой специфики задачи электродинамики необходимо модифицировать алгоритм построения малоранговых аппроксимаций. В силу того, что одна и та же матрица умножается на векторы многократно, то необходимо хранить всю матрицу в оперативной памяти. Поэтому необходимо модифицировать алгоритм 1: малоранговые блоки, представленные на рисунке 1 можно вычислять не независимо друг от друга, а выражать факторы разложения малоранговых блоков через факторы малоранговых разложений потомков согласно дереву, по которому определялись блоки. В результате для блоков, соответствующих узлам дерева, не лежащими на самом большом уровне, необходимо хранить матрицы не размера $O(\max(n, m) \cdot r)$, а матрицы размера $O(r^2)$. Алгоритмы построения таких малоранговых представлений даны в работе [15], а также доступны на сайтах [16]. Матрицы в новом малоранговом представлении получили название H^2 матриц.

Применение новых методов аппроксимаций для решения задачи электродинамики на идеально проводящем цилиндре дает следующие результаты. Для матрицы размера 251904×251904 для хранения матрицы в обычном скелетном формате требуется 2140,48 Мб оперативной памяти, а в новом формате – только 662,72 Мб. Точность аппроксимации блоков матрицы бралась 10^{-2} . Частота падающей волны 8ГГц. Заметим, что для хранения матрицы без сжатия потребовалось бы 945 Гб оперативной памяти.

Несмотря на то, что матрица в новом формате сжимается лучше, новые методы аппроксимации имеют определенные недостатки. Из-за того, что данные одних блоков выражаются через другие, методы построения аппроксимации обладают гораздо худшими свойствами масштабируемости на параллельных вычислителях. В таблице 2 приведены коэффициенты ускорения для приведенного выше примера.

Таблица 2 – Масштабируемость алгоритмов

Число процессоров	1	2	4	8	16	32	64	128
Ускорение вычисления H^2 матриц	1	1,66	2,12	3,51	5,26	7,09	6,09	5,86
Ускорение матриц по алгоритму 1	1	1,91	3,61	7,24	13,38	24,51	41,31	58,84

В заключении отметим, что несмотря на эффективность сжатия матрицы в N^2 формате, применять новые алгоритмы для решения задачи аэродинамики нецелесообразно: для вычисления сдвига пелены с использованием алгоритма 1 памяти не требуется, в то время как для расчета N^2 матриц требуется хранить все малоранговые блоки в оперативной памяти.

Результаты получены при финансовой поддержке проектов РФФИ 14-01-00804 а и 13-01-12061 офи_м.

ЛИТЕРАТУРА

1. Tyrtysnikov E. E. Incomplete cross approximation in the mosaic skeleton method. *Computing*. 2000. V.64. № 4. P. 367–380.
2. Stavtsev S.L. Application of the method of incomplete cross approximation to a nonstationary problem of vortex rings dynamics. *Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling*. 2012. V. 27. № 3. P. 303–320.
3. Ставцев С.Л. Применение метода неполной крестовой аппроксимации к решению задач аэродинамики методом дискретных вихрей. *Научный вестник Московского государственного технического университета гражданской авиации*. 2013. № 188. С. 99–106.
4. Ставцев С.Л. Применение аппроксимации многомерных данных к решению динамических задач. *Математическое моделирование*. 2012. Т.24. № 12. С. 65–71.
5. Stavtsev S.L., Tyrtysnikov E.E. Application of mosaic-skeleton approximations for solving EFIE. *Progress In Electromagnetics Research Symposium Proceedings (PIERS), Moscow, Russia, 2009*. P. 1752–1755.
6. Stavtsev S.L. Block LU preconditioner for the electric field integral equation. *Progress In Electromagnetics Research Symposium Proceedings (PIERS), Prague, 2015*. P. 1523-1527.
7. Белоцерковский С.М., Лифанов И.К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях и их применение в аэродинамике, теории упругости, электродинамике/ М.: Наука. 1985. – 253с.
8. Дынникова Г.Я. Расчет трехмерных течений несжимаемой жидкости на основе дипольного представления завихренности. *Доклады академии наук*. 2011. Т. 437. № 1. С. 35–38.
9. Белоцерковский С.М., Ништ М.И. Отрывное и безотрывное обтекание тонких крыльев идеальной жидкостью/ М.: Наука. 1978. – 288с.
10. Апарин В.А., Дворак А.В. Метод дискретных вихрей с замкнутыми вихревыми рамками. *Труды ВВИА им. проф. Н.Е. Жуковского*. 1986. Вып. 1313. С. 424-432.
11. Лифанов И.К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент/ М.: ТОО “Янус”. 1995. – 520с.

12. Tyrtysnikov E.E. Mosaic-skeleton approximations. *Calcolo*. 1996. V. 33 № 1-2. P. 47–57.
13. Адамар Ж. Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа/ М.: Наука. 1978. – 352с.
14. Анфиногенов А.Ю., Лифанов И.К., Ненашев А.С., Петров Д.Ю. Численное решение некоторых двумерных задач прикладной электродинамики. *Электромагнитные волны и электронные системы*. 2001. Т. 6. № 2-3 С. 22-33.
15. Mikhalev A. Yu., Oseledets I. V. Iterative representing set selection for nested cross approximation. *Numerical linear algebra with applications*. 2016. V. 23. № 2. P. 230–248.
16. <https://bitbucket.org/muxas/h2tools> и <http://www.h2lib.org/>

УДК 532.546

ИССЛЕДОВАНИЕ ЭВОЛЮЦИИ ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА РАЗЛИЧНЫХ ЖИДКОСТЕЙ В АНИЗОТРОПНОМ СЛОЕ ПОРИСТОЙ СРЕДЫ

Ю.С. Федяев, к.ф.-м.н., доц.

ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет им. И.С. Тургенева»
e-mail: FedyaevYS@gmail.com

Исследуется плоскопараллельная задача эволюции границы раздела жидкостей различных вязкостей и плотностей в однородном ортотропном слое пористой среды. Область фильтрации ограничена прямолинейным контуром питания или непроницаемой границей. Задача сводится к решению системы интегрального и дифференциальных уравнений. Построен численный алгоритм решения задачи на основе метода дискретных особенностей. Исследована эволюция границы раздела жидкостей к эксплуатационной скважине.

1. Постановка задачи. Рассмотрим плоскопараллельную установившуюся фильтрацию несжимаемой жидкости в недеформируемом однородном анизотропном слое пористой среды постоянной толщины с тензором проницаемости $K = (K_{ij})$, $i, j = 1, 2$, которую описывают обобщённый потенциал φ и функция тока ψ . В области фильтрации имеет место система уравнений:

$$v_x = K_{11} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + K_{12} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_y = K_{21} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + K_{22} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (1)$$

Здесь: x, y – декартовы координаты в плоскости основания слоя; v_x, v_y – компоненты скорости фильтрации. Обобщённый потенциал $\varphi = -(p + \rho\Pi)/\mu$, где p – давление, μ – динамическая вязкость жидкости, ρ – плотность жидкости, Π – потенциал массовой силы.

Поставим двумерную задачу эволюции границы раздела жидкостей различных вязкостей Γ_t на комплексной плоскости $z = x + iy$. Область фильтрации D может ограничивать контур питания L_1 или непроницаемая граница L_2 , которые в общем случае будем обозначать L . Граница L является прямой линией, которая совпадает с осью Ox . Течение жидкости происходит в верхней полуплоскости ($y > 0$). На границе L_1 должно выполняться условие

$$\varphi^+(z, t) = \text{const}, \quad z \in L_1, \quad (2)$$

а на L_2 – условие

$$\psi^+(z, t) = \text{const}, \quad z \in L_2. \quad (3)$$

Здесь и далее знак «+» («−») означает предельное значение функции при подходе к границе со стороны (противоположной стороны) орта нормали. Нормаль направлена внутрь области D .

Граница Γ_t делит область фильтрации на части D_1 и D_2 ($D = D_1 \cup D_2$). В области D_1 движется жидкость вязкости μ_1 и плотности ρ_1 , а в области D_2 – жидкость вязкости μ_2 и плотности ρ_2 . Полагаем, что при движении одна жидкость полностью замещает другую и капиллярные силы пренебрежимо малы. Условия непрерывности давления и расхода жидкости имеют вид:

$$\mu_1\varphi^+(z, t) - \mu_2\varphi^-(z, t) = (\rho_2 - \rho_1)\Pi(z, t), \quad \psi^+(z, t) = \psi^-(z, t), \quad z \in \Gamma_t. \quad (4)$$

Здесь орт нормали к Γ_t направлен внутрь области D_1 .

Если область фильтрации содержит бесконечно удалённую точку и обобщённый потенциал $\varphi(z, t)$ не имеет там особенностей, то он должен быть регулярным в бесконечности:

$$\varphi(z, t) = O(|z|^{-1}), \quad |\nabla\varphi(z, t)| = O(|z|^{-2}) \quad \text{при} \quad |z| \rightarrow \infty. \quad (5)$$

Положение границы Γ_t на плоскости z в любой момент времени $t > 0$ задаём параметрическим уравнением (s – параметр)

$$z = z(t, s) \quad (x = x(t, s), \quad y = y(t, s)), \quad z \in \Gamma_t. \quad (6)$$

В начальный момент времени $t = 0$ положение границы Γ_0 известно

$$z_0 = z(0, s) \quad (x_0 = x(0, s), \quad y_0 = y(0, s)), \quad z_0 \in \Gamma_0. \quad (7)$$

Дифференциальные уравнения движения границы Γ_t имеют вид

$$\frac{dz}{dt} = \frac{v^+(z, t) + v^-(z, t)}{2}, \quad z \in \Gamma_t, \quad (8)$$

где $v(z, t) = v_x(x, y, t) + iv_y(x, y, t)$.

Таким образом, задано положение границы Γ_0 , потенциал массовой силы $\Pi(z,t)$, плотности ρ_1, ρ_2 и вязкости μ_1, μ_2 жидкостей, тензор проницаемости K . Необходимо найти положение границы Γ_t (6) при $t > 0$. Решение задачи состоит в интегрировании дифференциального уравнения (8) при начальном условии (7). Для нахождения скорости фильтрации $v(z,t)$ необходимо отыскать обобщённый потенциал $\varphi(z,t)$ и функцию тока $\psi(z,t)$, которые удовлетворяют уравнениям (1) и условиям (2)-(5).

2. Решение задачи. Поставленная задача формулируется на вспомогательной плоскости [1]. Это позволяет упростить систему уравнений (1), приведя её к каноническому виду. Полагаем, что в каждый момент времени $t \geq 0$ граница раздела жидкостей Γ_t является простой (без самопересечений) гладкой кривой. Следуя [2], комплексный потенциал представим интегралом типа Коши по этой кривой. Тогда исследование эволюции границы раздела жидкостей сводится к решению системы, состоящей из интегрального уравнения на границе Γ_t и дифференциального уравнения движения границы при начальном условии. Полученные уравнения решаются численно на основе метода дискретных особенностей [3-4].

Исследуем эволюцию границы раздела жидкостей к скважине. Пусть на физической плоскости z эксплуатационная скважина заданного дебита расположена на расстоянии d от границы L . Её работу моделируем точечным стоком. Контур скважины представляет собой окружность малого радиуса с центром в точке расположения стока. Граница Γ_0 – окружность радиуса d , центр которой находится в точке расположения скважины.

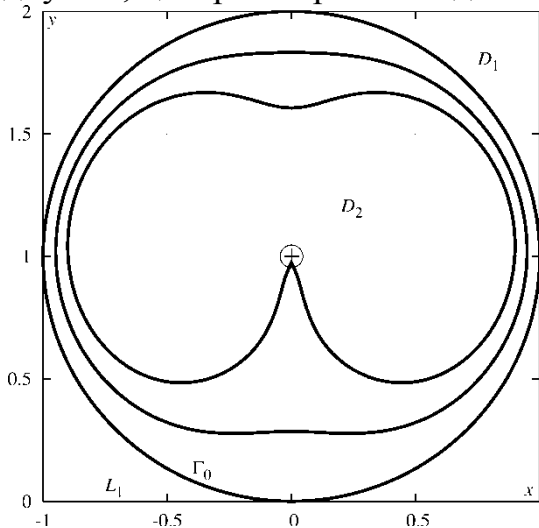


Рисунок 1 – Влияние контура питания

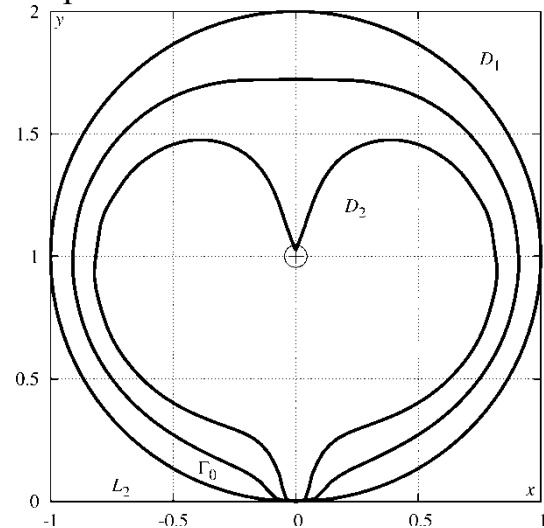


Рисунок 2 – Влияние непроницаемой границы

На рисунках 1 и 2 показаны положения границы Γ_t через равные промежутки времени при движении к скважине. На рис. 1 область фильтрации ограничена контуром питания, а на рис. 2 – непроницаемой границей. Расчёт проводился при условии, что $\rho_1 = \rho_2$, $\mu_2/\mu_1 = 3$, $K_{22}/K_{11} = 2$,

$K_{12} = K_{21} = 0$. В случае контура питания прорыв жидкости происходит с его стороны, а в случае непроницаемой границы – с противоположной.

Предложенный метод позволяет исследовать эволюцию произвольной границы раздела жидкостей различных вязкостей и плотностей к системе скважин в ограниченном анизотропном однородном слое пористой среды. Задача допускает обобщение на случай анизотропных неоднородных слоёв [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. Пивень В.Ф. Теория и приложения математических моделей фильтрационных течений жидкости. Орёл: Издательство ГОУ ВПО «Орловский государственный университет», Полиграфическая фирма «Картуш», 2006. 508 с.
2. Пивень В.Ф. Исследование граничной задачи сопряжения двумерных течений в кусочно-анизотропном и неоднородном пористом слое // Дифференциальные уравнения, 2016. Т. 52, № 9. С. 1207-1212.
3. Федяев Ю.С. Математическое моделирование эволюции границы раздела жидкостей различных вязкостей в анизотропном слое пористой среды, ограниченном контуром питания // Ученые записки Орловского государственного университета, 2013. № 3 (53). Серия: Естественные, технические и медицинские науки. С. 95-101.
4. Федяев Ю.С. Математическое моделирование эволюции границы раздела жидкостей различных вязкостей в анизотропном слое пористой среды, ограниченном непроницаемой границей // Ученые записки Орловского государственного университета, 2013. № 6 (56). Серия: Естественные, технические и медицинские науки. С. 70-75.

Физика конденсированного состояния.
Математическое моделирование в машиностроении
и приборостроении

**СТРУКТУРИРОВАНИЕ ПОВЕРХНОСТИ МОНОКРИСТАЛЛА
ВИСМУТА МЕТОДОМ СУХОГО ТРАВЛЕНИЯ**

О.И. Марков, д.ф.-м.н., проф.

ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет им. И.С. Тургенева»
e-mail: *o.i.markov@mail.ru*

Ю.В. Хрипунов, к.ф.-м.н., доц.

ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет им. И.С. Тургенева»
e-mail: *phyrexia@ya.ru*

Доклад посвящен контролю состояния поверхности монокристалла висмута после воздействия атомарным водородом. Исследования поверхности проводились методами атомно-силовой микроскопии.

Ключевые слова: атомно-силовая микроскопия, поверхность, висмут.

Висмут известен как низкотемпературный эффективный материал для термоэлектрических преобразователей [1]. Диапазон возможного применения этого материала значительно шире – анизотропные датчики разного назначения, тензометры, болометры, датчики магнитной индукции и т.д. Миниатюризация приборов приводит к усилению роли поверхности применяемых материалов и к повышению требований к поверхности. Например, качество поверхности позволяет повысить чувствительность и быстродействие анизотропного термоэлемента на основе кристаллов висмута. Известно, что поверхностные процессы (адсорбция, рекомбинация, химическая реакция) могут вызвать структурные перестройки поверхности твердого тела, что приводит к приобретению поверхностными слоями новых свойств. Специфичность этих свойств во многом обусловлена характером образований на поверхности вещества в нанометровом масштабе. Одним из важных является вопрос, посвященный формированию таких наноструктур. Для создания наноструктур можно использовать различные методы, однако более экономичным методом является самоорганизация. Экспериментальные методы не позволяют выявить механизмы, играющие главную роль в формировании наноструктур. Теоретические исследования и моделирование, позволяют установить эти механизмы и в дальнейшем управлять процессами самоорганизации. Управляя размерами и формой

подобных структур можно придавать совершенно новые функциональные характеристики поверхности кристаллов. Поэтому одним из приоритетных направлений исследований является моделирование роста наноструктур на поверхности монокристаллов, а важной практической задачей является исследование возможностей модификации поверхности кристаллов

Многолетний опыт эксплуатации термоэлектрических преобразователей показывает, что их энергетические параметры определяются не только свойствами полупроводниковых материалов, но и различными побочными эффектами, что должно учитываться при практическом создании приборов. По-прежнему актуальной остается проблема повышения надежности термоэлектрических преобразователей. Анализ причин выхода из строя термоэлектрических модулей показывает, что даже материалы, первоначально свободные от дефектов, в процессе изготовления приборов, становятся несовершенными. В приповерхностных областях термоэлектрического материала в результате технологических операций может возникнуть повышенная концентрация вакансий. Большое количество дефектов в поверхностных областях кристалла термоэлектрического материала приводит к его разрыхлению. При этом уменьшается механическая прочность контактов и увеличивается контактное сопротивление, а при циклических изменениях температуры происходит растрескивание кристаллов. Наличие трещин сказывается на целостности ветвей термоэлементов и их электрическом сопротивлении. При последующих термических воздействиях при эксплуатации устройства трещины разрастаются и электрическое сопротивление растет. В уже готовых термопарах из-за разности теплового расширения коммутирующих контактов и термоэлектрика возникают напряжения в зоне контакта. В хрупких материалах напряжения приводят к появлению трещин и последующему разрушению. Известные способы изготовления термоэлементов и коммутации термоэлемента не всегда позволяют получить термостабильные контакты с достаточно высокой прочностью. Поэтому процесс дефектообразования в активном веществе термоэлементов нуждается в тщательном контроле.

Эффективность термоэлектрических преобразователей связана также с сопротивлением переходного коммутационного контакта. Причина электрического и теплового сопротивления контакта состоит в наличии переходного слоя и с тем, что геометрическая площадь контакта не совпадает с фактической. Параметры реальных термоэлементов во многом зависят от физико-химических явлений, происходящих на границе раздела термоэлектрик – металл. Электрические и адгезионные свойства переходного контакта определяются во многом предварительной технологической обработкой поверхности термоэлектриков. Все сказанное показывает, что исследование состояния поверхности термоэлектрика в процессе технологической обработки является актуальной задачей [2].

В настоящее время широко применяется обработка полупроводников в водородной плазме и атомарном водороде. Обработка полупроводников в водородной плазме активно используется для очистки поверхности от оксидов, органических и др. загрязнений, пассивации поверхности, гидрогенизации приповерхностной области. Воздействие водородной плазмы приводит к изменению шероховатости поверхности [3]. Атомарный водород (АВ) является активной технологической средой, используемой для модификации свойств поверхности монокристалла. В настоящей работе приведены результаты исследования технологического воздействия атомарного водорода (АВ), получаемого путем диссоциации молекулярного водорода высокочастотным разрядом, на морфологию поверхности монокристалла висмута.

В данной работе исследования микротопография поверхности монокристаллов висмута проводилась на микроскопе СММ-2000 в атомно-силовом режиме. До облучения поверхность кристалла была гладкой и однородной. Поверхность исходного образца висмута образована в результате скола в жидком азоте по плоскости совершенной спайности (111) и характеризуется средней шероховатостью на уровне 0.4-1.2 нм. Затем образцы помещались в камеру для обработки атомарным водородом. АВ получали путем диссоциации молекулярного водорода в высокочастотной плазме, т.е. над поверхностью монокристаллов висмута находилась атомно-молекулярная смесь водорода. После обработки атомарным водородом выявлено возникновение микрорельефа на плоскости скола (111) монокристалла висмута. Типичное трехмерное АСМ-изображение поверхности монокристалла висмута после обработки АВ приведено на рисунке 1. Видно, что в результате облучения АВ на поверхности монокристалла висмута формируются образования в виде выступов субмикронных и наноразмеров. Наблюдаются образования одиночных и скоплений треугольных пирамид с длинами сторон основания 150-200 нм. Углы между сторонами основания пирамид составляют $\sim 60^\circ$, т.е. они направлены вдоль бинарных осей монокристалла. Угол наклона грани пирамид по отношению к плоскости скола монокристалла составляет $\sim 54^\circ-56^\circ$, что соответствует наклону граней менее совершенной спайности монокристалла висмута. Некоторые нарушения формы образования связаны с наличием притупления при вершине пирамиды. Округлые образования сложены несколькими неизолированными пирамидами. Микровыступы расположены на фоне однородного нанорельефа мелких нановыступов. Плотность выступов всех размеров составляет $2 \cdot 10^9 \text{ см}^{-2}$. Между пирамидами видны треугольные ямки с четким ограничением дна и углом 60° между сторонами.

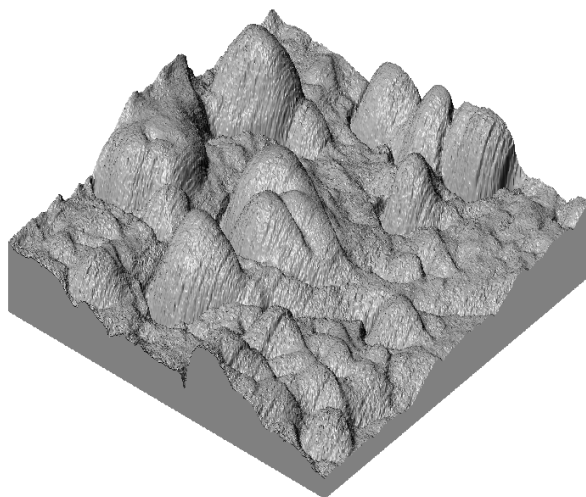


Рисунок 1 – 3D изображение структуры участка поверхности монокристалла висмута после облучения атомарным водородом

Уже после обработки в потоке АВ в течение 7 минут на поверхности скола формируется множество нановыступов, что приводит к увеличению средней и среднеквадратичной шероховатостей до 14 нм и 17 нм соответственно (рисунок 2). Максимальная высота шероховатостей составляет 113 нм. Анализ гранулометрического состава позволил установить, что достаточно большое число частиц диаметрами до 10 нм составляют более 20% от общего числа. Еще выделяются две группы частиц в интервале размеров от 20 до 40 нм и от 50 до 300 нм.

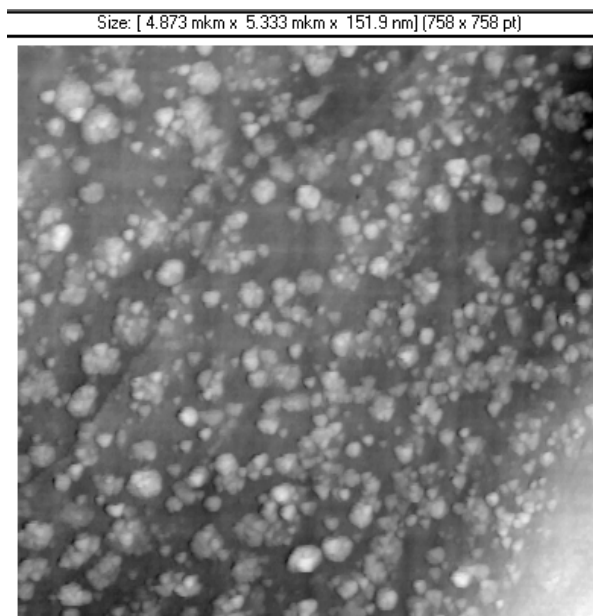


Рисунок 2 – АСМ-изображение скола после обработки АВ в течение 7 мин

После обработки АВ в течении 30 мин шероховатость возрастает до 27 и 34 нм соответственно. При этом наблюдается перестроение морфологии с образованием большого количества пирамидальных структур. Про-

исходит возрастание средней шероховатости до 27 нм, среднеквадратичной до 34 нм. Максимальная высота шероховатостей составила 201 нм. При этом количество частиц диаметрами до 10 нм составляют ~5% объектов. Это частицы находящиеся в межпирамидальных областях. Еще выделяются группа частиц в интервале размеров от 30 до 300 нм это пирамидальные образования.

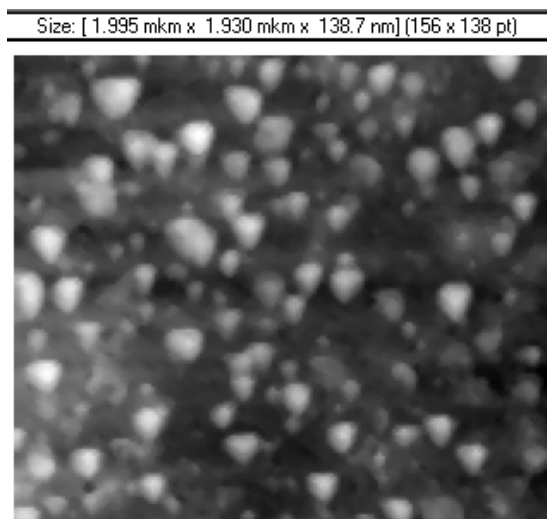


Рисунок 3 – АСМ-изображение скола после обработки АВ в течение 60 мин

Известно, что существует прямая связь между скоростями роста и растворения кристалла [3,4]. Часто встречающиеся углы наклона грани у основания пирамиды 56° и у вершины 20° позволяют заключить, что грани пирамид, образованы плоскостями $\{100\}$ и $\{211\}$. Таким образом, новообразования имеют грани, отвечающие реальным граням форм роста кристалла. Поэтому эти образования напоминают фигуры роста висмута. Физические причины и механизмы формирования наноструктур на поверхности монокристалла висмута в результате обработки атомарным водородом обсуждались и освещены в работах [5-7].

Проведены исследования воздействия атомарного водорода (H), получаемого путем диссоциации молекулярного водорода (H_2) высокочастотным разрядом, на топологию поверхности монокристалла висмута. При этом сделаны следующие выводы: обнаружено, что поверхность монокристалла висмута при обработке АВ распыляется неоднородно; наблюдается изменение рельефа поверхности монокристалла висмута; установлено селективное распыление поверхности кристалла висмута; установлено, что процесс модификации поверхности зависит от длительности облучения; воздействие атмосферы АВ приводит к появлению на поверхности монокристаллов висмута ансамбля нановыступов в форме многогранников (и их конгломератов) с треугольным основанием, ограненных кристаллографическими плоскостями. Обработка монокристаллов полупроводников в среде атомарного водорода открывает новые возможности модификации по-

верхностной структуры кристаллов и придания материалам видоизмененных оптических и адгезионных поверхностных свойств.

ЛИТЕРАТУРА

1. Goldsmid H.J. Bismuth – The Thermoelectric Materials of the Future? / Proceedings of the XXV Int. Conf. on Thermoelectrics. Wien, Austria. 2006. P.5-10.
2. Марков О.И., Хрипунов Ю.В. Контроль поверхности кристалла висмута после технологической обработки // Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика. 2011. №8. С. 56–59.
3. Черныш В. С., Патракеев А. С., Солдатов Е. С., Петров Д. В., Алышев С. В. Формирование нанорельефа при ионном облучении поверхности германия и кремния // Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования.- 2007. - № 12. - С. 25-29.
4. Физико – химические методы обработки поверхности полупроводников. Под редакцией Б. Д. Луфт. М.: Радио и связь. – 1982. – с. 132.
5. Сангвал К.. Травление кристаллов. Теория, эксперимент, применение. М.: Мир. – 1990. – с. 496.
6. Марков О.И., Хрипунов Ю.В., Харламов В.Ф., Коростелев Д.А. Самоорганизация структур на поверхности монокристалла висмута в атмосфере атомарного водорода// Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования. 2013. №1.-С.76-79.
7. Марков О.И., Хрипунов Ю.В. Влияние атомарного водорода на реструктуризацию поверхности скола монокристалла висмута // Труды МФТИ. 2014. Т. 6, № 1. С. 66–71.
8. Markov O.I., Khripunov Yu. V. The technology of formation of nanostructures on the surface of the crystal bismuth. International Conference on Surface Engineering for Research and Industrial Applications “INTERFINISH-SERIA 2014”. Novosibirsk.: NSTU Publisher. 2014. P 105.

ТЕМПЕРАТУРНЫЙ ДАТЧИК ДЛЯ ТОНКИХ ЖИДКОКРИСТАЛЛИЧЕСКИХ ДИСПЛЕЕВ

Ал.А. Муравский, к.ф.-м.н., доц.

Институт химии и новых материалов НАН Беларуси

Ан.А. Муравский, к.ф.-м.н., доц.

Институт химии и новых материалов НАН Беларуси

В.В. Беляев, д.т.н., проф.

Московский государственный областной университет

Д.Н. Чаусов, к.ф.-м.н., доц.

Московский государственный областной университет

О.В. Чаусова, к.ф.-м.н., доц.

Технологический университет, г. Королев

А.Д. Курилов, инженер

Московский государственный областной университет

В.Г. Чигринов, д.ф.-м.н., проф.

Гонконгский университет науки и технологии

Fan Fan

Гонконгский университет науки и технологии

Предметом исследования является реакция (отклик) ЖК материалов на температурные воздействия. Были созданы комбинированные ячейки с ЖК материалом, которые подвергались воздействию температуры. В ходе исследования выяснилось, что предложенная структура с комбинированной ориентацией ЖК дает возможность формировать сигналы высокого и низкого уровня при изменении температуры, а так же возможность создавать устройства для контроля и регулирования равномерности распределения температуры ЖК панели и других электронных устройств.

Работа посвящена изучению зависимости анизотропии диэлектрической проницаемости от температуры для разработки датчиков температуры на основе жидких кристаллов (ЖК). Термодатчики могут применяться в различных устройствах. Современные ЖК телевизоры требуют контроля равномерности распределения температуры ЖК панели и ее регулирования в процессе работы устройства. Компактные датчики температуры, потребляющие минимальное количество энергии нужны, например, для автономных систем контроля температуры при транспортировке продуктов. Помимо компактности, надежности работы в широком диапазоне температур и дешевизны, особенностью таких термодатчиков является то, что они реагируют непосредственно на изменение температуры рабочей среды, что отличает их от датчиков, используемых в настоящее время, измеряющих температуру вблизи среды. Это термометры сопротивления и термоэлектрические преобразователи [1-3].

Для изучения диэлектрических свойств ЖК ячейки была использована установка на базе платы аналогового входа-выхода DAC-NI PCI-6281,

National Instruments, США. Электрическая схема ячейки показана на рисунке 1.

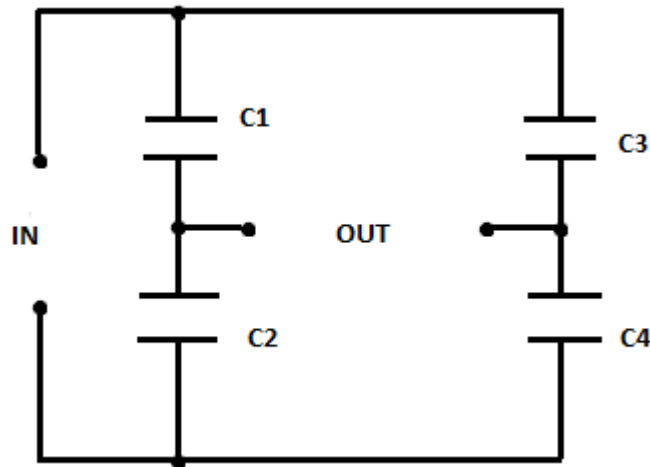


Рисунок 1 – Электрическая схема комбинированной ЖК ячейки

Рабочей средой ячейки является ЖК с положительной диэлектрической анизотропией ($\Delta\epsilon = \epsilon_{\parallel} - \epsilon_{\perp} > 0$, где ϵ_{\parallel} и ϵ_{\perp} - параллельная и перпендикулярная составляющие диэлектрической проницаемости, соответственно). Жидкие кристаллы, из-за своих физико-химических свойств, чувствительны к внешним воздействиям, таким как электрическое и магнитное поле, механическое воздействие или изменение температуры. При внешних воздействиях и постоянной температуре директор ЖК изменяет направление ориентации в пространстве. При изменении температуры изменяются параметры, характеризующие упорядочение молекул внутри жидкого кристалла. Это параметр порядка, анизотропия диэлектрической проницаемости и величина двулучепреломления. Для нас важно изменение диэлектрических свойств, изменение же других свойств не должно влиять на опыт. Следовательно, на эксперимент накладываются определенные ограничения:

1) Сигнал, подаваемый на ячейку представляет собой коротки импульс прямоугольной формы. Его длительность τ должна быть меньше 1 мс, но не короче времени заряда электрической емкости

$$\tau = RC \quad (1)$$

где R – сопротивление электродов в ЖК ячейке, не превышающее 1 кОм, C – емкость ячейки, равная 10 нФ. Таким образом, исходя из этих значений, длительность импульса должна быть $\tau = 100$ мкс.

2) Средняя величина напряжения, подаваемого на ЖК ячейку, должна быть меньше порогового напряжения переключения жидкого кристалла $V_{th} = 2\pi(K_{11}/\epsilon_0\Delta\epsilon)^{1/2}$, где K_{11} – коэффициент упругости, ϵ_0 – диэлектрическая постоянная.

3) Подаваемый сигнал электрически симметричен. При этом амплитуды входного и выходного сигнала связаны следующим образом

$$V_{OUT} = \frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon_{\parallel} + \varepsilon_{\perp}} V_{IN} \quad (2)$$

$$C_1 = C_4 = \frac{\varepsilon_{\perp} \varepsilon_0 S}{d}, \quad C_2 = C_3 = \frac{\varepsilon_{\parallel} \varepsilon_0 S}{d} \quad (3)$$

Емкости конденсаторов C_1 и C_4 определяются величиной ε_{\perp} , C_2 и C_3 определяются ε_{\parallel} .

Для изучения зависимости диэлектрических свойств ЖК ячейки от температуры, как датчика, использовались ячейки, состоящие из двух стеклянных подложек с зазором порядка 20 микрон (рисунок 2). Эти ячейки были заполнены жидкокристаллическими материалами: 5ЦБ с интервалом температур существования ЖК фазы 25-35°C, E7 (интервал существования ЖК фазы от -20 до +60°C, смесь MLC-5700-000 (от -30 до +90°C). Зависимость отклика ЖК ячеек ΔU от температуры представлена в разделе 5.

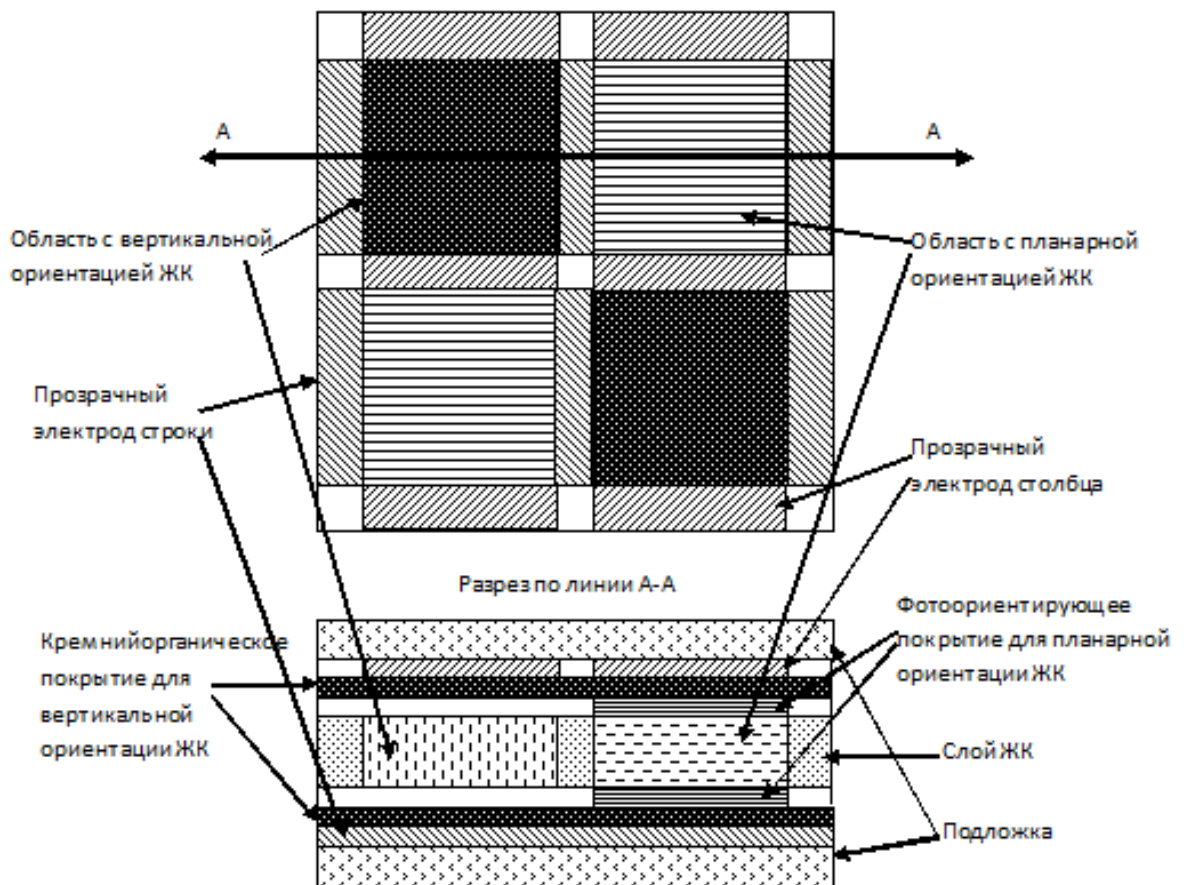


Рисунок 2 – Конструкция комбинированной ЖК ячейки

Для ячеек, имеющих области с разной ориентацией ЖК, разработаны методы формирования многослойных покрытий, сформированных из ориентирующих материалов различного типа. Проведение этой работы обусловлено особенностями ориентирующих материалов: материалы, задающие вертикальную ориентацию ЖК, имеют слабую энергию взаимодействия с другими материалами [4, 5] и, как следствие, проблемы с образова-

нием сплошной пленки, наносимой на тонкий слой такого материала, что проявляется появлением разрывов и дефектов в наносимом слое. С другой стороны, слои кремнийорганических полимеров, которые используются в данной работе в качестве вертикально ориентирующих материалов, не позволяют формировать рисунок методами фотолитографии.

Зависимость отклика ЖК ячеек ΔU от температуры представлена на рисунке 3.

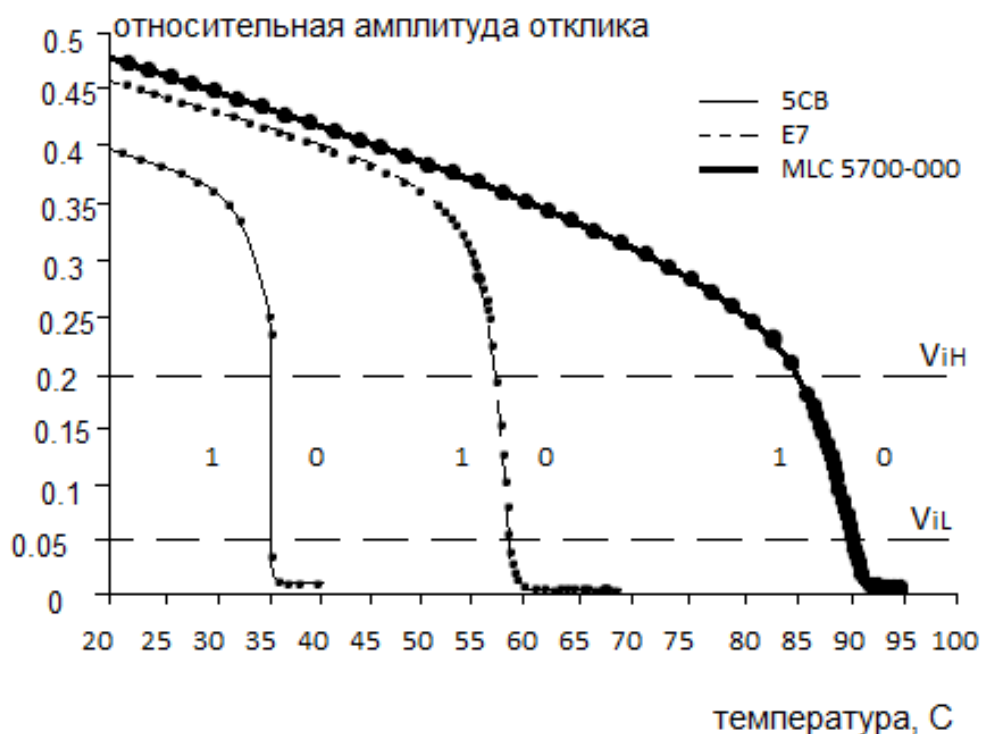


Рисунок 3 – График зависимости $\Delta U(T)$ для ячеек с веществами 5ЦБ, E7, MLC-5700-000. V_{iH} и V_{iL} – выходное напряжение высокого и низкого уровня, соответственно, характеризующее сигналы логических единицы и нуля

Из графика видно, что с ростом температуры изменение величины отклика индивидуального вещества (5ЦБ), при фазовом переходе из изотропной жидкости в ЖК фазу, происходит резче, чем для смесей ЖК. У смесей в области существования ЖК фазы происходит монотонное и плавное изменение значений величины анизотропии диэлектрической проницаемости, что приводит к монотонному изменению величины отклика ЖК ячейки.

Выводы и заключение

Разработана и исследована жидкокристаллическая ячейка для использования ее в качестве емкостного датчика температуры. Предложенная структура с комбинированной ориентацией ЖК позволяет формировать сигналы высокого и низкого уровня при изменении температуры и создавать устройства для контроля и регулирования равномерности распределения температуры ЖК панели и других электронных устройств.

Благодарности

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант №14-07-90009-Бел_а и Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований, грант № Ф12Р-188.

ЛИТЕРАТУРА

1. В.В. Беляев, В.И. Карлашук, Технические средства систем управления. Часть 1. Операционные усилители и измерительные преобразователи, Учебное пособие: М: РУДН, 2009, С.1-100.
2. <http://www.piezoelectric.ru/Products/TransmittersTemperature/ThermalTransformerSOS.php>.
3. М. Нойманн, Холодильник с индикацией диапазона температур, Патент РФ №2265166.
4. V.V. Belyaev, V.G. Mazaeva, A.S. Solomatin, A.A. Muravskii, A.A. Gorbunov, A.A. Muravskii, New organosilicon oligomer films for NLC alignment, Proc. International Conference 2011 China display/Asia display, Kunshan, China, 6-9 November 2011.
5. Al. Muravsky, An. Murauski, V. Mazaeva, V. Belyaev, "Parameters on the LC alignment of organosilicon compound films", J. Soc. Inf. Display. **13**, 349-354 (2005).

УДК 539.3

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ АДГЕЗИИ МАТЕРИАЛОВ СЛОЖНОГО ХИМИЧЕСКОГО СОСТАВА

В.Ю. Преснецова, к.т.н.

ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет им. И.С. Тургенева»
e-mail: *alluvian@mail.ru*

С.Н. Ромашин, к.ф.-м.н.

ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет им. И.С. Тургенева»
e-mail: *sromashin@yandex.ru*

Л.Ю. Фроленкова, д.т.н., доц.

ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет им. И.С. Тургенева»
e-mail: *Larafrolenkova@yandex.ru*

В.С. Шоркин, д.ф.-м.н., проф.

ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет им. И.С. Тургенева»
e-mail: *VShorkin@yandex.ru*

В настоящее время многослойные структуры из материалов сложного химического состава (сплавов, химических соединений) находят широкое применение в технике. Из-за сложности проведения опытов по проверке адгезионной прочности, их высокой себестоимости, делать это удобнее

всего теоретически с помощью расчета, например, энергии адгезии. Энергия адгезии F_a тел $B^{(1)}$ и $B^{(2)}$ вдоль поверхности S_a вычисляется по формуле [1]:

$$F_a = W_p^{(1,2)} - W_p^{(1)} - W_p^{(2)}, \quad (1)$$

где $W_p^{(1,2)}$, $W_p^{(1)}$, $W_p^{(2)}$ – поверхностные энергии, приходящиеся на единице площади поверхности S_a , после вступления $B^{(1)}$ и $B^{(2)}$ в адгезионный контакт и до него. В свою очередь поверхностная энергия W_p – это изменение свободной энергии тела в изотермическом обратимом процессе, следовательно, связанное с работой внутренних сил, произошедшее при образовании нанного вида поверхности (поверхность контакта для $W_p^{(1,2)}$ и свободная поверхность для $W_p^{(k)}$, $k = 1, 2$).

Существующие методы оценки поверхностной энергии и энергии адгезии [2, 3] основаны на том, что изменения свободной энергии тел, происходящие в них при образовании свободной поверхности и вступлении в адгезионный контакт (при условии изотермичности этих процессов), приравниваются соответствующим изменениям электрической энергии. Есть основание допустить, что эти изменения равны сумме работы внутренних сил, используемых механикой сплошной среды и работы внутренних сил, обусловленных колебательным движением атомов, а также хаотическим движением электронов (в металлах). Это можно охарактеризовать [4] с помощью среднестатистических термодинамических величин, что способствует упрощению расчетов и возможности их практического использования. В соответствии с [4] свободная энергия F твердого тела S объемом V , содержащего N одинаковых частиц (атомов, ионов), соответствующих его структуре, определяется формулой

$$F = U_0 + \left[\sum_{j=1}^{3N} \frac{1}{2} h\nu_j + kT \sum_{j=1}^{3N} \ln(1 - e^{-h\nu_j/kT}) \right] + \left[\frac{3N}{5} \left(\frac{3N}{2Q} \right)^{2/3} \cdot V^{-2/3} - \frac{N(\pi kT)^2}{4} \left(\frac{2Q}{3N} \right)^{2/3} \cdot V^{-2/3} \right], \quad (2)$$

где U_0 – потенциальная энергия взаимодействующих частиц в их равновесном состоянии.

Выражение в первых квадратных скобках – это кинетическая энергия частиц около положения равновесия. Выражение во вторых квадратных скобках используется только для металлов, поскольку характеризует кинетическую энергию свободных электронов.

Колебательное движение атомов (ионов) описывается моделью идеального фононного газа. На ее основе вычисляется его давление P_f , используемое при расчете изменений свободной энергии

$$P_f = 9nk\gamma\theta_D + 3nkT\gamma \left[1 - 3\frac{\theta_D}{T} + \frac{1}{20} \left(\frac{\theta_D}{T} \right)^2 \right], \quad (3)$$

где n – число частиц в единице объема; k – постоянная Больцмана; γ – постоянная Грюнайзена.

Электроны в металлах образуют газ, он предполагается идеальным. Его давление определяется выражением:

$$P_e = \frac{2n_e\mu_0}{5} \left[1 + \frac{5}{12} \left(\frac{\pi kT}{\mu_0} \right)^2 \right], \quad (4)$$

где μ_0 – энергия Ферми, n_e – число свободных электронов в единице объема.

Обобщенным перемещением для внутренних сил, характеризующих тензоры

$$P_{ij} = (P_f + P_e)\delta_{ij}, \quad (5)$$

где δ_{ij} – символ Кронекера, является тензор $\delta_{ij} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right)$, где \vec{u} – вектор перемещений частиц сплошной среды, моделирующей реальное тело x_k , $k = 1, 2, 3$ декартовы координаты точки.

Ввиду того, что взаимодействие частиц (атомов, ионов) является дальнедействующим, для оценки изменений U_0 , происходящих при деформациях, сопровождающих образование свободных поверхностей тел $B^{(1)}$ и $B^{(2)}$, а затем поверхности их адгезионного контакта использована градиентная теория [5], учитывающая это дальнедействие. При этом учитывалось, что плотность δw изменения свободной энергии при вариации $\delta \vec{u}$ поля перемещений определяется равенством

$$\delta w = P^1 \circ \circ \delta(\nabla \vec{u})^T + P^2 \circ \circ \circ \delta(\nabla^2 \vec{u})^T + \dots, \quad (6)$$

где $P^k = P^{0k} + (\nabla^k \vec{u}) \circ \dots \circ C^k$ – тензор внутренних обобщенных напряжений;

$$P^{0k} = \int_V \frac{d\Phi^{(2)}}{d\vec{r}} dV; \quad C^k = \int_V \frac{d^2\Phi^2}{d\vec{r}^2} dV; \quad \Psi^{(2)} = \Phi^{(2)} + \frac{2!}{3!} \int_V \Phi^{(3)} dV;$$

$\Phi^{(2)}$ и $\Phi^{(3)}$ – потенциалы парного и тройного взаимодействия частиц среды, это относится как к частицам каждого из тел $B^{(1)}$ и $B^{(2)}$, так и к частицам принадлежащих различным телам. Зависимость их градиентов от относительных перемещений частиц среды, расположенных на произвольных расстояниях, предполагается линейной. Сами относительные перемещения разложимы в ряды по внешним степеням радиус-вектора одной из них по отношению к другой.

Из физических соображений на границе адгезионного контакта задаются условия сопряжения полей перемещений и их градиентов. Тогда на ос-

новании условий равновесия каждого из тел $B^{(1)}$ и $B^{(2)}$ и учета кинематических условий сопряжения можно получить условия сопряжения полей тензоров напряжения. В качестве конкретного потенциала парного взаимодействия избран потенциал Морзе. По аналогии с гипотезой Кирквуда [6, 7] потенциал тройного взаимодействия выбран в виде произведения потенциала парного взаимодействия [6, 7] с экспериментально определяемым коэффициентом пропорциональности (на основании данных о модулях Юнга и сдвига, среднем межатомном расстоянии).

Расчет показал удовлетворительное соответствие как при расчете поверхностной энергии, например, для *Cr*: $W_p = 3,87 \text{ Дж/м}^2$ (справочное значение [8] – $4,72 \text{ Дж/м}^2$), так и энергии адгезии, например для пар *Cu-Al*, *Fe-Cu* и *Cr-Fe* получено: $F_a = 2,78; 3,8; 5,06 \text{ Дж/м}^2$ (в [9]: $F_a = 2,75; 4,00; 4,85 \text{ Дж/м}^2$). Соотношение упругой, фононной и электронной "составляющих" поверхностной энергии ориентировочно определяется пропорцией 1:0,1:1,5. Это косвенно соответствует работе [10].

Работа выполнялась в рамках базовой части государственного задания на 2014 – 2016 гг., код проекта 286.

ЛИТЕРАТУРА

1. Физический энциклопедический словарь. – т. 1. – М.: Советская энциклопедия, 1960. – 664 с.
2. Дерягин Б. В., Кротова Н. А., Смилга В. Л. Адгезия твердых тел. – М.: Наука, 1973. – 280 с.
3. Партенский М. Б. Самосогласованная электронная теория металлической поверхности // Успехи физических наук, 1979. – Т. 128. – Вып. 1. – С. 69 – 106.
4. Л. Жирифалько. Статистическая физика твердого тела. – М.: Мир, 1975. – 384 с.
5. Шоркин В. С. Модель сплошной упругой среды, основанная на представлении о дальнедействующем потенциальном взаимодействии ее частиц // Упругость и неупругость. Под ред. И. А. Кийко, Р. А. Васина, Г. Л. Бровко. - М.: Ленанд, 2006. – С. 271 – 282.
6. Шоркин В. С., Фроленкова Л. Ю., Азаров А. С. Учет влияния тройного взаимодействия частиц среды на поверхностные и адгезионные свойства твердых тел // Материаловедение. – 2011. – № 2. – С. 2 – 7.
7. Romashin, S. N., Presnetsova V. Yu., Frolenkova L. Yu., Shorkin V. S. A model of adhesive interaction of elastic bodies // International Conference on Mechanics-Seventh Polyakhov's Reading, 2015. February 2 – 6, 2015, Russia, Saint Petersburg State University. Publisher: IEEE. – P. 1 – 3.
8. Свойства элементов. Физические свойства: Справочник. / Е. Б. Самсонов. – М.: Металлургия, 1976. – 600 с.
9. Вакилов А. Н., Мамонова М. В., Прудников В. В. Адгезия металлов и полупроводников в рамках диэлектрического формализма // Физика

- твердого тела. – 1997. – Т. 39. – № 6. – С. 964 – 967.
10. В. М. Конторович. Динамические уравнения теории упругости в металлах. // Успехи физических наук. 1984, т. 142, в. 2. – С. 265 – 305.

УДК 544.72+544.034:53.087.45

ЭЛЕКТРОННЫЕ ЯВЛЕНИЯ В МЕЛКОДИСПЕРСНЫХ ПОЛУПРОВОДНИКАХ, НАСЫЩЕННЫХ ВОДОРОДОМ

В.О. Сергеев, к.ф.-м.н.

ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет им. И.С. Тургенева»
e-mail: *perebezchik@mail.ru*

А.А. Соколов

ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет им. И.С. Тургенева»
e-mail: *ispleener@gmail.com*

Ф.В. Харламов, к.ф.-м.н.

ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет им. И.С. Тургенева»
e-mail: *fekharl@rambler.ru*

В.Ф. Харламов, д.ф.-м.н., проф.

ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет им. И.С. Тургенева»
e-mail: *vladkharl@rambler.ru*

Исследованы спонтанная поляризация и поляризация переменным электрическим полем мелкодисперсных диэлектриков KMnO_4 , $\text{Pb}(\text{NO}_3)_2$ и CsNO_3 после возникновения в них носителей тока при хемосорбции водорода.

Изменение после хемосорбции газов физических свойств мелкодисперсных материалов, состоящих из микро- или наночастиц, мало исследовано. Такие материалы могут обладать нелинейными электрическими свойствами [1, 2], сильной зависимостью электропроводности от природы хемосорбированных молекул газа [3] и, согласно теоретическим оценкам, высокой эффективностью преобразования теплоты в работу источника электрического тока с использованием эффекта Зеебека [4-6].

Диссоциативная хемосорбция молекул водорода и их химическое взаимодействие с соединениями, содержащими слабо связанные атомы кислорода, сопровождается возникновением на поверхности мелкодисперсных диэлектриков донорных состояний, образованных междоузельными атомами водорода и сверхстехиометрическими атомами металлов кристаллической решетки. При этом возникают носители тока: свободные электроны. Это служит причиной спонтанного возникновения электрического поля в мелкодисперсных диэлектриках [7, 8]. Механизмы описанных в работах [7, 8] явлений не установлены.

Цель выполненных исследований: 1) разработка метода, позволяющего контролировать электронные процессы в приповерхностной области полупроводниковых микро- и наноструктурированных материалов и тонких пленок при различных воздействиях, на примере влияния хемосорбции молекул водорода на электронные явления в тонких слоях мелкодисперсных полупроводников, и 2) установление механизма их спонтанной поляризации.

В опытах использовали мелкодисперсные соединения KMnO_4 , $\text{Pb}(\text{NO}_3)_2$ и CsNO_3 марки «ХЧ» (средний размер частиц 14 – 20 мкм), и наночастицы оксида алюминия (средний диаметр 100 нм, содержание примесей менее 0.2%). Слой порошка, толщиной $d \approx 0.2$ мм и площадью $s \approx 50$ мм², помещали между двумя одинаковыми плоскопараллельными пластинками слюды, суммарной толщиной $d_1 = 0.08$ мм, находящимися в контакте с плоскими металлическими электродами. Этот «измерительный конденсатор» помещали в вакуумную камеру из стекла. В камеру после ее откачки напускали водород с давлением $P_h = 3 \cdot 10^4$ Па. Чистота водорода составляла 99.995%. Стенки камеры нагревали, пропуская ток через нихромовую обмотку. С помощью термопары измеряли температуру газа или измерительного конденсатора ($T = 296 - 550$ К). Установку экранировали от электромагнитных помех.

Используя метод Сойера-Тауэра (Sawer-Tower), с помощью цифрового осциллографа Hantek DSO 2150 USB измеряли петли диэлектрического гистерезиса на частотах $20 - 10^3$ Гц. Генератор синусоидального напряжения с максимальной мощностью 2 Вт подключали к емкостному делителю напряжения в виде последовательно соединенных измерительного и эталонного конденсаторов. На горизонтальные и вертикальные пластины осциллографа подавали синусоидальные напряжения соответственно на делителе u_x и эталонном конденсаторе u_y .

В опытах установлено, что форма петель диэлектрического гистерезиса зависит от газовой среды. В воздухе и в вакууме петли диэлектрического гистерезиса имеют форму отрезка прямой $u_y = g_1 u_x$ с незначительным положительным наклоном, что соответствует отсутствию носителей тока в частицах порошка. После напуска водорода с давлением $P_h = 3 \cdot 10^4$ Па в вакуумную камеру с образцом KMnO_4 происходит самопроизвольное уменьшение амплитуды напряжения u_x и резкое увеличение амплитуды напряжения u_y . При этом петли диэлектрического гистерезиса имеют форму отрезка прямой с отрицательным наклоном. Угол наклона отрезков прямых $u_y = g u_x$, где $g/g_1 = -(10^3 - 10^4)$, слабо зависит от температуры и частоты напряжения. Площадь петель диэлектрического гистерезиса равна нулю, что соответствует отсутствию диэлектрических потерь энергии.

В других опытах в тех же условиях плоскопараллельные электроды измерительного конденсатора находились в непосредственном контакте с

порошком KMnO_4 (их не изолировали пластинками слюды). В этом случае получены качественно другие результаты: форма петель диэлектрического гистерезиса – это эллипсы с положительным наклоном. Площадь петель увеличивается при увеличении температуры и зависит также от давления водорода и частоты переменного напряжения.

Обнаружено, что действительная часть диэлектрической проницаемости порошков становится отрицательной величиной. Наблюдается низкочастотная дисперсия отрицательной диэлектрической проницаемости порошка, характеризующаяся поправкой Лоренца. Установлено, что спонтанная поляризация мелкодисперсных диэлектриков и низкочастотная дисперсия их диэлектрической проницаемости обусловлены свойствами системы не вполне свободных электронов проводимости, волновые функции которых ограничены размерами зерен порошка. При этом характер электронных явлений и процессов обмена энергией при поляризации мелкодисперсных диэлектриков зависит от положения уровня Ферми на их поверхности. Обнаружено: в случае поляризации переменным электрическим полем двухслойной пленки, состоящей из двух материалов с отрицательным и положительным значениями действительной части диэлектрической проницаемости, происходит уменьшение емкостного сопротивления структуры в 10^4 раз и усиление в 10^4 раз переменного электрического поля в ее слоях, а диэлектрические потери энергии отсутствуют. Установлено теоретически из первых принципов, что в мелкодисперсных полупроводниках, поверхность которых легирована мелким донором, самопроизвольно возникает макроскопическое электрическое поле в связи с уменьшением при этом внутренней энергии порошка. Показано: возникновение эдс в порошке в результате его спонтанной поляризации можно использовать для преобразования теплоты в работу источника электрического тока. Вычислено изменение термодинамических потенциалов при спонтанной поляризации порошков и их поляризации электрическим полем. Разработана модель электронных явлений в мелкодисперсных полупроводниках, соответствующая полученным экспериментальным результатам. Используя метод термодинамических циклов, получены выражения для электродвижущей силы и к.п.д. источника тока, сторонние силы которого обусловлены спонтанной поляризацией мелкодисперсного полупроводника.

Согласно полученным результатам применение двухслойных пленок полупроводников в электронных приборах может до 10^7 раз снизить их емкостное сопротивление, потери энергии и шумы. Источники тока, использующие эффект спонтанной поляризации мелкодисперсных полупроводников, лишены недостатков термоэлектрических преобразователей и могут с ними конкурировать.

Выполнено при финансовой поддержке Министерства образования и науки России (грант 479).

ЛИТЕРАТУРА

1. В.Ф. Харламов, Д.А. Коростелёв, И.Г. Богораз, О.А. Миловидова. Электрические свойства структуры «металл – наночастицы диэлектрика – металл». ФТТ. 2012. Т. 54. № 6. С. 1204-1210.
2. В. Ф. Харламов, Д. А. Коростелев, И. Г. Богораз, О.И.Марков, Ю. В. Хрипунов. Электропроводность структуры металл-диэлектрик-металл со слоем наночастиц оксидов металлов в качестве диэлектрика. Письма в ЖТФ. 2011. Т. 37. Вып. 11. С. 43 - 50.
3. В.Ф. Харламов, Д.А. Коростелёв, И.Г. Богораз, О.А. Миловидова, В.О. Сергеев. Электрические свойства полупроводниковых квантовых точек. ФТП. 2013. Т. 47. № 4. С. 473-479.
4. В.Ф. Харламов. Термоэлектрическая добротность материалов, состоящих из частиц полупроводника или металла. ЖЭТФ. 2013. Т. 144. №1 (7). С. 97 – 103.
5. F. V. Kharlamov, V. F. Kharlamov. Dependency the Thermoelectric Figure of Merit of a Material Consisting of Particles on the Parameters of a Material. Journal of Applied Mathematics and Physics. 2014. № 2. С. 953-959.
6. В.Ф. Харламов, Ф.В. Харламов. Термоэлектрические материалы в виде наноструктур. Российские нанотехнологии. 2015. Т. 10. № 9-10. С. 90-95.
7. В.Ф. Харламов, В.О. Сергеев, А.А. Соколов. Возникновение электрического поля при хемосорбции водорода на поверхности мелкодисперсных полупроводников. Химическая физика. 2016. Т. 35. № 6. С. 71 - 76.
8. А.А. Соколов, В.О. Сергеев, В.Ф. Харламов. Спонтанная поляризация мелкодисперсных композиционных материалов. Известия вузов. Физика. 2016. Т. 59. № 9. С. 119 - 123.

ВОЛНОВЫЕ МОДЕЛИ ПОТОКОВ ГАЗА В ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

В.А. Толпаев, д.ф.-м.н., проф.

ОАО «СевКавНИПИГаз»

e-mail: *TolpaevVA@scnipigaz.ru*

К.С. Ахмедов, к.т.н

e-mail: *AhmedovKS@scnipigaz.ru*

А.М. Кравцов, к.ф.-м.н.

ОАО «СевКавНИПИГаз»

e-mail: *KravcovAM@scnipigaz.ru*

М.Т. Петросянц, аспирант

ОАО «СевКавНИПИГаз»

e-mail: *PetrosyancMT@scnipigaz.ru*

В работе предлагается полуэмпирический волновой подход к описанию поведения важного класса технических систем – систем транспортировки газов и сжимаемых жидкостей. На основе приближенной нелинейной дифференциальной модели получены необходимые условия устойчивой работы динамических систем.

Для описания динамических технологических процессов транспортировки природного газа требуется рассматривать физико-механические модели механики газовых потоков, в уточненной постановке. Конструкции предлагаемых моделей должны упрощать автоматизацию описываемых процессов, содержать математические формулировки критериев эффективности [1].

В работе предлагается упрощенная модель движения газа в одномерном канале с учетом волнового характера процессов трансформации энергии в реальных системах.

Построение моделей требует привлечения к описанию технического процесса многочисленных эмпирических соотношений между величинами, участвующими в описании процесса. Рассмотрим простейшую нелинейную модель движения смеси в канале, которая позволит оценить энергоэффективность процесса транспортировки смеси и возможность устойчивой работы системы транспортировки.

Будем считать систему открытой, движение потока в системе поддерживается за счет энергии накапливаемой системой и поступающей в нее извне. Для обоснования упрощенной нелинейной модели движения смеси воспользуемся моделью учитывающей эффекты нелинейного волнового распространения [2]. Будем считать, что при движении в канале постоянного сечения F (рисунок 1) плотность смеси $\rho(x,t)$ претерпевает скачок от ρ_1 в начале канала до ρ_2 на выходе из канала ($\rho_1 > \rho_2$). Движение

газа на участке канала в этом случае описывается уравнениями неразрывности и состояния

$$\frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial q(x,t)}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

$$q(x,t) = Q(\rho), \quad t \geq 0.$$

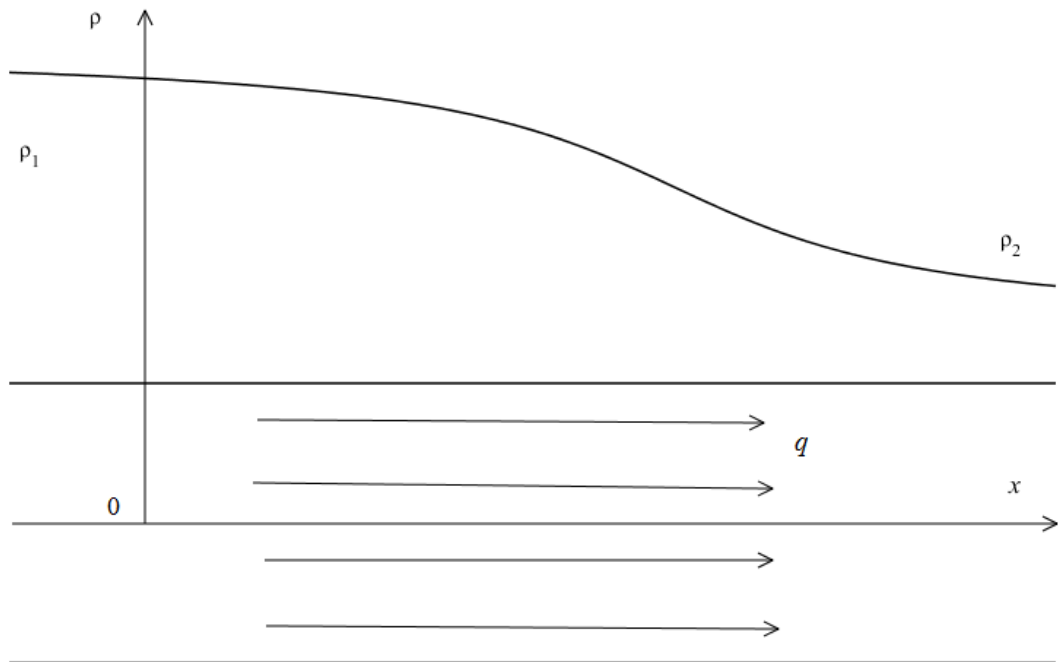


Рисунок 1 – Распределение волны плотности в газовом

Здесь x координата вдоль канала, $\partial/\partial x$, $\partial/\partial t$ - операторы дифференцирования по пространственной переменной и по времени, Q зависимость расхода смеси от ее плотности ρ [2].

Ограничимся минимальным количеством параметров в модели, поэтому в качестве основных параметров системы примем механическое смещение $X(t)$, m (среднее по объему канала смещение частиц квазистационарного потока газа) относительно некоторого X_0 - среднего во времени положения частиц в потоке относительно канала, m ; t - временная переменная, c ; скорость подачи смеси меняющаяся во времени $Y(t)$.

Массу газовой смеси в канале и среднюю за период плотность определим следующим образом

$$m(t) = \int_{x_1}^{x_2} \rho(x,t) dx, \quad \rho_{cm} = \frac{1}{L \cdot T} \int_0^T m(t) dt, \quad (2)$$

для положения центра масс и его среднего положения за период времени T примем

$$X(t) = \frac{1}{\rho_{cm} \cdot L} \int_{x_1}^{x_2} x \rho(x, t) dx, \quad X_0 = \frac{1}{T} \int_0^T X(t) dt. \quad (3)$$

Расход q свяжем со средней скоростью смеси $Y(t)$

$$Y(t) = \frac{1}{L \cdot \rho_{cm}} \int_{x_1}^{x_2} q(x, t) dx. \quad (4)$$

При усреднении уравнений (1) по объему канала, будем полагать возможным дифференцирование по временной переменной под знаком интеграла по пространственной переменной. Первое уравнение (1) предварительно умножим на x , после усреднения, уравнение запишется в виде

$$\begin{aligned} & \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial}{\partial t} (x \rho(x, t)) + x \frac{\partial q(x, t)}{\partial x} \right) dx = 0, \\ & \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial x \rho(x, t)}{\partial t} + x \frac{\partial q(x, t)}{\partial x} \right) dx = \frac{\partial}{\partial t} \int_{x_1}^{x_2} x \rho(x, t) dx + \int_{x_1}^{x_2} x \frac{\partial q(x, t)}{\partial x} dx = \\ & = \frac{\partial}{\partial t} (\rho_{cm} \cdot L \cdot X(t)) + x_2 \cdot q(x_2, t) - x_1 \cdot q(x_1, t) - \int_{x_1}^{x_2} q(x, t) dx = \\ & = \rho_{cm} \cdot L \cdot \frac{\partial X(t)}{\partial t} + x_2 \cdot q(x_2, t) - x_1 \cdot q(x_1, t) - \rho_{cm} \cdot L \cdot Y(t). \end{aligned} \quad (5)$$

Второе соотношение (1) продифференцируем по времени

$$\frac{\partial q(x, t)}{\partial t} = Q'(\rho) \cdot \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t}. \quad (6)$$

Произведем замену в правой части $\frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} = -\frac{\partial q(x, t)}{\partial x}$ и усредним вдоль канала, время t , в данном случае, выступает в роли параметра

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial q(x, t)}{\partial t} dx = - \int_{x_1}^{x_2} Q'(\rho) \cdot \frac{\partial q(x, t)}{\partial x} dx. \quad (7)$$

Рассмотрим обратную функцию $\rho(x, t) = P(q)$, для производных справедливо соотношение $Q'(\rho) = \frac{1}{P'(q)}$, с учетом этого (7) примет вид

$$\begin{aligned} & \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial q(x, t)}{\partial t} dx = - \int_{q_1}^{q_2} \frac{dq}{P'(q)} = - \frac{(q_2 - q_1)}{P'(q_0(t))}, \\ & q_1 = q(x_1, t), \quad q_2 = q(x_2, t), \quad q_2 \leq q_0 \leq q_1. \end{aligned} \quad (8)$$

Нелинейная модель волнового движения газового квазистационарного потока в канале постоянного сечения представляется дифференциальными уравнениями

$$\begin{aligned} & \frac{dX(t)}{dt} = Y(t) - Y_0, \\ & \frac{dY(t)}{dt} = \Phi(Y), \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$Y_0 = \frac{x_2 \cdot q_2 - x_1 \cdot q_1}{\rho_{см} \cdot L},$$

$$\Phi(Y) = -\frac{q_2 - q_1}{\rho_{см} \cdot L \cdot P'(q_0(t))}. \quad (10)$$

Первое уравнение (7) является следствием уравнения неразрывности потока, второе получено из уравнения состояния и отражает тот факт, что средняя скорость в потоке смеси меняется под действием нагрузки, зависящей, вообще говоря от средней скорости потока.

Пример. Задача об устойчивой работе газовой скважины.

Смесь природных газов поднимается по вертикально расположенной насосно компрессорной трубе (НКТ) газовой скважины под действием избыточного давления действующего на забое скважины.

В качестве закона зависимости потока от его плотности выберем закон, соответствующий политропному расширению газа в процессе движения по НКТ с поправкой на вязкое трение,

$$Q(\rho) = \frac{2\sqrt{np_0\rho_0}}{n-1} \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right) \left(1 - \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\frac{n-1}{2}} \right) + \mu \frac{\partial \rho}{\partial x}. \quad (11)$$

Здесь p_0 – критическое давление, ρ_0 – плотность газа соответствующая критическому давлению, n – показатель политропы, μ – коэффициент вязкого трения.

В рассматриваемом примере, после процедуры усреднения, система уравнений модели (9) примет вид

$$\frac{dX(t)}{dt} = Y(t) - Y_0,$$

$$\frac{dY(t)}{dt} + R(Y(t)) + \omega^2(X(t) - X_0) = 0. \quad (12)$$

В этом представлении учтено, что колебание скорости потока в НКТ газовой скважины связано с обобщенными гидравлическими потерями и со способностью газовой компоненты смеси накапливать упругую энергию

$$\Phi = -R(Y(t)) - \omega^2(X(t) - X_0), \quad (13)$$

где R - обобщенные потери на полное гидравлическое сопротивление потоку газа или смеси по всей длине газовой скважины, включая потери на трение о стенки, межфазное трение, гидростатическую составляющую сопротивления. Последнее слагаемое характеризует способность системы накапливать и отдавать упругую энергию, ω - имеет смысл частотного параметра системы. Для устойчиво работающей скважины можно принять скорость газового потока постоянным $Y_0 = const$.

Для оценки обобщенного гидравлического сопротивления воспользуемся определением коэффициента полного гидравлического сопротивления

$$\Delta p = \lambda \frac{l}{d} \frac{\rho v^2}{2}. \quad (14)$$

Здесь l – длина НКТ, м; d – диаметр НКТ, м; λ – коэффициент гидравлического сопротивления (в общем случае является функцией скорости потока v). Выразим R через коэффициент гидравлического сопротивления следующим образом

$$R(v) = \frac{\Delta p}{\rho \cdot l} = \lambda(v) \cdot v^2 \frac{1}{2d}. \quad (15)$$

При оценке параметра ω , необходимо знать оценку средней плотности газовой смеси $\rho_{см}$ и упругий модуль газа k

$$\omega^2 = \frac{k}{\rho_{см}}. \quad (16)$$

Здесь принято для k

$$k = \frac{ZP_0}{l^2}, \quad (17)$$

где Z – коэффициент сверхсжимаемости газа, давление P_0 задает нулевой уровень упругой энергии в смеси, в дальнейшем будем называть P_0 эффективным давлением в НКТ.

Отметим, что на практике удастся обнаружить характерные черты поведения нелинейных динамических систем, которые отражены в предлагаемой модели: автоколебательный характер движения потока газовой смеси, «самозадавливание» скважин – как следствие перехода динамической системы в область неустойчивости, наличие у динамической системы неподвижной точки (x_0, y_0) .

При развитии турбулентном течении газовой смеси в трубных системах эмпирическое выражение для сопротивления R содержит не менее трех слагаемых

$$R(y) = a + \frac{b}{y^\beta} + c \cdot y^\alpha, \quad y = \dot{x}. \quad (18)$$

Слагаемые характеризуют статическую составляющую, вязкое трение газа, трение о стенки трубы. Показатель $\beta \approx 2$, показатель $\alpha \approx 0,5 \div 2,5$. Такая структурная формула (18) для обобщенного гидравлического сопротивления допускает субкритическую бифуркацию Андронова—Хопфа в решениях уравнений (12). При $b \approx 0$, $c > 0$ неподвижная точка (x_0, y_0) , является устойчивым фокусом, увеличение значения бифуркационного параметра b приводит к появлению неустойчивого предельного цикла, сохраняя устойчивый фокус. У каждого из аттракторов существует своя область притяжения.

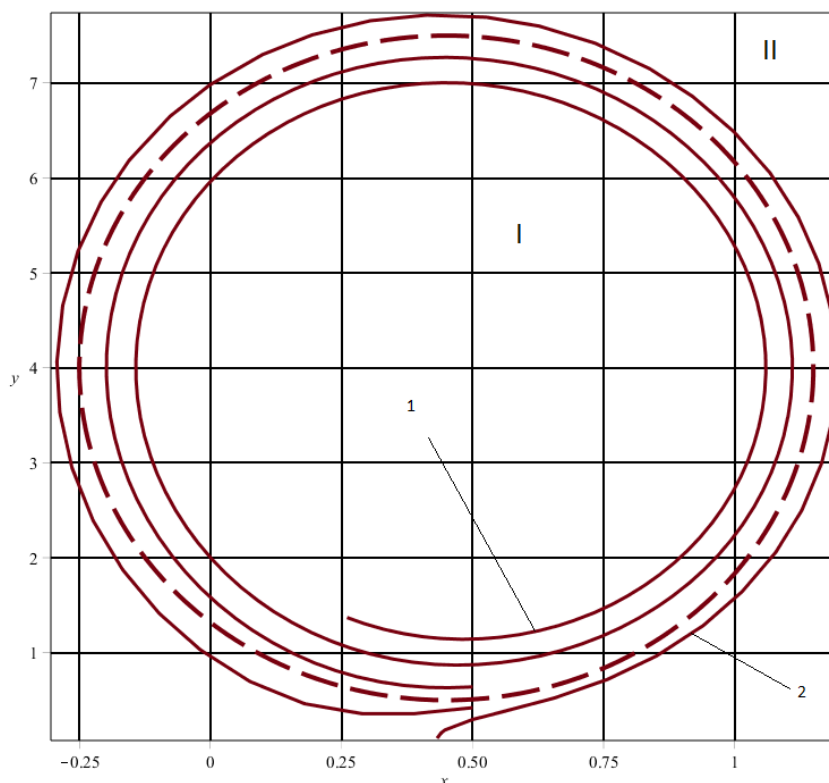


Рисунок 2 – Поведение динамической системы на фазовой плоскости. Значения параметров системы $b=0.5$, $a=0.025$, $\omega \approx 10$, $x_0=0.5$, $y_0=4$, начальные условия $x(0)=x_0$, кривая 1 - $y(0)=0.64$, кривая 2 - $y(0)=0.42$, штриховая линия обозначает положение неустойчивого предельного цикла

Возможными являются следующие варианты поведения динамической системы (8) – рисунок 2. До бифуркации система имеет единственный аттрактор – устойчивый фокус;

- после бифуркации начальное состояние попадает в область I (притяжение устойчивого фокуса);

- после бифуркации начальное состояние попадает в область II (область отталкивания неустойчивого предельного цикла).

Для технической системы описываемой уравнениями (1) это означает, что ее устойчивая работа возможна лишь в первых двух случаях

Закключение. Применение в практике расчетов предложенной в работе нелинейной модели открывает возможность к оценке энергетического состояния технических систем транспортирующих газовые потоки, оценке параметров, обеспечивающих устойчивость в работе систем. Существенным отличием предлагаемой модели является сохранение в модели свойств волновой природы исходного объекта газового потока.

ЛИТЕРАТУРА

1. Андронов А.А. Качественная теория динамических систем второго порядка / А.А. Андронов и др. – М.: Наука, 1966.
2. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. – М.: Мир, 1977. – 622 с.

УЧЕТ СОПРОТИВЛЕНИЙ ИСТОКА И СТОКА В РЕЖИМЕ НАСЫЩЕНИЯ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ НАДПОРОГОВОГО ТОКА В «УЛУЧШЕННОЙ» КОМПАКТНОЙ МОДЕЛИ ОРГАНИЧЕСКОГО ПОЛЕВОГО ТРАНЗИСТОРА

В. О. Турин, к.ф.-м.н.

ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет им. И. С. Тургенева»
e-mail: *voturin@ostu.ru*

Б. А. Рахматов, аспирант

ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет им. И. С. Тургенева»
e-mail: *badriddin.rakhmatov.91@mail.ru*

Г. И. Зебрев, д.т.н., проф.

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
e-mail: *GIZebrev@mephi.ru*

Ч. Х. Ким

Gwangju Institute of Science and Technology, Republic of Korea
e-mail: *chkim@gist.ac.kr*

М. С. Шур

Rensselaer Polytechnic Institute, USA
e-mail: *shurm@rpi.edu*

В органической электронике, для разработки электронных устройств, используются органические материалы, обладающие как рядом важных преимуществ, так и некоторыми недостатками, по сравнению с материалами традиционной электроники [1]. Важнейшим элементом органической электроники является органический полевой транзистор (ОПТ) [2], [3], [4].

Так же как и в случае с другими электронными приборами, для экстракции SPICE параметров компактной модели ОПТ в ходе исследований и для использования при разработке интегральных схем в современных САПР, необходима корректная компактная модель, желательно, с аналитическим учетом сопротивлений истока и стока.

За основу, в нашей работе, используется компактная модель ОПТ, предложенная в работе [2] и разработанная на основе компактной модели длинноканального МОП-транзистора MOSFET Level 1. Основные положения теории длинноканального МОП-транзистора были разработаны Шокли [5]. Отметим, что модель Шокли не учитывает эффект насыщения дрейфовой скоро-

сти носителей в сильном электрическом поле, что приемлемо для современных ОПТ, и является «внутренней» моделью, т.е. не учитывает аналитически сопротивления истока и стока.

Следует отметить, что в работе [2] простейшим образом учитывается суммарное сопротивление контактов (истокового и стокового), посредством его последовательного подключения к каналу транзистора при расчете проводимости ОПТ в линейном режиме.

В работах [6] и [7] для компактного моделирования надпорогового тока стока в «улучшенной» компактной модели ОПТ, предлагается использовать подход, ранее предложенный в работах [8], [9], [10] для «улучшенной» компактной модели МОП-транзистора и обеспечивающий корректный учет выходной проводимости в режиме насыщения с монотонным ее убыванием от максимального значения в линейном режиме до минимального значения в режиме насыщения.

Именно последовательному обобщению этого подхода на «внешний» случай, когда при компактном моделировании аналитически учитываются сопротивление истока и сопротивление стока не только в линейном режиме, но и в режиме насыщения, и посвящена эта работа.

При этом мы будем развивать подход к построению «внешней» компактной модели ОПТ, предложенный в работе [11] для построения «внешней» компактной модели МОП-транзистора на основе «внутренней» компактной модели MOSFET Level 1.

Напомним основные положения теории ОПТ. При малых напряжениях на стоке, ток стока ОПТ линейно зависит от него:

$$I_{LIN} = g_{CH}V_{DS}, \quad (1)$$

где V_{DS} - напряжение на стоке. Обозначение V_{GS} мы будем использовать для напряжения на затворе. Обозначение V_{th} мы будем использовать для порогового напряжения.

В уравнениях, для краткости, мы часто будем использовать модуль центрального напряжения на затворе:

$$V_{GT} = |V_{GS} - V_{th}|. \quad (2)$$

Отметим, что мы, при компактном моделировании, будем все величины вычислять по абсолютной величине, определяя знак тока стока в окончательных формулах по знаку напряжения смещения между стоком и истоком.

Проводимость g_{CH} канала ОПТ в (1) определяется следующим уравнением:

$$g_{CH} = K \mu_{FET} V_{GT} = K \frac{\mu_0}{V_{aa}^\gamma} V_{GT}^{\gamma+1}, \quad (3)$$

где $K = \frac{W}{L} C_i$ - параметр геометрии подзатворного конденсатора и характеристик материала; W - ширина затвора; L - длина затвора; $C_i = \frac{\epsilon_0 \epsilon_{ox}}{d_{ox}}$ - емкость изолятора на единицу площади; ϵ_{ox} - диэлектрическая проницаемость подзатворного диэлектрика; $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$ Ф/м - электрическая постоянная; d_{ox} - толщина подзатворного диэлектрика; $\mu_{FET} = \frac{\mu_0}{V_{aa}^\gamma} V_{GT}^\gamma$ - подвижность с учетом эффекта поля; μ_0 - размерный параметр равный $1 \text{ см}^2/\text{В} \cdot \text{с}$; V_{aa} - характерное напряжение для подвижности с учетом эффекта поля; γ - степенной коэффициент для подвижности с учетом эффекта поля.

В работах [2] и [3] простейшим образом учитывается сопротивление контактов:

$$g_{ch0} = \frac{g_{CH}}{1 + R_T g_{CH}}, \quad (4)$$

где $R_T = R_S + R_D$ - суммарное сопротивление контактов: истока и стока.

Отметим, что мы будем использовать заглавные буквы в индексах напряжений в случае «внутренней» модели ($R_S = R_D = 0$). Для «внешней» модели ($R_S \neq 0$ и/или $R_D \neq 0$) мы будем использовать в подстрочных индексах строчные буквы. Так в уравнении (4) g_{CH} - проводимость канала ОПТ с нулевыми значениями сопротивлений истока и стока, а g_{ch0} уже с учетом сопротивлений контактов.

Отметим, что уравнение (4) верно только при малых значениях V_{ds} и, соответственно, при малых значениях тока стока, когда $V_{DS} \approx V_{ds} \approx V_{ds} - I R_T \approx 0$. В этом случае можно считать, что $V_{gt} \approx V_{GT}$ и итоговое выходное сопротивление ОПТ складывается из последовательно соединенных сопротивлений контактов и канала ОПТ:

$$\frac{1}{g_{ch0}} = \frac{1}{g_{ch}(V_{ds} \rightarrow 0)} = \frac{1}{g_{CH}(V_{GT} = V_{gt})} + R_T. \quad (5)$$

Приближенный характер уравнения (4) и его правомерность только при близких к нулю значениях напряжения на стоке V_{ds} подчеркивается добавлением нуля к подстрочному обозначению ch .

С увеличением напряжения на стоке, ток стока выходит на насыщение. Напряжение насыщения для ОПТ определяется уравнением:

$$V_{SAT} = \alpha_S V_{GT}, \quad (6)$$

где α_S – безразмерный параметр, связанный с влиянием подложки. При этом, ток насыщения ОПТ полагается равным:

$$I_{SAT} = g_{CH} V_{SAT} = \alpha_S K \frac{\mu_0}{V_{aa}^\gamma} V_{GT}^{\gamma+2}, \quad (7)$$

где g_{CH} – проводимость канала ОПТ (3).

Крутизна полевого транзистора в режиме насыщения, в модели без учета наличия дифференциальной проводимости в режиме насыщения, определяется следующим уравнением:

$$g_{mSAT} = \frac{\partial I_{SAT}}{\partial V_{GS}}. \quad (8)$$

Введем обозначение b_m , которое пригодится нам позже:

$$b_{mSAT} = \frac{\partial V_{SAT}}{\partial V_{GS}}. \quad (9)$$

В нашем случае, используя уравнения (6) и (7), легко вычислить величины g_m и b_m для ОПТ:

$$g_{mSAT} = \alpha_S K \frac{\mu_0}{V_{aa}^\gamma} (\gamma + 2) V_{GT}^{\gamma+1}. \quad (10)$$

$$b_{mSAT} = \alpha_S. \quad (11)$$

В режиме насыщения ОПТ обладает ненулевой дифференциальной проводимостью с асимптотическим значением

$$g_{ASY} = \lambda I_{SAT}, \quad (12)$$

соответствующим большим значениям напряжения на стоке. Здесь коэффициент λ имеет размерность V^{-1} и соответствует обратному значению напряжения Эрли, хорошо известному из теории биполярных транзисторов.

Отметим, что в теории МОП-транзисторов наличие положительной дифференциальной проводимости в режиме насыщения связывается с такими эффектами, как модуляция длины канала (CLM - эффект), снижение потенциального барьера под затвором, вызванное напряжением на стоке (DIBL - эффект) и влияние горячих носителей (HCE - эффект).

Для асимптотики тока стока ОПТ в режиме насыщения в работе [6], следуя тому, как это было предложено в работе [3], используется уравнение, применяемое в BSIM3/4 компактных моделях МОП-транзистора:

$$I_{ASY} = I_{SAT} \{1 + \lambda [V_{DS} - V_{SAT}]\}. \quad (13)$$

В работе [6], следуя подходу, ранее предложенному в [10] и [8] для «улучшенной модели» МОП-транзистора, используется следующее уравнение для тока стока:

$$I = \frac{I_{LIN} I_{ASY}^*}{[I_{LIN}^m + I_{ASY}^{*m}]^{1/m}}. \quad (14)$$

где I_{ASY}^* определяется уравнением:

$$I_{ASY}^* = \frac{1}{[1 - (g_{ASY}/g_{CH})^m]^{1/m}} I_{ASY}, \quad (15)$$

Используя уравнения (3), (7) и (12), можно переписать это уравнение для ОПТ в виде:

$$I_{ASY}^* = \frac{1}{[1 - (\lambda \alpha_S V_{GT})^m]^{1/m}} I_{ASY}, \quad (16)$$

В нашей работе, используются численные значения параметров компактной модели из статьи [3] (см. таблица 1), кроме сопротивлений контактов и параметра λ . По данным из этой таблице рассчитывается значение $V_{aa} = 358$ В. Отметим, что значения $\lambda = 0,005 \text{ В}^{-1}$ и суммарное сопротивление контактов $R_T = 5$ МОм выбраны достаточно большими, и отличаются от значений, приведенных в таблице 1. Это сделано, чтобы более наглядно продемонстрировать влияние этих параметров на вид выходных характеристик при моделировании методами, предложенными в этой статье.

Таблица 1 – Параметры пентаценового ОПТ и его компактной модели [3]

γ	V_{th} [В]	μ_{FET} ($V_{GS} = -50$ В) [см ² /Вс]	α_S	R_T [кОм]	m	λ [В ⁻¹]	L [мкм]	W [мкм]	C_i [нФ/см ²]
0,91	-12	0,13	0,46	24	1,8	$1,2 \times 10^{-3}$	40	1000	3,3

На рисунке 1 представлены выходные характеристики для пентаценового ОПТ с нулевыми сопротивлениями истока и стока и с $\lambda = 0,005 \text{ В}^{-1}$, рассчитанные с корректным учетом дифференциальной проводимости в режиме насыщения [7].

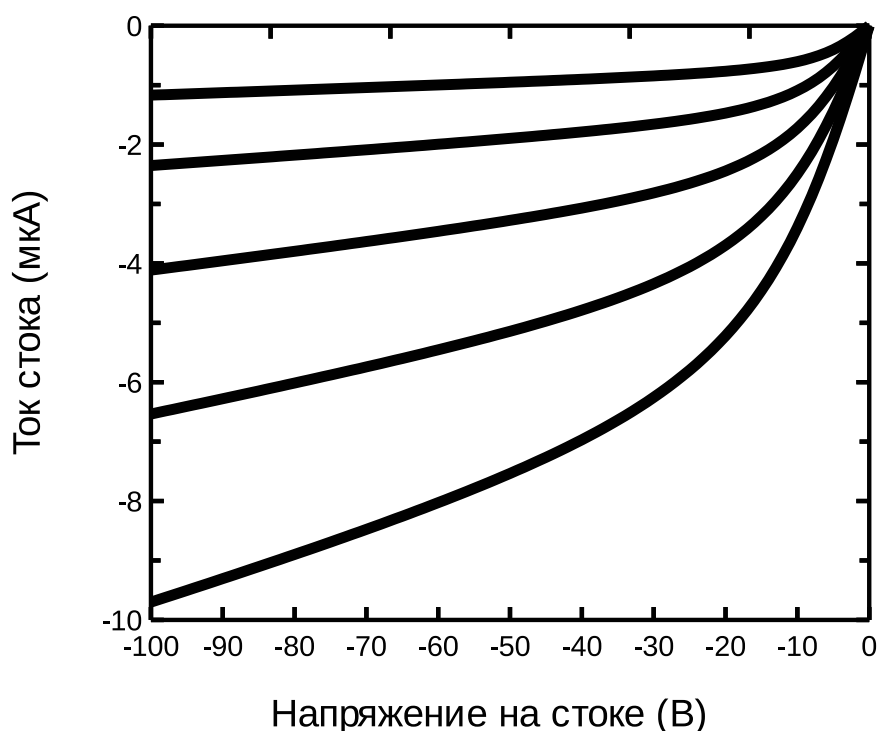


Рисунок 1 – Выходные характеристики для пентаценового ОПТ с нулевыми сопротивлениями истока и стока и с $\lambda = 0,005 \text{ В}^{-1}$, рассчитанные с использованием компактной модели с корректным учетом дифференциальной проводимости в режиме насыщения, предложенной в [7]

На рисунке 2 представлены выходные характеристики для пентаценового ОПТ с ненулевым суммарным сопротивлением контактов $R_T = 5 \text{ МОм}$ и с $\lambda = 0,005 \text{ В}^{-1}$. Здесь суммарное сопротивление контактов учитывалось в линейном режиме (см. уравнение (4)), а расчеты велись тоже с использованием модели с корректным учетом дифференциальной проводимости в режиме насыщения.

Как уже отмечалось ранее, для ускорения расчетов в программах моделирования электронных схем типа SPICE и для теоретических исследований удобно, чтобы компактная модель транзистора была «внешняя», т.е. аналитически включающая в свои уравнения отличные от нуля сопротивления истока R_S и стока R_D .

Мы будем использовать подход к построению «внешней» компактной модели ОПТ, предложенный в работе [11] для построения «внешней» компактной модели МОП-транзистора на основе «внутренней» компактной модели MOSFET Level 1.

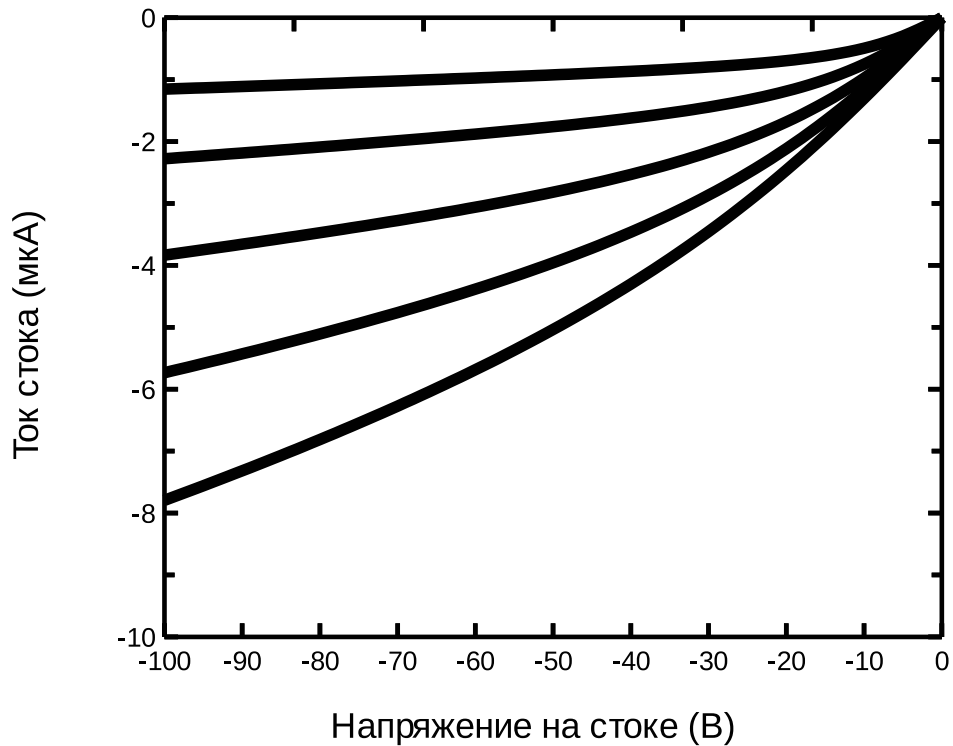


Рисунок 2 – Выходные характеристики для пентаценового ОПТ с ненулевым сопротивлением контактов $R_T = 5 \text{ МОм}$ и с $\lambda = 0,005 \text{ В}^{-1}$, рассчитанные с использованием компактной модели с корректным учетом дифференциальной проводимости в режиме насыщения, предложенной в [7]

Еще раз отметим, что мы будем использовать заглавные буквы в индексах напряжений в случае «внутренней» модели ($R_S = R_D = 0$). Для «внешней» модели ($R_S \neq 0$ и/или $R_D \neq 0$) мы будем использовать в подстрочных индексах строчные буквы.

Соответственно, между «внешними» и «внутренними» напряжениями на стоке, истоке и затворе выполняются соотношения:

$$V_{ds} = V_{DS} + I R_T, \quad (17)$$

$$V_{gt} = V_{GT} + I R_S \quad (18)$$

или

$$V_{DS} = V_{ds} - I R_T, \quad (19)$$

$$V_{GT} = V_{gt} - I R_S. \quad (20)$$

Для линейного режима работы ОПТ линейное уравнение для «внутреннего» случая (1), при малых значениях V_{ds} ($V_{DS} \approx V_{ds} \approx 0$), очевидным образом преобразуется в линейное уравнение для «внешнего» случая:

$$I_{lin} = g_{ch0} V_{ds}, \quad (21)$$

где

$$g_{ch0} = \frac{K \frac{\mu_0}{V_{aa}^\gamma} V_{gt}^{\gamma+1}}{1 + R_T K \frac{\mu_0}{V_{aa}^\gamma} V_{gt}^{\gamma+1}}. \quad (22)$$

Еще раз отметим, что это преобразование верно только при малом значении V_{ds} , когда $V_{DS} \approx V_{ds} \approx 0$. В этом случае можно считать, что $V_{gt} \approx V_{GT}$ и итоговое выходное сопротивление ОПТ складывается из последовательно соединенных сопротивлений контактов и канала ОПТ:

$$\frac{1}{g_{ch0}} = \frac{1}{g_{ch}(V_{ds} \approx 0)} \approx \frac{1}{g_{CH}(V_{GT} = V_{gt})} + R_T. \quad (23)$$

Подставим уравнение (18) в уравнение для тока насыщения (7), получим уравнение для тока насыщения в неявном виде:

$$I_{sat} = I_{SAT}(V_{gt} - I_{sat} R_S) = \alpha_S K \frac{\mu_0}{V_{aa}^\gamma} (V_{gt} - I_{sat} R_S)^{\gamma+2}. \quad (24)$$

Из этого уравнения легко можно получить прямую зависимость для «внешнего» напряжения на затворе V_{gs} от значения тока стока в режиме насыщения I_{sat} :

$$V_{gs} = V_{th} + \frac{1}{\alpha_S K} \frac{V_{aa}^\gamma}{\mu_0} I_{sat}^{\frac{1}{\gamma+2}} + I_{sat} R_S, \quad (25)$$

Уравнение (24) можно трактовать как уравнение для вычисления I_{sat} методом итераций:

$$I_{sat, j+1} = \alpha_S K \frac{\mu_0}{V_{aa}^\gamma} (V_{gt} - I_{sat, j} R_S)^{\gamma+2}, \quad (26)$$

где j - номер итерации.

За начальное значение тока насыщения, соответствующее нулевой итерации, можно взять значение тока насыщения, даваемое уравнением (7), при подстановке в него вместо V_{GT} напряжения V_{gt} :

$$I_{sat, 0} = I_{SAT}(V_{gt}) = \alpha_S K \frac{\mu_0}{V_{aa}^\gamma} V_{gt}^{\gamma+2}, \quad (27)$$

Отметим, что итерационные методы иногда применяются для компактного моделирования [12]. Но, как правило, для компактного моделирования электронных приборов, когда оперативно нужно одновременно моделировать их большое количество, желательны уравнения, которые возможно разрешить в квадратурах, а не решать их используя численные методы.

Соответственно, линейаризуем уравнение (24). Для этого, за стартовое значение для тока насыщения при линейаризации, возьмем ток $I_{sat, i}$, определенный за выбранное нами фиксированное количество итераций i с помощью уравнения (26). (Практически, расчеты показывают, что при $i = 0$, наблюдается приемлемая точность. Это соответствует выбору за начальное приближение $I_{sat, 0} = I_{SAT}(V_{gt})$ (см. уравнение (27)), которое рассчитывается с использованием уравнения (7) для компактного моделирования тока насыщения во «внутреннем» случае.) Тогда стартовое значение для «внутреннего» напряжения на затворе определится по формуле:

$$V_{GT, i} = V_{gt} - I_{sat, i} R_S. \quad (28)$$

Ток насыщения можно представить как сумму стартового тока $I_{sat, i}$ и некоторого приращения тока dI_{sat} :

$$I_{sat} = I_{sat, i} + dI_{sat}, \quad (29)$$

а истинное центрированное напряжение на стоке равно:

$$V_{GT} = V_{gt} - I_{sat} R_S = V_{gt} - \{I_{sat, i} + dI_{sat}\} R_S = \\ V_{GT, i} - dI_{sat} R_S = V_{GT, i} + dV_{GT}, \quad (30)$$

где

$$dI_{sat} = I_{sat} - I_{sat, i} \quad (31)$$

и

$$dV_{GT} = -dI_{sat} R_S = -(I_{sat} - I_{sat, i}) R_S. \quad (32)$$

С учетом этих уравнений и уравнения (28) и (29), уравнение (24) можно преобразовать следующим образом:

$$I_{sat} = I_{SAT}(V_{gt} - I_{sat} R_S) = I_{SAT}(V_{gt} - \{I_{sat, i} + dI_{sat}\} R_S) = \\ I_{SAT}(V_{GT, i} - dI_{sat} R_S) = I_{SAT}(V_{GT, i} + dV_{GT}) \approx \\ I_{SAT}(V_{GT, i}) + g_{mSAT}(V_{GT, i}) dV_{GT} = I_{SAT}(V_{GT, i}) - g_{mSAT}(V_{GT, i}) dI_{sat} R_S = \\ I_{SAT}(V_{GT, i}) - g_{mSAT}(V_{GT, i}) [I_{sat} - I_{sat, i}] R_S = \\ I_{SAT}(V_{gt} - I_{sat, i} R_S) - g_{mSAT}(V_{gt} - I_{sat, i} R_S) [I_{sat} - I_{sat, i}] R_S$$

Оставив в этой выкладке только последнюю строчку, и заменив знак приближенного равенства на знак равенства (т.к. теперь это приближенное уравнение, точное решение которого дает нам значение I_{sat} при компактном моделировании), получим уравнение:

$$I_{sat} = I_{SAT}(V_{gt} - I_{sat, i} R_S) - g_{mSAT}(V_{gt} - I_{sat, i} R_S) [I_{sat} - I_{sat, i}] R_S \quad (33)$$

Отсюда легко можно получить приближенное уравнение для тока насыщения ОПТ для «внешнего» случая и для нулевой дифференциальной проводимости в режиме насыщения, пригодное для компактного моделирования:

$$I_{sat}(V_{gt}) = \frac{I_{SAT}(V_{gt} - I_{sat, i} R_S) + g_{mSAT}(V_{gt} - I_{sat, i} R_S) I_{sat, i} R_S}{1 + g_{mSAT}(V_{gt} - I_{sat, i} R_S) R_S}. \quad (34)$$

С использованием уравнений (7) и (10) для I_{SAT} и g_{mSAT} и, как это обсуждалось ранее, приняв за начальное приближение $I_{sat, 0} = I_{SAT}(V_{gt}) = \alpha_S K \frac{\mu_0}{V_{aa}^\gamma} V_{gt}^{\gamma+2}$, получим окончательное практическое уравнение для расчета:

$$I_{sat}(V_{gt}) = \left[\alpha_S K \frac{\mu_0}{V_{aa}^\gamma} \left[V_{gt} - \alpha_S K \frac{\mu_0}{V_{aa}^\gamma} V_{gt}^{\gamma+2} R_S \right]^{\gamma+2} + \left(\alpha_S K \frac{\mu_0}{V_{aa}^\gamma} \right)^2 (\gamma+2) \left[V_{gt} - \alpha_S K \frac{\mu_0}{V_{aa}^\gamma} V_{gt}^{\gamma+2} R_S \right]^{\gamma+1} V_{gt}^{\gamma+2} R_S \right] / \left[1 + \alpha_S K \frac{\mu_0}{V_{aa}^\gamma} (\gamma+2) \left[V_{gt} - \alpha_S K \frac{\mu_0}{V_{aa}^\gamma} V_{gt}^{\gamma+2} R_S \right]^{\gamma+1} R_S \right]. \quad (35)$$

Теперь пересчитаем асимптотику для тока стока в режиме насыщения I_{ASY} (13) для «внутреннего» случая, с учетом дифференциальной проводимости в режиме насыщения, во «внешний» случай. Подставим уравнения (18) и (19) во «внутреннее» уравнение для асимптотики тока насыщения (13) и получим «внешнее» уравнение для асимптотики тока насыщения I_{asy} в неявном виде:

$$I_{asy} = I_{SAT}(V_{gt} - I_{asy} R_S) \left\{ 1 + \lambda [V_{ds} - I_{asy} R_T - V_{SAT}(V_{gt} - I_{asy} R_S)] \right\}. \quad (36)$$

Из этого уравнения легко можно получить прямую зависимость для «внешнего» напряжения на стоке V_{ds} от асимптотического значения тока стока в режиме насыщения I_{asy} :

$$V_{ds} = V_{SAT}(V_{gt} - I_{asy} R_S) + \frac{1}{\lambda} \left(\frac{I_{asy}}{I_{SAT}(V_{gt} - I_{asy} R_S)} - 1 \right) + I_{asy} R_T \quad (37)$$

Из уравнения (36) можно получить уравнения для вычисления I_{asy} методом итераций:

$$I_{asy, j+1} = \frac{I_{SAT}(V_{gt} - I_{asy, j} R_S) \{1 + \lambda [V_{ds} - V_{SAT}(V_{gt} - I_{asy, j} R_S)]\}}{1 + \lambda I_{SAT}(V_{gt} - I_{asy, j} R_S) R_T}. \quad (38)$$

За начальное значение тока насыщения, соответствующее нулевой итерации, можно взять значение тока насыщения $I_{sat}(V_{gt})$, рассчитываемое одним из изложенных ранее методов. Но, наиболее последовательно, для компактного моделирования, использовать приближенное значение $I_{sat}(V_{gt})$ полученное из уравнения (34) для компактного моделирования.

$$I_{asy, 0} = I_{sat}(V_{gt}) \quad (39)$$

На рисунке 3 представлены выходные характеристики для пентацеенового ОПТ с сопротивлениями истока и стока по 2,5 МОм и с $\lambda = 0,005 \text{ В}^{-1}$, промоделированные методом итераций.

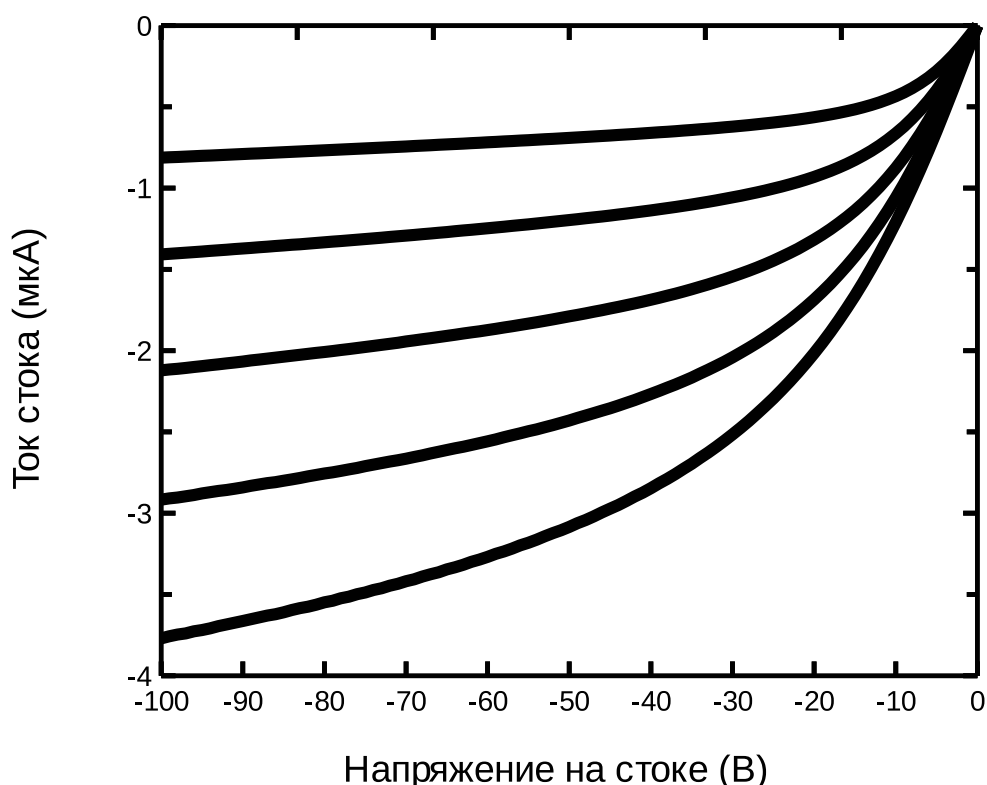


Рисунок 3 – Выходные характеристики для пентацеенового ОПТ с сопротивлениями истока и стока по 2,5 МОм и с $\lambda = 0,005 \text{ В}^{-1}$, рассчитанные методом итераций

Но, как уже ранее отмечалось, для компактного моделирования электронных приборов желательны уравнения, которые возможно разрешить в квадратурах, а не решать их численными методами. Соответственно, линеаризуем входящие в уравнение (36) выражения для I_{SAT} и V_{SAT} :

$$I_{SAT}(V_{GT0} + dV_{GT}) = I_{SAT}(V_{GT0}) + g_{mSAT}(V_{GT0}) dV_{GT}, \quad (40)$$

$$V_{SAT}(V_{GT0} + dV_{GT}) = V_{SAT}(V_{GT0}) + b_{mSAT}(V_{GT0}) dV_{GT}. \quad (41)$$

Для этого, за стартовое значение для асимптотики для тока стока в режиме насыщения возьмем ток $I_{asy, i}$, определенный за выбранное нами фиксированное количество итераций i с помощью уравнения (36). (Практически, расчеты показывают, что при $i = 0$, наблюдается приемлемая точность. Это соответствует выбору за начальное приближение $I_{asy, 0} = I_{sat}(V_{gt})$ (см. уравнение (39)), рассчитываемому по формуле для компактного моделирования (34).) Тогда стартовое значение для «внутреннего» напряжения на затворе определится по формуле:

$$V_{GT, i} = V_{gt} - I_{asy, i} R_S. \quad (42)$$

Так же определим стартовое значение для «внутреннего» напряжения на стоке:

$$V_{DS, i} = V_{ds} - I_{asy, i} R_T. \quad (43)$$

Ток стока можно представить как сумму стартового тока $I_{asy, i}$ и некоторого приращения тока dI_{asy} :

$$I_{asy} = I_{asy, i} + dI_{asy}. \quad (44)$$

а истинное центрированное напряжение на стоке равно:

$$V_{GT} = V_{gt} - I_{asy} R_S = V_{gt} - \{I_{asy, i} + dI_{asy}\} R_S = \\ V_{GT, i} - dI_{asy} R_S = V_{GT, i} + dV_{GT}, \quad (45)$$

где

$$dI_{asy} = I_{asy} - I_{asy, i} \quad (46)$$

и

$$dV_{GT} = -dI_{asy} R_S = -(I_{asy} - I_{asy, i}) R_S. \quad (47)$$

С учетом (42) и (44), уравнение (36) можно преобразовать следующим образом:

$$\begin{aligned}
I_{asy} &= I_{SAT}(V_{gt} - I_{asy} R_S) \cdot \left\{ 1 + \lambda [V_{ds} - I_{asy} R_T - V_{SAT}(V_{gt} - I_{asy} R_S)] \right\} = \\
&I_{SAT}(V_{gt} - \{ I_{asy, i} + dI_{asy} \} R_S) \cdot \\
&\quad \left\{ 1 + \lambda [V_{ds} - I_{asy} R_T - V_{SAT}(V_{gt} - \{ I_{asy, i} + dI_{asy} \} R_S)] \right\} = \\
&I_{SAT}(V_{GT, i} - dI_{asy} R_S) \cdot \\
&\quad \left\{ 1 + \lambda [V_{ds} - I_{asy} R_T - V_{SAT}(V_{GT, i} - dI_{asy} R_S)] \right\} = \\
&I_{SAT}(V_{GT, i} + dV_{GT}) \cdot \left\{ 1 + \lambda [V_{ds} - I_{asy} R_T - V_{SAT}(V_{GT, i} + dV_{GT})] \right\} \approx \\
&[I_{SAT}(V_{GT, i}) + g_{mSAT}(V_{GT, i}) dV_{GT}] \cdot \\
&\quad \left\{ 1 + \lambda [V_{ds} - I_{asy} R_T - V_{SAT}(V_{GT, i}) - b_{mSAT}(V_{GT, i}) dV_{GT}] \right\} = \\
&[I_{SAT}(V_{GT, i}) - g_{mSAT}(V_{GT, i}) dI_{asy} R_S] \cdot \\
&\quad \left\{ 1 + \lambda [V_{ds} - I_{asy} R_T - V_{SAT}(V_{GT, i}) + b_{mSAT}(V_{GT, i}) dI_{asy} R_S] \right\} = \\
&[I_{SAT}(V_{GT, i}) - g_{mSAT}(V_{GT, i}) (I_{asy} - I_{asy, i}) R_S] \cdot \\
&\quad \left\{ 1 + \lambda [V_{ds} - I_{asy} R_T - V_{SAT}(V_{GT, i}) + b_{mSAT}(V_{GT, i}) (I_{asy} - I_{asy, i}) R_S] \right\}
\end{aligned}$$

Оставив в этой выкладке только последнюю строчку, имеем уравнение, решение которого определяет I_{asy} которое можно использовать при компактном моделировании :

$$\begin{aligned}
I_{asy} &= [I_{SAT}(V_{GT, i}) - g_{mSAT}(V_{GT, i}) (I_{asy} - I_{asy, i}) R_S] \cdot \\
&\left\{ 1 + \lambda [V_{ds} - I_{asy} R_T - V_{SAT}(V_{GT, i}) + b_{mSAT}(V_{GT, i}) (I_{asy} - I_{asy, i}) R_S] \right\}. \quad (48)
\end{aligned}$$

Как нетрудно заметить, это квадратное уравнение относительно I_{asy} . Его можно разрешить в квадратурах, получив приближенное уравнение для I_{asy} , которое можно использовать при компактном моделировании. Перепишем это уравнение в стандартном виде:

$$\begin{aligned}
&g_{mSAT}(V_{GT, i}) R_S \lambda \{ b_{mSAT}(V_{GT, i}) R_S - R_T \} (I_{asy} - I_{asy, i})^2 + \\
&\quad [1 + g_{mSAT}(V_{GT, i}) R_S \{ 1 + \lambda [V_{ds} - I_{asy, i} R_T - V_{SAT}(V_{GT, i})] \} - \\
&\quad \lambda I_{SAT}(V_{GT, i}) \{ b_{mSAT}(V_{GT, i}) R_S - R_T \}] (I_{asy} - I_{asy, i}) + \\
&\quad I_{asy, i} - I_{SAT}(V_{GT, i}) \{ 1 + \lambda [V_{ds} - I_{asy, i} R_T - V_{SAT}(V_{GT, i})] \} = 0. \quad (49)
\end{aligned}$$

Имеем выражения для коэффициентов квадратного уравнения:

$$a = g_{mSAT}(V_{GT, i}) R_S \lambda [b_{mSAT}(V_{GT, i}) R_S - R_T]; \quad (50)$$

$$b = 1 + g_{mSAT}(V_{GT}, i) R_S \left\{ 1 + \lambda [V_{ds} - I_{asy, i} R_T - V_{SAT}(V_{GT}, i)] \right\} - \lambda I_{SAT}(V_{GT}, i) [b_{mSAT}(V_{GT}, i) R_S - R_T]; \quad (51)$$

$$c = I_{asy, i} - I_{SAT}(V_{GT}, i) \left\{ 1 + \lambda [V_{ds} - I_{asy, i} R_T - V_{SAT}(V_{GT}, i)] \right\}. \quad (52)$$

Решение:

$$I_{asy} = I_{asy, i} - \frac{b}{2a} - \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}}. \quad (53)$$

(Из двух решений квадратного уравнения оставлено только нужное нам решение.) Как это обсуждалось ранее, за начальное приближение можно выбрать $I_{asy, 0} = I_{sat}(V_{gt})$, определяемое уравнением (35). При этом стартовое значение для «внутреннего» напряжения на затворе определится по формуле:

$$V_{GT, 0} = V_{gt} - I_{sat}(V_{gt}) R_S. \quad (54)$$

Так же определим стартовое значение для «внутреннего» напряжения на стоке:

$$V_{DS, 0} = V_{ds} - I_{sat}(V_{gt}) R_T. \quad (55)$$

С использованием уравнений (7), (10) и (11) для I_{SAT} , g_{mSAT} и b_{mSAT} , перепишем уравнение (49) в виде, удобном для практического расчета:

$$\begin{aligned} & \alpha_S K \frac{\mu_0}{V_{aa}^\gamma} (\gamma + 2) (V_{gt} - I_{sat}(V_{gt}) R_S)^{\gamma+1} R_S \lambda \{ \alpha_S R_S - R_T \} (I_{asy} - I_{sat}(V_{gt}))^2 + \\ & \quad [1 + \alpha_S K \frac{\mu_0}{V_{aa}^\gamma} (\gamma + 2) (V_{gt} - I_{sat}(V_{gt}) R_S)^{\gamma+1} \\ & \quad R_S \{ 1 + \lambda [V_{ds} - I_{sat}(V_{gt}) R_T - \alpha_S (V_{gt} - I_{sat}(V_{gt}) R_S)] \}] - \\ & \quad \lambda \alpha_S K \frac{\mu_0}{V_{aa}^\gamma} (V_{gt} - I_{sat}(V_{gt}) R_S)^{\gamma+2} \{ \alpha_S R_S - R_T \} (I_{asy} - I_{sat}(V_{gt})) + \\ & \quad I_{sat}(V_{gt}) - \alpha_S K \frac{\mu_0}{V_{aa}^\gamma} (V_{gt} - I_{sat}(V_{gt}) R_S)^{\gamma+2} \\ & \quad \{ 1 + \lambda [V_{ds} - I_{sat}(V_{gt}) R_T - \alpha_S (V_{gt} - I_{sat}(V_{gt}) R_S)] \} = 0. \quad (56) \end{aligned}$$

Получим следующие коэффициенты квадратного уравнения:

$$a = \alpha_S K \frac{\mu_0}{V_{aa}^\gamma} (\gamma + 2) (V_{gt} - I_{sat}(V_{gt}) R_S)^{\gamma+1} R_S \lambda \{ \alpha_S R_S - R_T \}; \quad (57)$$

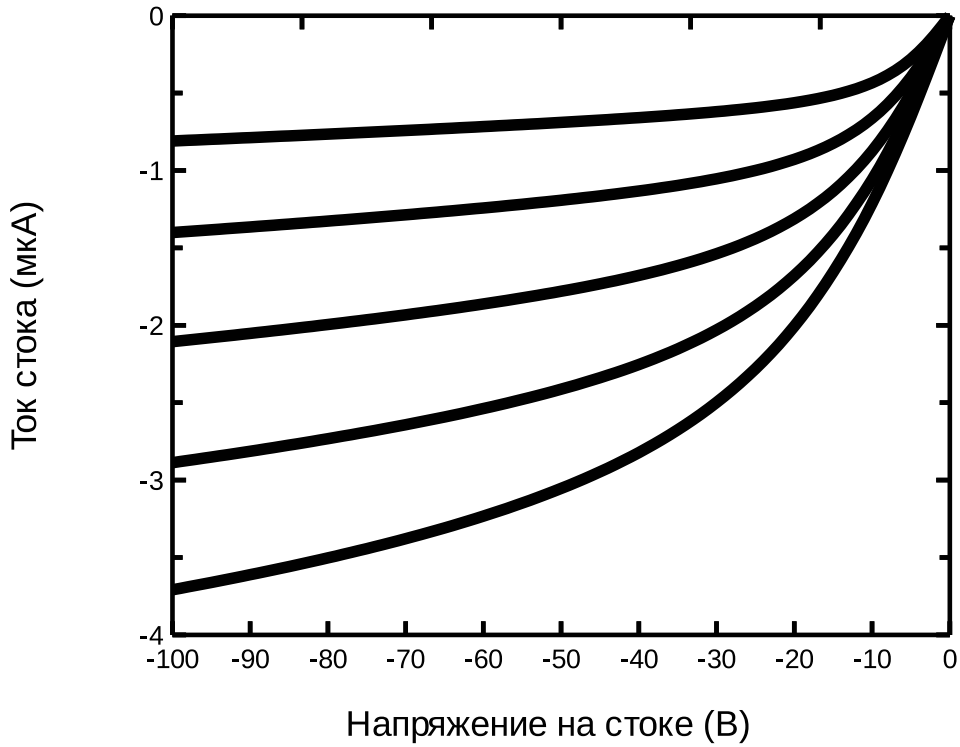


Рисунок 4 – Выходные характеристики для пентаценового ОПТ с сопротивлениями истока и стока по 2,5 МОм и с $\lambda = 0,005 \text{ В}^{-1}$, рассчитанные с использованием разработанной нами «внешней» компактной модели

$$b = 1 + \alpha_S K \frac{\mu_0}{V_{aa}^\gamma} (\gamma + 2) (V_{gt} - I_{sat}(V_{gt}) R_S)^{\gamma+1} R_S \left\{ 1 + \lambda [V_{ds} - I_{sat}(V_{gt}) R_T - \alpha_S (V_{gt} - I_{sat}(V_{gt}) R_S)] \right\} - \lambda \alpha_S K \frac{\mu_0}{V_{aa}^\gamma} (V_{gt} - I_{sat}(V_{gt}) R_S)^{\gamma+2} \{ \alpha_S R_S - R_T \}; \quad (58)$$

$$c = I_{sat}(V_{gt}) - \alpha_S K \frac{\mu_0}{V_{aa}^\gamma} (V_{gt} - I_{sat}(V_{gt}) R_S)^{\gamma+2} \left\{ 1 + \lambda [V_{ds} - I_{sat}(V_{gt}) R_T - \alpha_S (V_{gt} - I_{sat}(V_{gt}) R_S)] \right\}. \quad (59)$$

Решение уравнения (56):

$$I_{asy} = I_{sat}(V_{gt}) - \frac{b}{2a} - \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}}. \quad (60)$$

(Из двух решений квадратного уравнения оставлено только нужное нам решение.)

Чтобы использовать уравнение (60) в уравнении (16), надо пересчитать во «внешний» случай коэффициент перед I_{asy} в этом уравнении. Используя уравнение (20), мы можем переписать уравнение (16) для «внутреннего» случая во «внешний» случай:

$$I_{asy}^*(V_{gt}, V_{ds}) = \frac{I_{asy}(V_{gt}, V_{ds})}{[1 - \{\lambda \alpha_S [V_{gt} - I_{asy}(V_{gt}, V_{ds}) R_S]\}^m]^{1/m}}, \quad (61)$$

Окончательно, выходная вольт-амперная характеристика ОПТ рассчитывается с помощью использования «внутреннего» уравнения (14) для «внешнего» случая:

$$I = \frac{I_{lin} I_{asy}^*}{[I_{lin}^m + I_{asy}^{*m}]^{1/m}}. \quad (62)$$

На рисунке 4 представлены результаты моделирования с использованием разработанной в нашей статье «внешней» компактной модели. Видно, что результаты, полученные методом итераций (см. рисунок 3) и с помощью компактной модели практически неразличимы. При этом видно, что выходные характеристики ОПТ на рисунках 3 и 4 (где учитываются сопротивления источника и стока и в линейном режиме, и в режиме насыщения) очень сильно отличаются от выходных характеристик, рассчитанных только с учетом суммарного сопротивления в линейном режиме (см. рисунок 2).

ЛИТЕРАТУРА

1. Кухто А.В. Органическая электроника: вчера, сегодня, завтра. Химия и жизнь. 2013. Т. 49. №6. С. 3–6.
2. Estrada M., Cerdeira A., Puigdollers J. [и др.] Solid-State Electronics. 2015. №2. С. 1009–1016.
3. Kim C.H., Castro-Carranza A., M. Estrada [и др.] IEEE Trans. Electron Devices. 2013. Т. 60. №3. С. 1136–1141.
4. Kim C.H., Bonnassieux Y., Horowitz G. IEEE Trans. Electron Devices. 2014. Т. 61. №2. С. 278–287.
5. Shockley W. A Unipolar «Field-Effect» Transistor. Proceedings of the IRE. 1952. Т. 40. №11. С. 1365–1376.
6. В.О. Турин, Б.А. Рахматов, Ч.Х. Ким, Б. Инигез. Компактное моделирование тока стока органического полевого транзистора с корректным учетом ненулевой выходной проводимости в режиме насыщения. Энерго- и

- ресурсосбережение – XXI век.: материалы XIV международной научно-практической интернет-конференции, 15 марта – 30 июня 2016 г., г. Орел / под ред. О. В. Пилипенко [и др.]. – Орел: Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева, 2016.- С. 239-242.
7. Turin V.O., Rakhmatov B.A., Kim C.H., Iniguez B. An approach to organic field-effect transistor above-threshold drains current compact modeling that provides monotonic decrease of the output conductance with drain bias increasing. IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 2016. Т. 151. №1. С. 1–5.
 8. Turin V.O., Sedov A.V., Zebrev G.I [и др.]. Intrinsic compact MOSFET model with correct account of positive differential conductance after saturation. SPIE Proceedings. 2010. Т. 75211H: International Conference on Micro- and Nano-Electronics 2009. С. 1–9.
 9. В.О. Турин, Г.И. Зебрев, Б. Инигез, М.С. Шур. Корректный учет ненулевой дифференциальной проводимости в режиме насыщения в компактной модели полевого нанотранзистора. Наноинженерия. 2011. №8. С. 41–48.
 10. Turin V.O., Zebrev G.I., Makarov S.V. [и др.] The correct account of nonzero differential conductance in the saturation regime in the MOSFET compact model. International Journal of Numerical Modelling: Electronic Networks, Devices and Fields. 2014. №27. С. 863–874.
 11. В.О. Турин, Г.И. Зебрев, С.В. Макаров [и др.]. Обобщение компактной модели MOSFET Level 1 при ненулевой дифференциальной проводимости в режиме насыщения на случай ненулевых сопротивлений истока и стока. Энерго- и ресурсосбережение – XXI век.: материалы XIII международной научно-практической интернет-конференции, 15 марта – 30 июня 2015 г., г. Орел / под ред. О. В. Пилипенко [и др.]. – Орел: Госуниверситет-УНПК, 2015.- С. 137-140.
 12. M.S. Shur, V.O. Turin, D. Veksler [и др.]. Compact Iterative Field Effect Transistor Model. Technical Proceedings of the 2006 NSTI Nanotechnology Conference and Trade Show. 2006. Т. 3. С. 648-651.

ЭНЕРГИЯ МЕЖМОЛЕКУЛЯРНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ МЕЗОГЕНОВ В ЗАВИСИМОСТИ ОТ ПАРАМЕТРА ПОРЯДКА

Д.Н. Чаусов, к.ф.-м.н., доц.

Московский государственный областной университет

В.В. Беляев, д.т.н., проф.

Московский государственный областной университет

О.В. Чаусова, к.ф.-м.н., доц.

Технологический университет, г. Королев

М.А. Осипов, д.ф.-м.н., проф.

Университет Стречклайд, Великобритания

А.К. Дадиванян, д.ф.-м.н., проф.

Московский государственный областной университет

Получено аналитическое выражение для энергии взаимодействия палочкообразных молекул, моделирующих мезогены в зависимости от параметра порядка. Потенциал Рапини-Популара для свободной поверхностной энергии жидких кристаллов совпадает с предельным случаем полученного выражения.

Ориентация жидких кристаллов (ЖК) относительно поверхности раздела фаз представляет большой интерес как с теоретической, так и практической точек зрения [1–9]. Наиболее актуальным представляется взаимодействие молекул разных веществ, находящихся в различных фазовых состояниях, а также применение данного процесса в технологии производства дисплеев, электрооптических устройств, органических полевых транзисторов и других устройств органической электроники [10].

Ранее методом атом-атом потенциалов нами были исследованы межмолекулярные взаимодействия алканов и мезогенов с поверхностью различных кристаллов и определена зависимость энергии взаимодействия молекул от углов, характеризующих их ориентацию относительно поверхности кристаллов графита, полиэтилена, полиорганосилоксанов, что позволило объяснить тип ориентации ЖК относительно исследованных поверхностей [11–15]. В работах [11–13, 16] была построена модель, объясняющая как экспериментальную зависимость азимутальной и полярной энергии сцепления слоев ЖК от параметра порядка, так и значения этих величин [17].

Взаимная ориентация молекул мезогенов рассматривается в различных молекулярно-статистических теориях ЖК [18–21]. Их детальное изложение приведено в [21–23]. В то же время до последнего времени не было аналитического выражения для энергии взаимодействия молекул мезогенов от угла ориентации между ними.

Рассмотрено взаимодействие двух молекул терефтал-бис-(*n*-бутиланилина) (ТББА) при сдвиге относительно друг друга (рисунок 1а). Были вычислены энергия взаимодействия между ними методом атом-атом

потенциалов (рисунок 1b кривая 2) и взаимодействие дипольных моментов молекул (рисунок 1b кривая 1).

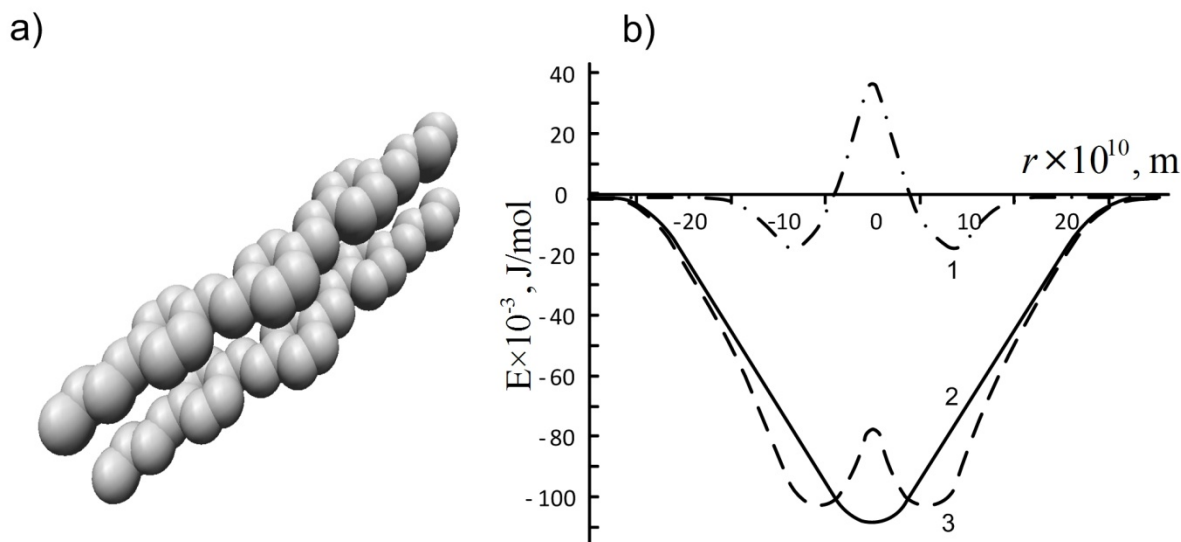


Рисунок 1 – Взаимное расположение молекул ТББА относительно друг друга (а). Зависимости энергий взаимодействия молекул ТББА при сдвиге (б). Кривые: 1 – диполь-дипольное взаимодействие, 2 – взаимодействие, полученное методом атом-атом потенциалов, 3 – суммарная энергия взаимодействия

В случае расчета по атом-атом потенциалам решение проводилось по соотношениям

$$E = \sum_{i,j} E_{i,j}, \quad (1)$$

$$E_{i,j} = \frac{A}{R_{i,j}^{12}} - \frac{B}{R_{i,j}^6} \quad (2)$$

Для диполь-дипольных взаимодействий использовано выражение:

$$E_{i,j} = [\vec{p}_i \vec{p}_j r_{ij}^2 - 3(\vec{r}_{ij} \vec{p}_i)(\vec{r}_{ij} \vec{p}_j)] / r_{ij}^5 \quad (3)$$

где значения A и B взяты из работы [24], p_i, p_j дипольные моменты i и j молекул находящихся в точках с координатами r_i, r_j .

Оказалось, что энергия диполь-дипольного взаимодействия на порядок меньше общей энергии взаимодействия (рисунок 1б кривая 3), поэтому в модели не рассматривается диполь-дипольное взаимодействие. В модели все атомы C и группы CH, CH_2, CH_3 были заменены модельными атомами C' . Адекватность такой замены была показана в работах [17, 24]. Расстояние между атомами выбирали таким, что длина модельной молекулы равнялась длине молекулы мезогена, а число атомов и групп равнялось числу этих атомов и групп в молекуле мезогена.

Ориентация молекул определяется полярным углом θ и азимутальным $-\varphi$ (рисунок 2).

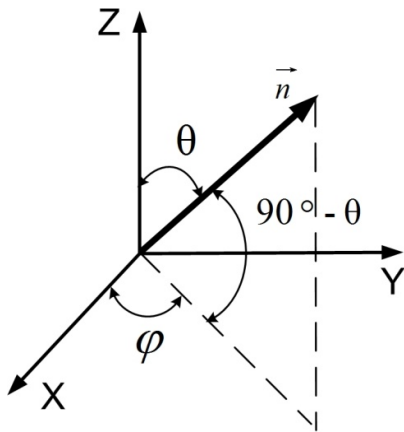


Рисунок 2 – Система координат для описания взаимодействием молекул мезогенов

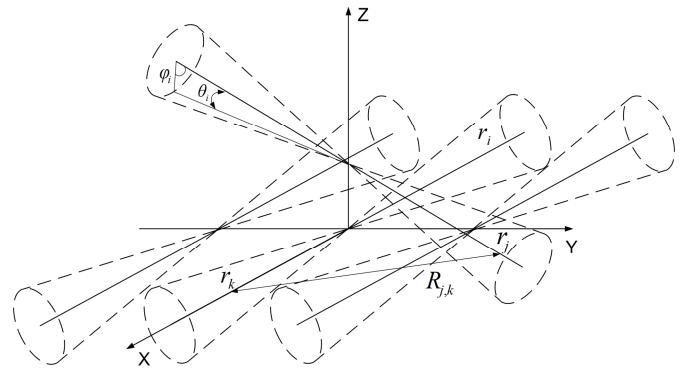


Рисунок 3 – Взаимное расположение молекул мезогенов

При построении модели молекулу представляли в виде жесткого стержня, на который "нанизаны" атомы. Энергию взаимодействия молекул E рассчитывали методом атом-атом потенциалов (2) и записывали в виде суммы (1) величин энергии взаимодействия между атомами молекул.

Энергия парного взаимодействия частиц описывалась потенциалом Леннарда-Джонса. С учетом (1) было получено

$$E = 2 \sum_{i,j,k} \left(A \left(\frac{1}{R_{i,j}^{12}} + \frac{1}{R_{j,k}^{12}} \right) - B \left(\frac{1}{R_{i,j}^6} + \frac{1}{R_{j,k}^6} \right) \right). \quad (4)$$

Для нахождения общего случая зависимости энергии взаимодействия между молекулами в ЖК от параметра порядка, будем считать, что молекулы мезогенов находятся на поверхности конусов и могут перемещаться по этой поверхности (рисунок 3). Ось координат совпадает с направлением директора ячейки ЖК в которой находится молекула. Положение молекул характеризуется радиус-векторами r_i и r_j и углами $\theta_i, \theta_j, \phi_i, \phi_j$. Такая модель позволяет одновременно учесть как отклонение молекулы относительно друг друга, так и ее поворот.

Для квадратов расстояний $R_{i,j}$ и $R_{j,k}$ двух произвольно выбранных атомом в неподвижной системе координат можно записать следующие выражения

$$\bar{R}_{i,j}^2 = \vec{r}_i^2 + \vec{r}_j^2 + D^2 + n^2 - 2(\vec{r}_i, \vec{r}_j) \quad (5)$$

$$\bar{R}_{j,k}^2 = \vec{r}_j^2 + \vec{r}_k^2 + D^2 + n^2 + 2(\vec{r}_j, \vec{r}_k) \quad (6)$$

Координаты $x_i = -x_k, y_i = -y_k, z_i = -z_k, x_j, y_j, z_j$ радиус-векторов задаются соотношениями

$$\begin{cases} x_i = r \cdot i \sin \theta_j \cos \varphi_j, x_j = r \cdot j \cdot \sin \theta_j \cos \varphi_j, \\ y_i = r \cdot i \sin \theta_j \sin \varphi_j, y_j = r \cdot j \cdot \sin \theta_j \sin \varphi_j, \\ z_i = r \cdot i \cos \theta_j, z_j = r \cdot j \cdot \cos \theta_j. \end{cases} \quad (7)$$

где r – расстояние между соседними атомами, θ_i, θ_j и φ_i, φ_j – соответственно полярные и азимутальные углы, определяющие положение атомов, n – число молекул в слое.

Параметр порядка S равен:

$$S = \frac{3}{2} \left(\overline{\cos \theta_l} - \frac{1}{3} \right) \quad (8)$$

где $l = i, j$.

В связи с тем, что значения θ_l, φ_l для разных молекул разные, то в выражениях для энергии E необходимо брать их средние значения. Распределение по φ_i и φ_j мы считали равновероятными. Величина энергии зависит только от среднего значения $\overline{\cos^b \theta}$ и $\overline{\sin^b \theta}$ в разных степенях ($b=1,2,\dots,12$). В выражения для энергии входят величины $\overline{\cos^{m+b} \theta_l}$ и $\overline{\sin^{p+q} \theta_l}$, где величины m, b, q, p менялись от единицы до двенадцати. Предполагали, что $\overline{\cos^{m+b} \theta_l \sin^{p+q} \theta_l}$ можно представить в виде $\overline{\cos^m \theta_l} \overline{\cos^b \theta_l} \overline{\sin^p \theta_l} \overline{\sin^q \theta_l}$. Такое допущение обосновано, т.к. исследования межмолекулярного взаимодействия углеводородов [13, 17] показали, что вероятности реализации наиболее вероятных состояний на порядок превосходят вероятности 90% остальных состояний, и можно считать, что практически реализуется лишь небольшое число состояний в интервале отклонений от наиболее вероятного значения $\theta \pm 10^\circ$.

После преобразования (2) с учетом (5) – (7) получается выражение энергии межмолекулярного взаимодействия мезогенов от углов ориентации в зависимости от параметра порядка

$$E = 2 \sum_{i,j,n} \left(A \left(\frac{A_{i,j,n}(S) \cos^2 \alpha + b(i,j,n)}{C_{i,j,n}(S) \cos^6 \alpha + F_{i,j,n}(S) \cos^4 \alpha + G_{i,j,n}(S) \cos^2 \alpha + h(i,j,n)} \right)^2 - B \left(\frac{A_{i,j,n}(S) \cos^2 \alpha + b(i,j,n)}{C_{i,j,n}(S) \cos^6 \alpha + F_{i,j,n}(S) \cos^4 \alpha + G_{i,j,n}(S) \cos^2 \alpha + h(i,j,n)} \right) \right) \quad (9)$$

где

$$A_{i,j,n}(S) = \sum_{k=0}^2 a_k(i,j,n) \cdot S^k, \quad G_{i,j,n}(S) = \sum_{k=0}^2 g_k(i,j,n) \cdot S^k,$$

$$F_{i,j,n}(S) = \sum_{k=0}^4 f_k(i,j,n) \cdot S^k, \quad C_{i,j,n}(S) = \sum_{k=0}^6 c_k(i,j,n) \cdot S^k,$$

$a_k(i,j,n), b_k(i,j,n), c_k(i,j,n), f_k(i,j,n), g_k(i,j,n), h_k(i,j,n)$ – функции, характеризующие число контактов взаимодействия молекул нижнего и верхнего слоя.

На рисунке 4 представлена зависимость энергии межмолекулярного взаимодействия мезогенов (12) от угла между ними при различных значениях параметра порядка.

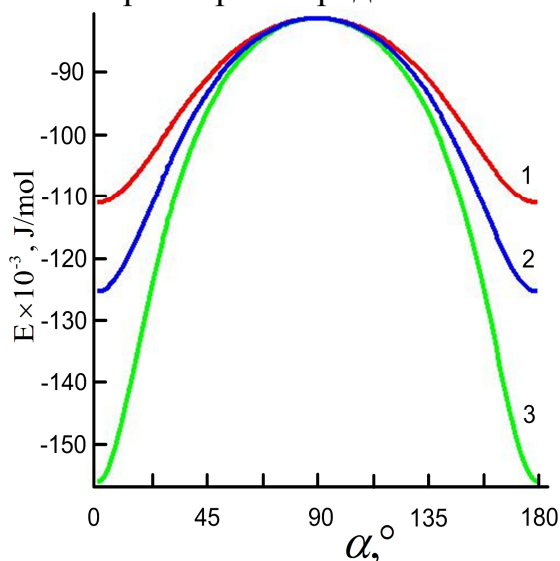


Рисунок 4 – Энергия межмолекулярного взаимодействия мезогенов в зависимости от параметра порядка 1 – $S=0.7$; 2 – $S=0.8$; 3 – $S=0.9$

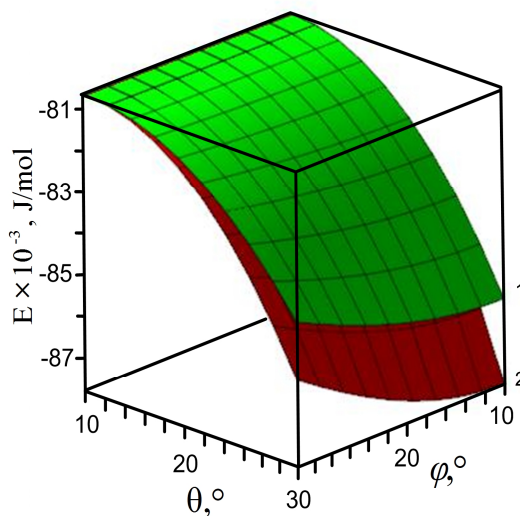


Рисунок 5 – Энергия межмолекулярного взаимодействия мезогенов от их взаимной ориентации в зависимости от параметра порядка 1 - $S=0.8$; 2 - $S=0.9$

Переход от угла α к углам θ и φ осуществлен через формулы перехода Эйлера [18].

Выражение (9) при значениях α , близких к 90° , в первом приближении дает следующий результат

$$E = 4 \sum_{i,j} \left(\frac{A}{a_{i,j}^6} \left(1 + 12 \frac{b_{i,j}^2}{a_{i,j}^2} \cos^2 \alpha \right) - \frac{B}{a_{i,j}^3} \left(1 + 6 \frac{b_{i,j}^2}{a_{i,j}^2} \cos^2 \alpha \right) \right) \quad (10)$$

После суммирования выражение (10) переходит в следующее $E = C_1 + C_2 \cos^2 \alpha$, где C_1, C_2 – константы.

Если заменить угол α на угол θ между молекулой и перпендикуляром к плоскости XOY относительно значения при $\theta = 0$, то зависимость энергии относительно направления перпендикуляра равна $E = w_1' + w_2' \sin^2 \theta$, что совпадает с выражением поверхностной энергии, полученной Рапини и Популаром.

На рисунке 6 представлена зависимость энергии E взаимодействия молекул от угла между молекулой мезогена и слоем молекул мезогенов. Количество атомов в молекуле равно 20, число молекул в слое 10. Для сравнения с результатами, полученными в работах [25-26] мы представили на рисунке 7 зависимость $(E - w_1')/w_2'$ на единицу поверхности от угла θ между молекулой и слоем молекул.

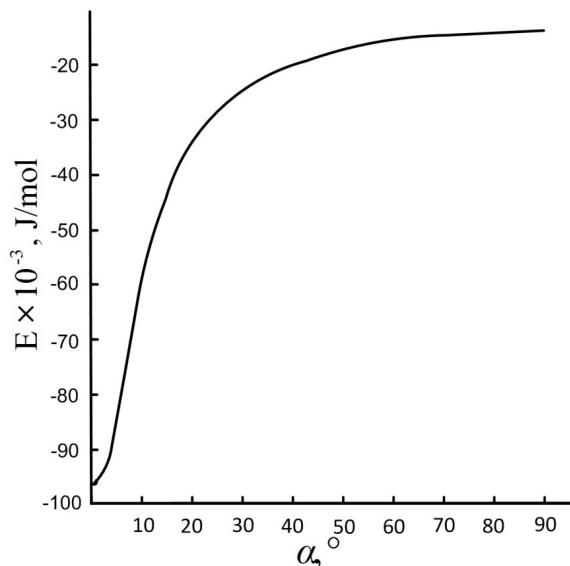


Рисунок 6 – Зависимость энергии взаимодействия между палочкообразными молекулами от угла между ними

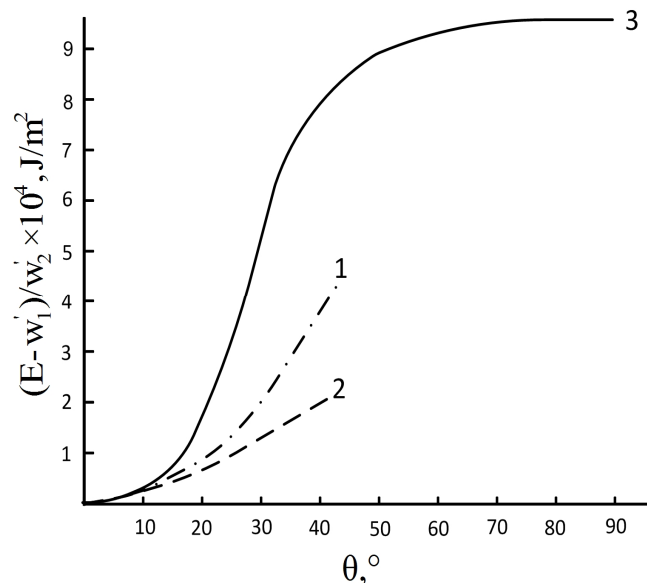


Рисунок 7 – Зависимость величины $(E - w_1')/w_2'$ от угла между молекулой и нормалью к поверхности.

Кривые:

- 1 – согласно работе [25],
- 2 – согласно работе [26],
- 3 – по разработанной модели

Как видно из рисунка 7, при малых углах кривые 1, 2 и 3 совпадают. Отметим, что в работах [25–26] поверхностная энергия, а у нас внутренняя энергия системы. Это означает, что изменение поверхностной энергии от угла в значительной мере определяется внутренней энергией.

Благодарности

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант №15-37-20441 мол_a_вед и гранта Президента Российской Федерации МК-7359.2016.9.

ЛИТЕРАТУРА

1. V.A. Belyakov, Mol. Cryst. Liq. Cryst., 494, 153 (2008).
2. P.V. Dolganov, V.M. Zhilin, V.K. Dolganov, E.I. Kats, Phys. Rev. E., 83, 061705 (2011).
3. V.A. Benderskii, E.I. Kats, J. Appl. Funct. Anal., 6(1), 26 (2011).
4. S.A. Pikin, Structural Transformations in Liquid Crystals, Gordon and Breach Science Publishers, NY (1991).
5. V.A. Belyakov, I.W. Stewart, M.A. Osipov, Phys. Rev. E 71, 051708 (2005).
6. В.А. Беляков, Е.И. Кац, ЖЭТФ, 120(2), 430-444 (2001).
7. Блинов Л.М., Фридкин В.М., Палто С.П., Буне А.В., Даубен П.А., Дюшарм С. УФН 170 247–262 (2000).

8. В.В. Беляев, А.С. Соломатин, Д.Н. Чаусов Оптические свойства ЖК ячеек с произвольным краевым углом наклона директора // Вестник МГОУ. Сер. «Физика-Математика» 2013. №1. с.32-40.
9. Д.Н. Чаусов, М.В. Светлов, В.В. Беляев, А.К. Дадиванян, Взаимодействие алканов с поверхностью олигодиметилсилоксана // Вестник МГОУ. Сер. «Физика-Математика» 2012. №2. с.162-169.
10. C. Zannoni Atomistic simulations of the order and molecular organizations of liquid crystals. Predictions and reality // 25th International Liquid Crystal Conference, Trinity College Dublin, Ireland, 29 June – 4 July 2014. Abstracts TM-I2.001
11. А.К. Дадиванян, Д.Н. Чаусов, Ю.М. Пашина, В.В. Беляев. Жидкие кристаллы и их практ. испол. 4(34), 61 (2010).
12. А.К. Dadivanyan, Yu.M. Pashinina, D.N. Chausov, V.V. Belyaev, A.S. Solomatin, Mol. Cryst. Liq. Cryst. 545, 159/1383 (2011).
13. V. Palermo, F. Biscarini, C. Zannoni, Phys. Rev. E. 57, 2519 (1998).
14. Al. Muravsky, An. Murauski, V. Mazaeva, V. Belyaev, J. Soc. Inf. Display 13, 349 (2005).
15. А.К. Дадиванян, Д.Н. Чаусов, О.В. Ноа, В.В. Беляев, В.Г. Чигринов, Ю.М. Пашина, ЖЭТФ, 2012, Т.142, Вып.6(12), с.1253-1257.
16. A.D. Kiselev, V.G. Chigrinov, Dan Ding Huang, Phys. Rev. E., 72, 061703 (2005)
17. Maier W., Saupé A. Eine einfache molecular-statistische theorie des nematischen kristallinflussigen phase. // Teil 1., Z. Naturforsch, 1959, 14a, № 10, p. 882-889.
18. Maier W., Saupé A. Eine einfache molecular-statistische theorie des nematischen kristallinflussigen phase. // Teil 2., Z. Naturforsch, 1960, 15a, № 4, p. 287-292.
19. G. Lasher, Nematic ordering of hard rods derived from a scaled particle treatment // J. Chem. Phys., 53 (1970), pp. 4141–4146.
20. C. Zannoni, Results of generic model simulations, in Physical Properties of Liquid Crystals, Vol. 1: Nematics, D. A. Dunmur, A. Fukuda and G. R. Luckhurst eds., EMIS, IEE, London, 624-634 (2001).
21. Чандрасекар. Жидкие кристаллы. М.: Мир, 1980.
22. Блинов Л.М. Жидкие кристаллы: Структура и свойства. М.: Книжный дом. «ЛИБРОКОМ», 2013. – 480 с.
23. L. Katz, S. Levinthal, Ann. Rev. of Biophys. and Bioeng. 1, 465 (1972).
24. C. Levinthal, P.C. Kahn, Sh. Wodak, A.K. Dadivanian, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 72, 1330 (1975).
25. A. Rapini and M. Papoular, J. Phys. Colloques, 1969, 30, C4-54-C4-56.
26. Л.М. Блинов, Д.З. Раджабов, Д.Б. Судагчюс, С.В. Яблонский, Письма ЖЭТФ, Т.53, вып. 4, с.223-227.

К ВОПРОСУ ОПРЕДЕЛЕНИЯ МОЛЕКУЛЯРНОГО ТРЕНИЯ ЖИДКОКРИСТАЛЛИЧЕСКИХ СМЕСЕЙ

Д.Н. Чаусов, к.ф.-м.н., доц.

Московский государственный областной университет

А.Д. Курилов, инженер

Московский государственный областной университет

О.В. Чаусова, к.ф.-м.н., доц.

Технологический университет, г. Королев

В.В. Беляев, д.т.н., проф.

Московский государственный областной университет

S. Kumar

Raman Research Institute, India

Исследован коэффициент молекулярного трения и вращательной диффузии нематической жидкокристаллической смеси ЖК-1282. Проведен анализ имеющихся теоретических моделей определения коэффициента молекулярного трения, показано, что существующие теории удовлетворительно согласуются с полученными экспериментальными данными.

Изучение процессов молекулярной динамики является важным вопросом в физике жидких кристаллов т.к. макроскопические характеристики ЖК зависят не только от химической структуры молекул, но и от их коллективного поведения и объединения вследствие межмолекулярных взаимодействий.

В качестве объекта исследования выбрана жидкокристаллическая смесь ЖК-1282 (НИОПИК, Россия) с широким температурным интервалом существования нематической мезофазы (от 253.1 К до 335.1 К), что позволяет проводить исследования вдали от предпереходных процессов. В состав ЖК-1282 [1] входят алкоксицианбифенилы (47% массовой доли), эфир Демуса (48%) и эфир Грея (4%). Каждая составляющая смеси (рисунок 1), в отдельности представляет собой хорошо изученное соединение, что дает возможность делать выводы о вкладе каждой из составляющей смеси, а также их коллективном взаимодействии [2–6].

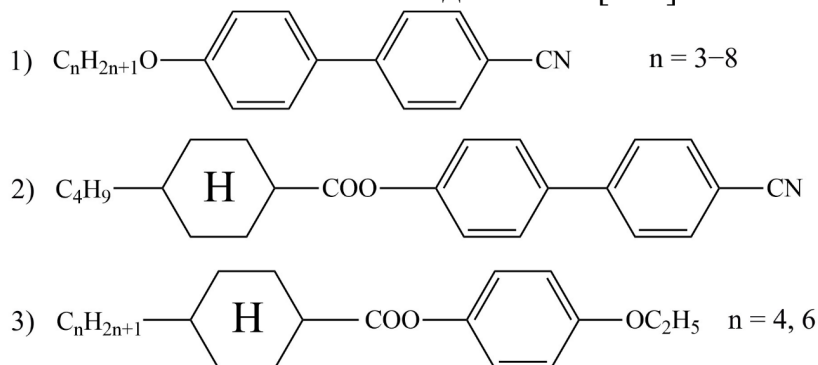


Рисунок 1 – Структурные формулы компонент исследуемой смеси ЖК-1282:

1) Производные алкоксицианбифенилов; 2) Эфир Грея; 3) Эфир Демуса

Существует несколько подходов для расчета коэффициента молекулярного трения ζ . Приведем некоторые выражения для расчета коэффициента молекулярного трения, полученные разными методами [7–10]

$$\zeta = 2kT\tau_D, \quad (1)$$

$$\zeta = \frac{\gamma_1}{3nf_1(S)} = \frac{\gamma_1 \left[q + (2+S)S^2 \left(1 + \frac{bq}{6} \right) + 6S^2 - 1.5bS^4 \right]}{3nS^2 \left(1 + \frac{bq}{6} \right)}, \quad (2)$$

$$\zeta = \frac{2(1+2\gamma)}{9\gamma} (1+p) \left[1 - \frac{5}{p^2+6} \right] d^4 \sqrt{\pi kTm} n \exp \frac{E}{kT}, \quad (3)$$

$$\zeta = 8\pi\gamma_1 L^3 f(p) \approx \frac{16\pi\gamma_1 L^3}{6 \ln \left[1 + \sqrt{p^2 - 1} \right] - 3}. \quad (4)$$

где τ_D – характерное время релаксации молекул, k – постоянная Больцмана, T – температура системы молекул, γ_1 – коэффициент вращательной вязкости, S – параметр порядка, $p = L/d$ – параметр отношения длин короткой и длинной осей молекулы, n – концентрация молекул, m – молекулярная масса, E – потенциальный барьер, который требуется преодолеть при переориентации кластера молекул по теории Майера-Заупе [11–15].

Зависимость функции $f_1(S)$ от параметра порядка S несколько слабее первой степени, причем в исследуемом температурном интервале можно принять $f_1(S) \sim 0.21$. Параметры γ и p зависят от формы молекул и их взаимного расположения. Величина $(1+2\gamma)/\gamma$ практически не зависит от p и S и для оценки коэффициента молекулярного трения можно брать значение $(1+2\gamma)/\gamma = 3.25$ [16]. Среднее значение параметра p для исследуемой смеси следует взять равным 3, $d \sim 0.4$ nm, а $n \sim 2.04 \cdot 10^{27} \text{ m}^{-3}$.

Однако коэффициент молекулярного трения в свою очередь также связан с вращательной диффузией D соотношением [17]

$$\zeta = \frac{kT}{D}. \quad (5)$$

С использованием выражений (4)–(8) рассчитаны значения коэффициенты молекулярного трения и соответствующие им значения вращательной диффузии при температуре $T = 297$ К. Полученные данные представлены в таблице 1.

Значения коэффициентов молекулярного трения, определенные по диэлектрической релаксации и по вращательной вязкости с использованием функции Перрена, имеют одинаковый порядок величины $10^{-27} \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$. Примерно на порядок меньше значения ζ , определенные по вращательной вязкости согласно формуле (2), приведенной в [8,9,19]. Эта величина согласуется с значением ζ , приведенным для азоксисоединений, оснований Шиффа, пентил-цианобифенила и производного бициклооктана в [19].

Таблица 1 – Сравнение коэффициентов молекулярного трения и вращательной диффузии, полученные с помощью [7–10, 17] для $T = 297$ К

1.	2.	3.	4.	5.
Показатель	Значения, полученные из работ			
	[18] согласно формулам (1) и (5)	[7] согласно формулам (2) и (5)	[8] согласно формулам (3) и (5)	[9] согласно формулам (4) и (5)
$\zeta \cdot 10^{27}$, $\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$	0.734	0.107	0.00057	1.97
$D \cdot 10^{-6}$, s^{-1}	5.59	38.35	7190	2.08

Для вращательной диффузии D рассчитанные по разным формулам значения находятся в диапазоне $2 \cdot 10^7 \text{ s}^{-1} - 7 \cdot 10^9 \text{ s}^{-1}$. Для веществ, исследованных в [19] величина D при комнатной температуре находится в диапазоне $8 \cdot 10^7 \text{ s}^{-1} - 7 \cdot 10^8 \text{ s}^{-1}$. В [20, 21] приведены значения параллельной и перпендикулярной составляющей вращательной диффузии D для гексилцианоцианобифенила (6ОСВ), где при 312 К $D_{\parallel} \sim 10^8 \text{ s}^{-1}$, $D_{\perp} \sim 3 \cdot 10^7 \text{ s}^{-1}$. Для пентилцианоцианобифенила (5СВ) при 297 К $D_{\parallel} \sim 8 \cdot 10^8 \text{ s}^{-1}$, $D_{\perp} \sim 4 \cdot 10^7 \text{ s}^{-1}$. Этим данным лучше всего соответствуют результаты в столбце 3 таблицы 1.

Несколько большие величины $D_{\perp} \sim 4 \cdot 10^9 \text{ s}^{-1}$ для 5СВ при 297 К получены в [22] методом рассеяния нейтронов в НЖК. Такая разница объясняется тем, что в этом процессе рассеяние происходит на единичных молекулах ЖК, а в процессе молекулярной релаксации при диэлектрических и вискозиметрических измерениях происходит переориентация кластеров молекул ЖК. Оценка количества молекул в кластере согласно [19] дает значение 5-7, что согласуется и с данными рентгенографии.

$$\frac{\zeta^{\gamma}}{\zeta_{mol}} = \frac{(d_{\perp}^4)^{cl}}{(d_{\perp}^4)^{mol}} \approx 17.4. \quad (9)$$

Оценка отношений коэффициентов молекулярного трения в столбцах 3 и 4 таблицы 1 по процедуре, описанной в [19], дает количество молекул в кластере смеси ЖК-1282 равное 17.4.

Благодарности

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант №15-37-20441 мол_а_вед, №16-37-50042 мол_нр и гранта Президента Российской Федерации МК-7359.2016.9.

ЛИТЕРАТУРА

1. Петров В.Ф., Гребенкин М.Ф., Барник М.И., Беляев В.В. Жидкокристаллический материал для электрооптических устройств // Авторское свидетельство СССР. 1985. №1295732.
2. Jazdyn J., Czerkas S., Czechowski G., Burczyk A. // *Liquid Crystals*. 1999. Volume 26. Issue 3. p. 437-442.
3. Urban S., Gestblom B., Kresse H., Dabrowski R. // *Zeitschrift für Naturforschung A*. 1996. Volume 51. Issue 7. p. 834-842.
4. Jayalakshmi V., Geetha G.N., Krishna P.S. // *Physical Review E*. 2007. Volume 75. p. 031710.
5. Brindaban K., Pratibha R., Madhusudana N.V. // *Physical Review Letters*. 2007. Volume 99. p. 247802.
6. Pawlus S., Mierzwa M., Paluch M., Rzoska S.J., Roland C.M. // *Journal of Physics: Condensed Matter*. 2010. Volume 22. p. 235101.
7. Fröhlich H. *Theory of Dielectrics. Dielectric Constant and Dielectric Loss*. Oxford, Clarendon Press, 1949. 188 p.
8. Немцов В.Б. // *Теоретическая и прикладная механика*. 1985. Том 12. с. 111-114.
9. Немцов В.Б. // В сб.: *Теплофизика конденсированных сред: структура и свойства*. – Минск. Институт тепло- и массообмена. 1990. с. 38.
10. Bata L., Buka A., Molnar G. // *Molecular Crystals and Liquid Crystals*. 1977. Volume 38. p. 155-162.
11. Maier W., Saupe A. // *Zeitschrift für Naturforschung*. 1958. Volume 13a. p. 564-566.
12. Maier W., Saupe A. // *Zeitschrift für Naturforschung*. 1959. Volume 14a. p. 882-889.
13. Maier W., Saupe A. // *Zeitschrift für Naturforschung*. 1960. Volume 15a. p. 287-292.
14. Martins A.F. // *Portugaliae Physica*. 1974. Volume 9. Issue 1. p. 1-8.
15. Martins A.F., Diogo A.C. // *Portugaliae Physica*. 1975. Volume 9. p. 129.
16. Belyaev V.V. *Viscosity of nematic liquid crystals*. Cambridge: International Science Press. 2010. 236 p.
17. Kuzuu N., Doi M. // *Journal of the Physical Society of Japan*. 1983. Volume 52. p. 3486.
18. Ratna B.R., Shashidhar R. // *Molecular Crystals and Liquid Crystals*. 1977. Volume 42. p. 185-192.
19. Беляев В.В., Немцов В.Б. // *Журнал физической химии*. 1992. Том 66. № 10. с. 2763-2772.
20. Dong R.Y., Richards G.M. Deuterium Spin Relaxation in a Ring-Deuterated // *Molecular Crystals and Liquid Crystals*. 1986. Volume 141. p. 335-347.
21. X. Shen, R.Y. Dong // *The Journal of Chemical Physics*. 1998. Volume 88. p. 1443.

22. A.J. Leadbetter, F.P. Temme, A. Heidemann, W.S. Howells // Chemical Physics Letters. 1975. Volume 34. p. 363.

УДК 539.3

СВЯЗЬ ТЕОРЕТИЧЕСКОГО И РЕАЛЬНОГО ПРЕДЕЛОВ ПРОЧНОСТИ УПРУГИХ МАТЕРИАЛОВ

С.И. Якушина, к.т.н.

ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева»

e-mail: *Jakushina@rambler.ru*

В.Ю. Преснецова, к.т.н.

ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева»

e-mail: *alluvian@mail.ru*

В данной работе предлагается упрощенная модель явления разрушения упругого материала, позволившая установить причины и механизм связи между теоретическим пределом прочности на растяжение и реальным разрушающим напряжением.

Предлагается теория, лежащая в основе построения математической модели конечной стадии процесса разрушения адгезионного контакта слоистого композита и его элементов.

Тело B , представлено в виде объединения элементарных частей - ячеек ΔB_n , $n = 1, \dots, N$: $B = \bigcup_{n=1}^N \Delta B_n$, $\Delta B_n \cap \Delta B_m = \emptyset$, $m \neq n$ (рисунок 1 а). Основой послужили опытные данные, изображенные на рисунке 1 – 1б и 1в.

Для учета неоднородности материала при континуальном описании для структурной ячейки вводятся внутренние параметры [1] и осредненные характеристики материала.

Допускается, что в каждой структурной ячейке ΔB_n в отсутствии внешней нагрузки имеется трещина бесконечно малых размеров (рисунок 1а).

Область Ω_D влияния трещины на состояние материала вокруг нее условно делится на две не пересекающиеся области Ω_α и $\Omega_{1-\alpha}$. Справедливы соотношения:

$$V_D : V_\alpha : V_{1-\alpha} = A_D : A_\alpha : A_{1-\alpha} = 1 : \alpha : 1 - \alpha.$$

где α – относительная площадь части сечения области Ω_D плоскостью трещины, не подвергшаяся разрушению; $\beta = 1 - \alpha$ – поврежденность этого сечения трещиной ($\alpha = A_\alpha / A_D$, $\beta = A_{1-\alpha} / A_D$).

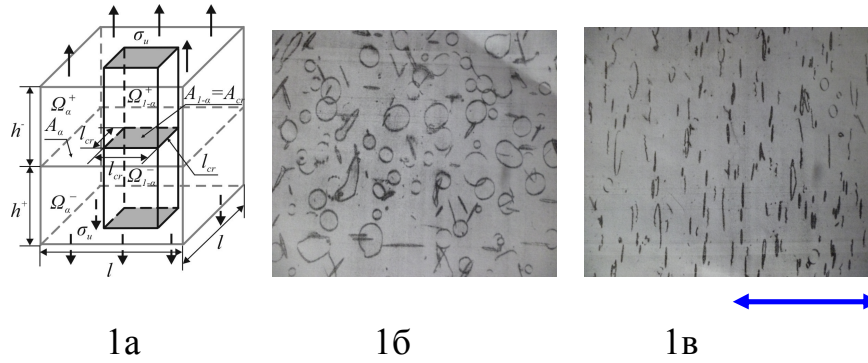


Рисунок 1 – Модель структуры поврежденного материала.
 1а – схема ячеистой структуры; 1б – распределение дислокаций в ненапряженном материале [2]; 1в – та же структура для растягиваемого в направлении стрелки материала [2]

Количественной оценкой приходящегося на единицу объема области V_D изменения свободной энергии, вызванного деформациями материала внутри V_D является средняя по ячейке объемная плотность изменения энергии упругих деформаций $[w]$. Истинное значение этой плотности w определяется равенством

$$w = \mu \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} + \frac{\lambda}{2} \varepsilon_{kk} \varepsilon_{ll} + \frac{2\mu + \lambda}{2} b^2 Z^{(2)}_{ijk} Z^{(2)}_{ijk} + \pi_0 \delta_{ij} E_k Z^{(2)}_{ijk}$$

$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (Z^{(1)}_{ij} + Z^{(1)}_{ji}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$ – тензор малых деформаций, $Z_{ijk} = u_{k,ij}$ – тензоры деформаций; λ , μ , b_1 , b_2 – материальные постоянные, характеризующие упругие свойства среды. Величина $W_s = \frac{\pi_0^2}{(2\mu + \lambda)b}$ является известной константой, $\pi_0 = W_s$, $b = \frac{W_s}{2\mu + \lambda}$. Из условия минимума энергии получено

$$\alpha = \left[1 + \frac{[w]_{\alpha\alpha} - [w]_{\alpha(1-\alpha)}}{[w]_{(1-\alpha)(1-\alpha)} - [w]_{\alpha(1-\alpha)}} \right]^{-1}. \quad (1)$$

Здесь $[w]_{AB}$, $A, B = \alpha, 1-\alpha$, – среднее по ячейке значение объемной плотности работы внутренних сил области Ω_A на соответствующих перемещениях частиц в области Ω_B .

Фрагментация тела V на элементарные ячейки ΔV с описанной структурой обладает трансляционной периодичностью. При этом в плоскости трещины располагается целая сеть периодически повторяющихся трещин. Между краями соседних трещин имеется неповрежденный перешеек. Напряженно-деформированное состояние подобных структур рассматривалось в работе [3].

В момент, когда растягивающее напряжение достигло значения разрушающего напряжения σ_u , реально на перешейке между трещинами оно достигает теоретического предела прочности σ_t , при этом дополнительных трещин на нем не возникает. При этом поврежденность β достигает своего максимального значения. В следующий момент времени перешеек разрывается скачком, создается картина, аналогичная представленной на рисунке 1в (возникает эффект разрушения материала при меньшем по сравнению с ним напряжении).

С учетом сделанных допущений выражение (1) приобретает вид:

$$\alpha = \frac{1}{1 + \frac{\sigma_t^2 h}{2W_{saf} E}}. \quad (2)$$

Значения σ_t и W_{saf} могут быть вычислены, например, методами, изложенными в [4,5].

Учитывая, что $\sigma_u \approx 0,01\sigma_t$ [6], можно утверждать, что параметр α имеет малую величину: $\alpha \approx 10^{-4}$. Приняв это за основу и учтя, что $\alpha = \frac{l^2 - l_{cr}^2}{l^2}$, можно получить, что $l \approx l_{cr}$. Тогда

$$\sigma_u = \left(\frac{4W_{saf} E}{l_{cr}} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3)$$

Выражение (5) устанавливает связь теоретического предела прочности σ_t , разрушающего напряжения σ_u и поврежденности материала рассмотренного типа – сеть параллельных микротрещин.

Сопоставляя полученные теоретические результаты с известными, можно убедиться в том, что с точностью до постоянного множителя, соизмеримого с единицей, выражения для оценки величины разрушающего напряжения, определяемой на основании выражения (6), совпадает с существующими аналогичными выражениями Гриффитса и Орована [6].

ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л. И. Механика сплошной среды. – М.: Лань, 2004. – Т. 1. – 528 с. Добавление II. Модели сред с внутренними степенями свободы. С. 493 – 520. Doi: 10.1007/978-94-007-6098-1.
2. Жирифалько, Л. Статистическая физика твердого тела / Л. Жирифалько. – М.: Мир, 1975. – 384 с.
3. Каштанов А. В., Петров Ю. В. Энергетический подход к определению уровня мгновенной поврежденности // Журнал технической физики. – 2006. – Т. 76. – Вып. 5. – С. 71 – 75. doi: 10.1134/S1063784206050100.
4. Фроленкова Л. Ю., Шоркин В. С. Метод вычисления поверхностной энергии и энергии адгезии упругих тел // Вестник Пермского нацио-

- нального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2013. – № 1. – С. 235 – 259. Doi: 10.1007/978-94-007-6098-1.
5. Витковский И. В., Фроленкова Л. Ю., Шоркин В. С. Адгезионно-диффузионное формирование многослойной стенки жидкометаллического проточного тракта blankets термоядерного реактора // Журнал технической физики. – 2012. – Т. 82. – Вып. 7. – С. 117 – 122. doi: 10.1134/S1063784212070249.
 6. Якушина С. И., Ромашин С. Н., Преснецова В. Ю., Мосин Ю. В. Связь теоретической и реальной прочности упругих материалов // Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии, 2016, № 2 (316), С. 3 – 8.
 7. Райзер Ю. П. Физические основы теории трещин хрупкого разрушения // Успехи физических наук. – 1970. – Т. 100. – Вып. 2. – С. 329 – 347. Doi: 10.3367/UFNr.0100.197002e.0329.

УДК 519.634

ИССЛЕДОВАНИЕ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛ (ПОСРЕДСТВОМ ЯЗЫКА ПРОГРАММИРОВАНИЯ PYTHON)

А.С. Барабанова, бакалавр

ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет им. И.С. Тургенева»

В статье рассматриваются различные численные методы решения интегрального уравнения Фредгольма, проводится анализ получаемых приближенных решений и делаются выводы о наиболее подходящих методах. Вычисления выполняются с помощью языка Python.

Введение

В научных областях, в разных прикладных задачах, например при исследовании явлений механики сплошной среды, химических реакциях, электрических и магнитных явлений часто на каком-либо этапе возникает необходимость решения подзадач, в которых имеют место различные интегральные уравнения. Чаще всего на практике приходится вычислять аналитически сложные интегральные уравнения или же такие уравнения, которые решить собственными силами не представляется возможным. Поэтому необходимо использовать наиболее подходящий метод, который бы приводил интегральное уравнение к наиболее точному результату с нужной нам точностью. В данной работе предполагается рассмотреть интегральное уравнение Фредгольма 2 рода и применить для его решения метод квадратурных формул Гаусса, а затем сравнить его с другими методами.

Для программной реализации рассматриваемых примеров использовался язык программирования Python [2].

Квадратурная формула Гаусса

Для построения квадратурной формулы Гаусса нам потребуются некоторые сведения о полиномах Лежандра [1]. Полином имеет вид

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n (x^2 - 1)^n}{dx^n}, \quad n = 0, 1, \dots$$

Полином имеет n различных корней, которые расположены $(-1, 1)$.

Пусть есть функция $y=f(x)$ на $[-1,1]$. Задача: подобрать точки t_1, t_2, \dots, t_n и коэффициенты A_1, A_2, \dots, A_n , чтобы квадратурная формула

$$\int_{-1}^1 f(t) dt = \sum_{i=1}^n A_i f(t_i) \quad (1)$$

была точна для всех полиномов $f(t)$ наивысшей возможной степени $N=2n-1$. Для обеспечения равенства (1) необходимо и достаточно, чтобы оно было верным при $f(t) = 1, t, t^2, \dots, t^{2n-1}$. При этом имеем следующую систему уравнений:

$$\int_{-1}^1 t^k dt = \sum_{i=1}^n A_i t_i^k, \quad k = 0, 1, \dots, 2n-1.$$

Таким образом, для данного примера получим:

$$\int_{-1}^1 t^k dt = \frac{1 - (-1)^{k+1}}{k+1} = \begin{cases} \frac{2}{k+1} & \text{при } k - \text{чётном,} \\ 0 & \text{при } k - \text{нечётном} \end{cases}$$

Получили систему из $2n$ уравнений для коэффициентов и узлов. Эта система нелинейная и её решение обычным путём вызывает большие математические трудности. Применим следующий искусственный приём, положим $P_n(t_i) = 0, i = 1, 2, \dots, n$

Таким образом, если в качестве t_i взять нули полиномов $P_n(t)$, то мы обеспечим наивысшую точность квадратурной формулы (1) для всех полиномов степени $N=2n-1$. Как известно, это нули действительны, различны и расположены на $(-1,1)$. Зная t_i , легко находим из линейной системы первых n уравнений коэффициенты A_i , ($i = 1, 2, \dots, n$). Определитель этой системы есть определитель Вандермонда $D = \prod_j (t_i - t_j) \neq 0$ и, следовательно, A_i , ($i = 1, 2, \dots, n$) определяются однозначно. Формула (1), где t_i — нули полиномов Лежандра $P_n(t)$ и A_i , ($i = 1, 2, \dots, n$) определяются из системы, называется квадратурной формулой Гаусса.

Исследование численного решения интегрального уравнения

Пример 1. Рассмотрим решение уравнения Фредгольма 2 рода.

$$y(x) + \int_0^1 x e^{xs} y(s) ds = e^x$$

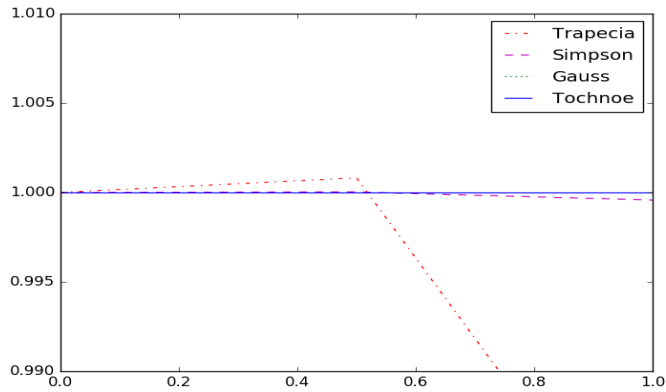


Рисунок 1 – Графики решения, получаемого формулой Гаусса, методом трапеции и обобщенной формулой Симпсона для примера 1 при n=2

Пример 2. Рассмотрим следующий пример:

$$y(x) - \frac{1}{2} \int_0^1 e^{xs} y(s) ds = 1 - \frac{1}{2x} (e^x - 1)$$

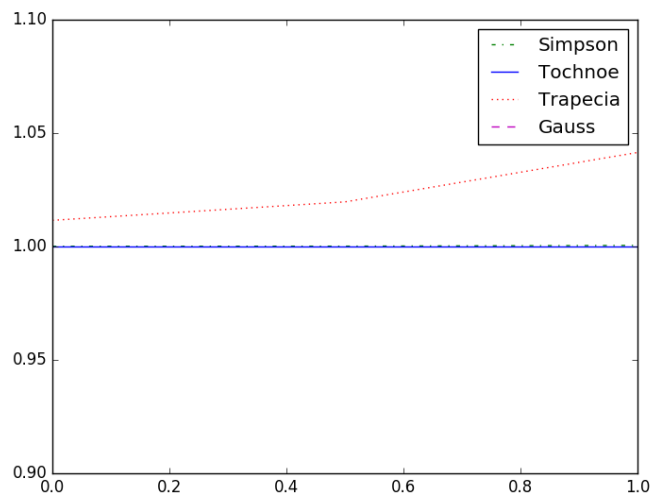


Рисунок 2 – Квадратурная формула Гаусса, метод трапеции и обобщенная формула Симпсона для примера 2 при n=2

Вывод

В примере 1 на рисунке 1 видим, как рассматриваемые нами функции ведут себя относительно точного решения и приходим к выводу, что более точное решение дает квадратурная формула Гаусса.

В примере 2 так же приходим к выводу, что более точное решение дает квадратурная формула Гаусса.

После разбора обобщенных формул и квадратурной формулы Гаусса получена программная реализация для нахождения интеграла и решения

интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода. После запуска программы при разных значениях разбиения приходим к выводу, что самой точной является квадратурная формула Гаусса.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ракитин В.А., Первушин В.Е. Практическое руководство по методам вычислений с приложением программ для персональных компьютеров. М.: Высш. школа, 1998. – 384 с.
2. Лутц М. Программирование на Python, 4-е изд.– Символ-Плюс, 2011
3. NumPy 1.8.1 / <http://www.scipy.org/> (Дата обращения: 12.10.2016)

УДК 519.178

О РЕШЕНИИ ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧ ПУТЕМ МОДЕЛИРОВАНИЯ НА ГРАФАХ

Ю.А. Донцова, магистрант

ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет им. И.С. Тургенева»
e-mail: dontsowa.yulia@yandex.ru

В статье демонстрируется возможность применения разработанного программного обеспечения для решения прикладных задач путем использования алгоритмов на графах. Проводится анализ времени решения задач для графов различных размерностей.

В статье [4] рассматривалась структура программного обеспечения (ПО), предназначенного для нахождения максимального потока в различного рода сетях.

Разработанное ПО может использоваться не только для нахождения максимального потока в простых графах, но и для решения задач прикладного характера. Как правило, это подразумевает работу с большим объемом входных данных. В этом случае уместно будет рассмотреть вопрос о временных затратах, которые могут уходить на поиск максимального потока в сетях с количеством вершин от 10 и более. Для того чтобы продемонстрировать эффективность разработанного программного обеспечения, в программный код был добавлен подсчет времени работы программы. Для наглядности ниже приведены результаты работы ПО, объективно отражающие его эффективность в случае обработки больших потоков исходной информации.

Например, рассмотрим произвольный граф, состоящий из 35-ти вершин (рисунок 1). Здесь приведен конечный результат работы ПО. Уже найден максимальный поток и указана его величина, распределенная по дугам.

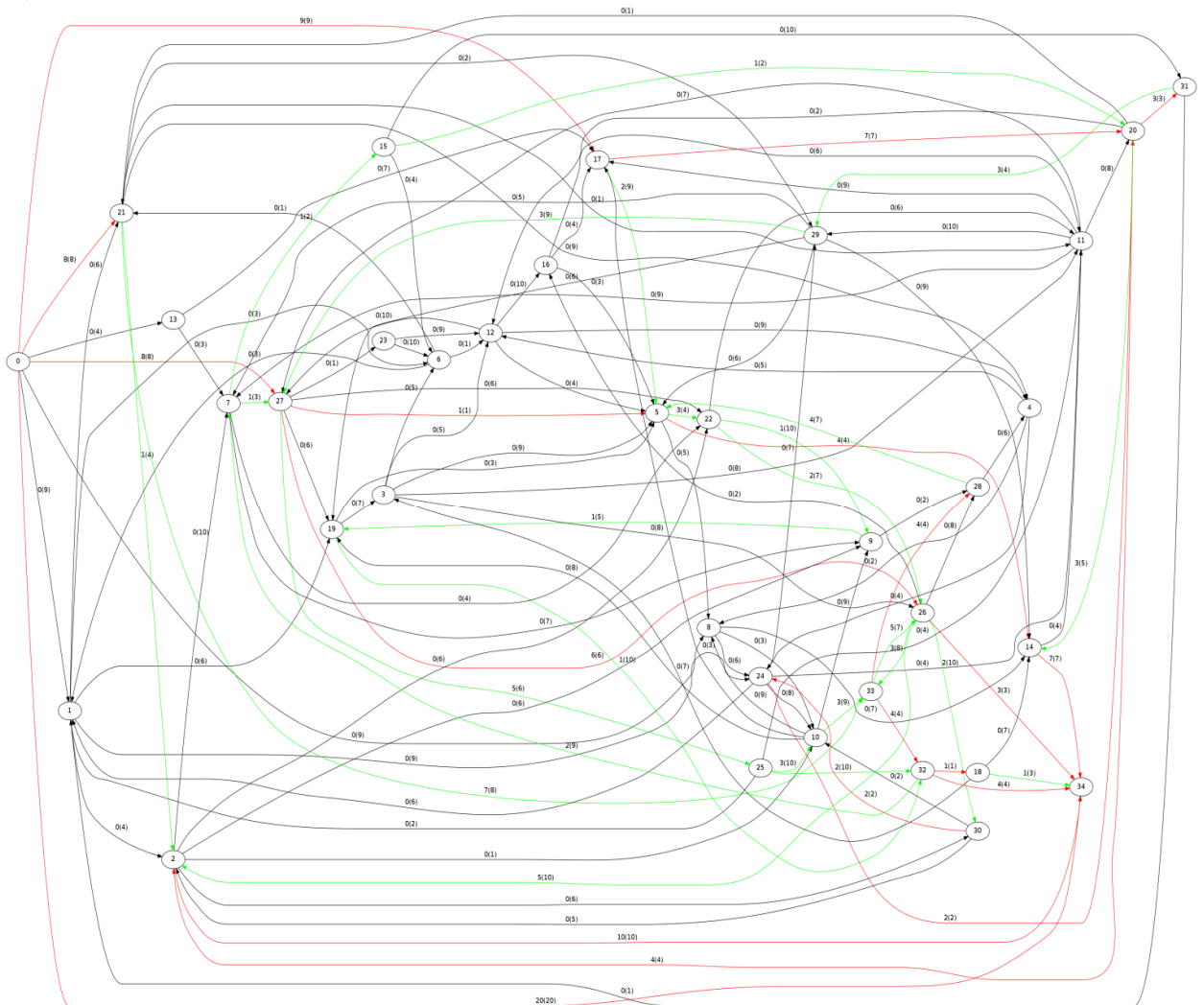


Рисунок 1 – Нагруженный граф, 35 вершин

Графы от 20 вершин и более выглядят достаточно громоздко, однако размерность графов несильно сказывается на скорости их подсчетов. Рассмотрим результаты по времени, затраченному на нахождение максимального потока в графах на 25, 35, 40, 50, 70 и 100 вершин (таблица 1).

Безусловно, увеличение размерности графа сказывается на времени, которое затрачивается на подсчеты. Однако, разработанное программное обеспечение, позволяет значительно сократить время обработки информации. Как видно из сводной таблицы, данное программное обеспечение эффективно работает с большим объемом входных данных и может быть использовано для решения задач прикладного характера.

Кроме того данное ПО подходит для моделирования разнообразных процессов в самых различных областях.

Таблица 1 – Сводная таблица с результатами подсчета времени работы программы

Н – количество вершин графа	Время работы программы (сек.)
25	3.2
35	5.1
40	12.5
50	15.6
70	20.5
100	64.1

Например, при оптимизации транспортных путей, сетей трубопроводов, моделировании различных процессов физики и химии, составлении расписания авиарейсов, обработке цифровых изображений и для решения родственных задач теории графов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Иванов Б.Н. Дискретная математика. Алгоритмы и программы. Расширенный курс. – М: Известия, 2011. – 512 с.
2. Окулов С.М. Дискретная математика. Теория и практика решения задач по информатике: учебное пособие / С.М. Окулов. – 2 – е изд. – М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2012. – 422 с.
3. Лутц М. Изучаем Python (4 – е издание). – Пер. с англ. – СПб.: Символ – Плюс, 2011. – 1280 с.
4. Донцова Ю.А. Разработка программного обеспечения посредством языка Python для исследования максимального потока в сети // Электронный сборник статей по материалам XXX студенческой международной заочной научно – практической конференции. – Москва: Изд. «МЦНО». – 2016. – № 1 (30)

О ПРОБЛЕМЕ СОЗДАНИЯ ИНФОРМАЦИОННОЙ КАРТЫ ЗДАНИЯ

Н.А. Емельянов, магистрант

ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет им. И.С. Тургенева»

e-mail: *emelyanovnikolay57@gmail.com*

В работе описывается способ создания информационной карты для 3-х мерной модели архитектуры и поиска путей на ней. За основу взята модель Орловского государственного университета.

Наиболее важной проблемой в разработке информационных карт, является поиск оптимальной технологии для их создания. Так как в наше время современные технологии не стоят на месте, существует множество способов создания информационных карт зданий. Разработку информационной карты здания можно разделить на два этапа, а именно создание 3-х мерной модели и разработка приложения. Создание 3-х мерной модели не является сложной задачей, если мы обладаем исходными данными и подходящими программами для моделирования. Разработка самого приложения ставит наиболее обширный спектр целей и задач, а именно таких как мультиплатформенность, дружелюбный и понятный интерфейс, поиск путей.

Для решения задач связанных с моделированием в работе был использован пакет 3-х мерной графики Blender [1]. Данный пакет распространяется на условиях GNU лицензии, а по функционалу не уступает своим платным аналогам. Процесс моделирования 3-х мерной модели разделился на четыре этапа, так как в корпусе Орловского государственного университета четыре этажа. В создании этажей была использована пожарная схема для того чтобы не акцентировать внимание на детальном создании модели, но при этом наиболее точно передать вид каждого из этажей университета (рисунок 1).

В разработке информационной карты, необходим дружелюбный пользовательский интерфейс и возможность наглядно просмотреть путь от конкретного местоположения до кабинета на этаже. Чтобы справиться с этими задачами, был задействован полноценный пакет для создания 2Д и 3Д приложений - Godot. Его удобный интерфейс и язык дизайна, базирующийся на вложенных сценах [2], позволил наглядно составить интерфейс приложения и 3-х мерную сцену с моделью (рисунок 2).

Сами по себе объекты сцены, а именно интерфейс пользователя и 3-х мерные модели не взаимодействуют между собой или с другими сценами, поэтому стоит необходимость добавления моделей поведения объектам сцен, по средствам встроенного в Godot скриптового языка GDScript. GDScript – скриптовый язык с динамической типизацией [3].

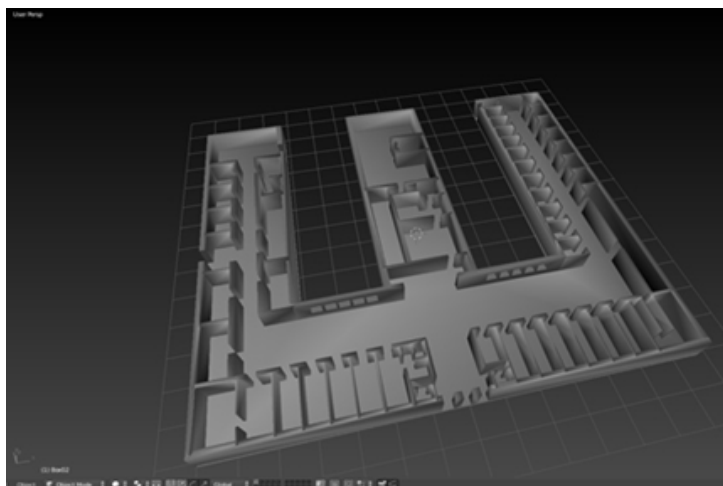


Рисунок 1 – Модель первого этажа

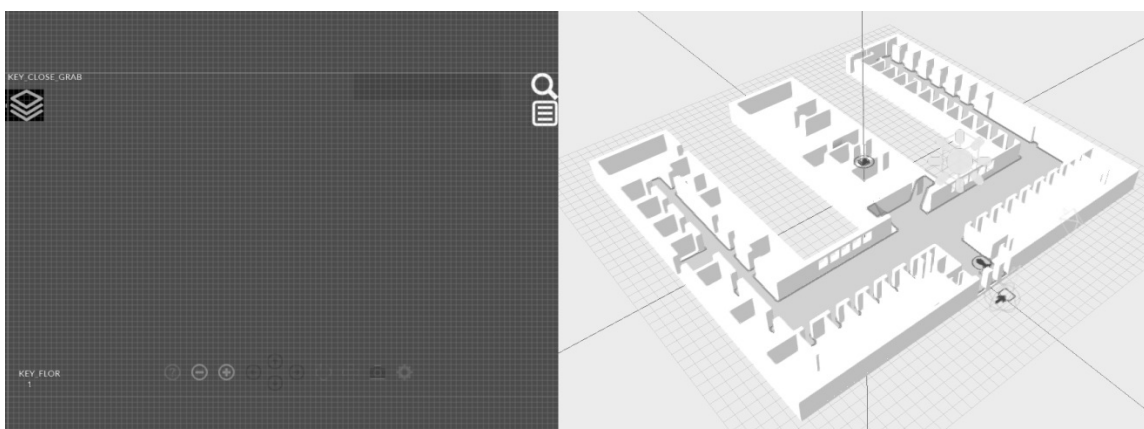


Рисунок 2 – Интерфейс и 3-х мерная модель

Особенность скриптов в Godot является встраивание их в объект сцены. Добавленный скрипт автоматически наследуется от объекта, к которому его добавили. Скрипт используется для управления функциями родительского объекта, так и функциями объектов наследников и объектов с других сцен.

Основной проблемой в создании информационных карт всегда является поиск путей. Для упрощения этой проблемы в Godot реализован объект `NavigationMeshInstance` и `Navigation`. `NavigationMeshInstance` умеет создавать маски любых 3-х мерных моделей, в один клик. А при базовых знаниях векторной математики в 3-х мерном пространстве можно самостоятельно сделать маску через скрипт. Объект `Navigation` занимается поиском все возможных путей на маске объекта `NavigationMeshInstance`. В задаче скрипта для `Navigation` войдет поиск пути от входа в модель архитектуры до конкретной точки, выбранной пользователем, для наглядности по пути пустим маркер. В реализации скрипта использована функция `_process()`, ожидающая сигналов нажатия с клавиатуры или с мыши. При старте программы получаем невидимый путь от главного входа до точки на модели

выбранной пользователем. В результате сталкиваемся с проблемой отображения пути. На информационной карте необходима наглядность, пользователь должен видеть весь путь. Отобразить путь на 3-х мерной модели позволит объект ImmediateGeometry. Он позволит отрисовать линию, задать ей цвет, ширину и т.п. Его необходимо унаследовать объекту Navigation и продолжить. Функция `_update_patch()` при вызове отрисует цветной путь, а функция `_ready()` всегда при старте программы будет содержать заданные параметры для объекта ImmediateGeometry (рисунок 3).

```

1 extends Navigation
2 const SPEED=4.0
3 var path=[]
4 func _process(delta):
5     if (path.size()>1):
6         var to_walk = delta*SPEED
7         var to_watch = Vector3(0,1,0)
8         while(to_walk>0 and path.size()>=2):
9             var pfrom = path[path.size()-1]
10            var pto = path[path.size()-2]
11            to_watch = (pto - pfrom).normalized()
12            var d = pfrom.distance_to(pto)
13            if (d<=to_walk):
14                path.remove(path.size()-1)
15                to_walk-=d
16            else:
17                path[path.size()-1] = pfrom.linear_interpolate(pto,to_walk/d)
18                to_walk=0
19            var atpos = path[path.size()-1]
20            var atdir = to_watch
21            atdir.y=0
22            var t = Transform()
23            t.origin=atpos
24            t.t Looking_at(atpos+atdir,Vector3(0,1,0))
25            get_node("user_pos").set_transform(t)
26            if (path.size())<2:
27                path=[]
28            set_process(false)
29        else:
30            set_process(false)
31
32
33 var begin=Vector3()
34 var end=Vector3()
35 var m = FixedMaterial.new()
36 var draw_path=true
37 func _update_patch():
38     var p = get_simple_path(begin,end,true)
39     path=Array(p)
40     path.invert()
41     set_process(true)
42     if (draw_path):
43         var im = get_node("draw")
44         im.is_visible()
45         im.set_material_override(m)
46         im.clear()
47         im.begin(Mesh.PRIMITIVE_POINTS,null)
48         im.add_vertex(begin)
49         im.add_vertex(end)
50         im.end()
51         im.begin(Mesh.PRIMITIVE_LINE_STRIP,null)
52         for x in p:
53             im.add_vertex(x)
54         im.end()
55 func _ready():
56     set_process_input(true)
57     m.set_line_width(3)
58     m.set_point_size(6)
59     m.set_parameter(FixedMaterial.PARAM_DIFFUSE,Color(0,255,0))
60     m.set_fixed_flag(FixedMaterial.FLAG_USE_POINT_SIZE,true)
61     m.set_flag(Material.FLAG_UNSHADED,true)

```

Рисунок 3 – Поиск пути и функция для его отображения

Готовый проект можно экспортировать в формат Html5 и запустить для проверки на локальном сервере.

В данной работе, используя современные технологии, были решены такие проблемы как создание 3-х мерной модели, реализация дружественного пользовательского интерфейса, поиска путей. Конечный приложение может быть встроено на любой web ресурс.

ЛИТЕРАТУРА

1. Blender. URL: <https://www.blender.org/>
2. Godot Engine. URL: <http://www.godotengine.org/>
3. Godot Engine documentation. URL: <http://op.godotengine.org/projects/godot-engine-ru>
4. Tutorials. URL: <https://www.blender.org//support/tutorials/>

СОЗДАНИЕ НОВЫХ КАРТ ДЛЯ 3D STUDIO MAX В ИЗУЧЕНИИ ДИСЦИПЛИНЫ «КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРАФИКА»

Н.Л. Жердев, ст. преп.

ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет им. И.С. Тургенева»

В процессе преподавания дисциплины компьютерная графика и анимация, основанная на базе изучения пакета 3D Studio MAX (Blender), возникла проблема генерации новых текстурных и фактурных карт для 3D геометрических объектов. Решением этой проблемы послужило, дополнительно изучить основы ряда редакторов PhotoShop (Gimp) CorelDraw, и др. P.s. В скобках указано альтернативное свободно распространяемое программное обеспечение.

Так, например, для демонстрации анимации вращения монеты на боковом ребре, необходимо иметь по 3 карты текстуры и фактуры изделия. Известно, что карты могут быть бесшовными (симметричными) и не симметричными. В данном случае, карты не симметричные.

В статье рассмотрены примеры, методики и рекомендации изготовления новых материалов (карт) для 3D Studio MAX на базе программного продукта Adobe PhotoShop CS6-RUS (PS).

Будет введено лаконично-мнемоническое описание последовательности работы с меню и описание HotKeys (горячих клавиш) для достижения целей работы над объектами в среде Photoshop (PS). В статье и изложенных материалах используется схема: ЦЕЛЬ (задача), ПРИМЕР, РЕКОМЕНДАЦИИ, МЕТОДИКА. Т.е., сначала ставится задача (цели), потом - пример, а потом – описываются возможные методики и рекомендации в достижении целей. Очевидно, что найти «общую методику» для достижения целей различных задач – невозможно. Выбор приемов и методик надо проводить после тщательного анализа целей и исходных графических материалов.

Создание новых карт для 3D Studio MAX и изменение цветовой палитры объекта в среде Adobe PhotoShop.

Поставим задачу: создать новую фактуру, текстуру с изменением цвета текстуры карты объекта для 3D Studio MAX.

Для примера, отсканируем с высоким разрешением 5-рублевую монету.

Затем окрасим поверхность в желтый (золото, платина) или в медный цвет. После сканирования, мы имеем графический файл реверса и аверса сторон на белом фоне (см. рисунок 1). Анализируя графический файл, выясняем, что фон – белый (или малые градации серого), а стороны монеты – градации серого (к черному). Теперь надо понять, что мы будем менять цветовую палитру окраса всего файла, а, нам надо только изменить цветовой окрас только реверса и аверса монет.

Для этого, нам необходимо создать новый файл в PS необходимого формата (размера). Затем поместить в новый слой отсканированный файл. Это будет исходный эталонный материал. Обязательно необходимо растривать данные, чтоб в дальнейшем была возможность редактировать. Следующим этапом, необходимо выделить контуры реверс и аверс монет. Проанализировать исходный материал «на сложность выделения». Для выделения контуров монет можно пользоваться различными приемами. Наиболее подходит (для этого примера) выделение «овальная область» [M] и (или) «волшебная палочка» [W] или любой другой способ выделения (в том числе - «маска»).

Здесь возможны различные варианты выделения, однако для дальнейшей работы нам надо выделить лишь только стороны монет.

P.s. Здесь и далее в {}-скобках описана последовательность достижения цели работы из главного меню PS, в []-скобках HotKeys - быстрый прием переключения режима с клавиатуры.



Рисунок 1 – Отсканированный и выделенный материал (файл) помещенный в вновь созданный прозрачный фон PS

После выделения надо сохранить объект (реверс, аверс) в буфере обмена редактора, т.е., через главное меню - {Редактирование >>> Скопировать} или [CTRL+C] - с клавиатуры. Для снятия выделения следует выполнить {Выделение >>> Снять выделение} или [CTRL+D]. Теперь надо создать новый слой над которым мы будем работать. Это {Слой >>> Новый >>> Слой} или [CTRL+Shift+N] (или [Shift+CTRL+N]). Сделайте наименование слоя. Этот слой прозрачный и ни как не скажется на изображении в целом. Теперь надо вставить данные из буфера обмена редактора {Редактирование >>> Вставить} или [CTRL+V]. При этом создается новый слой с материалом из буфера обмена. Однако, перед тем, как редактировать, надо убедиться что активный слой растриван {Слой >>> Растривать >>> Слой (или Все слои)}. Теперь переходим к режиму редактирования изображения. Мы имеем новый прозрачный фон с помещенными реверсом и аверсом монет.

Сохраните обрабатываемый материал в файл {Файл >>> Сохранить как...} или [Shift+CTRL+S]. (Дальнейшее сохранение материала – {Файл >>> Сохранить} или [CTRL+S]). Не используемые слои – отключить.

Для окраса, необходимо активизировать слой. Далее, выбираем {Изображение >>> Коррекция >>> Кривые} или [CTRL+M]. В канале RGB левой кнопкой мыши устанавливаем точку и перемещаем ее чуть ниже, чтоб сделать стороны монеты чуть контрастней. Переключаем из RGB-канал на КРАСНЫЙ КАНАЛ, затем на ЗЕЛЕНый КАНАЛ и СИНИЙ КАНАЛ. Устанавливая и перемещая точки в каждом канале, добиваемся необходимой цветовой палитры. При перемещении точек в каждом канале будут меняться входные и выходные параметры каждого канала. Результатом перемещений точек каналов является рисунок 2.



Рисунок 2 – Итоговый результат (золото и медь)

МЕТОДИКА - общая

1. Поставить и анализировать задачу.
2. Подготовить и проанализировать графический материал.
3. Подготовить платформу для исследования.
4. Сделать копию обрабатываемого материала.
5. Обработать материал.
6. Сохранить исходные и результирующие данные.

РЕКОМЕНДАЦИИ

Правильно поставить и проанализировать задачу это - 50% успеха. Т.е., что вы хотите видеть в результате вашей деятельности и для каких нужд наше изыскание будет использовано. Основными, часто используемыми, являются WEB-приложения, полиграфия с высоким качеством печати, домашнее портфолио и др. Так, например, для полиграфии требуются некие стандарты печати и разрешающая способность. В основном, это цветопередача – CMYK и разрешающая способность изображения - 300dpi (и более) для больших баннеров и др. Для «домашних» нужд можно использовать цветопередачу – RGB с 8-16 bit на пиксель и 72-300 dpi на печать. Т.о., от поставленной задачи, мы, в дальнейшем, будем генерировать базовый файл-платформу PS с необходимыми параметрами. На текущий период, сканеры позволяют сканировать полноцвет с 1200-2400 dpi, но очень сильно растет объем исходного графического материала. Т.о., надо учитывать аппаратные возможности вашей ПЭВМ. Соблюдая эти соотношения, вы сможете найти необходимый вариант.

Анализируем, согласно задачи, наш графический материал. Особое внимание надо обратить на те объекты, которые будут в дальнейшем преобразованы. При этом, надо выбрать способ и механизм выделения объектов. Необходимо помнить, что изменение параметров объектов надо производить в отдельно-скопированном активном слое. Все не востребованные слои – отключить.

МЕТОДИКА – изменения цветовой палитры выделенного объекта в PS

1. Выделить с эталона (или слоя) часть объекта (или объект) в PS
2. Скопировать выделенную (область) часть в отдельный слой PS
3. Произвести цветовую редакцию скопированного слоя {Изображение >>> коррекция>>>.....(т.е., выбрать нужную функцию) в PS
4. Сохранить результат графического материала(ов) в PS или в другом формате для 3D Studio MAX

Заключение

Созданный(ые) файл-карта(ы) в среде PhotoShop, в дальнейшем могут быть применены в 3D Studio MAX с учетом наложения карт. Для этого, надо учитывать количество поверхностей. Так, в примере в 3D Studio MAX – 3D-объекта – «монеты», используется базовый объект – цилиндр. У которого – 3 поверхности. Аверс, реверс и боковая грань. И на каждую из граней накладываются текстура и фактура созданного материала в среде PS. Боковая грань монеты не представляет интерес. Её (бок. грань) можно изготовить в любом редакторе. Только надо помнить о цветовой палитры общего вида. Манипулируя с позициями «позитив/негатив» – добиваемся реалистичности искомого материала.

ЛИТЕРАТУРА

1. Adobe Photoshop CS6 для фотографов/ Пер. с англ. – М.: Издательство «Русская редакция», СПб.: БХВ-Петербург, 2013. – 768 с.
2. Компьютерная графика.: Практ. пособ. – М.: «ТЕХНОЛОДЖИ - 3000» , 2001 – 752 с.
3. Чумаченко И.Н. 3DS max 9 (полная версия)/ М./:ИТ Пресс, 2007. – 656 с.

РАЗРАБОТКА ПОЛЬЗОВАТЕЛЬСКОГО ИНТЕРФЕЙСА ВЕБ-ПРИЛОЖЕНИЯ ДЛЯ КАФЕДРЫ УНИВЕРСИТЕТА

Р.И. Котов, магистрант

ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет им. И. С. Тургенева»

e-mail: *kotovri@yandex.ru*

В статье рассматривается процесс проектирования и создания пользовательского интерфейса для веб-приложения. Производится описание основных принципов работы элементов интерфейса, а так же взаимодействие с пользователем.

Необходимость ведения документооборота структурного подразделения университета, в частности, планов учебно-воспитательной деятельности преподавателей, имеет определенную структуру, соблюдение которой, в конечном итоге, приводит к формированию обозначенного документа, пригодного для сдачи.

Каждому преподавателю ежегодно необходимо составлять план учебно-воспитательной деятельности. Это достаточно трудоемкий процесс, который отнимает значительную часть времени преподавателей, и, как следствие, необходимость максимально автоматизировать данный процесс является достаточно актуальной.

Таким образом было принято решение разработать веб-приложение, позволяющее каждому преподавателю максимально просто составлять план учебно-воспитательной деятельности. Функциональность данного веб-приложения должна позволять пользователю добавлять/изменять, а так же сохранять/загружать все данные, задействованные при генерации плана.

В Орловском государственном университете существует и используется система электронной отчетности о научно-исследовательской работе сотрудников вуза *nir.univ-orel.ru* [1]. Поскольку приложение должно быть интегрировано в данную систему, выбор основных инструментов был очевиден: язык программирования Python, веб-фреймворк Django, а так же JavaScript плагин Handsontable для создания интерактивных таблиц.

Приложение разрабатывалось в несколько этапов: первый — проектирование и разработка базы данных [2], второй — разработка серверной части приложения, третий — создание веб-интерфейса.

Интерфейс веб-редактора учебно-воспитательной работы преподавателя строится по следующему принципу: для начала пользователь указывает первичную информацию: ставку и учебный год (рисунок 1), затем ему становятся доступны основные таблицы для заполнения.

Главная Профиль План Отчет admin Выход

Иван Иванович Иванов

Физико-математический факультет, Кафедра информатики, заведующий кафедрой

Ставка: 1 Год

УКАЖИТЕ СТАВКУ И ГОД!

ПЕЧАТЬ

© Кафедра информатики Орловского государственного университета имени И.С. Тургенева

Рисунок 1 – Страница, для заполнения данными

Пока пользователь не укажет требуемые от него данные, основная часть страницы, для заполнения плана будет скрыта.

Указав необходимую ставку рассчитывается общая годовая примерная нагрузка преподавателя для последующего отображения в основной части страницы (рисунок 2).

Затем пользователю становится доступной основная часть страницы, которая содержит в себе элементы интерфейса для сохранения и загрузки данных, а так же необходимые для заполнения таблицы.

Теперь пользователь имеет возможность заполнить необходимыми данными таблицы для формирования плана и затем сохранить введенные данные и распечатать готовый отчет.

Данное приложение позволяет максимально автоматизировать трудоемкий процесс составления планов учебно-воспитательной деятельности преподавателей и, как следствие, избавиться от бумажных форм заполнения данных документов.

ПЛАН
УЧЕБНО-ВОСПИТАТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ПРЕПОДАВАТЕЛЯ
НА 2015/2016 гг.
ПРИМЕР РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НАГРУЗКИ
ПО НАПРАВЛЕНИЯМ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ
ОБЩАЯ ГОДОВАЯ ПРИМЕРНАЯ НАГРУЗКА ПРЕПОДАВАТЕЛЯ-1600
ЧАСОВ

1. УЧЕБНАЯ РАБОТА	900 часов
2. НАУЧНАЯ РАБОТА	175 часов
3. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ РАБОТА	175 часов
4. ОРГАНИЗАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКАЯ РАБОТА	175 часов
5. РАБОТА ПО ВОСПИТАНИЮ СТУДЕНТОВ	175 часов

ФАКТИЧЕСКОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ
ГОДОВОЙ НАГРУЗКИ ПРЕПОДАВАТЕЛЯ

Рисунок 2 – Часть страницы с выбранными ставкой и годом

ЛИТЕРАТУРА

1. Системы электронной отчетности о научно-исследовательской работе сотрудников вуза [Электронный ресурс]. Режим доступа: <http://nir.univ-orel.ru>
2. Разработка веб-приложения для создания электронной отчетности об учебно-воспитательной работе сотрудников вуза // Молодежный научный форум: Технические и математические науки: электр. сб. ст. по материалам XXX студ. междунар. заочной науч.-практ. конф. — М.: «МЦ-НО». — 2016 — № 1 (30) / [Электронный ресурс] — Режим доступа: [http://nauchforum.ru/archive/MNF_tech/1\(30\).pdf](http://nauchforum.ru/archive/MNF_tech/1(30).pdf)

МЕТОД УПЛОТНЕНИЯ СТРУКТУРЫ ДАННЫХ ЛУЧЕВОГО ПОИСКА

П.А. Марьянов

Академия ФСО России

e-mail: wprg@mail.ru

В статье предложен алгоритм уплотнения структуры данных префиксного дерева, представленной в виде разреженной матрицы, которая используется при обработке информации методом лучевого поиска. Алгоритм позволяет уменьшить время, затрачиваемое на процесс уплотнения, за счет введения дополнительной процедуры учета статистических свойств битовой карты префиксного дерева.

В ходе решения ряда специфических задач по анализу и структурированию текстовой информации наиболее эффективным зарекомендовал себя алгоритм лучевого поиска (*trie search*) [1]. В данном алгоритме, как правило, основная информационная структура хранится в виде префиксного дерева. Однако в ряде некоторых специальных задач обработки информации (например, фильтрация *html*-страниц по "черным" спискам доменных имен, URL) недостатком данного метода является большой объем памяти для хранения структуры префиксного дерева размером более 10^4 признаков вследствие сильной разреженности признаковой таблицы.

В этой связи возникает задача уплотнения префиксного дерева словаря признаков. Наиболее распространенный процесс уплотнения структуры данных рассмотрен в [1]. Он представляет собой попарное совмещение узлов (столбцов) таким образом, что ненулевые элементы не накладываются друг на друга. Процесс уплотнения таблицы префиксного дерева заключается в итерационном выборе (в случае аппроксимирующих алгоритмов – случайном итерационном выборе) двух столбцов матрицы состояний и переходов и проверке их на совместимость. В случае совместимости столбцов их совмещают (объединяют), получая в результате один столбец.

После уплотнения аппроксимирующим способом структура данных префиксного дерева занимает в порядки раз меньший объем оперативной памяти, нежели разреженный вариант. Это позволяет использовать данный способ уплотнения в современных информационных системах обработки информации. Однако, с другой стороны, уплотнение занимает значительное процессорное время. Так, например, уплотнение структуры данных префиксного дерева для $4 \cdot 10^6$ строк занимает 4–5 дней. Это связано с тем, что при слиянии каждой пары узлов приходится производить проверку на пересечение двух битовых карт, что является ресурсоемкой операцией.

В общем случае, единственно применимым в условиях словарей больших объемов и требований ежедневного их обновления является по-

иск такой перестановки столбцов из всех возможных, при которой достигается наилучшее отношение количества занятых элементов к их общему количеству. Существует доказательство NP-полноты данного процесса [2]. Аппроксимирующие алгоритмы, основанные на принципе выбора первого найденного варианта [3] дают эффективный результат в случаях малой разветвленности узлов. В случаях, когда количество ключевых слов превышает 10^6 , и при этом имеет место большая разветвленность, возникает задача разработки более эффективного алгоритма уплотнения. Данная задача может быть решена тем, что аппроксимирующий способ уплотнения структуры данных префиксного дерева будет дополнен тем, что слияние узлов будет происходить только после ранжирования и нахождения наиболее подходящих пар слияния. Таким образом, становится очевидной актуальность задачи разработки алгоритма уплотнения, учитывающего некоторые свойства и характеристики префиксного дерева и позволяющего ускорить процесс попарного совмещения столбцов при требуемом коэффициенте уплотнения.

Ввиду того, что на процесс уплотнения матрицы префиксного дерева влияет только наличие ненулевого элемента в той или иной ячейке, что в свою очередь можно представить поведением дискретной случайной величины – индикаторе заполненности ячейки. Таким образом, автором была выдвинута и подтверждена гипотеза: учет статистических характеристик индекса узлов префиксного дерева позволит построить более эффективную модель ее структуры с позиции уменьшения алгоритмической сложности процесса уплотнения при достаточном коэффициенте сжатия.

В ходе исследований, для сокращения времени уплотнения словаря признаков была разработана модель структуры данных префиксного дерева, учитывающая особенности ее построения и специфические признаки, которая обеспечила по результатам уплотнения в автоматическом режиме требуемое время работы алгоритма, максимизировав при этом степень уплотнения признаковой таблицы [4].

Результаты моделирования легли в основу предлагаемого алгоритма уплотнения структуры данных префиксного дерева.

Определим показатели эффективности работы алгоритма уплотнения структуры данных префиксного дерева. Исходя из ограниченности вычислительных ресурсов, выделяемых на осуществление процедур уплотнения, очевидно, что помимо времени работы алгоритма, важна еще и степень уплотнения, которая выражается отношением количества занятых элементов префиксного дерева словаря признаков к их общему количеству (т.е. количества занятых ячеек к общему количеству ячеек признаковой таблицы):

$$k_{\text{унл}} = \frac{L}{|E| + |E^0|},$$

где $k_{упл}$ – коэффициент уплотнения, $|E|$ и $|E^0|$ – мощности множества значений элементов таблицы состояний и переходов и ее нулевых элементов соответственно. Максимального значения коэффициент уплотнения k_{max} может достигнуть путем применения полного перебора возможных вариантов размещения признаков.

Исходные данные алгоритма:

T – множество признаков;

K – мощность алфавита признаков;

L – количество узлов префиксного дерева;

E – множество значений элементов таблицы состояний и переходов;

$A = \langle T, K, L, E \rangle$ – структура данных префиксного дерева словарных признаков (таблица состояний и переходов), содержащая занятые (ненулевые) элементы $E_{i,j}$ и свободные (нулевые) элементы $E_{i,j}^0$;

$A_{упл}$ – уплотненная структура данных префиксного дерева словарных признаков;

k_{max} – максимальное значение коэффициента уплотнения;

$t_{упл}^{app}$ – время выполнения процесса уплотнения для аппроксимирующего алгоритма.

Результатом работы алгоритма является:

1. Таблица элементов структуры данных префиксного дерева для словаря признаков W .

2. Множество признаков статистических свойств элементов структуры данных и рациональных процедур их перестановки $F(W)$ с целью уплотнения, основанное на статистической модели структуры данных.

3. Уплотненная таблица структуры данных префиксного дерева, занимающая объем оперативной памяти при работе алгоритма лучевого поиска не более требуемого.

В итоге автором разработан алгоритм уплотнения словаря признаков отбора путем учета статистических свойств элементов префиксного дерева и применения рациональных процедур их перестановки, обеспечивающий минимизацию времени работы при достижении требуемого значения коэффициента уплотнения $k_{упл}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} A \xrightarrow{F(W)} A_{упл}, \\ t_{упл} < t_{упл}^{app}, \\ k_{упл} > k_{упл}^{app}, \\ k_{упл} \rightarrow k_{max}. \end{array} \right.$$

Проверка адекватности и оценка эффективности работы алгоритма производилась при следующих ограничениях:

- объем набора T признаков находился в пределах 105–107 признаков;
- размер алфавита K ограничен размерностью 255 (1 байта информации) и постоянен в процессе уплотнения.

Проведем оценку асимптотической сложности алгоритма. Предлагаемый алгоритм был дополнен процедурами вычисления статистических характеристик префиксного дерева и формирования признакового пространства. Данные процедуры линейно зависимы от количества узлов в битовой признаковой таблице, а коэффициент линейности будет определяться лишь количеством s вычисляемых статистических характеристик каждого столбца. Тогда, приняв $O(f(N))$ за асимптотическую сложность аппроксимирующего алгоритма уплотнения, можно определить сложность разработанного как $O(f(N) + sN)$. Однако учитывая, что наилучшие аппроксимирующие алгоритмы уплотнения имеют сложность близкую к субэкспоненциальной [3], то слагаемым sN можно пренебречь. С другой стороны, разделение узлов префиксного дерева на t классов слияния, переводит задачу перебора пар слияния к поиску этих пар внутри классов (сокращение мощности переборного множества), в добавок еще и со вспомогательным коэффициентом слияния $k_{сл}$, уменьшая асимптотическую сложность алгоритма уплотнения в $\sim tk_{сл}$ раз. Таким образом, представленный алгоритм уплотнения структуры данных префиксного дерева, учитывающий статистические свойства таблицы состояний и переходов, имеет сложность $O(f(N)/tk_{сл})$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кнут, Д. Э. Искусство программирования. В 4 т. Т. 3. Сортировка и поиск : учебное пособие / Д. Э. Кнут. – 2-е изд. : пер. с англ. – Москва : Издательский дом "Вильямс", 2000. – 832 с.
2. Dill, J. M. Optimal trie compaction is NP-complete. TR-CSD-167, Pennsylvania State Univ., March 1987.
3. Марьянов, П. А. Сравнение реализаций алгоритмов цифрового поиска и конечных автоматов регулярных выражений / П. А. Марьянов, А. Л. Кузьмин // Телекоммуникации. – 2010. – № 11. С. 7–11.
4. Марьянов, П. А. Статистическая модель структуры данных префиксного дерева на основе дискретного распределения / П. А. Марьянов // Телекоммуникации. – 2015. – № 3. С. 34–39.

О РАЗРАБОТКЕ ИНФОРМАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ «ВИРТУАЛЬНЫЙ МУЗЕЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА»

А.С. Ольхова, магистрант

ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет им. И. С. Тургенева»

Г.О. Помазнев, магистрант

ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет им. И. С. Тургенева»

В статье рассматривается процесс проектирования и создания элементов информационной системы «Виртуальный музей физико-математического факультета». Производится описание основных принципов работы элементов интерфейса, а так же взаимодействие с пользователем.

Орловский государственный университет имени И. С. Тургенева является одним из передовых университетов нашей страны. В 2016 году он стал опорным ВУЗом России. В связи с этим, необходимо внедрение интерактивных ресурсов, которые помогли бы ознакомиться с его деятельностью и историей. Сейчас сайт ОГУ не имеет такого ресурса, как виртуальный музей, поэтому его необходимо создать. Виртуальный музей физико-математического факультета может обеспечить хороший старт в интерактивной деятельности, а также будет визитной карточкой факультета, поможет привлекать людей и давать им необходимую информацию в кратчайшие сроки.

Виртуальные ресурсы — это неотъемлемая часть любой серьезной организации, в том числе и образовательной. Сейчас такими инструментами уже владеет ряд высших учебных заведений как в России, так и в других странах.

Одним из основополагающих компонентов ИС является графический интерфейс, который дает возможность доступа к данным в дружелюбном для пользователя виде. Его оформление является «лицом» ИС, и от того, насколько грамотно и интересно он будет реализован будет зависеть популярность и востребованность созданного сервиса.

На данный момент все современные сайты используют простые и ненагруженные интерфейсы web-приложений. Самая популярная методика создания сайтов — блоковая, поэтому было принято решение придерживаться именно ее.

На рисунке 1 представлен макет приложения, где: 1 — фон страницы, 2 — главное меню сайта, 3 — главное окно сайта, 4 — футер, 5 — большой ин-

формационный баннер, 6 — малый информационный баннер, 7 — поисковая форма.

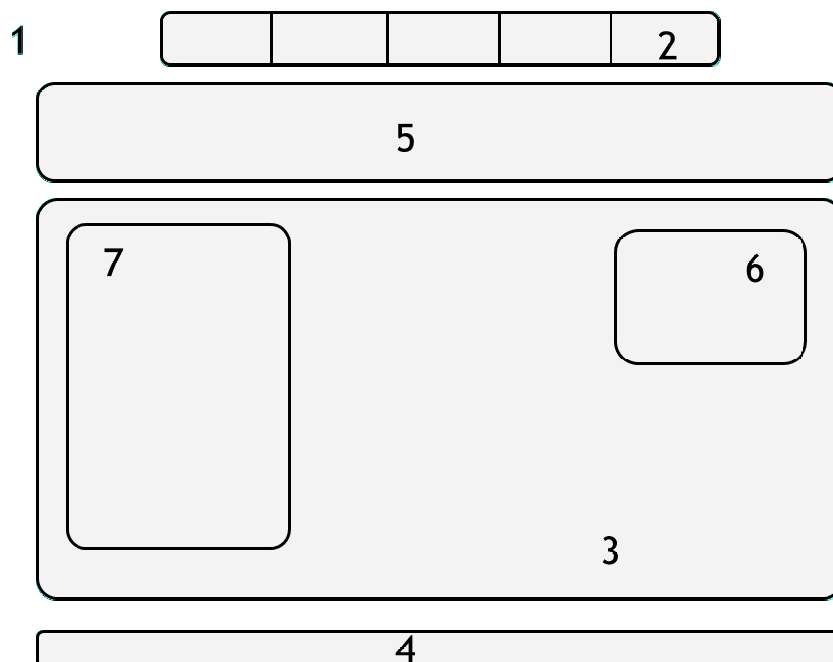


Рисунок 1 — Макет сайта

Структура сайта очень проста и понятна и состоит из двух основных частей: навигационная панель и главное окно. Навигационная панель — это главное меню, которое является основной частью сайта. В него включены вкладки: «персоны», «события», «галерея», «контакты», «о музее».

Главное окно отражает содержимое вкладки и результаты поисковых запросов производимых пользователем. Имеются как статические, так и динамические вкладки. Например, вкладки «Персоны» и «События» являются динамическими и отображаемая в них информация зависит от запроса клиента. Эти вкладки снабжены формами для поиска. На рисунке 2 представлен вид сайта на вкладке «Персоны».

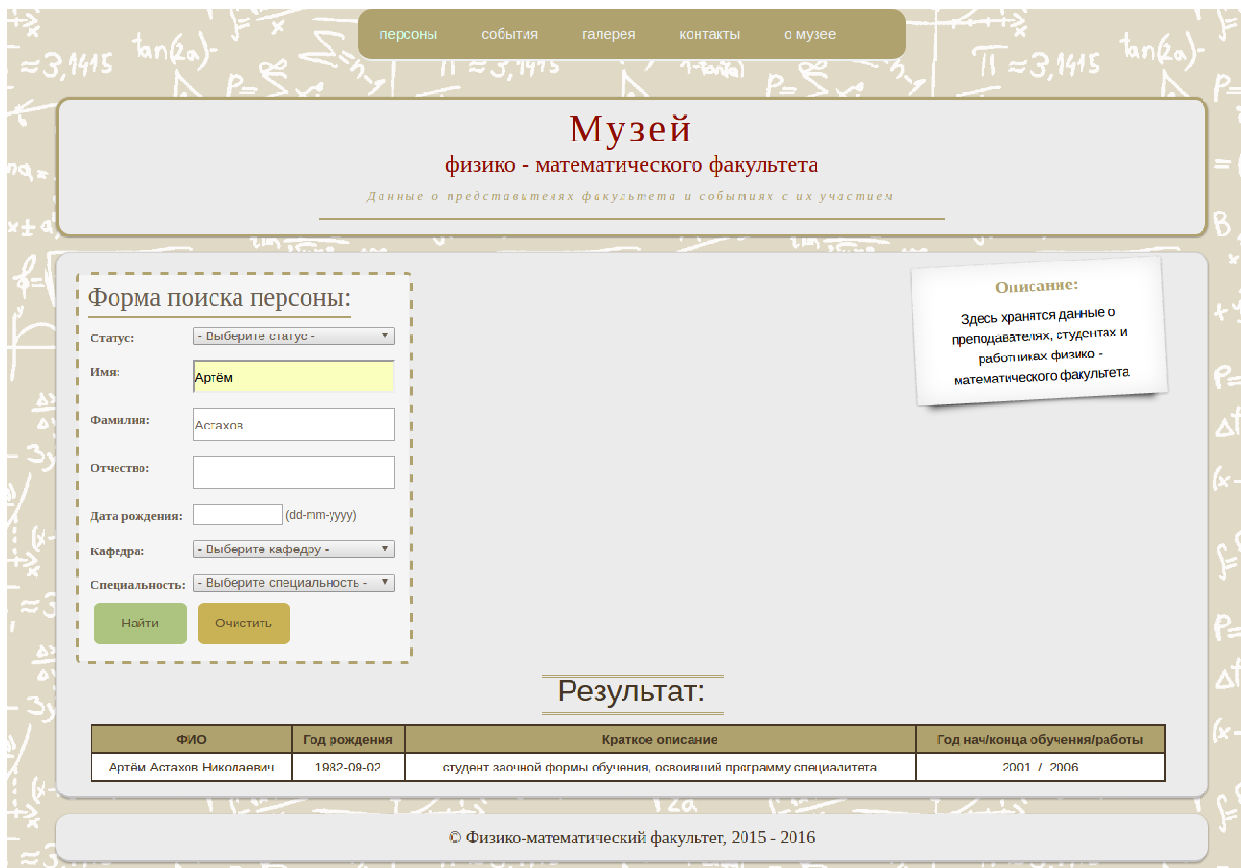


Рисунок 2 — Поиск по фамилии и имени

Созданное программное обеспечение функционирует, но на данный момент вся информация в базе данных тестовая. Система может быть внедрена в ИС факультета или ВУЗа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дюбуа П. MySQL. — Пер. с англ. — М.: Издательский дом «Вильямс», 2006. — 1168 с.
2. Документация по HTML: [Электронный ресурс]. — <http://htmlbook.ru/>. — Дата доступа: 1/05/2016

ОБ ОСОБЕННОСТЯХ ИНТЕРПРЕТАЦИИ ИСКЛЮЧАЮЩЕЙ КАТЕГОРИАЛЬНОЙ СВЯЗИ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ПРЕДМЕТНОЙ ОБЛАСТИ

О.А. Рюмшина, ст. преп.

ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет им. И. С. Тургенева»
e-mail: *comadu@rambler.ru*

Статья посвящена описанию и анализу одного из видов нетиповых связей между объектами предметной области при моделировании информационных систем — исключающей категориальной связи. Приведено обоснование выделения такой связи на конкретном примере, предложено практическое решение на базе сформулированных правил.

Среди трудностей, с которыми сталкивается разработчик информационной системы, можно выделить проблемы, возникающие уже на начальном этапе проектирования при анализе взаимосвязей между объектами предметной области, которые бывают столь сложны и многогранны, что не всегда возможно применить готовое типовое решение. Эти проблемы фактически не описаны в соответствующей литературе, а если и выделены [1], то при этом не приводятся приемлемых практических решений. В настоящей статье излагается авторская точка зрения на проблемы одного из видов нетиповых связей и предлагается обобщенное практическое решение, сформулированное в виде правил, эффективность которых проверена на практике.

Нетиповыми связями будем считать: категориальные взаимосвязи между объектами¹, множественные связи, разновидности рекурсивной связи (описана ранее в статье [2]) и некоторые другие. Здесь предлагается к рассмотрению разновидность первого типа — исключающая категориальная связь.

В качестве модели верхнего уровня (концептуальной) используем одну из ег-нотаций [4], видоизмененную для удобства практического применения. В частности, введем сокращения терминов: «степень связи» — СС, «класс принадлежности» — КП, «обязательный» — О, «необязательный» — Н; а также графические обозначения: закрашенный кружок — обязательный КП, крестик — необязательный. На логическом уровне представления выбрана классическая реляционная модель.

¹В источнике [1] они также именуется отношениями «тип-подтип».

Для иллюстрации исключяющей категориальной связи в качестве примера рассмотрим фрагмент предметной области «Литературный клуб» в той части, где требуется описание писателей. Приведем необходимое описание: «... требуется хранить данные о писателях, такие как фамилия, имя, отчество, даты рождения и смерти. Писатели, в свою очередь, делятся на отечественных (такowymi будем считать родившихся и осуществлявших писательскую деятельность на территории Советского Союза) и зарубежных, при этом набор характеристик для каждой из этих категорий отличается. Для отечественных писателей необходимо хранить место рождения (конкретный населенный пункт и географическую единицу, в которую он входит), факт членства в союзе писателей, издавался ли за рубежом и на какие иностранные языки переведен. Также для отечественных писателей необходим особый признак: является ли он писателем советского периода, а также выступает ли как подчеркнуто национальный писатель (т. е. в своих произведениях описывает национальные особенности, идеи, быт, культуру и искусство своего народа). Для зарубежных писателей необходимо указывать страну, ими представляемую, язык их произведений, переведены ли на русский язык и издавались ли в России.»

Рассмотрим сущность ПИСАТЕЛИ. Из описания предметной области следует, что каждый писатель относится к одной из двух взаимоисключающих групп — к отечественным либо к зарубежным. Эти группы, наряду с общим набором признаков (ФИО, даты рождения и смерти, краткая биография), обладают специфическими характеристиками, присущими каждой из них. Так, например, у отечественных писателей нет таких характеристик, как страна и язык написания произведений, а у зарубежных отсутствует, например, признак членства в союзе писателей. Это наводит на мысль, что в случае отнесения указанных атрибутов к сущности ПИСАТЕЛИ соответствующие из них будут иметь неопределенные (NULL) значения для представителей противоположной группы. При попадании таких атрибутов в одно отношение примерно половина значений соответствующих столбцов будут равны NULL, что повлечет за собой проблемы при обработке данных.

Выходом здесь служит следующий порядок действий, определяемый ниже следующим правилом.

Если у сущности A можно явно выделить n подкатегорий A_1, A_2, \dots, A_n , обладающих набором взаимоисключающих признаков, выделенные подкатегории рассматриваются как отдельные, вторичные сущности по

отношению к сущности A , которую назовем *категорией*. Набор атрибутов сущности A включает в себя только атрибуты, общие для всех подкатегорий A_1, A_2, \dots, A_n . Каждая из подкатегорий включает только атрибуты, ей присущие. Между сущностью-категорией и сущностями-подкатегориями устанавливается связь с параметрами СС 1:1, КП Н-О, поскольку каждый из экземпляров сущности-категории A представлен в одной из подкатегорий A_1, A_2, \dots, A_n дополнительными атрибутами, присущими только той подкатегории, к которой он принадлежит. В дальнейшем подобную ситуацию будем называть *связью вида «категория-подкатегория»*, *подвид — исключаящая*.

В нашем случае ER-диаграмма будет выглядеть, как показано на рисунке 1.

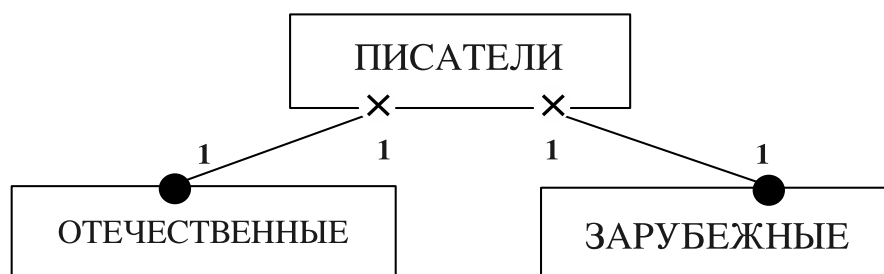


Рисунок 1 – Связь «категория-подкатегория» между сущностью ПИСАТЕЛИ и сущностями ОТЕЧЕСТВЕННЫЕ, ЗАРУБЕЖНЫЕ

Проиллюстрируем справедливость приведенного правила путем рассуждений. Действительно, и отечественные, и зарубежные писатели — это те же писатели, что описаны атрибутами сущности ПИСАТЕЛИ. Например, Бунин Иван Алексеевич, 22.10.1870-8.11.1953, является отечественным (русским) писателем, родившимся в Воронеже, Воронежской области, не являющимся членом союза писателей, переведенным на все европейские языки и издававшимся за рубежом; Лондон Джек, 12.01.1876-22.11.1916, является зарубежным писателем, родившимся в США, в Сан-Франциско, переведенным на русский язык и издававшимся в России. При этом, к примеру, все отечественные писатели являются писателями (т. е. описываются атрибутами, общими для всех писателей), но не все писатели являются отечественными (не все экземпляры сущности ПИСАТЕЛИ связаны с экземплярами сущности ОТЕЧЕСТВЕННЫЕ).

Теперь определимся с ключевыми атрибутами выделенных сущностей. Начнем с сущности-категории. Очевидно, что среди атрибутов сущности ПИСАТЕЛИ нельзя выделить единственный атрибут, который не повторялся бы у нескольких экземпляров, а составной будет слишком громоздким в аспекте дальнейшей обработки, причем особенно проблематичным будет его использование в качестве внешней ссылки. Выход состоит в добавлении к сущности писатели уже на начальном этапе суррогатного ключа, главные требования к которому — уникальность и минимальный размер значений, — например, некоторого кода числового типа. Соответственно, ключом сущностей-подкатегорий можно также назначить внешний атрибут «Код писателя», поскольку, как показано было выше, каждая из подкатегорий содержит описание экземпляров, составляющих содержание сущности-категории.

Итак, имеем 3 взаимосвязанных сущности, атрибуты которых приведены ниже (ключи подчеркнуты).

ПИСАТЕЛИ	ОТЕЧЕСТВЕННЫЕ	ЗАРУБЕЖНЫЕ
<u>Код_писателя</u>	<u>Код_писателя</u>	<u>Код_писателя</u>
Фамилия	Нас._пункт	Страна
Имя	Обл./край	Нас._пункт
Отчество	Рус./сов./нац.	Перев._русский
Дата_рожд.	Член_союза_писат.	Изд._Россия
Дата_смерти	Изд_зарубеж.	
	Перев._иностр.	

Для корректного перехода на логический уровень (в реляционное отображение) сформулируем правило. Исходя из представленной на рисунке 1 схемы имеем две бинарных связи с установленными характеристиками, правила перехода для которых были сформулированы ранее (в статье [3]), но с той существенной разницей, что в данном случае связываемые сущности являются не различными по природе (с точки зрения семантики предметной области), а являются структурной составляющей более общей сущности. Учитывая эти особенности, применять в чистом виде правила, сформулированные для типовых бинарных связей нельзя, однако на основе этих правил можно сформулировать новое, соответствующее описанной ситуации.

В случае исключяющей связи вида «категория-подкатегория» с n подкатегориями формируется $n+1$ отношение. Одно отношение соответствует сущности-категории и содержит только те атрибуты, которые являются общими для всех подкатегорий. Его ключом будет ключ сущности-

категории. n отношений соответствуют каждой из подкатегорий, их ключи совпадают с ключом категории, а их значения составляют подмножества значений идентификатора категории. Объединение значений ключей всех подкатегорий в точности совпадает с множеством значений ключа категории. Связь между категорией и подкатегориями осуществляется по значениям их общего идентификатора. Кроме того, в отношении для сущности-категории добавляется дополнительный атрибут — *признак подкатегории*, значениями которого выступают имена сущностей-подкатегорий.

Итак, согласно правилу, из рассмотренной связи получим 3 отношения со следующими схемами (первичные ключи подчеркнуты, внешние отмечены знаком «*»):

ПИСАТЕЛИ	ОТЕЧЕСТВЕННЫЕ	ЗАРУБЕЖНЫЕ
<u>Код_писателя</u>	* <u>Код_писателя</u>	* <u>Код_писателя</u>
Фамилия	Нас._пункт	Страна
Имя	Обл./край	Нас._пункт
Отчество	Рус./сов./нац.	Перев._русский
Дата_рожд.	Член_союза_писат.	Изд._Россия
Дата_смерти	Изд_зарубеж.	
Категория	Перев._иностр.	

Атрибут «Категория» отношения ПИСАТЕЛИ может принимать только одно из двух возможных значений — «отечественные» либо «зарубежные», что как раз и соответствует выделенным ранее подкатегориям.

Заметим также, что первичные ключи отношений ОТЕЧЕСТВЕННЫЕ и ЗАРУБЕЖНЫЕ являются одновременно внешними ключами связи с отношением ПИСАТЕЛИ.

Здесь не рассмотрена ситуация, когда принадлежность экземпляра сущности одной из подкатегорий не является взаимоисключающей, т. е. экземпляр принадлежит одновременно более чем одной подкатегории. Описание такой ситуации планируется в дальнейшем.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кренке, Д. Теория и практика построения баз данных [Текст]/ Д. Кренке — М.-СПб.-Киев и т.д.: «Питер», 2005.

2. Рюмшина, О.А. Рекурсивная связь в моделируемой предметной области и особенности ее реляционного представления [Текст]// Ученые записки Орловского государственного университета, Серия «Естественные, технические и медицинские науки», 2015. ФГБОУ ВПО «Орловский государственный университет», Орел. — С. 79-81.
3. Рюмшина, О.А. Об особенностях преобразования бинарных связей ег-модели в реляционное представление [Текст]// Моделирование и наукоемкие информационные технологии в технических и социально-экономических системах. Труды IV Всероссийской научно-практической конференции с международным участием. — Новокузнецк, 2016. — С. 276-280.
4. Хомоненко, А. Д. Базы данных [Текст]: учебник для ВУЗов/ А. Д. Хомоненко, В. М. Цыганков, М. Г. Мальцев. — СПб.: «Корона принт», 2002.

УДК 004.652

РАЗРАБОТКА ВЕБ-ПРИЛОЖЕНИЯ ДЛЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НАГРУЗКИ ПРЕПОДАВАТЕЛЯ

А.И. Тарасов, магистрант

ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет им. И. С. Тургенева»
e-mail: *tarasov.aleksey.ivanovich@gmail.com*

В статье рассматривается процесс проектирования и создания веб-приложения составления ленточного графика преподавателя университета. Описывается разработка пользовательского интерфейса веб-приложения.

Потребность ведения документооборота, в частности составление ленточного графика преподавателя, имеет определенную структуру, соблюдение которой, в конечном итоге, приводит к формированию необходимых документов.

В обязанности заместителя декана входит составление ленточного графика по группам, преподавателям, а также составление отчета. Для составления графика необходимо внести список групп, для каждой группы указать предмет и преподавателя, также у каждого предмета есть тип (лекция, практика,

лабораторная), по которому нужно распределить на предмет выделенное количество часов или же указать события проводимые в семестре (сессия — с, производственная практика — пп и т.д.), которые проводятся для конкретной группы по неделям для каждого учебного года. В итоге по графику составляется отчет по группам для конкретного семестра, в котором указывается какие предметы были и по каким неделям, и в каком количестве. Также составлять график для преподавателя, в котором указывается когда и у какой группы он ведет занятие.

Таким образом, было принято решение упростить трудоемкий процесс составления ленточного графика преподавателей и разработать веб-приложение, позволяющее заместителю декана максимально просто составлять ленточный график, а преподавателю получать готовый график для просмотра. Функциональность данного веб-приложения должна позволять пользователю добавлять/изменять, а так же сохранять/загружать все данные, задействованные при составлении графика.

В Орловском государственном университете существует и используется система электронной отчетности о научно-исследовательской работе сотрудников вуза nir.univ-orl.ru [1]. Поскольку приложение должно быть интегрировано в данную систему, выбор основных инструментов был очевиден: язык программирования Python, веб-фреймворк Django, а так же JavaScript плагин Handsontable для создания интерактивных таблиц.

Приложение разрабатывалось в несколько этапов: первый — проектирование и разработка базы данных[2], второй — разработка серверной части приложения, третий — создание веб-интерфейса.

Принцип работы пользовательского интерфейса веб-редактора строится на взаимодействии с контентом на странице (рисунок 1).

Для начала пользователь вводит название группы или групп, затем нажимает на кнопку «Загрузить» получает ленточный график. В полученной таблице можно в столбце «Преподаватель» ввести имя преподавателя, в столбце «Должность» можем выбрать должность. В столбцы с 1-23 можно ввести часы или какие-либо события проводимые в семестре(сессия — с, производственная практика — пп). При нажатии на кнопку сохранить пользователь сохранит данные.

При нажатии на кнопку отправить пользователь получит отчет по ленточному графику. На данной странице пользователь может узнать какие и когда назначены для него предметы и у каких групп (рисунок 2).

Тестер Тестер Тестирующий

Прикладная математика и информатика

ЗАГРУЗИТЬ СОХРАНИТЬ ПЕЧАТЬ

Предмет	Группа	Курс	Семестр	Тип	Кол-во часов	Преподаватель	Должность	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
Физика	ПМ	2	1	лк	16																									
Физика	ПМ	2	1	пр	12																									
Физика	ПМ	2	1	лб	10																									
Алгебра	ПМ	2	1	лк	32																									
Алгебра	ПМ	2	1	пр	26																									
Математический анализ	ПМ	2	1	лк	16																									
Математический анализ	ПМ	2	1	пр	20																									
Разработка приложений под Windows	ПМ	1	1	лк	26																									
Разработка приложений под Windows	ПМ	1	1	лб	34																									

Рисунок 1 – Редактор ленточного графика

Тестер Тестер Тестирующий

Предмет	Группа	Курс	Семестр	Тип	Кол-во часов	Преподаватель	Должность	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
Физика	ПМ	2	1	лк	16	Тестер Т. Т.	доцент			4	4	4	2	с	2															
Физика	ПМ	2	1	пр	12	Тестер Т. Т.	доцент	6		2	2	с		с	с										2					
Физика	ПМ	2	1	лб	10	Тестер Т. Т.	доцент	2	2	2	2	2	2						пп		с	с	к	ст	ст					
Математический анализ	ПМ	2	1	лк	16	Тестер Т. Т.	доцент	2	6	4	2	2																		
Математический анализ	ПМ	2	1	пр	20	Тестер Т. Т.	доцент	4	4	2	4	6																		
Разработка приложений под Windows	ПМ	1	1	лк	26	Тестер Т. Т.	доцент		12		8	6																		
Разработка приложений под Windows	ПМ	1	1	лб	34	Тестер Т. Т.	доцент		10		10		12	2																

Рисунок 2 – Страница для просмотра ленточного графика преподавателя

Данное приложение позволяет максимально автоматизировать трудоемкий процесс составления ленточного графика преподавателей и, как следствие, избавиться от бумажных форм заполнения данных документов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Системы электронной отчетности о научно-исследовательской работе сотрудников вуза [Электронный ресурс]. Режим доступа: <http://nir.univ-orcl.ru>
2. Разработка веб-приложения для создания электронной отчетности об учебно-воспитательной работе сотрудников вуза // Молодежный научный форум: Технические и математические науки: электр. сб. ст. по материалам XXX студ. междунар. заочной науч.-практ. конф. — М.: «МЦНО». — 2016 — № 1 (30) / [Электронный ресурс] — Режим доступа. — URL: [http://nauchforum.ru/archive/MNF_tech/1\(30\).pdf](http://nauchforum.ru/archive/MNF_tech/1(30).pdf)

РАЗЛОЖЕНИЕ СИГНАЛОВ ПО СДВИГАМ ФУНКЦИЙ ГАУССА

А.С. Тимашов

Воронежский институт МВД России

e-mail: *aleksandrtim@rambler.ru*

В статье рассматриваются аппроксимации функций при помощи целочисленных сдвигов функций Гаусса – квадратичных экспонент. Предложен метод нахождения узловой функции для данной задачи интерполяции, основанный на решениях усечённых систем линейных уравнений.

Рассмотрим задачу о приближении достаточно произвольной функции в виде ряда по системе целочисленных сдвигов функции Гаусса (квадратичной экспоненты с параметрами). Для численного анализа и приложений основную роль играют приближения данного типа конечными суммами, которые возникают при усечении соответствующих рядов. Исследованию таких конечных приближений и посвящена данная работа. Историю вопроса, основные результаты и многочисленные приложения см. в [1-3].

Более точно, будет исследована следующая основная задача: рассмотрим произвольную функцию $f(x)$, заданную на всей оси $x \in \mathbb{R}$ и некоторый параметр $\sigma > 0$, который в приложениях играет роль среднеквадратичного отклонения. Будем искать интерполирующую функцию $\tilde{f}(x)$, так же определённую на всей оси $x \in \mathbb{R}$, которая представляется в виде ряда по целочисленным сдвигам функции Гаусса

$$\tilde{f}(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k e^{-\frac{(x-k)^2}{2\sigma^2}} \quad (1)$$

и совпадает с исходной функцией во всех целых точках

$$f(m) = \tilde{f}(m), \quad m \in \mathbb{Z}. \quad (2)$$

Известны два подхода к решению поставленной задачи. При первом подходе решение ищется с помощью специальных функций, а именно тета-функций Якоби. Как показано в [1], несмотря на теоретическую ценность этого подхода, он не имеет вычислительных перспектив, так как связан с делением на чрезвычайно малые знаменатели. Другой подход разрабатывался в [2-3], он основан на применении дискретного преобразования Фурье (ДПФ). Такой подход имеет определённую вычислительную ценность, но она достигается ценой существенного усложнения алгоритма, при этом вычисления возможны в достаточно узких диапазонах параметров и с небольшим числом разрядов в результатах. Поэтому в настоящей работе предлагается наиболее простой прямой метод решения поставленной задачи, основанный на сведении её к решению конечных систем линейных уравнений, см. также [4-5].

Существенным препятствием для развития этого метода являлось от-

существование результатов по доказательству однозначной разрешимости соответствующих систем линейных уравнений. В настоящей работе получены результаты, устанавливающие требуемую однозначную разрешимость линейных систем. Эти результаты являются теоретическим обоснованием для разработки практических численных алгоритмов, избавленных от необходимости работы со специальными функциями или ДПФ.

В работе получено теоретическое обоснование корректной разрешимости основной системы линейных уравнений для конечномерного приближения бесконечной системы, а также проведён достаточно существенный объём компьютерных вычислений.

Приведём список основных полученных результатов (см. также [4-5]).

1. Доказано, что при всех допустимых значениях параметров q, σ исследуемые конечномерные системы линейных уравнений имеют единственное решение.

2. Проведено компьютерное исследование решений полученных конечномерных систем линейных уравнений численными методами при помощи математического пакета МАТНЕМАТИСА при широком наборе управляющих параметров q, σ .

3. Рассмотрено разложение указанным методом по целочисленным сдвигам функции Гаусса основного набора стандартных электрических сигналов: переключательных режимов, кусочно-постоянных, прямоугольных, треугольных, сложной формы, включая различные нерегулярные мандры.

4. К данной задаче могут также быть применены результаты, связанные с неравенствами для специальных функций [9-10].

ЛИТЕРАТУРА

1. Журавлёв М.В., Киселёв Е.А., Минин Л.А., Ситник С.М. Тета-функции Якоби и системы целочисленных сдвигов функций Гаусса // Современная математика и её приложения. Т. 67. Уравнения в частных производных. – 2010. – С. 107-116.
2. Минин Л.А., Ситник С.М., Журавлев М.В. О вычислительных особенностях интерполяции с помощью целочисленных сдвигов гауссовых функций // Научные ведомости Белгородского государственного университета. – 2009. – № 13 (68), 17/2. – С. 89-99.
3. Zhuravlev M.V., Kiselev E. A., Minin L. A., S. M. Sitnik. Jacobi theta-functions and systems of integral shifts of Gaussian functions // Journal of Mathematical Sciences, Springer. – 2011, Vol. 173, № 2. – pp. 231-241.
4. Ситник С.М., Тимашов А.С. Расчёт конечномерной математической модели в задаче квадратичной экспоненциальной интерполяции // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика, Физика. – 2013. – №19 (162). – Вып. 32. – С. 184-186.

5. Ситник С.М., Тимашов А.С. Приложения экспоненциальной аппроксимации по целочисленным сдвигам функций Гаусса // Вестник Воронежского государственного университета инженерных технологий. – 2013. – № 2 (56). – С. 90-94.
6. Ситник С.М., Тимашов А.С., Ушаков С.Н. Метод конечномерных приближений в задачах квадратичной экспоненциальной интерполяции. Научные ведомости Белгородского государственного университета. Математика. Физика. 2015, № 17 (214), вып. 40, С. 130-142.
7. Минин Л.А., Ситник С.М., Ушаков С.Н. Поведение коэффициентов узловых функций, построенных из равномерных сдвигов функций Гаусса и Лоренца//Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика, Физика.2014, №7 (183), Выпуск 35, С. 214-217.
8. Киселев Е.А., Минин Л.А., Новиков И. Я., Ситник С. М. О константах Рисса для некоторых систем целочисленных сдвигов// Математические заметки. 2014, Том 96, выпуск 2, С. 239-250.
9. Ситник С.М. Уточнения и обобщения классических неравенств. Итоги науки. Серия «Математический форум». Том 3. Исследования по математическому анализу. Под ред. Ю.Ф. Коробейника, А.Г. Кусраева. Владикавказ, 2009. - . С. 221-266.
10. Sitnik S.M. Generalized Young and Cauchy--Bunyakowsky Inequalities with Applications: a survey. arXiv:1012.3864, . 2012. – 51 p.

Математические и инструментальные методы экономики

ПОВЫШЕНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ УПРАВЛЕНИЯ В СФЕРЕ ОБЩЕСТВЕННОГО ПИТАНИЯ НА ОСНОВЕ СОВРЕМЕННЫХ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Е.И. Алехин, к.ф.-м.н., доц.

ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет им. И.С. Тургенева»
e-mail: *e.alekhin@mail.ru*

А.Н. Алексахин, к.п.н., доц.

ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет им. И.С. Тургенева»
e-mail: *aleksakhinan@yandex.ru*

В настоящее время услуги питания и их организация имеют мировое распространение: специализированных заготовочных предприятий - фабрик для снабжения быстро приготовленной продукцией, кондитерскими изделиями; доставка в предприятия и организации такие как школа, вуз- учреждения, детские сады и многое другое; организация работ предприятий быстрого обслуживания специализированных кафе, ресторанов, кофеен и т.д., поэтому очень важным вопросом является повышение эффективности управления в сфере общественного питания.

Ключевые слова: информационное общество, информация, информационные технологии, бизнес-процесс.

Основной особенностью деятельности предприятий общественного питания является изготовление, реализация и организация потребления готовой продукции.

Сложившаяся на сегодняшний день хозяйственно-управленческая практика демонстрирует недостаточный уровень контроля над ресурсами, поступающими в распоряжение предприятий питания, а также недостаточную научно-методическую базу для решения данной проблемы. Необходимым условием повышения качества управления является расширение используемых информационных ресурсов. В настоящее время существует большое количество различных информационных технологий, позволяющих повысить эффективность управления. Эффективность управления отдельными направлениями деятельности организаций, организациями в целом и группами организаций.

В данный момент сфера общественного питания развивается по следующим основным направлениям.

Во-первых, создание и внедрение высокопроизводительных машин и аппаратов. Во-вторых, создание и внедрение оборудования для доготовки полуфабрикатов и подогрева готовых охлажденных блюд и кулинарных изделий. В-третьих, разработка и внедрение специализированных программных обеспечений.

Кроме того внедрение новой техники и технологии в сочетании с передовой организацией труда способствует повышению качества продукции и культуры обслуживания.

Общественное питание играет всевозрастающую роль в жизни современного общества. Это обеспечивается, прежде всего, изменением технологий переработки продуктов питания, развитием коммуникаций, средств доставки продукции и сырья, интенсификацией многих производственных процессов.

Сущность общественного питания раскрывается через выполняемые им взаимосвязанные функции. К ним относятся: исходная функция; функция реализации; функция организации.

Исходной является функция производства продукции. В процессе производственной переработки из поступающего на предприятия общественного питания сырья и полуфабрикатов изготавливается разнообразная продукция, имеющая новую стоимость.

Функция реализации продукции представляет собой смену форм стоимости, что делает ее аналогичной данной функции в розничной торговле. Эта функция обусловлена товарным производством и товарно-денежными отношениями.

Функция организации потребления кулинарной продукции является специфической функцией общественного питания, поскольку она не присуща ни одной другой отрасли. Значение функции организации потребления кулинарной продукции возрастает в связи с увеличением численности населения пользующегося услугами предприятий общественного питания. Именно благодаря этой функции можно организовать рациональное, сбалансированное питание.

Каждое предприятия общественного питания различаются по таким критериям как размещение данного предприятия, ассортименту продукции, производственные мощности, уровень и форма обслуживания, цена, способ организации производства. Также учитываются критерии характеризующие класс предприятия, например: качество предоставляемых услуг.

На предприятии учитываются следующие виды организационной деятельности.

Во-первых, «организация производства – создание согласованных производственных процессов и организация взаимодействия всех элементов производственной системы для получения конкретного

результата». Целью организации производства является оптимизация производственных структур.

Во-вторых, «организация технических процессов - последовательность технологических операций, необходимых для выполнения определенного вида работ». Технологический процесс состоит из рабочих операций, которые в свою очередь складываются из рабочих движений (приемов).

В-третьих, «организация труда - это деятельность, охватывающая в широком смысле организацию структуры и организацию процессов, суть которых заключается в их разделении и упорядочении по заданиям, содержанию и времени». Организации труда подразделяется и включает в себя все управляющие воздействия, которые обеспечивают эффективность труда и сохранение здоровья рабочих, к ним относятся: разделение и кооперация труда, проектирование трудовых процессов, рабочих мест, системы их обслуживания, режимов труда и отдыха, создание благоприятных санитарно-гигиенических, психологических, социальных условий труда, формирование работоспособных трудовых коллективов.

В-четвертых, организация управления - вид деятельности, целью которого является создание оптимальных структур управления (организационных структур), обеспечивающих эффективное выполнение требуемого объема работ, утвержденного ассортимента на заданной территории.

Важная организационно-технологическая подготовка производства, обеспечивающая регламентацию функционирования средств производства, их производственное размещение, последовательность осуществления технологических процессов, операций работ. Реализация производственного процесса требует установление количественных пропорций живого труда, организации и обслуживания рабочих мест, применения рациональных методов и приемов труда, установление меры труда для каждого работающего или групп работающих, создания благополучных условий труда, рациональных режимов труда и отдыха.

И в-пятых, «производственный процесс - это совокупность всех действий людей и орудий труда, осуществляемых на предприятии для изготовления конкретных видов продукции».

Автоматизация кафе – это усовершенствование системы управления, упрощающая работу кафе своей многофункциональностью и легкостью модернизации. Цель у автоматизации является повышение эффективности управления кафе, посредством сокращения времени обслуживания и контроль производства. Значительная доля успеха складывается из отличного сервиса и оперативной работы персонала. Именно возможность автоматизации позволяет сочетать скорость и качество.

Автоматизация кафе сегодня – это процесс усовершенствования не просто установка умных счетов для определения выручки, это установка и наладка комплексной системы управления, которая не просто облегчает работу официанта и кассира, но предоставляет единую управленческую отчетность для руководства, помогает привлечь новых клиентов, увеличить проходимость заведения, оптимизировать расходы на закупку товара и на персонал.

Существует 2 вида процессов в кофе которые можно разделить на - видимые и невидимые. Видимые процессы или по другому Front-офис - это рабочие места официантов, кассиров, барменов, менеджеров, а иногда поваров. Среди задач - работа с блюдами (заказчиками), работа со скидками и бонусами, печать чеков, оплата заказов, бронирование столов, передача заказов на кухню и т.д.

Невидимые или же Back-офис - эта работа технологов, бухгалтеров, кладовщиков, менеджеров по кадрам, управляющего, директора. Задачи перед автоматизацией стоят следующие: складской учет, создание технологических и калькуляционных карт, списание продуктов, планирование закупок, бухгалтерский и налоговый учет, работа с заработной платой, управленческий учет. Системы автоматизации, построенные на базе специализированного программного оборудования, способны связать воедино это процессы.

Среди программ складского учета Back-офиса можно выделить: UCS Storehouse, ProStore и другие. Так же существуют комплексные системы в которых за складской учет отвечают специальные модули, например Fico с модулем iikoOperation&Finance. Все предлагаемые программы имеют примерно одинаковые возможности.

Первым делом при поступлении продуктов на склад их количество нужно занести в базу продуктов, которая составляется в каждой программе. При этом это можно сделать 2 вариантами, внести в ручную наименование и количество или автоматически. При применении автоматического варианта может использоваться специальный сканер. При этом автоматически заполняются данные сумм по строкам и столбцам, а поскольку система запоминает различные варианты наименований товара для разных поставщиков, разночтения сведены к минимуму. При этом производится автоматическая актуализация справочников.

Минус такой системы состоит в том, что существует множество вариантов написания продукта и программа не сможет его распознать, например какой-либо фрукт и его распределение по сортам.

Таким - образом, продукт фиксируется на складе и благодаря этому можно проследить его движение, которое обязательно отразится в программе. Система автоматизации поддерживает объем запасов на оптимальном уровне, обеспечивая бесперебойность продаж, минимизируя затраты на хранение продуктов и не допуская их порчи. Программы

складского учета показывает, какие продукты и в каком количестве требуется купить, а так же у каких продуктов истек срок годности для последующего списания и закупки. Так как процесс закупки продуктов является централизованным это облегчает взаимодействие и сотрудничество с поставщиками, при этом обеспечивая оптимизацию закупочных цен.

Складской учет позволяет вести контроль за ценами поставщиков. В программы закладывается прейскурант с ценами, при первом же несоответствии между заложенными ценами и стоимостью товаров по накладной программа обязательно оповестит менеджера. В данном случае менеджер может четко отслеживать, кто пытается завысить цену, сравнивать цены разных поставщиков, выбирать. Плюс, в программе можно оперативно получить информацию кто кому, сколько должен, кто и как выполняет условия поставок.

Наконец инвентаризация, которая предоставляет данные о продаже блюд и о количестве списанных продуктов для их приготовления. Она снижает риск хищения.

К Front-офис можно отнести программ, которые учитывают продажи. Они устанавливаются на рабочие места кассиров, барменов, официантов, администратора. Примером такой программы является конфигурация «ШТРИХ-М: Ресторан Front Office», которая позволяет решать задачу автоматизации рабочих места официанта, бармена, кассира, администратора на предприятиях общественного питания.

В состав оборудования рабочего места официанта входят: POS-терминал, принтер рулонной или подкладной печати, источник бесперебойного питания и фильтры, программное обеспечение.

«POS-терминал – это торговый терминал с функциями кассового аппарата, установленный на рабочем месте кассира для проведения денежных операций». Данный терминал ускоряет процесс проведения денежных операций, делая его более точным и эффективным.

При автоматизации кухни также используется принтер. Он позволяет автоматически оповещать персонал для начала изготовления блюда, который поступил в заказ. Данная система используется для повышения оперативности выполнения заказов и контроля приготовления блюд.

Также для автоматизации кухни может быть использован «Дисплей повара» Под дисплеем повара подразумевается рабочая станция (с сенсорным экраном или специальной клавиатурой). Интерфейс данной станции предоставляет информацию о заказанных блюдах, позволяет отмечать приготовленные блюда и сообщать об этом официантам.

По оценке Euromonitor International, при благоприятных обстоятельствах можно ожидать, что в течение следующих 3 лет объем рынка увеличится практически в 1,5 раза и уже в 2019 году приблизится к 2 трлн. руб.

Таким образом, анализ отрасли общественного питания показывает высокую перспективность данной отрасли, которая выражается емкостью российского рынка общественного питания, слабой насыщенностью, высокими темпами роста отрасли, и устойчивостью к кризисным состояниям экономики.

Для того чтобы работа в кафе стала своевременной и ритмичной требуется правильное планирование работы производства. Оно позволяет установить задание для каждого работника предприятия с учетом наиболее полного использования возможностей производства.

Каждое планирование работы производства предприятия включает следующую последовательность операций: разработка производственной программы исходя из товарооборота; подготовка производства; контроль за выполнением.

Производственная программа – это обоснованный план выпуска всех видов продукции собственного производства в виде полуфабрикатов, блюд, кулинарных и кондитерских изделий. План включает в себя объем выпуска и ассортимент продукции.

Производственная программа общедоступных предприятий общественного питания составляется на основании потребительского спроса на продукцию с учетом типа, класса предприятия и ассортиментного минимума и оформляется в виде меню, прейскурантов, карты вин (коктейльной карты, пивной карты и т.п.). Производственной программой кондитерского цеха является наряд - заказ.

Предприятия общественного питания, обслуживающие постоянные контингенты потребителей (столовые при учебных заведениях, промышленных предприятиях и т.п.), разрабатывают плановое меню на неделю, декаду, месяц, в котором приводится ассортимент продукции. Наличие планового меню позволяет обеспечить разнообразие блюд по дням недели, избежать повторения, наладить четкую организацию снабжения сырьем и полуфабрикатами.

Для облегчения создания производственной программы помогают программные обеспечения, которые организуют процесс функционирования общественного питания или же автоматизация предприятия.

Профессиональная система автоматизации является надежным инструментом, который необходим для постоянного контроля и отслеживания работы заведения. Она позволяет быстро и качественно обслужить клиентов, оптимизировать работу с поставщиками, наладить прозрачный управленческий, бухгалтерский и финансовый учет, эффективно построить работу с персоналом и исключить злоупотребления, вести гибкую дисконтную политику, своевременно принимать ответственные решения и многое другое.

При выборе системы автоматизации необходимо сформулировать требования к ней и сравнить имеющиеся на рынке продукты. Далее следует оценить потенциал компании-разработчика, ведь система автоматизации приобретается не на один год, и в этом случае нужно выбрать надежного партнера. Важно приобрести комплексную систему управления. Недостаточно только функций автоматического учета и контроля. Система должна содержать ряд готовых бизнес-процессов, необходимых для эффективного и результативного управления предприятием, таких как управление запасами, производством, ценообразованием, продажами, залом ресторана, денежными средствами и т. п.

Большинство систем управления стоят несколько сотен тысяч рублей, другие же весьма функциональны, но когда бюджет на автоматизацию ограничен, то выбор часто падает в сторону РСТ Ресторатор.

Компания «РСТъ» является производителем программного обеспечения для индустрии гостеприимства. На рынке автоматизации активно работает с 2002 года. За это время было произведено более 2000 инсталляций программных комплексов в предприятиях индустрии гостеприимства в России и странах СНГ

Данный продукт имеет много ключевых особенностей.

Бесплатная лицензия программы на 2 рабочих места (FrontOffice+BackOffice) позволяет сэкономить.

Модульный характер продукта, т.е. в него входят FrontOffice, BackOffice, Сторхаус, модуль Клуб, модуль кассира клубного банка, модуль расчета тарифов и управления электричеством. Как было уточнено раньше данная программа не является дорогой и имеет не такой обширный функционал с удобным интерфейс меню. С этим увеличивается мобильность и быстрота внедрения.

Ведение складской и управленческой отчетности на основе продаж и калькуляционных карточек.

Так же присутствует гибкая настройка системы скидок.

Для того, чтобы опробовать данную программу для работы нужно приобрести готовое решение (таблица 1) или отдельный программный продукт (таблица 2).

Таблица 1 – Типовые проекты для автоматизации ресторанного бизнеса

Наименование	Цена, руб.
Решение Early для фаст-фуда (1АРМ)	125 940
Решение Early для ресторана (1АРМ)	135 430
Решение Basic для фаст-фуда (2АРМ)	174 840
Решение Basic для ресторана (2АРМ)	184 330
Решение Standard для фаст-фуда (3АРМ)	247 690
Решение Standard для ресторана (3АРМ)	266 670

Полная установка приложения может предложить следующие преимущества в них входит автоматизация кассы т.е. после приготовления и продажи блюда продукты автоматически в необходимом количестве списываются со склада, контроль состояния которого проверяется в режиме Online, тем самым снижая риск хищения и махинаций со стороны обслуживающего персонала. В отдельных случаях только это увеличивает прибыль на 10-20%.

Таблица 2 – Цена программ на системе PCT Ресторатор

Готовые решения на системе PCT Ресторатор	Цена, руб.
Предложение от PCT Ресторатор на 2 рабочих места	46970
Предложение от PCT Ресторатор на 3 рабочих места	57960
PCTь:Рестораторь рабочее место для BackOffice	12990
PCTь:Рестораторь рабочее место для FrontOffice	10990
PCTь:Рестораторь серверная лицензия	22990
Модуль "Кассир клубного банка" (Cashless)	10990
Модуль расчета тарифов и управления электричеством (Tariff Control)	8990

Автоматизируется работа с калькуляционными и технологическим картами.

Благодаря сокращению времени и повышению производительности предприятия, улучшается взаимодействие между залом, кассой и кухней.

Имеется бонусная система лояльности для гостей заведения.

Следующая программа - это программа iiko (произносится как «айко») - многофункциональная, продуманная и удобная система автоматизации ресторана, бара или кафе.

Данную программу производит российская компания «Айко», система которой разрабатывается с 2005 года. Используется в России и 12 других странах, более 4000 клиентов.

В данной программе простой и понятный интерфейс работы официантов в которую входит расписание работы сотрудников. Она позволяет работникам быстро добавить и редактировать технологические карты блюд, а также их групповая обработка одним действием, возможность применения двух разных меню поочередно.

Для посетителей доступны такие функции как бронирование банкетов, а также для них доступны модуль iikoCard – гибкая бонусно-депозитная система.

Для Back – офиса предусмотрено: учет заработной платы сотрудников ресторана с автоматическими премиями и штрафами; встроенная система бухгалтерских счетов (дебет, кредит, корр и т.д.); возможность выгрузки данных из R-Keereg; возможность работы сразу с 2-мя фискальными регистраторами (кассовыми аппаратами), зарегистрированными на разные юридические лица.

Также программа по автоматизации iiko включает в себя:

- система iikoVideoSecurity - встроенная система событийного видеонаблюдения с привязкой к действиям сотрудников;
- модуль iikoScanning позволяет сканировать накладные и в автоматическом режиме заносить приход товаров на склады;
- система iikoNET - интеллектуальная система лояльности по увеличению выручки заведения;
- модуль iikoMobileFront - поддержка мобильных терминалов для официантов.

АйТи Кафе имеет автоматизированный учет информации на всех этапах, от заказа клиента до расчета с поставщиками и учета остатков, он легко и быстро разворачивается и на сеть ресторанов и на кафе, есть связь бармен - официант – кухня.

IT Кафе позволяет: получить как оперативный срез, так и полную статистику за любой период времени; автоматически начислять зарплату и систему учета рабочего времени.

В программе находится встроенный мощный и гибкий модуль складского учета, развитая система бонусов и скидок и оперативная техподдержка клиентов и расширенные VIP услуги.

При рассмотрении рабочего места официанта можно выделить следующий функционал в состав которого входит индивидуальная статистика по официанту (текущая касса, сумма оплаченных блюд, ожидающих оплату на столах и т.д.), там же ведется контроль за всеми стадиями исполнения изготовления и прилагается информация о составе блюд, очередь заказов на кухне, для этого прилагается быстрые клавиши и быстрый доступ к блюдам/товарам/услугам.

Для работы с клиентами предлагается работа с дисконтными и бонусными картами и клиент под системой Андроид для мобильных устройств.

В рабочее место официанта входит еще многие другие приложения.

Для рабочего места бармена присущ краткий функционал в который входят: опция вызова официанта; технологическая карта изготовления блюд и коктейлей; отображение очереди изготовления и т.д.

Для кухни предоставляется онлайн мониторинг.

Для повара как и для официанта и бармена предоставляется следующие функционалы это обратная связь с официантом/барменом, опции вызова официанта, звуковая сигнализация поступления блюда на изготовление и окно тех карты блюда.

Мониторинг предоставляет 5 степеней контроля выполнения заказа, т.е. можно в любой момент времени, в любом месте планеты точно знать: какое блюдо делает повар, от кого поступил заказ, очередь изготовления. Также можно будет знать: время принятия заказа, время начала

изготовления, время окончания изготовления, время выдачи блюда на стол, время расчета с клиентом.

В управлении зарплатой и контроль персонала можно создавать карточку персонала, нанимать и увольнять персонала, создать уровни безопасности и разграничивать права доступа, группировать персонал, назначить группам персонала уровни безопасности, создавать различные смены работы для персонала и назначать персонал на смены, настроить разные режимы работы заведения на разных сменах, начислять зарплату разными способами и просматривать зарплату за требуемые периоды.

Рабочее место администратора, управляющего, бухгалтера наиболее важная и часто посещаемая закладка, так как она в себя включает:

- управление складом;
- банк/касса. Приходы и расходы заведения, распределение их по счетам, для дальнейшего анализа работы кафе/ресторана;
- работа с постоянными клиентами;
- информация за день. Это основная форма администратора;
- переучет администратора;
- предварительные заказы. Такие заказы, как правило, используются при организации банкетов и т.п. мероприятий;
- форма организации закупки;
- настройка акций и скидок в кафе/ресторане;
- работа с персоналом.

Программа R-Кеерер разрабатывается российской компанией UCS Россия, г. Москва с 1992 года, а данная система является зарегистрированной торговой маркой.

R-Кеерер имеет следующие ключевые особенности: идентификация персонала с использованием магнитных карточек; автоматизированный процесс введения и сохранения заказа; дополнение ранее введенного заказа; передача специальных извещений на кухню или базу (например, «изготавливать позднее», «со льдом» и так далее); передача заказа другому официанту или, например, гости сидели у бара, а затем пересели в зал; скорость работы и барменов и официантов и простота в обслуживании гостей и т.д. При наличии интегрируется с 1С Бухгалтерией. 1С Бухгалтерия.

TillyPad. Разработчик – компания КОМПЛИТ. На российском рынке автоматизации ресторанов работает с 1991 года. TillyPad используют свыше 350 предприятий общественного питания. В программе представлены разработки для ресторанов, казино, кинотеатров, гостиниц, санаториев. Работает под управлением операционной системой Windows и СУБД MS SQL.

Z-Cash. Разработчика компании Z-Lab Tech. В автоматизированной системе представлены решения только для ресторанов. Программный

комплекс построен на Интернет-технологиях. Работает под управлением сервера Денвер и СУБД MySQL (вторая версия уже поддерживает СУБД Oracle, PostgreSQL). Возможны как стандартная реализация, так и stand-alone и сетевая концепция.

Магия-Ресторан. Разработчик - компания ИВС (г.Москва). На рынке автоматизации с 1996 года. Комплекс автоматизации управления и учета на предприятиях общепита. Работает под управлением ОС Windows и СУБД MS SQL. Пользователи - свыше 500 предприятий России и ближнего зарубежья.

Астор. Система построена на базе программы 1С. Разработчик – Астор ВЦ. Предлагаются решения для различных видов торговли. Для сферы общепита предлагаются программные решения: АСТОР Общепит, АСТОР Ресторан. Автоматизированная система представляет собой комплекс бухгалтерского и складского учета.

ALOHA POS. Разработчик – компания Aloha Technologies (США), официальный представитель в России – компания Сервис Плюс. На рынке автоматизации с 1992 года. Основной вид деятельности – крупнейший системный интегратор, разработчик ПО и поставщик оборудования (по данным РосБизнесКонсалтинг). Пользователи продуктов ALOHA POS – свыше 30000 ресторанов в различных странах мира, среди них: Burger King, TGI Fridays, Baskin Robins, KFC. Основное отличие это отсутствие собственной системы Back Office (предлагается разработка компании Сервис Плюс «Супер Босс»).

Из всех выше перечисленных программ можно сделать вывод о том, что в России как и за рубежом развивается программы по автоматизации предприятия в сфере общественного питания, охватывающие не только какую-либо часть, но и предприятие в целом.

Несмотря на большее количество созданных программ по автоматизации предприятия в сфере общественного питания, они имеют очень похожую друг на друга функциональную структуру.

Функциональная структура в основном подразделяется на: складской учет, управление персоналом, программы лояльности и отчеты.

В последние годы ресторанный бизнес привлекает все больше инвесторов, поскольку в связи с ростом благосостояния населения рынок является достаточно перспективным. Все больше людей предпочитает питаться не дома, а посещать какие-либо кафе или закусочные. Успех в конкурентной борьбе во многом зависит от месторасположения, ценовой политики, концепции и квалификации ресторана. Основной рост оборота приходится на сегмент «быстрого питания» – наиболее доступный по ценам – и различные демократичные форматы в среднем ценовом сегменте.

В последние годы все большее число людей выбирают для проведения банкетов по случаю каких-либо торжественных мероприятий

кафе различного уровня и класса. Постоянно появляются новые предприятия питания, различные как по размеру, так и по виду предоставляемых услуг.

Общественное питание является динамично развивающейся отраслью экономики. В связи с тем, что она затрагивает интересы практически всего населения, общественное питание быстро реагирует на потребности рынка.

ЛИТЕРАТУРА

1. АйТи Кафе. Официальный сайт. 2012. [Электронный ресурс.] // Режим доступа: <http://itkafe.com/index.php>. Дата обращения: 30.10.2016
2. Ефримова О.П. Экономика общественного питания. Учебное пособие. - Мн.: Новое издание, 2014. - С. 240.
3. Кучер Л.С., Шкуратова Л.М. Организация обслуживания на предприятиях общественного питания. – М.: 2013. – С. 544.
4. Николаева Т.И., Егорова Н.Р. Экономика предприятий торговли и общественного питания: Учебное Пособие. – М.: КноРус, 2012. – С. 400.
5. Оленев Л.А. Необходимость применения информационных технологий в управлении. XXIII международные Плехановские чтения. – М.: РЭА им. Г.В. Плеханова, 2012. – С. 120.
6. Пашуто В.П. Организация, нормирование и оплата труда на предприятии. М.: Дело, 2014. - С.146.
7. РСТ Ресторатор. Официальный сайт. 2012 [Электронный ресурс.] // Режим доступа: http://restorator-msk.ru/rst_restorator. Дата обращения: 20.11.2015
8. Телина. Информационные системы: Учебник для вузов / Телина, Избачков, Петров. - Спб.: ПИТЕР, 2011. – С. 511.
9. Хайкин М.М. Финансовая составляющая стратегического управления предприятием. СПб.: ПЭИпк, 2013. - С. 130.
10. Эгертон-Томас К. Ресторанный бизнес. Как открыть и успешно управлять рестораном. М.: РосКонсультант, 2011. – С. 256.
11. Iiko. Официальный сайт. 2012 [Электронный ресурс.] // Режим доступа: <http://www.restouchet.ru/iiko/about-iiko/>. Дата обращения: 30.10.2016
12. Quickresto. Официальный сайт. 2012. [Электронный ресурс.] // Режим доступа: <http://www.quickresto.ru/>. Дата обращения: 30.10.2016

К ВОПРОСУ О СЛОЖНОСТИ NP-ПОЛНЫХ ЗАДАЧ С РЕКОМБИНАЦИЕЙ ТЕОРИИ РАСПИСАНИЙ И АЛГОРИТМЫ ИХ РЕШЕНИЯ

А.А Гришин, магистрант

ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет им. И. С. Тургенева»

e-mail: *grishin-andrey@yandex.ru*

Современный уровень развития производственных технологий в машиностроительной отрасли во многом способен обеспечить конкурентные преимущества производителей. Однако рост конкуренции требует не только совершенствования действующего производства, но и оптимизации действующих, направленного на снижение суммарной доли затрат на технологический процесс. В этой связи актуальной задачей многостадийного производства является разработка оптимальной производственной программы выпуска изделий, которая может быть решена методами теории расписаний.

Первые работы, посвященные теории расписаний были написаны в 50-х годах прошлого века, а в 70-х годах выделилась отдельная дисциплина, благодаря многочисленным работам [2–5, 8].

В настоящее время наибольшее практическое значение имеют задачи составления расписаний для производств, осуществляемых на множестве агрегатов (машин) при наличии трех основных компонентов технологии: сырье, полуфабрикат и готовая продукция. Различаю следующие типы задач, в зависимости от условий производства:

1. Задачи с прерываниями, в которых каждая технологическая операция может быть прервана и возобновлена позднее [6, 7].
2. Задачи не допускающие прерываний при выполнении операций [8, 9], при этом продукция может производиться непрерывно [10] или партиями [11].
3. Задачи, учитывающие хранение, транспортировку и переналадку [12].
4. Комплексные задачи, учитывающие не отдельные операции, а технологии как набор взаимосвязанных операций [13].

Среди возможных вариантов решения задач теории расписаний получили распространение методы динамического программирования, методы ветвей и границ и различные комбинаторные подходы.

Большинство задач теории расписаний относятся к числу NP-трудных и, как показано в работе [5], возможности применения точных алгоритмов существенно ограничены из-за высокой размерности входных данных, а также неточности их определения.

Особый класс задач имеющих практическое значение в машиностроительном производстве заключается в определении оптимального плана производства на отдельном оборудовании при использовании множества технологий $V = (v_1, \dots, v_k)$. Такие задачи носят название задач с оптимальной рекомбинацией. Каждая технология $v \in V$ характеризуется длительностью $t_v \in \mathbb{R}^+$. При этом не допускается прерываний и в каждый момент времени технология выполняется на одном оборудовании. В случае переключения оборудования с одной технологии происходит переналадка с технологии v на технологию u , где $u \in V$, с условием $v \neq u$. Длительность операции переналадки $p \in \mathbb{R}_+$. Требуется найти минимальное время завершения всех работ.

В рассматриваемой задаче вектор перестановок $c = (c_1, \dots, c_k)$, где c_i — технология производимая на оборудовании i -ой по счет, определяющий план выполнения работ, в общем случае, является искомой величиной. Значит общая длительность технологического процесса производства изделия равна $S(c) = \sum_{i=1}^{k-1} S_{c_i, c_{i+1}}$. В этом случае задача заключается в поиске перестановки c^* при которой минимизируется суммарная длительность переналадок.

Вычислительная сложность задачи с рекомбинацией заключается в поиске произвольных родительских решений c^1 и c^2 и такой перестановки c' , при которой выполняются следующие условия:

1. $c'_i = c_i^1$ или $c'_i = c_i^2 \forall i = 1, \dots, k$;
2. c' сводит целевую функцию $S(c)$ к минимуму при всех возможных вариантах перестановок, удовлетворяющих условию 1.

Поиск такой оптимальной перестановки может быть эффективно разрешена путем использования наилучшего возможного результата оператора кроссинговера в генетических алгоритмах [14] для задачи $1|S_{vu}|C_{max}$, что определяет наличие переналадок между технологиями. Проводя анализ работ [14–16] можно сделать вывод, что рассматриваемая задача составления оптимального расписания выполнения технологических операций является NP-трудной.

В исследовании [14] была сделана попытка сведения задачи с оптимальной рекомбинацией к задаче коммивояжера. Особенностью предлагаемого в

данной работе подхода является, то что рассматриваемый метод решения путем построения графа с числом вершин не более 3 и 4 приводят к значительной трудоемкости. Поэтому представляется актуальным дальнейшее исследование возможности построения оптимальной рекомбинации для составления расписаний машиностроительных производств используя методы эвристических алгоритмов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Конвей Р.В., Максвелл В.Л., Миллер Л.В. Теория расписаний. — М.: Наука, 1975. — 360 с.
2. Танаев В.С., Шкуба В.В. Введение в теорию расписаний. — М.: Наука, 1975. — 256 с.
3. Беллман Р. Динамическое программирование. - М.: ИЛ, 1960. — 400 с.
4. Михалевич В.С., Кукса А.И. Методы последовательной оптимизации в дискретных сетевых задачах оптимального распределения ресурсов. — М.: Наука, 1983. — 208 с.
5. Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. — М.: Мир, 1982. — 416 с.
6. Баптист Ф., Карлье Ж., Кононов А.В., Керан М., Севастьянов С.В., Свириденко М. Структурные свойства оптимальных расписаний с прерываниями операций // Дискретный анализ и исследование операций. — 2009. — Т. 16, № 1. — С. 3-36.
7. Севастьянов С.В., Свиттерс Р.А., Фишкин А.В. Построение расписаний выполнения независимых работ на идентичных параллельных машинах с прерываниями и миграционными задержками // Автоматика и телемеханика. — 2010. — № 10. — С. 90-99.
8. Bianco L., Dell’Ohno P., Speranza M.G. Nonpreemptive scheduling on independent tasks with prespecified processor allocations. // Naval Research Logistics Quarterly. — 1994. — Vol. 41. — P. 959-971.
9. Du J., Leung J.Y-T. Complexity of scheduling parallel task systems // SIAM J. Discrete Math. — 1989. — Vol. 2, № 4. — P. 472-478.

10. Ierapetritou M.G, Floudas C.A. Effective continuous-time formulation for short-term scheduling: II. continuous and semi-continuous processes // *Ind. Eng. Chem. Res.* — 1998. — Vol. 37. — P. 4360-4374.
11. Dolgui A., Ereemeev A.V., Kovalyov M.Y., Kuznetsov P.M. Multi-product lot sizing and scheduling on unrelated parallel machines // *IIE Transactions.* — 2010. — Vol. 42, № 7. — P. 514-524.
12. Pochet Y., Wolsey L.A. *Production planning by mixed integer programming.* — Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verl., 2006. — 477 p.
13. Lin X., Floudas C.A., Modi S., Juhasz N.M. Continuous-time optimization approach for medium-range production scheduling of a multiproduct batch plant // *Ind. Eng. Chem. Res.* — 2002. — Vol. 41. — P. 3884-3906.
14. Еремеев А.В. О сложности оптимальной рекомбинации для задачи коммивояжера // *Дискретный анализ и исследование операций.* — 2011. — Т.18, № 1. — с. 27-40.
15. Hazir O., Gunalay Y., Erel E. Customer order scheduling problem: a comparative metaheuristics study // *Int. Journ. of Adv. Manuf. Technol.* 2008. — Vol. 37. — P. 589-598.
16. Cotta C., Alba E., Troya J.M. Utilizing dynastically optimal forma recombination in hybrid genetic algorithms // *Proc. 5th International Conference on Parallel Problem Solving from Nature.* — Berlin: Springer-Verl., 1998. — P. 305-314.

АНАЛИЗ И МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ОСВОЕНИЯ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ МОЩНОСТЕЙ НА ПРИМЕРЕ ШВЕЙНОГО ЦЕХА

С.С. Денисенко, магистрант

Самарский национальный исследовательский университет
им. академика С.П. Королева
e-mail: svtdenisenko@mail.ru

Н.О. Мясникова, магистрант

Самарский национальный исследовательский университет
им. академика С.П. Королева
e-mail: mumla93@bk.ru

Ю.О. Яковлева, к.ф.-м.н.

Самарский национальный исследовательский университет
им. академика С.П. Королева
e-mail: julia.yakovleva@mail.ru

В данной статье построена дифференциальная модель процесса освоения производственных мощностей швейного цеха ООО «Надежда» села Пестровка Самарской области. Приведено подробное решение задачи освоения производственных мощностей для данного предприятия. Проведен анализ полученных результатов.

В настоящий момент, математические модели получили широкое распространение во многих научных областях, в частности, в экономике.

Математическая модель – это приближенное описание какого-либо класса явлений внешнего мира, которое выражается с помощью математической символики. И чтобы получить количественную информацию о явлении, необходимо найти адекватное математическое описание всех его существенных особенностей, которые и будут представлять математическую модель.

В некоторых случаях при экономико-математическом моделировании исследуемый объект или явление описывается дифференциальным уравнением. А модели, описываемые такими уравнениями, называются дифференциальными.

Рассмотрим дифференциальную модель освоения производственных мощностей. Пусть $n = const$ – производственная мощность некоторого предприятия.

Под производственной мощностью предприятия будем понимать максимально возможный выпуск продукции соответствующего качества и ассортимента, который может быть произведен предприятием в единицу времени при полном использовании основных производственных фондов в оптимальных условиях эксплуатации.

Введем следующее обозначение: $y(t)$ – фактическое производство, основанное на производственной мощности в момент времени t . При этом очевидно, что $y(t) \leq n$.

Дадим аргументу t приращение Δt , тогда фактическое производство $y(t)$ получит прирост производства Δy . Предположим, что прирост производства пропорционален недоиспользованной мощности:

$$(n - y(t)) \sim \Delta y,$$

$$\Delta y = \gamma(n - y(t))\Delta t,$$

где γ – коэффициент пропорциональности.

Найдем скорость роста фактического производства, для этого перейдем к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$:

$$y'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\gamma(n - y(t))\Delta t}{\Delta t} = \gamma(n - y(t)),$$

$$y' = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t}.$$

Отсюда следует, что $y' = \gamma(n - y(t))$.

Получим линейное дифференциальное уравнение первого порядка:

$$T \frac{dy}{dt} + y = n, T = \frac{1}{\gamma},$$

$$Ty' + y = n.$$

Будем считать, что в начальный момент времени при $t = 0$ фактическое производство было равно y_0 . Таким образом, начальным условием для этого уравнения является соотношение: $y(0) = y_0, (y_0 n)$.

Решив уравнение в соответствии с методом решения линейных дифференциальных уравнений первого порядка, находим закон, по которому осуществляется фактическое производство в зависимости от времени:

$$y(t) = n + Ce^{-\frac{t}{T}}.$$

Определим значение произвольной константы C из начального условия $y(0) = y_0$.

Закон освоения производственных мощностей имеет вид:

$$y(t) = n + (y_0 - n)e^{-\frac{t}{T}}.$$

Закон показывает, что процесс освоения производственных мощностей завершается выходом на заданный размер мощности n .

В частном случае при $y_0 = 0$ решение принимает вид:

$$y(t) = n \left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right).$$

Авторами статьи было исследовано производство швейного цеха ООО «Надежда» села Пестровка Самарской области. В соответствие с эти-

ми исследованиями фактическое производство в момент времени t может быть описано дифференциальной моделью:

$$y'(t) + \gamma y(t) = \gamma n, \quad (1)$$

На основе статистических данных предприятия за продолжительный период времени (три года) были вычислены: n – производственная мощность швейного цеха за указанный период, γ – коэффициент пропорциональности. Указанные характеристики имеют следующие значения: $n = 1800$, $\gamma = 0,4$.

Тогда уравнение (1) принимает вид:

$$y'(t) + 0,4y(t) = 0,4 * 1800 \quad (2)$$

Решив уравнение (2) найдем закон, по которому осуществляется фактическое производство на данном предприятии в зависимости от времени:

$$y(t) = (1800e^{0,4t} + C)e^{-0,4t}. \quad (3)$$

Решим задачу Коши для уравнения (3) с начальным условием $y(0) = 230$. $y(0) = 230$, так как объем фактического производства предприятия рассчитывался за второй квартал 2015 года и на момент начала этого периода объем выпущенной продукции составлял 230 единиц. При $t = 0$, $y_0 = 1800 + C$. Отсюда $C = y_0 - 1800$. Подставив y_0 , получаем $C = 230 - 1800 = -1570$.

Тогда, решение уравнения (3) будет выглядеть следующим образом:

$$y(t) = 1800 - \frac{1570}{e^{0,4t}}.$$

Данная функция описывает фактическое производство Пестравского швейного цеха ООО «Надежда».

Проанализировав полученные результаты, был сделан следующий вывод: швейный цех использует свои производственные возможности не на полную мощность. Но при этом наблюдается тенденция освоения производственной мощности с течением времени.

Недоиспользование производственной мощности предприятия объясняется рядом различных причин.

Во-первых, на предприятии используется старое производственное оборудование, которое очень часто выходит из строя.

Во-вторых, огромное влияние на показатели производства оказывает человеческий фактор. У технолога часто возникают проблемы с распределением работы по операциям между швеями. В этом случае приходится тратить время на то, чтобы перераспределить операции таким образом, чтобы такое больше не повторялось.

В-третьих, производственная мощность может быть недоиспользована по причине задержке кроя.

ЛИТЕРАТУРА

1. Высшая математика для экономистов: Учебник для студентов ВУЗов, обучающихся по экономическим специальностям. Под ред. Н.Ш. Кремера. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2010.
2. Лагоша Б.А., Апалькова Т.Г. Оптимальное управление в экономике: теория и приложения. – М.: Финансы и статистика, 2008.
3. Ногин В.Д. Введение в оптимальное управление: Учебно-методическое пособие. – С.-Петербург: Издательство «ЮТАС», 2008.
4. Фролова Т.А. Экономика предприятия. Конспект лекций. Таганрог: ТТИ ЮФУ, 2009.
5. Юрьев В.Н. Методы оптимизации в экономике и менеджменте: Учебное пособие. – Издательство Политехнического университета, 2015.

УДК 004.825

АЛГОРИТМЫ ГЕНЕРАЦИИ ПРАВИЛ БАЗЫ ЗНАНИЙ НЕЧЕТКОЙ ПРОДУКЦИОННОЙ СИСТЕМЫ

Л.Н. Зубкова, к.п.н., доц.

ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет им. И.С. Тургенева»

В работе описываются алгоритмы генерации из экспериментальных данных базы знаний нечетких продукционных систем.

Нечеткие правила базы знаний нечетких продукционных систем могут формироваться как экспертами предметной области, так и быть получены автоматически с использованием ряда алгоритмов. Часть из них основана на применении гибридных нейронных нечетких сетей для извлечения нечетких продукционных правил из числовых данных. Это осуществляется, например, в задачах классификации образов, аппроксимации функций. К последней сводятся многие практические задачи, например, прогнозирование показателей, распознавание образов. Рассмотрим ряд конструктивных алгоритмов генерации нечетких правил: алгоритм наращивания и алгоритм Ванга-Менделя.

Алгоритм наращивания.

Пусть исследуемый объект имеет векторный вход x с m элементами и один выход y . Выход и входы объекта связаны некоторой нелинейной зависимостью $y = f(x) + e$, где $f(x)$ – функция неизвестного вида, e – случайная аддитивная помеха с нулевым средним значением и произвольным неизвестным распределением на интервале $(-\varepsilon_m, \varepsilon_m)$, она отражает действие не учитываемых системой факторов. Предполагается, что на объекте может быть реализован эксперимент, в котором будут зарегистрированы N

пар значений $\langle \mathbf{x}^{(k)}, y^{(k)} \rangle$, $k=1, 2, \dots, N$, при этом векторы $\mathbf{x}^{(k)}$ измеряются без ошибок, значение N допускает модификацию.

Алгоритм построения системы правил описывается следующим образом.

Шаг 1. Из n ($n < N$) произвольных значений $\langle \mathbf{x}^{(k)}, y^{(k)} \rangle$ составляется матрица $U_{n \times (m+1)}$ со строками вида $\langle x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_m^{(k)}, y^{(k)} \rangle$, $k=1, 2, \dots, n$. Строки матрицы отображают начальную базу знаний с нечеткими продукционными правилами вида:

П_к: Если x_1 есть $x_1^{(k)}$ и x_2 есть $x_2^{(k)}$ и ... и x_m есть $x_m^{(k)}$, то $y=y^{(k)}$, $k=1, 2, \dots, n$.

Шаг 2. Для каждой новой экспериментальной точки $\langle \mathbf{x}, y \rangle$ рассчитывается прогнозируемое значение по формуле:

$$\hat{y} = \frac{\sum_{k=1}^n y^{(k)} \varphi(\|x - x^{(k)}\|)}{\sum_{k=1}^n \varphi(\|x - x^{(k)}\|)},$$

где $\varphi(\bullet)$ - выпуклая функция принадлежности, например, колоколообразной или экспоненциальной формы, $\|\bullet\|$ – символ евклидова расстояния. Параметры функции $\varphi(\bullet)$ в процессе реализации алгоритма считаются априорно заданными.

Шаг 3. Проверяется неравенство

$$\left| y - \hat{y} \right| > d,$$

где d – заданная априорно константа, определяющая погрешность аппроксимации.

При выполнении неравенства база нечетких правил системы пополняется новым правилом, соответствующим строке $\langle \mathbf{x}, y \rangle$, добавляемой в матрицу U . В противном случае матрица U остается без изменений.

Шаг 4. Проверяется правило останова. Процесс извлечения правил считается завершенным, если в соответствии с шагами 2 и 3 перебраны все N экспериментальных данных (без учета значений начальной базы). Если не все экспериментальные точки перебраны, то осуществляется переход к шагу 2, в противном случае – останов.

Полученная база нечетких правил не остается фиксированной, она модернизируется по мере поступления экспериментальных данных. При этом непротиворечивость нового продукционного правила относительно набора правил из базы знаний обеспечивается процедурой ее пополнения.

Алгоритм Ванга-Менделя.

Данный алгоритм используется в случае, когда предполагаются заданными отрезки значений каждой входной и выходной переменной, а

также функции принадлежности для нечетких множеств, которыми можно описать переменные входа и выхода. Например, j -ая переменная входа на заданном отрезке описывается функциями принадлежности треугольного вида с именами «малый», «средний», «большой». Предполагается, что задана таблица экспериментальных данных со строками вида $\langle x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_m^{(k)}, y_1^{(k)}, y_2^{(k)}, \dots, y_p^{(k)} \rangle$, $k=1, 2, \dots, N$ (в случае m переменных входа и p переменных выхода).

Составляется полный набор возможных нечетких правил вида:

Π_i : Если x_1 есть A_{i1} и x_2 есть A_{i2} и ... и x_m есть A_{im} , то y_1 есть B_{i1} , y_2 есть B_{i2} , ..., y_p есть B_{ip} , $i=1, 2, \dots, Q$, где A_{ij} и B_{il} – соответствующие функции принадлежности, $Q = q_1 \times q_2 \times \dots \times q_m \times s_1 \times s_2 \times \dots \times s_p$, q_j – число заданных функций принадлежности для j -ой переменной входа, s_l – число заданных функций принадлежности для l -ой переменной выхода.

Каждый набор экспериментальных данных $\langle x^{(k)}, y^{(k)} \rangle$ предъявляется приведенным правилам, и для каждого правила подсчитывается его рейтинг R_i по следующей формуле:

$$R_i = \sum_{k=1}^N \alpha_{i1}^k \alpha_{i2}^k \dots \alpha_{im}^k \beta_{i1}^k \beta_{i2}^k \dots \beta_{ip}^k,$$

где $\alpha_{ij}^k = A_{ij}(x_j^{(k)})$, $\beta_{il}^k = B_{il}(y_l^{(k)})$.

После подсчета рейтинговых очков из исходного набора нечетких правил исключаются правила с наименьшими значениями R_i . Заметим, что полный набор возможных правил может содержать группы противоречивых правил, то есть тех, которые имеют одинаковые предпосылки и разные следствия. Из группы подобных противоречивых правил необходимо оставить только одно – с наибольшим рейтингом. Оставшиеся правила будут формировать базу знаний.

Эффективность алгоритмов проверялась на ряде примеров аппроксимации функций. Отдельные результаты численного эксперимента по реализации алгоритма наращивания представлены в таблице 1.

Таблица 1 – Результаты численного эксперимента

	$y = x^2$	$y = x^3$
Отрезок восстановления функции	$[-1; 1]$	$[0; 3]$
Число экспериментальных точек	100	100
Задаваемые параметры алгоритма	$\sigma = 0,1$ $d = 0.1$	$\sigma = 0,3$ $d = 0.1$
Число сгенерированных правил в базе знаний	14	17
Объем тестовой выборки	20	25
Ошибка аппроксимации на тестовой выборке	5%	7%

Точки $x^{(k)}$ в численном эксперименте генерировались случайным образом с равномерным распределением на заданном отрезке.

ЛИТЕРАТУРА

1. Борисов В.В., Круглов В.В., Федулов А.С. Нечеткие модели и сети. – М.: Горячая линия – Телеком, 2007. – 284 с.
2. Круглов В.В., Дли М.И. Интеллектуальные информационные системы: компьютерная поддержка систем нечеткой логики и нечеткого вывода. – М.: Издательство Физико-математической литературы, 2002. – 256 с.
3. Рутковская Д., Пилиньский М., Рутковский Л. Нейронные сети, генетические алгоритмы и нечеткие системы. – М.: Горячая линия – Телеком, 2004. – 452 с.

НЕКОТОРЫЕ ПОДХОДЫ АВТОМАТИЗАЦИИ УЧЕТА В ОРГАНИЗАЦИЯХ

С.В. Мишина

Д.В. Корниенко, к.ф.-м.н.

ФГБОУ ВО «Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина»

e-mail: *dmkornienko@mail.ru*

Профессиональная подготовка конкурентоспособного специалиста, компетентного в области своей профессиональной деятельности, обладающего вместе с тем широким научным и социокультурным кругозором, имеющего опыт практической деятельности, выступает ключевой целью современного профессионального образования будущих выпускников.

К современной системе профессиональной подготовки предъявляются достаточно высокие требования, в связи с тем, что далеко не всегда результаты профессионального образования отвечают запросам, сложившимся на рынке труда. Современные требования к профессиональной деятельности математика включают в себя не только высокий уровень теоретической подготовки, но и наличие опыта практической деятельности, в том числе в сфере решения организационных, управленческих и социальных проблем. Современный работодатель обращает внимание, прежде всего на такие способности молодого специалиста, как умение принимать управленческие решения, совершать выгодные сделки, прогнозировать и управлять рисками, применять инновационные технологии в работе с информацией, в коммуникации с клиентами, сотрудниками. Важное значение имеют также индивидуальные качества личности, определяющие эффек-

тивность его профессиональной деятельности, такие как предприимчивость, самоконтроль, коммуникабельность, надежность и пр.

Современная система высшего образования ориентирована на реализацию установок компетентностного подхода, согласно которому в рамках профессиональной подготовки артикулируется не только овладение теоретическими основами будущей профессии и основами практической деятельности, но и формирование профессионально значимых качеств. Вместе с тем, можно констатировать, что современная система высшего образования пока еще находится на стадии перехода к установкам компетентностного подхода, часто опираясь на традиции так называемого знаниевого подхода. Неслучайно, в ряде социологических исследований (О.И. Дудина, В.А. Зеленков, О.О. Мартыненко, И.П. Черная, А.М. Шмаров) отмечается, что владеют теоретическими знаниями около 70-80% молодых специалистов, однако способными применять полученные знания на практике, осуществлять аналитическую, управленческую деятельность, эффективно взаимодействовать с клиентами и коллегами способны только 30-35% выпускников.

Естественный ход развития и совершенствования системы высшего образования в РФ в области информационных технологий сопровождается огромным интересом к программным продуктам линейки "1С". Многолетняя практика использования данных продуктов в учебных заведениях объясняется довольно естественными причинами:

- ✓ прикладные решения «1С» необходимы современному специалисту и являются весьма массовыми программными продуктами;
- ✓ платформа 1С:Предприятие 8 позволяет демонстрировать современные подходы и технологии программирования при создании прикладных продуктов;
- ✓ продукты линейки «1С» имеют комплексный подход к решению поставленных задач и являются развивающимися в ногу со времени системами;
- ✓ программные продукты "1С" традиционно имеют достаточно хорошую информационную и методическую поддержку;
- ✓ компания "1С" и ее партнерская сеть прилагают громадные усилия для поддержки процесса обучения и доступности ее решений в образовательном процессе.

Платформа 1С:Предприятие 8, благодаря заложенным в нее инновационным принципам, достаточно удачно вписывается в учебные планы образовательной организации. Использование данной системы позволяет применять на практике те знания и навыки, которые формируются при изучении других более "теоретических" курсов, а также предоставляет достаточную гибкость в выборе форм обучения, разумном сочетании обязательных и не обязательных дисциплин. Все это положительно сказывается на конкурентоспособность будущих выпускников.

Знакомство студентов с платформой 1С:Предприятие 8 начинается на 2 курсе, когда подготовлен фундамент основ математики, экономики и организации учета.

Знакомясь с принципами построения и функционирования системы 1С:Предприятие 8, типовыми и отраслевыми конфигурациями, студенты получают практическую возможность закрепить полученные ранее теоретические знания, увидеть разнообразие и сложность учетных задач, различные подходы к организации учета, увлечься возможностями решения реальных прикладных задач.

Система программ 1С: Предприятие 8 включает в себя платформу и прикладные решения, разработанные на ее основе. Гибкость платформы позволяет применять 1С: Предприятие 8 в самых разнообразных областях экономической и организационной деятельности предприятия являясь универсальной системой автоматизации. Поскольку такая деятельность может быть довольно разнообразной, система 1С:Предприятие может приспособливаться к особенностям конкретной области деятельности, в которой она применяется. Для обозначения такой способности используется термин конфигурируемость, то есть возможность настройки системы на особенности конкретного предприятия и класса решаемых задач. Это достигается благодаря тому, что 1С:Предприятие – это не просто программа, существующая в виде набора неизменяемых файлов, а совокупность различных программных инструментов, с которыми работают пользователи и разработчики. Именно последним и адресована эта статья, которая направлена на описание некоторых подходов автоматизации учета в организациях.

Основная идея заключается в построении оперативных учетных и управленческих решений. Оперативный учет традиционно считается достаточно простым для изучения. Структура и механизмы работы регистров накопления наиболее привычны и понятны по сравнению с регистрами бухгалтерии или расчета, однако решаемые с их помощью задачи обычно достаточно сложны. Поэтому задачи по оперативному учету наиболее сложные с точки зрения построения логики решения. Реализация этих задач требует творческого подхода к проектированию объектов конфигурации, умения программировать (составлять алгоритмы) на встроенном языке, а также эффективно построить запрос к информационной базе и обработать его результат. Именно последнее и демонстрируется в данной статье.

Перед нами ставится следующая задача:

Пусть в базе данных есть документ «ПродажаТоваров», который имеет табличную часть «Товары» и ряд реквизитов [1, С.119], описываемых таблице 1.

Таблица 1 – Описание документа «ПродажаТоваров»

РЕКВИЗИТ ДОКУМЕНТА	ТИП РЕКВИЗИТА
Контрагент	СправочникСсылка.Контрагенты
Склад	СправочникСсылка.Склады
СуммаДокумента	Число (длина 15, точность 2)
РЕКВИЗИТ ТАБЛИЧНОЙ ЧАСТИ	ТИП РЕКВИЗИТА
Номенклатура	СправочникСсылка.Номенклатура
Количество	Число (длина 15, точность 2)
Цена	Число (длина 15, точность 2)
Сумма	Число (длина 15, точность 2)

В базе также находится регистр накопления «ОстаткиНоменклатуры», который имеет измерения и ресурсы, описанные в таблице 2 и регистраторами которого являются документы «ПоступлениеТоваров» и «ПродажаТоваров».

Таблица 2 – Описание регистр накопления «ОстаткиНоменклатуры»

ИЗМЕРЕНИЯ РЕГИСТРА	ТИП ИМЕРЕНИЯ
Номенклатура	СправочникСсылка.Номенклатура
Склад	СправочникСсылка.Склады
РЕСУРС РЕГИСТРА	ТИП РЕСУРСА
Количество	Число (длина 15, точность 2)
Сумма	Число (длина 15, точность 2)

Нам необходимо построить запрос, использующий реальную таблицу документа «Документ.ПродажаТоваров.Товары» и виртуальную таблицу регистра накопления «РегистрНакопления. ОстаткиНоменклатуры. Остатки». Данный запрос будет необходим для определения наличия остатков товара, указанного в табличной части документа, на складе, указанного в реквизите документа.

Чтобы реализовать данный механизм нам понадобится пакет запросов. Пакетный запрос - это несколько запросов, описанных как один большой запрос. Эти запросы выполняются последовательно один за другим. Любой промежуточный результат в ходе выполнения всей цепочки включённых запросов может быть помещён во временную таблицу. При такой структуре любой запрос может обратиться к этим промежуточным данным. Важно то, что результаты любого запроса, помещённые во временную таблицу, могут быть использованы неоднократно. При этом больше не нужно прописывать одно и то же несколько раз.

Для создания пакетного запроса в системы 1С:Предприятие 8 используется предложение ПОМЕСТИТЬ.

При построении пакета запросов мы будем использовать «Консоль запросов». Инструмент «Консоль запросов» представляет собой внешнюю обработку и предназначен для составления и исполнения запросов в режи-

ме **1С:Предприятие**. Данная обработка предназначена в основном для разработчиков конфигураций и специалистов по внедрению.

При разработке запросов в конфигураторе, всегда требуется проводить отладку запроса на пользовательских данных. Данная обработка позволяет разрабатывать запрос (или пакет запросов) параллельно с просмотром, полученного результата. При работе с ней в толстом клиенте можно воспользоваться конструктором запросов, как и при работе в конфигураторе. Возможности по анализу результата запроса включают:

- вывод данных временных таблиц;
- замер времени выполнения запроса и числа строк;
- подсветку указанных ячеек в результате запроса;
- интерактивное сравнение двух результатов запроса (только в толстом клиенте);
- вывод результата запроса в новом окне;
- вывод плана выполнения запроса, а также SQL-текст запроса, сформированного в СУБД.

После завершения отладки текст запроса можно перенести в код (с помощью команды формирования текста запроса для конфигуратора) или в отчеты конфигурации. К сервисным возможностям относится работа сразу с несколькими запросами (пакет запросов), сохранение текста и параметров запросов в файле, автосохранение, экспорт результатов запроса в табличный документ и другое.

Реализацию нашей задачи начнем с добавления новой ветви к дереву запросов посредством вызова контекстного меню и выбора пункта «Добавить» инструмента «Консоль запросов».

В качестве таблицы-источника выберем таблицу «Документ.ПродажаТоваров.Товары». Из данной таблицы выберем необходимые для нас выходные поля - ПродажаТоваровТовары.Номенклатура, ПродажаТоваровТовары.Ссылка.Склад и ПродажаТоваровТовары.Количество. На закладке Условия укажем параметр отбора

ПродажаТоваровТовары.Ссылка = &Ссылка.

Так как в табличную часть документа могут попасть и услуги, то нам необходимо наложить условие на вид номенклатуры:

ПродажаТоваровТовары.Номенклатура.ВидНоменклатуры < >
ЗНАЧЕНИЕ(Перечисление.ВидыТоваров.Услуга).

Часто возникают случаи, когда значения некоторых полей табличной части документа могут повторяться [3, С.434]. Для исключения ошибки в запросе мы сгруппируем записи и воспользуемся агрегатной функцией СУММА:

ВЫБРАТЬ

СУММА(ПродажаТоваровТовары.Количество) КАК Количе-

ство

СГРУППИРОВАТЬ ПО

ПродажаТоваровТовары.Номенклатура,
ПродажаТоваровТовары.Ссылка.Склад

Теперь на закладке Дополнительно сохраняем результат нашего запроса в виде временной таблицы «ТабДок»

ПОМЕСТИТЬ ТабДок

Далее можем перейти к очередному этапу сборки запроса. Для этого перейдем на закладку Пакет запросов и добавим еще один запрос [2, стр. 458]. Именно в этом запросе мы реализуем соединение нашей временной таблицы «ТабДок» и виртуальной таблицы «РегистрНакопления.ОстаткиНоменклатуры.Остатки». Для этого в табличной модели базы данных выберем таблицы «ТабДок» и «РегистрНакопления.ОстаткиНоменклатуры.Остатки».

Для виртуальной таблицы укажем параметр &Момент, связанный с временем ее построения. Теперь приступим к наложению связей при соединении наших таблиц-источников [3, стр. 542]. С прикладной точки зрения временную таблицу «ТабДок» будем считать ведущим источником, а виртуальную таблицу остатков – ведомым ЛЕВОЕ СОЕДИНЕНИЕ РегистрНакопления.ОстаткиНоменклатуры.Остатки(&Момент) КАК ОстаткиНоменклатурыОстатки ПО ТабДок.Номенклатура = ОстаткиНоменклатурыОстатки.Номенклатура

При написании запроса необходимо наложить условие на виртуальную таблицу, которое касается отбора по значениям измерений. Такое условие должно накладываться в параметрах виртуальной таблицы [4, С.374]

(Номенклатура, Склад) В

(ВЫБРАТЬ

ТабДок.Номенклатура,

ТабДок.Склад

ИЗ

ТабДок КАК ТабДок)

В заключении, для максимального быстродействия, необходимо построить индекс во временной таблице «ТабДок» именно по полям отбора. Тогда система еще быстрее будет строить виртуальную таблицу по нашему условию

ИНДЕКСИРОВАТЬ ПО

Номенклатура,

Склад

В результате всех действий получим запрос следующего вида:

ВЫБРАТЬ

ПродажаТоваровТовары.Номенклатура КАК Номенклатура,

ПродажаТоваровТовары.Ссылка.Склад КАК Склад,

СУММА(ПродажаТоваровТовары.Количество) КАК Количество

ПОМЕСТИТЬ ТабДок

ИЗ

Документ.ПродажаТоваров.Товары КАК ПродажаТоваровТовары
 ГДЕ
 ПродажаТоваровТовары.Ссылка = &Ссылка
 И ПродажаТоваровТовары.Номенклатура.ВидНоменклатуры <>
 ЗНАЧЕНИЕ(Перечисление.ВидыТоваров.Услуга)
 СГРУППИРОВАТЬ ПО
 ПродажаТоваровТовары.Номенклатура,
 ПродажаТоваровТовары.Ссылка.Склад
 ИНДЕКСИРОВАТЬ ПО
 Номенклатура,
 Склад;
 //////////////////////////////////////
 ВЫБРАТЬ
 ТабДок.Номенклатура,
 ТабДок.Склад,
 ТабДок.Количество,
 ЕСТЬNULL(ОстаткиНоменклатурыОстатки.КоличествоОстаток, 0)
 КАК
 КоличествоОстаток,
 ЕСТЬNULL(ОстаткиНоменклатурыОстатки.СуммаОстаток, 0) КАК
 СуммаОстаток
 ИЗ
 ТабДок КАК ТабДок
 ЛЕВОЕ СОЕДИНЕНИЕ РегистрНакопле-
 ния.ОстаткиНоменклатуры.Остатки(
 &Момент,
 (Номенклатура, Склад) В
 (ВЫБРАТЬ
 ТабДок.Номенклатура,
 ТабДок.Склад
 ИЗ
 ТабДок КАК ТабДок)) КАК
 ОстаткиНоменклатурыОстатки
 ПО ТабДок.Номенклатура = ОстаткиНоменклатурыОстат-
 ки.Номенклатура

ЛИТЕРАТУРА

1. Хрусталева Е.Ю. Язык запросов «1С:Предприятие 8» / Е.Ю. Хрусталева. – М.: ООО «1С-Паблишинг», 2013. – 369 с.: ил. – (Библиотека разработчика).
2. М.Г. Радченко, Е.Ю. Хрусталева 1С:Предприятие 8.3. Практическое пособие разработчика. Примеры и типовые приемы» / М.Г. Радченко, Е.Ю.

- Хрусталева - М.: ООО "1С-Паблишинг", 2013; - 964 с.: ил. – (Библиотека разработчика).
3. Габец А.П., Гончаров Д.И., Козырев Д.В., Кухлевский Д.С., Радченко М.Г. Профессиональная разработка в системе 1С:Предприятие 8. Под ред. М.Г. Радченко / Габец А.П., Гончаров Д.И., Козырев Д.В., Кухлевский Д.С., Радченко М.Г. – М.: ООО «1С-Паблишинг», 2013. – 808 с.:ил. – (Библиотека разработчика).
 4. Хрусталева Е.Ю. Разработка сложных отчетов в «1С:Предприятие 8». Система компоновки данных / Е.Ю. Хрусталева. – М.: ООО «1С-Паблишинг», 2012. – 484 с.: ил. – (Библиотека разработчика).

УДК 658.6

ПОСТРОЕНИЕ РЕЙТИНГА МУНИЦИПАЛЬНЫХ РАЙОНОВ ОРЛОВСКОЙ ОБЛАСТИ ПО ПОКАЗАТЕЛЯМ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ МЕДИЦИНСКИХ УЧРЕЖДЕНИЙ¹

¹ Публикация подготовлена в рамках поддержанного РГНФ научного проекта «Математическое обеспечение мониторинга эффективности деятельности региональных систем здравоохранения и обязательного медицинского страхования» №16-12-57005

Т.Н. Русских, к.э.н., доцент

ФГБОУ ВПО «Орловский государственный университет им. И.С. Тургенева»
e-mail: trusskih@rambler.ru

С.П. Строев, к.э.н., доцент

ФГБОУ ВПО «Орловский государственный университет им. И.С. Тургенева»
e-mail: stroewsp@mail.ru

В современных условиях развития региональных систем здравоохранения достаточно актуальной является проблема сравнительного анализа эффективности деятельности подсистем здравоохранения муниципальных образований субъекта РФ. В статье приводится анализ типологических групп, рейтингов муниципальных районов Орловской области, построенных на основе показателей деятельности медицинских учреждений, с использованием процедур нечеткой кластеризации.

Ключевые слова: система здравоохранения, эффективность, структурная эффективность, типология, рейтинг.

Ключевыми задачами в управлении региональной системой здравоохранения являются повышение доступности и качества медицинской помощи, улучшение показателей эффективности деятельности медицинских организаций. Одним из действенных механизмов решения данных задач является увеличение объемов бюджетного финансирования системы здравоохранения. Однако, настоящее бюджетное планирование основывается на принципе «оптимизации расходов». В связи с этим определенным «ре-

сурсом», который можно использовать в сложившейся ситуации, является выработка эффективных управленческих решений, носящих «точечный» характер и ориентированных на поддержание сильных и улучшение слабых сторон составляющих системы здравоохранения региона.

Выработка подобных управленческих решений невозможна без детального и всестороннего анализа эффективности деятельности региональной системы здравоохранения, определяемой эффективностью деятельности ее составляющих – подсистем здравоохранения муниципальных образований региона.

Анализ эффективности деятельности подсистем здравоохранения, в свою очередь, осложняется следующими моментами:

- определением интегрированных характеристик эффективности;
- формированием перечня показателей, определяющих установленные характеристики;
- проведением численной обработки перечня показателей, целью которой является получение информации об эффективности деятельности системы здравоохранения региона с позиции установленных характеристик;
- интерпретацией полученных результатов.

В современной научной литературе и практике управления [1, 2, 4, 6] ключевыми характеристиками эффективности систем здравоохранения принято считать характеристики ресурсной и структурной обеспеченности, лечебно-диагностического процесса и его результативности. Выделенные характеристики позволяют получить всестороннее многоаспектное представление о состоянии системы здравоохранения. Согласно работам [5,6] выделенные характеристики описываются различными наборами показателей.

В настоящей статье будут рассматриваться интегрированные характеристики деятельности медицинских учреждений, определяющие структурную эффективность деятельности системы здравоохранения, приведенные в таблице 1.

Таблица 1 – Показатели деятельности медицинских учреждений

Группа показателей	Показатели
Деятельность стационаров и амбулаторно-поликлинических учреждений (АПУ)	Средняя длительность пребывания больного на койке в году (в днях) (койки различного профиля)
	Оборот койки
	Среднегодовая занятость койки (в днях)
	Уровень госпитализации на 1000 населения
	Больничная летальность
	Число госпитализированных больных в областную клиническую больницу
	Число посещений АПУ на 1 жителя в год

В работе [7] приводится методика построения типологии подсистем здравоохранения муниципальных районов региона. Для построения искомой типологии в рамках данной методики формируется нечетко-множественное разбиение исходного множества анализируемых объектов (подсистем здравоохранения) на некоторое количество групп с использованием методов понижения размерности и нечеткой кластеризации [8, 9].

В качестве объектов кластеризации рассматривались 24 муниципальных района Орловской области, обозначим их R_1, R_2, \dots, R_{24} и эталонный район R_0 , характеризующий средними значениями показателей. Эмпирической базой послужила статистическая информация за 2015 год [3].

Приведем результаты кластеризации на примере группы показателей деятельности стационаров и амбулаторно-поликлинических учреждений (таблица 1).

С целью выбора оптимальной типологии метод нечетких k -средних был реализован для числа кластеров $k = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$. Наибольшая разница между значением функционалов наблюдается при $k = 3$. Таким образом, можно сделать вывод, что наиболее оптимальным является разбиение субъектов на 3 типологические группы. Следует отметить, что с увеличением числа кластеров уменьшаются наибольшие значения функций принадлежности $\max_{j=1, k} \mu_{K_j}(R_i)$, и затрудняется содержательная интерпретация полученных кластеров, что еще раз доказывает оптимальность выбранного числа кластеров $k = 3$.

В таблице 2 приведены функции принадлежности конечного нечеткого разбиения для трех кластеров или типологических групп.

В таблице 3 приведены полученные кластеры муниципальных районов. Эталонный район, определяемый средними значениями показателей, принадлежит второму кластеру.

В таблице 4 приведены средние значения статистических показателей для муниципальных районов каждого кластера.

Муниципальные районы первого кластера для большинства показателей характеризуются высокими уровнями эффективности. Несмотря на высокое значение уровня госпитализации, данные районы имеют высокие значения числа посещений амбулаторно-поликлинических учреждений, что обусловлено, вероятно, высоким уровнем спроса населения на медицинские услуги.

При этом в целом уровень эффективности деятельности медицинских учреждений районов первого кластера нельзя характеризовать, как «высокий», поскольку для них характерны высокие показатели больницы летальности (Ливенский, Мценский районы), несмотря на низкий показатель госпитализации в областную клиническую больницу.

Таблица 2 – Функции принадлежности конечного нечеткого разбиения для трех типологических групп

№	Район	Кластер 1	Кластер 2	Кластер 3
1	2	3	4	5
1	Болховский	0.06	0.85	0.09
2	Верховский	0.20	0.60	0.20
3	Глазуновский	0.06	0.80	0.14
4	Дмитровский	0.03	0.87	0.10
5	Должанский	0.21	0.66	0.13
6	Залегощенский	0.12	0.75	0.13
7	Знаменский	0.10	0.23	0.67
8	Колпнянский	0.25	0.66	0.09
9	Корсаковский	0.05	0.86	0.09
10	Краснозоренский	0.08	0.87	0.05
11	Кромской	0.10	0.52	0.38
12	Ливенский	0.92	0.06	0.02
13	Малоархангельский	0.11	0.74	0.16
14	Мценский	0.90	0.07	0.03
15	Новодеревеньковский	0.87	0.10	0.03
16	Новосильский	0.13	0.78	0.09
17	Орловский	0.05	0.17	0.78
18	Покровский	0.11	0.81	0.08
19	Свердловский	0.02	0.06	0.92
20	Сосковский	0.30	0.37	0.33
21	Троснянский	0.07	0.29	0.64
22	Урицкий	0.08	0.64	0.28
23	Хотынецкий	0.09	0.73	0.18
24	Шаблыкинский	0.33	0.43	0.24
25	Эталонный район	0.01	0.97	0.02

Таблица 3 – Типологические группы муниципальных районов Орловской области

Кластеры	Муниципальные районы
Кластер 1	Ливенский, Мценский, Новодеревеньковский
Кластер 2	Болховский, Верховский, Глазуновский, Дмитровский, Должанский, Залегощенский, Колпнянский, Корсаковский, Краснозоренский, Кромской, Малоархангельский, Новосильский, Покровский, Сосковский, Урицкий, Хотынецкий, Шаблыкинский, Эталонный район
Кластер 3	Знаменский, Орловский, Свердловский, Троснянский

Таблица 4 – Средние значения статистических показателей для муниципальных районов кластера

№	Показатель	Кластер 1	Кластер 2	Кластер 3
1	Средняя длительность пребывания больного на койке в году (в днях)	185.17	119.12	69.93
2	Оборот койки	9.67	9.26	10.08
3	Среднегодовая занятость койки (в днях)	35.57	33.02	26.75
4	Уровень госпитализации на 1000 населения	330.23	308.16	269.38
5	Больничная летальность	2.03	0.82	0.95
6	Число госпитализированных больных в областную клиническую больницу	31.70	59.40	82.98
7	Число посещений АПУ на 1 жителя в год	6.53	6.02	4.40

Преимущество муниципальных районов второго кластера по сравнению с муниципальными районами первого кластера заключается лишь в более низких в среднем значениях уровня больничной летальности.

Тогда, на наш взгляд, полученные кластеры или типологические группы можно охарактеризовать с использованием лингвистической шкалы:

- уровень эффективности выше среднего (кластер 1);
- средний уровень эффективности (кластер 2);
- низкий уровень эффективности (кластер 3).

Анализируя значения функций принадлежности конечных разбиений (таблица 2), можно сделать вывод о том, что для отдельных муниципальных районов (например, Сосковского, Шаблыкинского районов) трудно однозначно определить их принадлежность к какой-либо одной типологической группе, поскольку наибольшие значения функции принадлежности не превышают 0.5, и значения функций принадлежности к различным кластерам достаточно близкие. В работе [6] отмечается, что типологизацию следует рассматривать лишь как предварительный этап анализа эффективности деятельности подсистем здравоохранения.

Рассмотрим методику построения рейтинга муниципальных районов по уровню эффективности деятельности подсистем здравоохранения для трех кластеров.

Пусть в результате реализации метода нечетких k -средних построены нечеткие множества, например, множества вида: K_1 – районы с уровнем эффективности выше среднего, K_2 – районы со средним уровнем эффективности, K_3 – районы с низким уровнем эффективности, то есть, за-

даны значения функций принадлежности $\mu_{K_j}(R_i)$. Т.е. кластеры и нечеткие множества должны быть упорядочены по «качеству признака».

Таким образом, каждому муниципальному району поставлена в соответствие упорядоченная тройка действительных чисел $\langle \mu_{K_1}(R_i), \mu_{K_2}(R_i), \mu_{K_3}(R_i) \rangle$.

В отличие от работы [6] индикатор эффективности $\rho(R_i)$ муниципального района R_i предлагается определять в следующем виде:

$$\rho(R_i) = \sum_{j=1}^3 \frac{3 - (j - 1)}{3} \cdot \mu_{K_j}(R_i).$$

Таким образом, для каждого субъекта R_1, R_2, \dots, R_{24} могут быть получены нечеткие интегральные индикаторы $\rho(R_i)$ уровня эффективности, $\rho(R_i) \in (0, 1]$.

Для рассматриваемой группы показателей, чем выше значение интегрального индикатора, тем выше уровень эффективности деятельности медицинских учреждений.

В свою очередь полученные интегральные индикаторы $\rho(R_i)$ позволяют проранжировать муниципальные районы и задать рейтинг $\tilde{\rho}(R_i)$ района R_i в общем списке.

В таблице 5 приведены интегральные индикаторы и рейтинги муниципальных районов по уровню эффективности деятельности медицинских учреждений.

Таблица 5 – Интегральные индикаторы и рейтинги муниципальных районов Орловской области по уровню эффективности деятельности медицинских учреждений

№	Район	Интегральный индикатор	Рейтинг
1	Болховский	0.66	9
2	Верховский	0.67	8
3	<i>Глазуновский</i>	<i>0.64</i>	<i>11</i>
4	<i>Дмитровский</i>	<i>0.64</i>	<i>11</i>
5	Должанский	0.69	6
6	Залегощенский	0.66	9
7	<i>Знаменский</i>	<i>0.48</i>	<i>14</i>
8	Колпнянский	0.72	4
9	<i>Корсаковский</i>	<i>0.65</i>	<i>10</i>
10	Краснозоренский	0.68	7
11	<i>Кромской</i>	<i>0.57</i>	<i>13</i>
12	Ливенский	0.97	1

13	Малоархангельский	0.66	9
14	Мценский	0.96	2
15	Новодеревеньковский	0.95	3
16	Новосильский	0.68	7
17	<i>Орловский</i>	<i>0.42</i>	<i>15</i>
18	Покровский	0.68	7
19	<i>Свердловский</i>	<i>0.37</i>	<i>16</i>
20	Сосковский	0.66	9
21	<i>Троснянский</i>	<i>0.48</i>	<i>14</i>
22	<i>Урицкий</i>	<i>0.60</i>	<i>12</i>
23	<i>Хотынецкий</i>	<i>0.64</i>	<i>11</i>
24	Шаблыкинский	0.70	5
25	Эталонный субъект	0.66	9

Лидирующие позиции согласно таблице 5 занимает Ливенский район, наихудшие позиции – Знаменский, Орловский, Свердловский районы. Рейтинг эталонного субъекта равен 9, поэтому на уровне муниципальных районов Орловской области, рейтинги которых ниже «среднего рейтинга» (районы выделены в таблице 5 курсивом) требуется разработка управленческих решений, способствующих в дальнейшем повышению, как эффективности деятельности медицинских учреждений, так и всей системы здравоохранения в целом.

ЛИТЕРАТУРА

1. Методика оценки эффективности функционирования территориальных систем здравоохранения в Российской Федерации / С.В. Шишкин, С.П. Ермаков, Е.П. Какорина и др. [Электронный ресурс]. – URL: http://www.socpol.ru/research_projects/pdf/proj26_report_rus.pdf
2. Орлов, Е.М. Повышение эффективности развития региональной системы здравоохранения (на материалах Алтайского края): 08.00.05 «Экономика и управление народным хозяйством»: автореф. дис. на соиск. учен. степ. канд. экон. наук / Орлов Евгений Михайлович. – Барнаул, 2011. – 24 с.
3. Основные показатели медицинского обслуживания населения Орловской области в 2015 году [Электронный ресурс]. – URL: <http://zdravorel.ru/arhiv/S2015.pdf>
4. Оценка эффективности деятельности региональных систем здравоохранения / В.И. Стародубов, И.М. Сон, С.А. Леонов и др. // Менеджер здравоохранения. – 2010. – №3. – С. 15-25.
5. Русских Т.Н. Методологический подход к построению типологий муниципальных образований региона по уровню эффективности деятельности систем здравоохранения / Т.Н. Русских // Актуальные проблемы развития хозяйствующих субъектов, территорий и систем регионального

- и муниципального управления: материалы XI междунар. науч.-практ. конф. / под ред. Ю.В. Вертаковой. – Вып.3 – Курск: ЗАО «Университетская книга», 2016. – С. 199-203.
6. Русских Т.Н. Формирование рейтинговых оценок эффективности деятельности региональных систем здравоохранения и обязательного медицинского страхования / Т.Н. Русских, Н.В. Сироткина, В.И. Тинякова // Экономика региона. – 2015. – №4. – С.197 – 213.
 7. Строев С.П. Методика построения типологий муниципальных подсистем здравоохранения региона // Экономическое прогнозирование: модели и методы: материалы XII международной научно-практической конференции, 17-19 ноября 2016 г. / под общ. ред. В.В. Давниса, В.И. Тиняковой; Воронеж. гос. ун-т [и др.]. – Воронеж: типография Воронежского ЦНТИ – филиала ФБГУ «РЭА» Минэнерго России, 2016. В печати.
 8. EVERIT: Cluster Analysis / B. S. Everitt, S. Landau, M. Leese, D. Stahl. – 5th edition. – Chichester, UK: Wiley Publishing, 2011. – 330 pp.
 9. GanMaWu: Gan, G. Data Clustering: Theory, Algorithms, and Applications / G. Gan, C. Ma, J. Wu. – Philadelphia, Pennsylvania, USA: SIAM, Society for Industrial and Applied Mathematics, 2007. – 466 pp.

УДК 51-7

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРЕДПОЧТЕНИЙ АБИТУРИЕНТОВ ПРИ ВЫБОРЕ ВУЗА

И.И. Чернобровкина, к.п.н., доц.

ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет им. И.С. Тургенева»
e-mail: *iichernobrovkina@yandex.ru*

Ю.В. Чернобровкина

ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет им. И.С. Тургенева»
e-mail: *nikeli2009@yandex.ru*

В работе рассматривается применение логит-модели для выяснения предпочтений абитуриентов при выборе ими ВУЗов. Модель построена на основе статистических данных результатов единого государственного экзамена выпускников г. Орла.

В настоящее время, когда абитуриенты города Орла разъезжаются для поступления в ВУЗы в другие, более крупные города, то не только для абитуриентов актуален вопрос «Куда с набранными баллами можно поступить?», но и для приемных комиссий ВУЗов, дабы оценить ход приемной комиссии и занятость бюджетных мест.

Для построения модели данные собирались путем анкетирования студентов 1 курса г. Орла, а также их друзей, окончивших школы г. Орла и

поступивших в учебные заведения Москвы, Питера, Воронежа и т.д. В анкету входили следующие вопросы: 1. В каком городе Вы поступили в ВУЗ (а) в г. Орле; б) в Питере Москве; в) в другом городе; 2. Какое суммарное количество баллов по ЕГЭ Вы набрали? 3. Какова основа Вашего обучения? (а) бесплатная; б) целевая; в) платная); 4. Оцените материальное благосостояние Вашей семьи: (а) ниже среднего (до 8 тыс. руб. в месяц на человека); б) среднее (от 8 до 12 тыс. руб. в месяц на человека); в) выше среднего (больше 12 тыс. руб. в месяц на человека).

В опросе приняли участие 92 человека, составлена таблица 1, в которой приняты следующие обозначения: Y – территориальное расположение ВУЗа (2 – Орел; 1 – Москва, Питер; 0 – другой город (отличный от Орла, Москвы и Питера); x1 – основа обучения (2 – платная; 1 – целевая; 0 – бесплатная); x2 – материальное благосостояние семьи (2 – выше среднего; 1 – среднее; 0 – ниже среднего); x3 – суммарное количество набранных по ЕГЭ баллов. По этим данным строится модель предпочтений ВУЗов абитуриентами г. Орла (и области).

Таблица 1 – Результаты анкетирования

№ п/п	Y	x1	x2	x3	№ п/п	Y	x1	x2	x3	№ п/п	Y	x1	x2	x3
1	1	1	2	220	32	1	1	1	241	63	1	0	1	193
2	1	0	2	231	33	1	0	1	193	64	1	0	1	204
3	1	0	1	192	34	1	0	1	198	65	1	0	2	184
4	1	0	1	202	35	2	0	1	209	66	0	0	2	220
5	1	0	2	174	36	2	0	1	186	67	0	0	2	208
6	0	0	2	230	37	0	2	2	168	68	0	0	1	197
7	0	0	2	218	38	2	2	1	197	69	0	2	2	168
8	0	0	1	197	39	2	0	1	180	70	2	0	1	182
9	0	2	2	168	40	0	0	2	220	71	2	0	0	173
10	2	0	1	190	41	1	0	2	231	72	2	0	1	194
11	2	0	0	192	42	2	0	1	198	73	2	2	2	140
12	2	0	1	194	43	0	2	2	187	74	2	2	1	141
13	2	2	2	140	44	2	2	1	172	75	2	0	1	186
14	2	2	1	141	45	2	0	1	186	76	2	1	1	176
15	2	0	1	186	46	0	0	2	218	77	2	1	1	173
16	2	1	1	176	47	2	1	1	183	78	2	2	1	148
17	2	1	1	173	48	2	2	1	172	79	2	2	2	139
18	2	2	1	132	49	1	0	1	272	80	2	0	1	180
19	2	2	2	139	50	0	2	2	168	81	2	2	1	164
20	2	0	1	180	51	2	2	1	174	82	2	2	1	153
21	2	2	1	144	52	2	0	1	194	83	2	0	1	180
22	2	2	1	143	53	2	2	2	182	84	2	0	0	183
23	2	0	1	180	54	2	2	1	161	85	2	0	1	179

24	2	0	0	183	55	2	0	1	186	86	2	0	1	201
25	2	0	1	179	56	2	0	1	204	87	2	2	1	143
26	2	0	1	201	57	2	2	1	163	88	0	0	2	220
27	2	2	1	163	58	0	0	2	220	89	0	2	2	190
28	0	0	2	220	59	2	2	1	132	90	0	2	2	187
29	0	2	2	190	60	0	2	2	182	91	2	2	1	142
30	0	2	2	187	61	1	1	2	220	92	2	2	1	156
31	1	0	1	280	62	1	0	2	231					

Мультиномиальная логит-модель построена в пакете Statistica.

Путь построения модели: Statistics → Advanced Linear / Nonlinear Models → Generalized Linear / Nonlinear Models → Multinomial logit model. Необходимо выбрать Y – зависимая переменная, x1 – x3 – предикторы.

Подробное описание этапов построения такой модели и интерпретация результатов моделирования описано в [1].

Таблица 2 – Коэффициенты модели и характеристики их надежности

Effect	Y - Parameter estimates (Spreadsheet1) Distribution : MULTINOMIAL Link function: LOGIT					
	Level of Response	Column	Estimate	Standard	Wald	p
Interc 1	0	1	-70,28	25,32437	7,7896	0,005
X1	0	2	-7,42	2,04191	17,0875	0,0000
X2	0	3	20,12	1,68167	206,0935	0,0000
X3	0	4	0,28	0,12980	3,1714	0,003
Interc 2	1	5	-64,92	25,17078	7,0676	0,007
X1	1	6	-8,35	2,00841	22,6612	0,000
X2	1	7	20,42	1,68167	205,0935	0,000
X3	1	8	0,22	0,12921	2,8580	0,002
Scale			1,0000	0,00000		

Из таблицы 2 можно сделать вывод о том, что полученные оценки коэффициентов являются статистически значимыми. Аналитическое выражение для построенной мультиномиальной-логит модели выглядит следующим образом:

$$P(y = 0) = \frac{e^{-70.28 - 7.42x_1 + 20.12x_2 + 0.28x_3}}{1 + e^{-70.28 - 7.42x_1 + 20.12x_2 + 0.28x_3} + e^{-64.92 - 8.35x_1 + 20.42x_2 + 0.22x_3}}$$

$$P(y = 1) = \frac{e^{-66.92 - 9.56x_1 + 23.58x_2 + 0.22x_3}}{1 + e^{-70.28 - 7.42x_1 + 20.12x_2 + 0.28x_3} + e^{-64.92 - 8.35x_1 + 20.42x_2 + 0.22x_3}}$$

$$P(y=2) = \frac{1}{1 + e^{-70.28 - 7.42x_1 + 20.12x_2 + 0.28x_3} + e^{-64.92 - 8.35x_1 + 20.42x_2 + 0.22x_3}}$$

По построенной модели были рассчитаны предсказанные значения вероятностей для данных таблицы 1. Оказалось, что модельные значения переменной Y не соответствуют реальным в восьми наблюдениях.

Оценка пригодности модели в целом произведена по индексу отношения правдоподобия Макфаддена (используя тест правдоподобия первого типа):

$$LRI = 1 - \frac{\ln L(\hat{b})}{\ln L(\hat{b}_0)} = 1 - \frac{-13.11}{-41.14} = 0.68. \text{ Полученное значение свидетельствует об адекватности логит-модели.}$$

Используя построенную модель по данным ЕГЭ можно рассчитать вероятности выбора абитуриентом ВУЗа нашего города или какого – либо еще.

ЛИТЕРАТУРА

1. Давнис, В.В. Прогнозные модели экспертных предпочтений: монография / В.В. Давнис, В.И. Тинякова. – Воронеж: Изд-во Воронеж. гос. ун-та, 2005. – 248 с.

УДК 519.254

МНОЖЕСТВЕННЫЕ СРАВНЕНИЯ СРЕДНИХ В СИСТЕМЕ АНАЛИЗА ДАННЫХ ОБЩЕСТВЕННЫХ НАУК SPSS BASE

В.Г. Шуметов, д.э.н., проф.

ФГБОУ ВО «Орловский государственный аграрный университет
им. Н.В. Парахина»

e-mail: shumetov@mail.ru

На примере производства сельскохозяйственной продукции в регионах Центральной России рассматриваются особенности алгоритмов множественного сравнения средних с помощью процедур однофакторного дисперсионного анализа и общей линейной модели системы анализа данных SPSS Base.

Практически все эмпирические исследования сталкиваются с необходимостью выявить и доказать изменение или, напротив, стабильность значения какого-либо результирующего показателя под влиянием тех или иных факторов, что в математическом плане сводится к сравнению средних подвыборок. Не являются исключением исследования в сфере производства сельскохозяйственной продукции, где в значительной мере прояв-

ляется влияние случайных факторов различной природы. Но, несмотря на то, что именно сельское хозяйство дало толчок развитию теоретических основ статистических процедур сравнения средних, до настоящего времени многие исследователи далеко не всегда корректно выполняют оценку статистической значимости этого изменения или стабильности. Это особенно относится к часто встречающимся на практике случаям сравнения более чем двух средних, когда взамен традиционно используемого критерия наименьшей существенной разницы (НСР, в англоязычных источниках *LSD – Least Significant Difference*), основанного на понятии *t*-критерия [1, 2], необходимо использовать более «строгие» критерии множественного сравнения средних – Дункана, Шеффе и др., основанные на методах дисперсионного анализа.

В то же время, выполнить такой анализ с помощью современных пакетов статистических программ, в частности, пакета статистических программ анализа данных общественных наук *SPSS Base*, содержащего специально предназначенные для этих целей процедуры «Сравнение средних» и «Общая линейная модель» [3-5], не представляет трудностей. Особенности алгоритмов множественного сравнения средних с помощью этих процедур, основанных на методах дисперсионного анализа, рассмотрим ниже на примере производства сельскохозяйственной продукции в регионах Центральной России.

Задача формулируется следующим образом: выполнить сравнение средних показателей производства организациями АПК регионов ЦФО такого важного вида сельскохозяйственной продукции, как скота и птицы на убой, с целью оценки степени самообеспеченности населения мясом.

Эмпирической базой анализа служили данные региональной статистики по производству скота и птицы на убой за пять лет – с 2010 по 2014 гг. [6], пересчитанные к удельному показателю – в расчете на душу населения (таблица).

Таблица – Производство скота и птицы на убой (в убойном весе), кг на человека

Регион	Код	2010	2011	2012	2013	2014
Белгородская обл.	1	515,0	569,3	662,8	758,2	771,6
Брянская обл.	2	69,8	80,1	96,8	116,5	152,4
Владимирская обл.	3	31,7	31,7	35,9	40,0	36,9
Воронежская обл.	4	79,4	87,3	96,1	108,7	92,7
Ивановская обл.	5	22,5	25,8	26,0	24,6	13,8
Калужская обл.	6	54,9	56,8	58,6	68,2	69,5
Костромская обл.	7	33,8	33,2	32,0	29,6	24,3
Курская обл.	8	76,1	78,8	107,8	194,5	263,4
Липецкая обл.	9	129,9	141,9	148,7	174,9	188,3
Московская обл.	10	26,8	28,2	30,6	29,3	25,5
Орловская обл.	11	96,6	92,6	90,7	94,5	107,3
Рязанская обл.	12	46,3	44,3	47,5	42,8	39,6
Смоленская обл.	13	33,5	36,7	38,2	42,7	54,8

Тамбовская обл.	14	61,7	66,8	131,9	179,7	226,7
Тверская обл.	15	43,0	58,1	64,7	60,5	55,3
Тульская обл.	16	49,5	42,9	46,5	46,6	41,0
Ярославская обл.	17	38,5	42,2	44,6	45,6	47,6

Уже беглый просмотр данных таблицы и диаграмм Тьюки показывает, что временные изменения удельного показателя, как правило, значительно меньше пространственных: высокая динамика производства скота и птицы на убой характерна лишь для Липецкой, Брянской, Курской и Тамбовской областей. Это позволяет сравнивать средние показатели по территориям, рассматривая данные по годам как независимые региональные подвыборки [7].

Исторически первым методом множественных сравнений был метод группирования выборок с наименее значимой разницей *LSD*, предложенный Р. Фишером в 1935 г. [8] и известный как безопасный *t*-тест (*protected t-test method*). На первом этапе этого метода при помощи критерия Фишера проверяется гипотеза о равенстве всех средних – в рассматриваемом примере, средних для всех регионов, кроме Белгородской области как безусловного лидера в ЦФО. В обеих процедурах – «Сравнение средних» и «Общая линейная модель», этот этап дает идентичные результаты: значение критерия Фишера $F=11,2$ статистически значимо на уровне не хуже 0,0005, и гипотеза о равенстве всех средних отвергается.

На следующем шаге обеих процедур проверяются гипотезы равенства средних соседних подвыборок с помощью *t*-критерия, но при многократном применении критерия Стьюдента происходит неконтролируемое увеличение вероятности ошибок 1-го рода и, как следствие, реализуется небезопасный метод *LSD* (*unprotected LSD method*) [9]. Так, вызывает сомнение значимость различия средних для Брянской, Калужской и Тверской областей, выявленная по критерию *LSD* на уровне доверия 95%. Действительно, ужесточение уровня надежности до 99% приводит к более реальному результату сравнения – различия средних по этим регионам становятся статистически незначимыми. Ужесточение уровня надежности с традиционных 95% до 99% оправдано и тем, что в рассматриваемом примере вряд ли верна гипотеза однородности дисперсии показателя по региональным выборкам.

Учитывая эту особенность, дальнейшие сравнения средних проводили по критериям Дункана и Шеффе на уровне доверия 99%. В случае применения критерия Шеффе, в отличие от критерия Дункана, результатом сравнения средних является не только состав однородных подгрупп сравниваемых средних, но и данные попарного сравнения – уровни значимости разностей и их доверительные интервалы. Имеется и другое отличие – критерий Шеффе заметно консервативнее и, как следствие, однородные подгруппы регионов перекрываются сильнее – см. рисунок (для полноты

представления регионов ЦФО на нем приведены данные и по «выбросу» – Белгородской области).

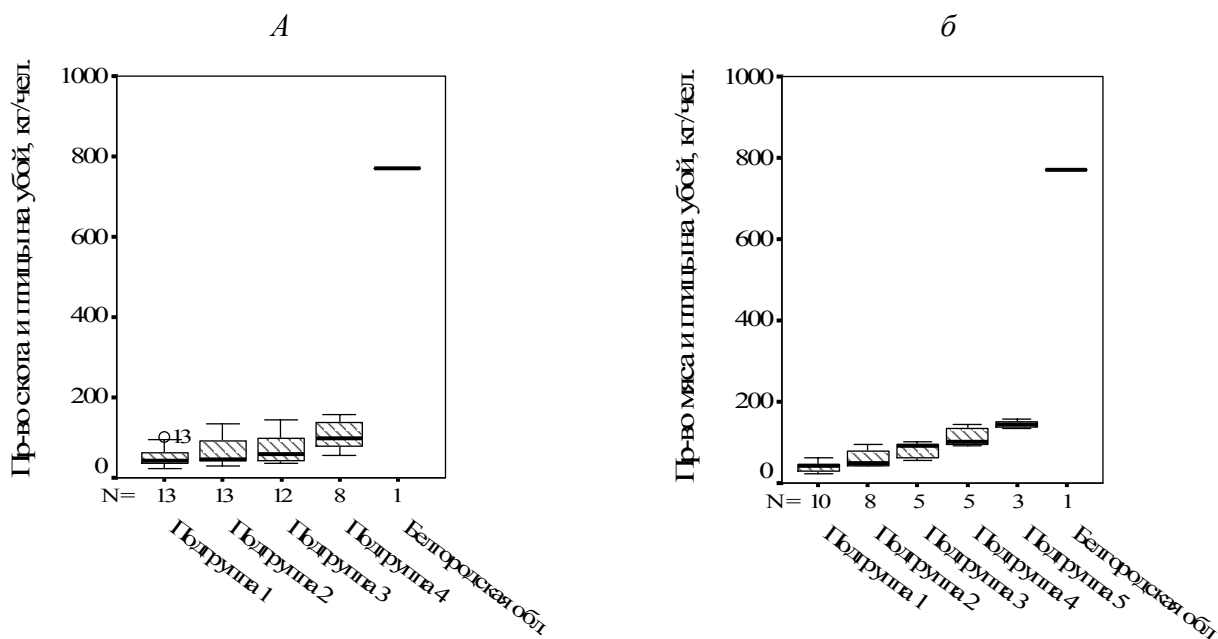


Рисунок – Однородные подгруппы регионов ЦФО по критерию Шеффе (а) и Дункана (б)

Так, если по критерию Дункана Орловская область являющаяся лидером в подгруппе 2 с производством скота и птицы на убой в среднем за пятилетие 96,3 кг на душу населения, в то же время присутствует в подгруппах 3 и 4, то по критерию Шеффе эта область присутствует также, наряду с аутсайдерами, и в первой подгруппе регионов ЦФО. Различается и количественный состав подгрупп: если по критерию Дункана лидирующая подгруппа 5 объединяет три региона – Липецкую, Курскую и Тамбовскую области с показателями от 156,7 до 133,4 кг на душу населения, то по критерию Шеффе в лидирующую подгруппу 4 можно также отнести еще пять регионов – Брянскую, Орловскую, Воронежскую, Калужскую и Тверскую области, а диапазон показателя расширяется вплоть до 56,3 кг на человека.

Уместно напомнить, что получаемые в результате применения тех или иных критериев статистические выводы не следует понимать как обоснование различия средних. Здесь следует руководствоваться следующим замечанием видного отечественного селекционера, генетика и биометрика Н.А. Плохинского [2, стр. 21]: если критерий показывает, что разность достоверна, т.е. в выборочном исследовании оказалась разница между выборочными показателями, то такая же разница по знаку будет и между соответствующими генеральными параметрами, и этот вывод может быть обобщен и перенесен на соответствующие генеральные совокупности. Если же разность между выборочными показателями недостоверна, то это значит, что не получено никакого определенного ответа о разности

между соответствующими генеральными параметрами – ни того, что сравниваемые генеральные совокупности имеют разные средние, ни того, что эти генеральные совокупности по данному параметру не различаются.

Отсюда следует, что совершенно недопустимо задачу сравнения нескольких средних решать методами, применимыми только для сравнения двух средних. Такой способ сравнения может привести к ошибочному выводу – сравнивая в один прием лишь две средние, мы лишаем себя информации об остальных средних: то, что невозможно на двух случайных выборках, может стать вполне возможным на большем их числе (чем больше проводится испытаний, тем более редкие события могут произойти). Кроме того, незначимые различия, накапливаясь от пары к паре, могут стать вполне значимыми, хотя мы этого не замечаем.

ЛИТЕРАТУРА

1. Доспехов Б.А. Методика полевого опыта (с основами статистической обработки результатов исследований). – 5-е изд., доп. и перераб. – М.: Агропромиздат, 1985. – 351 с.
2. Плохинский Н.А. Алгоритмы биометрии / Под ред. Б.В. Гнеденко. 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Изд-во МГУ, 1980. – 150 с.
3. SPSS Base 8.0 для Windows. Руководство по применению. Перевод– Copyright 1998 СПСС Русь. – 397 с.
4. Бююль А., Цёфель П. SPSS: Искусство обработки информации. Анализ статистических данных и восстановление скрытых закономерностей. – СПб.: ООО «ДиаСофтЮП», 2002. – 608 с.
5. Шуметов В.Г., Крюкова О.А. Методология и практика анализа данных в управлении: методы одномерного и многомерного анализа. Монография. – Орел: Изд-во ОФ РАНХиГС, 2013. – 178 с.
6. Регионы России. Социально-экономические показатели. 2015: Стат. сб. / Росстат. – М., 2015. – 1266 с.
7. Шуметов В.Г. Использование эконометрических моделей в анализе пространственно-временных данных // Математика и ее приложения. Экономическое прогнозирование: модели и методы. М-лы междунар. н.-практ. конф. – Воронеж: ООО «Воронежский Центр Новых Технологий и Инноваций», 2011. – С.365-366.
8. Закс Л. Статистическое оценивание. – М.: Статистика, 1976. – 600 с.
9. Метод LSD (Least Significant Difference method). Электронный ресурс. Режим доступа: <http://www.machinelearning.ru/wiki/index.php?title>.

Методика преподавания математики, информатики, физики в школе и ВУЗе

УДК 378.14

ПРИМЕНЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛА ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ФИЗИЧЕСКОЙ ХИМИИ

Ю.В. Абраменкова, ст. преп.

ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»

e-mail: *abramenkovajulia@mail.ru*

В работе рассмотрена методика изучения дифференциала функции двух переменных и его применения при изучении физической химии. Рассмотренные примеры содержат как математические, так и химические пояснения, замечания и особенности изучения данной темы.

Физическая химия относится к одной из ведущих областей естественных наук, которая изучает закономерности химических процессов и физических явлений. В частности, на основе теоретических и экспериментальных методов в физической химии исследуются закономерности протекания и равновесия химических реакций, скорость их протекания, связь с разнообразными физическими процессами (термодинамикой, теплопередачей, электрическими явлениями и другие). А знание особенностей протекания химических реакций дает возможность предсказывать и управлять важнейшими процессами химической технологии: синтез и окисление аммиака, получение этанола из природного газа, контактное получение серной кислоты и другие. Поэтому знание физической химии для будущих химиков-теоретиков, химиков-технологов, химиков-исследователей довольно велико.

Современное состояние физической химии характеризуется тем, что в ней используется весь спектр результатов, полученных в математических дисциплинах: математический анализ, теория функций одной и нескольких переменных, дифференциальной и аналитической геометрии, алгебре и др. Выпускники химических факультетов образовательных организаций высшего профессионального образования должны не только знать основные законы физической химии, но и уметь выводить многочисленные формулы и проводить необходимую трактовку параметров и переменных на языке физической химии.

Как правило, во многих учебниках и пособиях по физической химии дается краткий вывод формул и законов, зачастую, без комментариев и

ссылок на математические методы и приемы. Поэтому читателю и особенно студенту приходится самостоятельно выполнять необходимые преобразования, что приводит к неэффективным затратам времени.

Данная статья посвящена методике изучения основных результатов теории функций нескольких переменных (на примере темы дифференциала функции двух переменных), а также использованию данных результатов при изучении физической химии.

Рассмотрим непрерывно-дифференцируемую функцию $F(x, y)$ и множество точек (x, y) , для которых

$$F(x, y) = 0 \quad ((x, y) \in R^2). \quad (1)$$

Пусть x_0, y_0 удовлетворяют (1), то есть (x_0, y_0) принадлежит области дифференцируемости $F(x, y)$. Согласно теореме о неявных функциях, если выполняется условие

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0,$$

то в окрестности (x_0, y_0) существует непрерывная и дифференцируемая функция $y = y(x)$, для которой $y_0 = y(x_0)$.

Для активизации деятельности студентов необходимо привести примеры вычисления частных производных $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$, например следующие:

$$F_1 = x^3 - y - xy = 0, \quad F_2 = x^2 - y^2 - 1 = 0, \quad F_3 = x^4 - y^4 - xy = 0, \quad F_4 = xy - 1 = 0.$$

Затем поставить задачу вычисления указанных производных в точках (x_0, y_0) (для F_1 в точке $x = 0, y = 0$; для F_2 в точке $x = 1, y = 0$; для F_3 в точке $x = 0, y = 0$; для F_4 в точке $x = 1, y = 1$).

Для применения теоремы о неявной функции целесообразно рассмотреть простой пример: $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$. То есть показать, что в силу $\frac{\partial F}{\partial y}(0, 1) = 2 \neq 0$, $\frac{\partial F}{\partial y}(1, 0) = 0$ в окрестности точки $(0, 1)$ можно найти функцию $y = y(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$, а в окрестности точки $(1, 0)$ нет.

В качестве примера использования дифференциала функции двух переменных найдем соотношение между частными производными параметров состояния [1]. Рассмотрим соотношения между частными производными параметров состояния при наличии уравнения состояния

$$f(v, \rho, T) = 0,$$

где v – объем, ρ – давление, T – температура.

Решив это уравнение относительно v , получаем:

$$v = f_1(\rho, T), \quad (2)$$

то есть при постоянстве состава и массы объем фазы является функцией давления и температуры.

Найдем полный дифференциал полученной функции двух переменных:

$$dv = \left(\frac{\partial v}{\partial \rho} \right)_T d\rho + \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_\rho dT.$$

Выведем условие постоянства объема ($v = const$). Тогда

$$\left(\frac{\partial v}{\partial \rho} \right)_T d\rho + \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_\rho dT = 0. \quad (3)$$

Проведя некоторые преобразования (разделив уравнение (3) на dT и учитывая, что производная $\frac{\partial \rho}{\partial T}$ является частной производной в связи с условием постоянства объема), получим:

$$\left(\frac{\partial v}{\partial \rho} \right)_T \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_v \left(\frac{\partial T}{\partial v} \right)_\rho = -1. \quad (3)$$

При рассмотрении приведенного примера, для более полного понимания студентами данной теории, следует пояснить, что уравнение (2) имеет место при $\frac{\partial f_1}{\partial v} \neq 0$ и доказать, что индексы у производных означают, что они вычисляются при фиксированных значениях T, v, ρ .

Также следует отметить, что полученное уравнение (3) имеет общий характер: аналогичные выражения могут быть получены для любых трех переменных, которые связаны функциональной зависимостью [1].

Поскольку дифференциал функции играет важную роль в описании физических процессов (например, при рассмотрении первого закона термодинамики), то следует определить дифференциал функции $F(x, y)$ рассмотреть отдельно. Покажем способ введения полного дифференциала для функции из (1). Если для уравнения (1) выполняется условие $\frac{\partial F_1}{\partial y}$, то из (1) можно определить $y = y(x)$ (формула имеет смысл в окрестности некоторой точки). Внесем эту функцию в уравнение (1):

$$F(x, y(x)) = 0. \quad (4)$$

Так как (4) представляет собой тождество по x , то и производная по x равна нулю:

$$\frac{dF}{dx} = \frac{\partial F(x, y(x))}{\partial x} + \frac{\partial F(x, y(x))}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0.$$

Отсюда получим:

$$dF = \frac{\partial F(x, y(x))}{\partial x} dx + \frac{\partial F(x, y(x))}{\partial y} dy = 0. \quad (5)$$

Левая часть (5) называется полным дифференциалом функции:

$$dF(x, y) = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy. \quad (6)$$

Очевидно, что $\frac{\partial F}{\partial x}$ вычисляется при $y = const$, а $\frac{\partial F}{\partial y}$ – при $x = const$.

При таком изложении темы студент более полно будет понимать особенности применения функции двух переменных.

Наличие формулы (6) позволяет дать определение особой точки уравнения (1). Для нее выполняются условия:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$$

Примеров использования дифференциалов функции в физической химии достаточно много. Рассмотрим уравнения полных дифференциалов энтропии как функции переменных V, T или ρ, T [2]:

$$dS = \frac{1}{T} dV + \frac{C_v}{T} dT, \quad dS = \frac{h}{T} d\rho + \frac{C_\rho}{T} dT, \quad (7)$$

где S – энтропия, ρ – давление, V – объем газа, C_v, C_ρ – параметры теплоемкости. Коэффициенты уравнений (7) являются частными производными энтропии по соответствующим переменным.

Из (7), используя результаты первого закона термодинамики к идеальным газам, получим:

$$S_2 - S_1 = R \ln \frac{V_2}{V_1} + C_v \ln \frac{T_2}{T_1}, \quad S_2 - S_1 = -R \ln \frac{\rho_2}{\rho_1} + C_\rho \ln \frac{T_2}{T_1}.$$

Наряду с дифференциалами функций в физической химии применяются вариации функций. На первом этапе для студентов важна постановка проблемы и полученные формулы. В физической химии принято теплоту и работу в циклическом процессе принимать как сумму (интеграл) бесконечно малых (элементарных) теплот δQ и бесконечно малых (элементарных) работ δA . Причем начальный и конечный пределы интегрирования совпадают. Обозначая через $dV = \delta Q - \delta A$ для элементарного термодинамического процесса:

$$\int_1^2 dV = \int_1^2 \delta Q - \int_1^2 \delta A, \quad (8)$$

$$\oint dV = \oint \delta Q - \oint \delta A = 0 \quad (\text{для кругового процесса})$$

Первый закон термодинамики гласит: приращение внутренней энергии системы при переходе ее из одного состояния в другое не зависит от

пути процесса, а зависит только от начального и конечного состояния системы. Следствием (8) является вывод о том, что в изолированной системе $\delta Q = 0$, $\delta A = 0$ и поэтому $V = const$, то есть внутренняя энергия изолированной системы постоянна. Важным обстоятельством использования символов δQ и δA является свойство: δQ и δA не являются дифференциалами функций Q и A . Дальнейшее изучение применения рассмотренной темы выходит за рамки данной статьи в силу значительного объема результатов дифференцирования и интегрирования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Курс физической химии / Я. И. Герасимов и др.; под ред. Я. И. Герасимова. – 2-е изд., испр. – Москва: Изд-во «Химия», 1970. – Т. 1. – 592 с.
2. Стромберг А. Г. Физическая химия: Учеб. для хим. спец. вузов / А. Г. Стромберг, Д. П. Семченко; Под ред. А. Г. Стромберга. – 5-е изд., испр. – М.: Высш. шк., 2003. – 527 с.

УДК 004.021

ОСОБЕННОСТИ ПРЕПОДАВАНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ «АЛГОРИТМИЗАЦИЯ И ПРОГРАММИРОВАНИЕ» В ГУМАНИТАРНОМ ВУЗЕ

А.А. Аксютин, к.ф.-м.н., доц.

ФГБОУ ВО «Орловский государственный институт культуры»
e-mail: aksyukhin@yandex.ru

В работе изучаются особенности преподавания дисциплины «Алгоритмизация и программирование» обучающимся гуманитарного вуза.

Изучение дисциплин естественнонаучного цикла обучающимися гуманитарных вузов, в том числе институтов культуры, сопряжено с немалыми трудностями. Косвенным подтверждением этому может служить статистика проведения Интернет-экзамена в сфере высшего образования, по дисциплинам «Математика» и «Информатика». Анализ этих результатов, проведенный в работе [1], показал, что обучающиеся лишь 27% учебных заведений освоили материал этих дисциплин на 100%, а в 15% вузов менее 50% обучающихся справились с заданиями.

Известно, что в 2011 года все вузы РФ перешли на двухуровневую подготовку специалистов «бакалавриат – магистратура», где в оценку качества подготовки обучающихся положен компетентностный подход. Со-

гласно федеральному государственному стандарту высшего профессионального образования 3-го поколения [2] дисциплина «Алгоритмизация и программирование» в подготовке бакалавров по направлению 034700 – «Документоведение и архивоведение» выбирается вузом и относится к дисциплинам вариативной части математического, естественнонаучного и программно-информационного цикла. С 2015 года в ФГОС ВО 3+ [3] по подготовке бакалавров направления 46.03.02 – «Документоведение и архивоведение» вообще нет упоминания о дисциплине «Алгоритмизация и программирование», но вузы вводят её самостоятельно, относя к обязательным дисциплинам вариативной части учебного плана. Согласно этому плану дисциплина «Алгоритмизация и программирование» изучается обучающимися на втором курсе, после усвоения материала и сдачи испытаний по дисциплинам «Математика», «Информатика», «Учебно-компьютерный практикум», совместно с дисциплиной «Информационная безопасность и защита информации» и базируется на этих дисциплинах. Поэтому усвоение материала курса «Алгоритмизация и программирование» напрямую зависит от степени освоения обучающимися дисциплин математического, естественнонаучного и программно-информационного цикла, а также некоторых дисциплин профессионального цикла.

При учебном планировании и при построении учебного курса по дисциплине «Алгоритмизация и программирование» в гуманитарном вузе возникает ряд вопросов.

Вопрос 1. Для чего студентам-гуманитариям вообще нужно изучать программирование?

Очевидно, что процессы глобализации и компьютеризации современного общества стали необратимыми. Но силами одних IT-специалистов, создающих и поддерживающих в своем развитии множество компьютерных программ, которые востребованы современными потребителями, уже не обойтись. Постепенно в обществе начинает доминировать следующая система взглядов: «программировать, или хотя бы составлять алгоритмы решения задач профессиональной области, должен каждый сотрудник, где бы он ни работал». То есть навыки алгоритмического мышления нужны всем. Сегодня найти специалисту гуманитарной сферы нужную программу, реализующую какой-либо профессиональный алгоритм очень сложно, даже во всемирной сети Интернет. Это вызвано рядом причин: 1) реализовать алгоритм профессионального характера может только программист с высокой квалификацией и опытом, требующий за свою работу высокую плату. Причем, здесь потребуется не просто программист, а человек, имеющий познания в области искусственного интеллекта, владеющего инженерией знаний и способный понять рассуждения эксперта в той области знаний, в которой создается компьютерная программа. 2) Большинство компьютерных программ предметной области являются коммерческими и достаточно дорогими, что исключает их широкое рас-

пространение. 3) Все эти программы создаются для конкретного заказчика, и поэтому их функциональность ограничена требованиями, предъявляемыми к программе этим заказчиком. 4) Специфические алгоритмы предметной сферы не востребованы так широко, как обычные «офисные» программы, а значит найти их в сети Интернет гораздо сложнее, чем другие прикладные программные пакеты или востребованные утилиты.

Все это позволяет сделать вывод о том, что молодому специалисту – выпускнику гуманитарного вуза придется самому разработать свою программу для реализации нужной функциональности или, по необходимости, переработать чужой алгоритм. По крайней мере, он должен уметь донести до программиста-профессионала алгоритм решения своей профессиональной задачи. Это будет и проще, и дешевле, чем найти «универсальную» программу, реализующую все требуемые ему функции. Вот для чего обучающиеся гуманитарного вуза должны изучать алгоритмизацию и программирование. В Орловском государственном институте культуры обучающимися, изучающими «Алгоритмизацию и программирование», являются бакалавры по направлениям подготовки 46.03.02 – «Документоведение и архивоведение» (профиль: «Документоведение и документационное обеспечение управления») и 51.03.06 – «Библиотечно-информационная деятельность» (профиль: «Технология автоматизированных библиотечно-информационных ресурсов»).

Вопрос 2. Как же организовать эффективное усвоение материала по дисциплине «Алгоритмизация и программирование» студентами-бакалаврами гуманитарного вуза? Для ответа на этот вопрос рассмотрим ряд предложений и рекомендаций.

1. Так как половина учебных часов, запланированных на изучение дисциплины бакалавром, является его самостоятельной работой, то преподавателю дисциплины необходимо правильно организовать самостоятельную работу обучающегося: составить задания для самостоятельной работы; подобрать темы докладов и рефератов; тщательно спланировать немногочисленные занятия КСР. Педагогу следует провести обзор современных учебных и методических пособий и электронных ресурсов сети Интернет по предмету, чтобы рекомендовать наиболее доступные из них обучающимся в качестве источников для самостоятельной работы.

2. ФГОС ВО требует внедрение в процесс подготовки бакалавров и магистров интерактивных форм обучения. И это не случайно. Существует определенная закономерность обучения, описанная американскими исследователями Р. Карникау и Ф. Макэлроу [4]: человек помнит 10% прочитанного; 20% – услышанного; 30% – увиденного; 50% – увиденного и услышанного; 80% – того, что говорит сам; 90% – того, до чего дошел в деятельности. А смысл интерактивного обучения состоит как раз в том, что практически все обучающиеся во время обучения оказываются вовлеченными в процесс познания, они имеют возможность понимать и рефлекти-

ровать по поводу того, что они знают и думают. Совместная деятельность обучающихся в процессе познания, освоения учебного материала означает, что каждый вносит свой особый индивидуальный вклад, идет обмен знаниями, идеями, способами деятельности. Причем, происходить это должно в атмосфере доброжелательности и взаимной поддержки, что позволяет не только получать новое знание, но и развивает саму познавательную деятельность, переводит ее на более высокие формы кооперации и сотрудничества.

При изучении дисциплины «Алгоритмизация и программирование» для эффективного усвоения сложного материала преподаватель может внедрять следующие интерактивные подходы:

- творческие задания;
- работа в малых группах;
- использование общественных ресурсов (приглашение специалиста, экскурсии в организации и учреждения);
- социальные проекты и другие внеаудиторные методы обучения (соревнования, интервью, фильмы, спектакли, выставки);
- изучение и закрепление нового материала по средствам интерактивных лекций, работы с наглядными пособиями, видео- и аудиоматериалами;
- использование педагогических приемов «обучающийся в роли преподавателя», «каждый учит каждого», «сократический диалог» и др.;
- тренинги и тестирование (в т.ч. электронное);
- разрешение проблем («дерево решений», «мозговой штурм», «анализ казусов», «переговоры и медиация» и др.);
- дистанционное обучение (особенно при организации самостоятельной работы обучающихся).

3. Известно, что основным в процессе программирования является разработка алгоритма решения задачи предметной сферы специалиста. И это один из наиболее сложных этапов решения задачи на ЭВМ. Целесообразно в начале обучения программированию не привязываться к какому-либо языку программирования, а разрабатывать алгоритмы без записи на языке программирования высокого уровня. Это может быть, например, алгоритмический язык академика А.П. Ершова, или язык блок-схем. После такой алгоритмизации студентам-бакалаврам будет проще перейти к записи того же алгоритма на любом языке программирования.

На начальном этапе обучения алгоритмизации и программированию преподавателю необходимо прибегать к использованию наглядных примеров решения задач предметной области обучаемого. Для этого педагог-программист должен прибегать к помощи преподавателей-специалистов профессиональной сферы. Например, для обучения программированию обучающихся направления подготовки 46.03.02 – «Документоведение и архивоведение» преподавателю-программисту необходимы консультации

таких специалистов как документовед, архивист, специалист по кадровому делопроизводству и др.

4. Эффективное обучение алгоритмизации и программированию студентов-гуманитариев возможно при наличии соответствующих профилю учебных материалов: учебно-методических комплексов, учебных и методических пособий, справочников и энциклопедий, тестовых материалов. Поиск и внедрение в учебный процесс таких материалов, созданных сторонними авторами и разработчиками, в значительной степени затруднены по ряду причин. Поэтому их разработкой должны заниматься сами преподаватели дисциплины «Алгоритмизация и программирование», обобщая свои усилия. Примерами таких профильно-ориентированных учебных материалов по программированию могут служить источники [5-8], разработанные на кафедре информатики и документоведения ОГИК.

Преподавание дисциплины «Алгоритмизация и программирование» обучающимся гуманитарного вуза – это сложный, творческий процесс, требующий от преподавателя профессионализма в области программирования, кругозора в предметной сфере обучаемого, а также поиска и внедрения в учебный процесс новых форм интерактивного обучения, инновационных педагогических приемов и методик.

Список сокращений и аббревиатур

ВО – высшее образование.

КСР – контроль самостоятельной работы.

ОГИК – Орловский государственный институт культуры.

ФГОС – Федеральный государственный стандарт.

ЭВМ – электронная вычислительная машина (компьютер).

ЛИТЕРАТУРА

1. Аксютин А.А. Дисциплина «Алгоритмизация и программирование» в гуманитарном вузе: особенности методики преподавания // Многоуровневая система подготовки специалистов в сфере искусств и культуры: традиции и инновации. Материалы всероссийской (с международным участием) научно-практической конференции. (г. Орел, 22-23.03.2012 г.) / гл. ред. Н.А. Паршиков. – Орел: ОГИИК, 2012. С. 142-146.
2. Федеральный государственный образовательный стандарт высшего профессионального образования по направлению подготовки 034700 Документоведение и архивоведение (квалификация (степень) «бакалавр») // Министерство образования и науки РФ. М.: 2009. – 21 с.
3. Федеральный государственный образовательный стандарт высшего образования по направлению подготовки 46.03.02 Документоведение и архивоведение (уровень высшего образования «бакалавр») // Министерство образования и науки РФ. М.: 2015. – 25 с.
4. Karnikau R., McElroy F. Communication for the Safety Professional. Chicago 1975.

5. Вычислительная техника и программирование: электрон. учеб.-метод. комплекс для студ. специальности 032001 - Документоведение и документационное обеспечение управления / сост. А.А. Аксюхин. [Электронный ресурс]. - Режим доступа: CD. Зарегистрирован в Депозитарии электронных изданий ФГУП НТЦ «Информрегистр» в 2007 г., номер гос. регистрации 0320702576. – Орел: Орловский гос. ин-т искусств и культуры, 2007-2012 гг. – 80 Мб.
6. Аксюхин А.А. Программирование в документационном обеспечении управления: учеб.-метод. пособ. для студ. специальности 032001 - Документоведение и документационное обеспечение управления / А.А. Аксюхин. – Орел: Орловский гос. ин-т искусств и культуры, 2009. – 101 с.
7. Алгоритмизация и программирование: электрон. учеб.-метод. комплекс для бакалавров вузов, обучающихся по направлениям 034700.62 – «Документоведение и архивоведение», профиль «Документационное обеспечение управления»; 071900.62 - Библиотечно-информационная деятельность, профиль «Технология автоматизированных библиотечно-информационных ресурсов» / сост. А.А. Аксюхин. [Электронный ресурс]. - Режим доступа: CD. Зарегистрирован в Депозитарии электронных изданий ФГУП НТЦ «Информрегистр» 19.05.2014 г., номер гос. регистрации 0321400534. – Орел: Орловский гос. ин-т искусств и культуры, 2014-2016 гг. – 624 Мб.
8. Информационные технологии в культурно-образовательной сфере: монография / Аксюхин А.А., Грибков Д.Н., Деденева А.С., Кондракова Л.М., Мекшенева Ж.В., Морозова Н.В. Под общ. ред. А.С. Деденевой. – Орел: Орловский государственный институт искусств и культуры, 2014. – 173 с.

УДК 51(072.3)+004(072.3)

ДИНАМИЧЕСКИЕ КОМПЬЮТЕРНЫЕ МОДЕЛИ КАК ОСНОВА ФОРМИРОВАНИЯ СТЕРЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПОНЯТИЙ

А.Н. Бакуров, к.п.н.

МБОУ СОШ №37, г. Орел

Т.М. Бакурова, к.э.н.

ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет им. И.С. Тургенева»

Как сказал великий Карл Гаусс: «Математика – наука не столько для ушей, сколько для глаз». В настоящее время остро встала проблема формализма в знаниях учащихся по геометрии, что является следствием приоритета логической составляющей в преподавании стереометрии. Школь-

ное обучение пришло к тому, что изучение одного из самых интересных школьных предметов вызывает у учеников непреодолимые трудности. Академик А.Д. Александров подчеркивал: «Во всяком подлинно геометрическом предложении, будь то аксиома, теорема или определение, неразрывно присутствуют два элемента: наглядная картина и строгая формулировка, строгий логический вывод. Там, где нет одного из них, нет и подлинной геометрии» [1].

Наиболее эффективным средством в преподавании стереометрии, связывающим строгую логику и наглядные представления, являются динамические компьютерные модели. На сегодняшний день их можно считать вершиной эволюции стереометрического чертежа. Её стадии хорошо прослеживаются на страницах учебников стереометрии от монохромных изображений стереометрических конструкций до красочных иллюстраций. Анализ научно-теоретических положений использования средств ИКТ в процессе обучения стереометрии, дает понимание о необходимости применения в обучении именно динамических компьютерных моделей, обладающих возможностью демонстрации пространственных конструкций. Применение динамических компьютерных моделей в сочетании с традиционными методами обучения образует гармоничную систему обучения стереометрии.

А.Д. Александров во введении к своему учебнику геометрии особо выделяет следующий факт: «Основное правило состоит в том, что, встречаясь с определением, теоремой или задачей, нужно прежде всего представить и понять их содержание: представить наглядно, нарисовать или, еще лучше, хотя и труднее, вообразить то, о чем идет речь, и одновременно понять, как это точно выражается. Ничего не старайся заучить, не нарисовав, не вообразив того, о чем идет речь, не поняв, как это наглядное представление выражается в формулировке определения, теоремы или задачи» [2].

Значит, задача методики обучения школьников стереометрии состоит в создании и использовании динамических компьютерных моделей, наглядно представляющих формулировки определений, теорем и способствующих обучению решению задач [3].

Каждая динамическая компьютерная модель, выполняет определенные дидактические функции. Одни модели являются основой для формирования понятий, другие – подводят к формулировке и доказательству теорем, третьи – помогают в освоении методов решения задач, а все вместе они направлены на достижение стержневых целей изучения стереометрии.

В курсе стереометрии можно выделить его ведущие составляющие: понятия, теоремы, задачи и основные методы их решения. Перейдем к рассмотрению динамических компьютерных моделей, являющихся основой для формирования основных понятий курса стереометрии. Для формирования понятия тетраэдра воспользуемся динамической компьютерной моделью тетраэдра, изображенной на рисунке 1а.

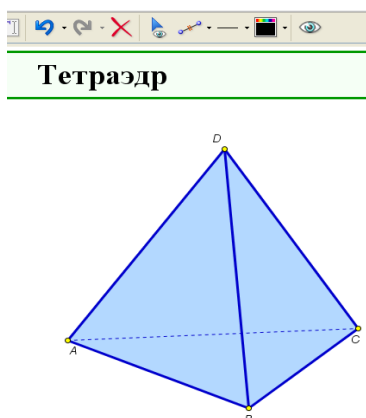


Рисунок 1а – Модель тетраэдра

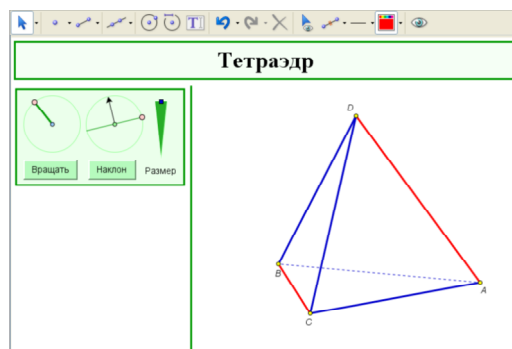


Рисунок 1б – Модель тетраэдра с выделенной парой скрещивающихся ребер

Работа с динамической компьютерной моделью тетраэдра способствует улучшению восприятия за счет используемого красочного оформления и возможности выйти за пределы плоскости. Данная модель изоморфно отражает основные свойства тетраэдра как геометрического тела: количество граней, ребер, вершин, схему соединения (например, в каждой вершине сходятся по три ребра). Возможности инструментов «Вращение», «Наклон» и «размер» динамической компьютерной модели позволяют продемонстрировать школьникам изменение положения тетраэдра в пространстве, упрощая тем самым процесс его восприятия.

Наличие инструментов управления пространственным положением тела позволяет получить школьнику первые навыки исследовательской деятельности в работе с «трехмерными» математическими моделями. А также служит хорошей наглядной основой для создания пространственного образа тетраэдра, поскольку процесс создания пространственного образа направлен, прежде всего, на его восприятие и сохранение в памяти.

При этом работу ученика, сосредоточенную на изменении положения тела в пространстве, нельзя назвать простым созерцанием, это осуществление деятельности, направленной на познание объекта. В процессе такой работы с тетраэдром важно задавать учащимся вопросы, выявляющие суть данного тела. Например: Посчитайте количество ребер, вершин и граней тетраэдра? Вычислите величину, равную сумме числа граней и вершин, и вычтите число ребер? Перечислите ребра тетраэдра, выходящие из вершины A , B и D ? Сколько ребер сходится в каждой вершине тетраэдра? Перечислите ребра тетраэдра, принадлежащие грани (ADB) ? Какие фигуры представляют собой грани тетраэдра? Какой грани принадлежит ребро AB ? Назовите точку, в которой ребро AD пересекает плоскость (ABC) ? Назовите точку, в которой ребро AC пересекает плоскость (ABD) ?

В процессе изменения пространственного положения тетраэдра, в памяти школьника формируется богатый набор различных изображений тетраэдра (рисунок 2), школьник получает опыт по выбору пространственного положения тела, так необходимый при решении стереометрических задач.

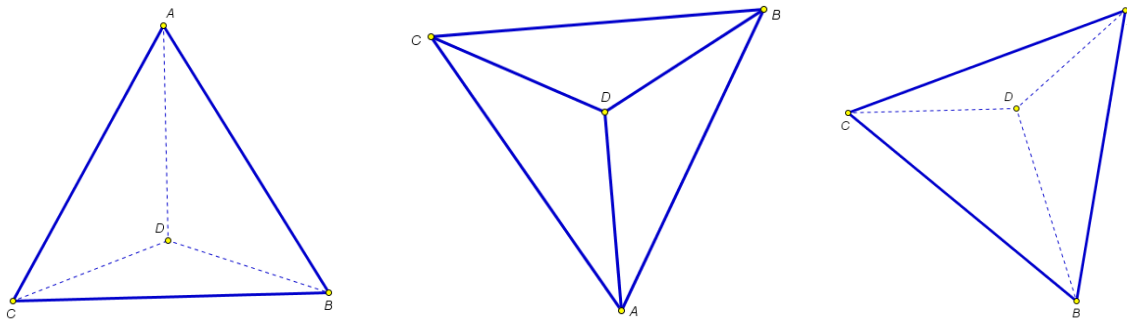


Рисунок 2 – Различные изображения тетраэдра

Этот факт является преодолением ещё одной трудности традиционных средств обучения, связанной с ограниченностью представления тел: исчезает проблема стереотипов в отношении боковых ребер и основания тетраэдра. Возможность каждого ребенка зафиксировать удобное для его восприятия положение тела в пространстве реализует требования индивидуализации и дифференциации обучения. Простота выполнения манипуляций показывает преимущества таких моделей перед другими компьютерными средствами трехмерного моделирования.

При решении задач, направленных на формирование понятия тетраэдра эффективнее будет воспользоваться его динамической компьютерной моделью, отражающей только каркас фигуры (рисунок 1б). «Увидеть» устройство тетраэдра, изучая, например, деревянный брусок, не так легко. Изоморфизм каркасной динамической компьютерной модели тетраэдра здесь «налицо». Неоспорима также и простота восприятия: невидимые ребра и вершины, которые ученику нелегко себе представить, рассматривая сплошной деревянный брусок, на этой модели хорошо видны. Таким образом, динамическая компьютерная модель, отражающая каркас тетраэдра изоморфно, воспроизводит изучаемые в данный момент свойства и оказывается проще для восприятия, чем сплошной деревянный брусок или статичный чертеж, а, следовательно, и нагляднее.

Например, при работе над содержанием понятия тетраэдра важным представляется вопрос о парах скрещивающихся ребер тетраэдра. Во многих учебниках тетраэдр используется для иллюстрации понятий, связанных со взаимным расположением прямых и плоскостей в пространстве, т.е. на ранних этапах изучения стереометрии. Анализ современных подходов к изучению геометрии показал, что уровень сформированности пространственных представлений на этом этапе обучения низок. В результате чего при работе с чертежом к данной задаче многие ученики делают неправильный вывод о том, что, например, прямые, содержащие ребра AD и BC тетраэдра, на рисунке 3 – пересекающиеся. В то же время при работе с динамической компьютерной моделью тетраэдра, приводящей к изменению положения тела в пространстве, таких трудностей удастся избежать. Выделение цветом пар скрещивающихся ребер (рисунок 1б), например AD и BC , помогает еще и ответить на вопрос, почему это так? Прямая, содержащая ребро BC , лежит в плоскости (ABC) , а прямая, содержащая ребро AD , пере-

секает эту плоскость в точке A , не принадлежащей прямой BC .

Следует заметить, что для обеспечения процесса обучения стереометрии необходим набор динамических компьютерных моделей основных стереометрических тел (пирамиды, призмы и т.д.) и их возможных вариаций. Они помогут учителю в разработке системы различных упражнений, а учащимся – в освоении основных понятий, теорем и решении задач.

Итак, использование динамических компьютерных моделей в процессе формирования стереометрических понятий способствует:

- осознанному овладению новым понятием, формированию его образа и конкретного представления за счет предъявления подвижных зрительных образов динамических компьютерных моделей;
- выявлению существенных свойств понятия;
- усвоению существенных свойств понятия;
- усвоению терминологии, символики, определения понятия, созданию правильного соотношения между внутренним содержанием понятия и его внешним выражением;
- формированию пространственных образов и умению оперировать ими;
- формированию осознанного применения понятия в простейших, достаточно характерных ситуациях;
- включению понятия в различные связи и логические отношения с другими понятиями;
- формированию умения применять понятия в нестандартных ситуациях.

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров, А.Д. Диалектика геометрии /А.Д. Александров // Математика в школе. – №1. – 1986. – С. 12–19.
2. Александров, А.Д. Геометрия: учеб. для учащихся 10 кл. с углубл. изуч. математики / А.Д. Александров, А.Л. Вернер, В.И. Рыжик. – М.: Просвещение, 1999. – 238 с.
3. Бакуров, А.Н. Динамические компьютерные модели как средство совершенствования процесса обучения стереометрии в средней школе: автореф. дис. ... канд. пед. наук: 13.00.02 / Бакуров Александр Николаевич. – Орёл, 2013. – 23 с.

РЕАЛИЗАЦИЯ СТАНДАРТОВ ВТОРОГО ПОКОЛЕНИЯ ООО. АНАЛИЗ СЦЕНАРИЯ УРОКА АЛГЕБРЫ В 8 КЛАССЕ

М.А. Балашова

ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет им. И.С. Тургенева»
e-mail: *missis.morscay@yandex.ru*

В статье рассматривается конспект урока, разработанный по требованиям ФГОС, где ученику не дается готовый материал, а создается такая ситуация, где школьник должен: сам задать и ответить на вопрос: «Зачем ему это надо??»; сталкиваясь с проблемой, самостоятельно находить пути её решения. Учитель на уроке выступает в роли помощника, организуя ту или иную деятельность.

Ключевые слова: универсальные учебные действия (УУД): личностные, регулятивные, познавательные, коммуникативные квадратные уравнения, неполные квадратные уравнения.

Прокомментируем урок усвоения новых знаний по теме «**Определение квадратного уравнения. Неполные квадратные уравнения**». (8 класс).

Цели урока определим так:

- ввести определение квадратного уравнения;

Научить:

- определять по внешнему виду уравнения, является ли оно квадратным или нет;
- указывать значения коэффициентов a , b и c ;
- отличать полные квадратные уравнения от неполных;
- определять тип неполного квадратного уравнения и выбирать алгоритм его решения;
- решать неполные квадратные уравнения;
- проводить классификацию уравнений по общему виду;
- закрепить и систематизировать полученные знания в ходе выполнения упражнений;
- способствовать развитию памяти, логического мышления;
- формировать навыки взаимоконтроля, самоконтроля и коммуникативные компетенции;
- уметь работать в группах и парах, развивая взаимовыручку.

Ход урока:

I. Организационный момент.

Цель: обеспечить положительный эмоциональный настрой.

II. Актуализация опорных знаний. Проверка домашнего задания.

Основная цель этого этапа: установить правильность и осознанность выполнения домашнего задания всеми учащимися, выявить пробелы, провес-

ти их коррекцию; актуализировать знания о решение линейных уравнений; зафиксировать индивидуальное затруднение в деятельности, демонстрирующее на личностно-значимом уровне недостаточность имеющихся знаний.

На слайде первое задание [2].

Решить, если возможно, уравнения и выписать в отдельные группы те, которые вы можете свести к одному и тому же виду:

1. $5x = -60$

6. $4x^2 + 9x = 0$

2. $5x^2 - 9x + 4 = 0$

7. $x^2 + 3x - 10 = 0$

3. $3x^2 - 12 = 0$

8. $3y + y^2 - 8 = y^2 + y + 6$

4. $5x^2 = 0$

9. $x^2 - 6x = -2(5 + 3x)$

5. $6(t - 1) = 9,4 - 1,7t$

10. $(2x - 3)^2 - 2x(4 + 2x) = 49$

В домашней работе вам нужно было решить, если возможно, уравнения и выписать в отдельные группы те, которые вы можете свести к одному и тому же виду. У кого получилось две группы? Выпишите номера уравнений, вошедших в них.

- Кто сможет записать на доске этот **одинаковый** (общий) вид каждого из уравнений?
- Как называются такие уравнения? (Линейные).
- Запишите общий вид линейного уравнения. ($ax+b=0$). (На слайде)
- В чём же отличие данных уравнений?
- Как можно их свести к общему виду линейного уравнения?
- Посмотрите, на слайде показаны получившиеся линейные уравнения.

$$5x+60=0$$

$$2y-14=0$$

$$7,7t-15,4=0$$

$$-20x-40=0$$

- Назовите, чему равны в них коэффициенты а и b.
- Какие тождественные преобразования вам пришлось совершать при решении уравнений?
- Итак, четыре различных уравнения путём тождественных преобразований можно свести к одному общему виду линейного уравнения.
- Теперь проверьте домашнее задание. Корни уравнений, которые вы могли решить - на слайде.

Слайд.

$$x=-12$$

$$y=7$$

$$t=2$$

$$x=-2$$

Физминутка для глаз (работа с электронным тренажёром для глаз).

Прокомментируем II этап урока с точки зрения формирования универсальных учебных действий (УУД) [1]

общепопознавательные: общеучебные осознанное построение речевого высказывания;

регулятивные: контроль в форме сличения результата с заданным эталоном с целью обнаружения отклонений и отличий от эталона, коррекция.

III. Восприятие и первичное закрепление нового материала.

Цель: организовать коммуникативное взаимодействие, в ходе которого выявляется и фиксируется отличительное свойство задания вызвавшего затруднений в учебной деятельности; согласовать с учащимися цель и тему урока; обеспечить восприятие, осмысление и первичное запоминания знаний и способов действий, связей и отношений в объекте изучения [5].

- Сегодня вы убедитесь, что и оставшиеся шесть уравнений – это уравнения одного вида. Попробуйте дать им имя. (Квадратные уравнения).

- Запишите в тетрадях тему сегодняшнего урока: «Определение квадратного уравнения. Неполные квадратные уравнения»

- Зная тему урока, попробуйте определить цели урока.

- Итак, перед вами сегодня на уроке стоят следующие **цели**:

- 1) выучить определение квадратного уравнения,
- 2) научиться определять по виду уравнения является ли оно квадратным,
- 3) научиться определять вид квадратного уравнения – полное оно или неполное,
- 4) научиться выбирать алгоритм решения неполного квадратного уравнения. (На слайде).

Значение квадратного уравнения в науке трудно переоценить. Умение решать его не раз выручит вас не только на уроках алгебры или геометрии, но и на уроках физики, химии и даже информатики.

- Вернёмся к уравнениям, которые вы не смогли решить дома.

(Слайд демонстрирует их.)

- Что в них общего? (Слайд с пунктами и выделением общих элементов.)

- А чем отличаются данные уравнения?

- Математики договорились обозначать коэффициент при x^2 через a , при x – через b , число – через c . Уравнения можно будет представить в виде: $ax^2+bx+c=0$. (Слайд.)

- А как вы думаете, любыми ли числами могут быть a , b и c ? a не может быть 0.

- Итак, определение квадратного уравнения.

1 уровень: с помощью учебника с.111 §8 п.21

2 уровень: без учебника дополнить

Квадратным уравнением называется уравнение вида $ax^2+bx+c=0$, где:

1) x - ,

2) a, b, c - ,

3) a .

3 уровень: самостоятельно дать определение квадратного уравнения.

Проверка.

Записывается на доске.

- Запишите определение квадратного уравнения в тетради.
- Коэффициенты a , b и c носят специальные названия: a – первый коэффициент, b – второй коэффициент, c – свободный член.

- На следующем слайде представлено несколько уравнений. Выпишите из них те, которые являются квадратными.

- | | |
|-------------------------------------|-----------------------------------|
| 1) $3,7x^2 - 5x + 1 = 0,$ | 5) $\frac{7}{x^2} + 3x - 45 = 0,$ |
| 2) $48x^2 - x^3 - 9 = 0,$ | 6) $7x^2 - 13 = 0,$ |
| 3) $1 - 12x = 0,$ | 7) $x^2\sqrt{3} + 12x - 1 = 0.$ |
| 4) $2,1x^2 + 2x - \frac{2}{3} = 0,$ | |

- Какие уравнения называются квадратными?

Слайд:

- | | |
|-------------------------------------|------------------------------|
| 1) $3,7x^2 - 5x + 1 = 0,$ | 5) $-x^2 - 8x + 1 = 0,$ |
| 2) $-x^2 = 0,$ | 6) $-10 + 3x + x^2 = 0,$ |
| 3) $2,1x^2 - \frac{2}{3} + 2x = 0,$ | 7) $\frac{x^2}{7} - 3x = 0.$ |
| 4) $7x^2 - 13 = 0,$ | |

Для каждого предложенного уравнения выпишите значения коэффициентов a , b , c .

-Проверьте друг у друга ответы и исправьте ошибки, если такие будут. (*Слайд демонстрирует ответы.*)

- Придумайте и запишите каждое своё квадратное уравнение. Для коэффициентов используйте любые допустимые значения.

-Проверьте друг у друга выполненное задание.

- Коэффициенты b и c , в отличие от a , могут быть и нулями. Как можно назвать получающиеся уравнения? (Неполными).

- **Запишем в тетрадях: если в квадратном уравнении хотя бы один из коэффициентов b или c равен нулю, то такое уравнение называется неполным квадратным уравнением.**

- Что значит «хотя бы один»? (Один или два).

- Давайте рассмотрим все возможные варианты.

1 уровень: с помощью учебника с.112 выписывает виды неполных квадратных уравнений [2].

2 уровень: Неполные квадратные уравнения бывают трёх видов:

- 1) $ax^2 + c = 0$, где $b=0$, $c \neq 0$
- 2) $ax^2 + bx = 0$, где $b \neq 0$, $c=0$
- 3) $ax^2 + bx + c = 0$, где $c=0$ и $b=0$

3 уровень: самостоятельно записывают виды неполных квадратных уравнений.

Проверка: соответствующий слайд с неполными квадратными уравнениями.

Слайд:

- | | |
|---------------------------|-------------------------|
| 1) $3,7x^2 - 5x + 1 = 0,$ | 5) $-x^2 - 8x + 1 = 0,$ |
| 2) $-x^2 = 0,$ | |

$$3) 2,1x^2 - \frac{2}{3} + 2x = 0,$$

$$4) 7x^2 - 13 = 0,$$

$$6) -10 + 3x + x^2 = 0,$$

$$7) \frac{x^2}{7} - 3x = 0.$$

- Подумайте, а не сталкивались ли мы уже с неполными квадратными уравнениями? (Да, в домашней работе). Теперь нам осталось только записать решение таких уравнений в общем виде.

- Уравнение $ax^2+c=0$, где $c \neq 0$.

Прочитайте текст на стр. 112 [2].

Решим неполные уравнения, которые встретились у вас в домашней работе.

Записывается решение и проговаривается алгоритм.

$$3x^2 - 12 = 0$$

Ответ: $x_1=2, x_2=-2$.

$$x^2-6x=-2(5+3x)$$

$$x^2+10=0$$

Перенесем свободный член в правую часть

$$x^2=-10$$

Так как квадрат числа не может быть отрицательным число, то получившееся уравнение не имеет корней.

Ответ: корней нет.

Слайд демонстрирует алгоритм решения.

- Решите неполное квадратное уравнение, применяя данный алгоритм:

- I - 515(а), II - 515(д). Теперь проверьте свои решения, сравнив с решениями на слайде.

Слайд.

- Следующий вид неполного квадратного уравнения: $ax^2+bx=0$, где $b \neq 0$.

Из домашней работы:

$$4x^2 + 9x = 0$$

Записывается решение и проговаривается алгоритм [3].

Слайд демонстрирует алгоритм.

- Сколько корней всегда будет в таком уравнении?

- Причём один из них обязательно какой?

- Решите неполное квадратное уравнение, применяя этот алгоритм:

- I - 517(а), II - 517(б). Теперь проверьте свои решения, сравнив с решениями на слайде, исправив ошибки.

Слайд.

- Последний тип неполного квадратного уравнения $ax^2=0$.

Из домашней работы:

$$5x^2 = 0$$

Записывается решение и проговаривается алгоритм.

Слайд демонстрирует алгоритм [4].

Физминутка

Урок построен в диалоговой форме, вопросы учителя «побуждают» учащихся к осознанному построению речевых высказываний (формирование общеучебных УД) [6] Формируются и **общепознавательные УД: общеучебные** – это самостоятельное выделение и формулирование учебной цели; информационный поиск; знаково-символические действия **логические** – сравнение, классификация, анализ, выделение существенного, обобщение; *постановка и решения проблем.*

Регулятивные:

целеполагание - постановка учебной задачи на основе соотнесения того, что уже известно и усвоено учащимися, и того, что ещё неизвестно;

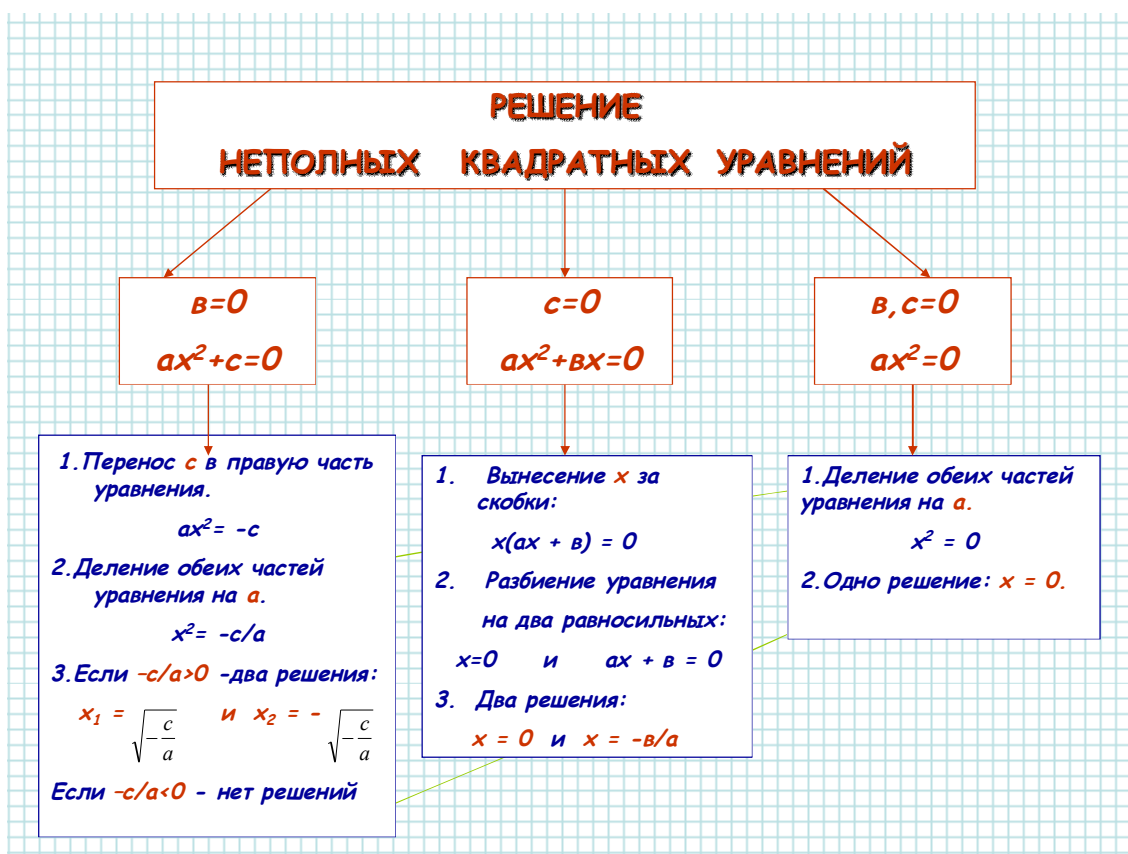
контроль в форме сличения результата с заданным эталоном с целью обнаружения отклонений и отличий от эталона,

коррекция.

Коммуникативные.

IV. Закрепление изученного материала

Первично-закрепляющее повторение целесообразно провести, используя схему (Слайд.)



- Как вы думаете, для чего надо чётко различать друг от друга виды неполных квадратных уравнений? (Чтобы применять нужный алгоритм).

- Работа в группах (1 ряд-1 группа, 2-2 группа, 3-3 группа) и выберите, какой алгоритм нужно применить для решения каждого из предложен-

ных уравнений: 1-й, 2-й или 3-й. А один представитель от группы наклеит напротив каждого уравнения листочек соответствующего цвета: синий – 1, жёлтый – 2, зелёный – 3.

Слайд:

1) $7x^2-13=0$,

2) $7k-14k^2=0$,

3) $12g^2=0$,

4) $5y^2-4y=0$,

5) $2h+h^2=0$,

$35-x^2=0$.

Решите по одному уравнению из каждого вида на выбор (сравнивают решения уравнений на слайде).

УУД[6]: общепознавательные: общеучебные – выбор наиболее эффективных способов решения задач в зависимости от условий;

логические: выбор оснований и критериев для сравнения, классификации, анализ.

Регулятивные: контроль в форме сличения результата с заданным эталоном с целью обнаружения отклонений и отличий от эталона, **коррекция, оценка.**

Коммуникативные: построение речевых высказываний.

V. Подведение итогов урока. Рефлексия:

Цель этого этапа урока – дать анализ и оценку успешности достижения цели и наметить перспективу последующей работы; поблагодарить одноклассников, которые помогли получить хорошие результаты урока.

- Давайте проверим, достигли вы целей сегодняшнего урока?
- Какое уравнение называется квадратным?
- Какое квадратное уравнение называется неполным?
- Какие алгоритмы решения неполных квадратных уравнений Вы знаете?
- Достигли вы поставленных целей?
- А чему вы должны будете научиться на ближайших уроках? (Решать полные квадратные уравнения).
- Заметим, что фронтальная форма работы на уроке способствовала формированию коммуникативных качеств

VI. Обсуждение домашнего задания:

П 21; №№ 518; 519.

ЛИТЕРАТУРА

1. Асмолов А.Г. Формирование универсальных учебных действий в основной школе: от действия к мысли. Система заданий: пособие для учителя/под ред. А.Г. Асмолова. – М.: Просвещение, 2010. – 159 с.
2. Алгебра: учеб. для 8 кл. общеобразоват. учреждений/ Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, С.Б. Суворова; под ред. С. А. Теляковского. – М.: Просвещение, 2008.

3. Боженкова Л.И. Планиметрия в таблицах, предписаниях, УУД. Учебные материалы. – М., Калуга: КГУ им. К.Э.Циолковского, 2010. – 48 с.
4. Боженкова Л.И. Алгебра в таблицах. Учебные материалы. изд. 2-е испр. и доп. – М., Калуга: КГУ им. К.Э.Циолковского, 2012. – 56 с.
5. Жохов В.И. Дидактические материалы по алгебре для 8 класса/ В.И. Жохов, Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк. – М.: Просвещение, 2008.
6. Федеральный государственный образовательный стандарт общего основного образования / М-во образования и науки Рос. Федерации. – М.: Просвещение, 2011. – 48 с.

УДК 51(072.3)

ФОРМИРОВАНИЕ УНИВЕРСАЛЬНЫХ УЧЕБНЫХ ДЕЙСТВИЙ НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ В СРЕДНЕЙ ШКОЛЕ

М.А. Балашова

ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет им. И.С. Тургенева»
e-mail: *missis.morscay@yandex.ru*

Одно из важнейших познавательных универсальных учебных действий (УУД) – умение решать проблемы и задачи. В статье рассматривается проблема реализации ФГОС общего образования в части формирования у учащихся универсальных учебных действий, виды УУД. Разнообразные средства обучения, которые используются для формирования УУД. Так же в статье рассматриваются примеры математических задач, которые можно использовать при формировании УУД.

Ключевые слова: универсальные учебные действия (УУД): личностные, регулятивные, познавательные, знаково-символические, коммуникативные, средства обучения, математическая задача.

В настоящее время в общеобразовательной школе реализуется личностно-ориентированный подход, призванный обеспечить формирование всесторонне развитой личности. Если ФГОС первого поколения основного и среднего образования в качестве результата школьного обучения рассматривали определенную систему знаний, умений и навыков (ЗУНов), которую приобретали учащиеся, то ФГОС второго поколения ориентированы на личностные, метапредметные, предметные результаты, которые обеспечиваются формированием универсальных учебных действий (УУД).

Концепция УУД разработана под руководством А.Г. Асмолова, в которой универсальных учебных действия определяются как «обобщенные действия, порождающие широкую ориентацию учащихся в различных предметных областях познания и мотивацию к обучению» [1]. В модели Программы развития универсальных учебных действий выделяют

ся: личностные, регулятивные, познавательные, знаково-символические и коммуникативные универсальные учебные действия. Авторы модели Программы развития универсальных учебных действий подчеркивают, что развитие УУД решающим образом зависит от способа построения содержания учебных предметов.

В широком значении термин «Универсальные учебные действия» означает умение учиться, т.е. способность субъекта к саморазвитию и самосовершенствованию путем сознательного и активного присвоения нового социального опыта. В более узком (собственно психолого-педагогическом) значении этот термин можно определить как совокупность способов действия учащегося (а также связанных с ними навыков учебной работы), обеспечивающих самостоятельное усвоение новых знаний, формирование умений, включая организацию этого процесса [2, с. 155].

Универсальные учебные действия – это совокупность действий учащегося, обеспечивающих его культурную идентичность, социальную компетентность, толерантность, способность к самостоятельному усвоению новых знаний и умений, включая организацию этого процесса, а также способность субъекта к саморазвитию и самосовершенствованию путем сознательного и активного присвоения нового социального опыта [4].

Для успешного освоения учащимися образовательных программ необходимо сформировать у учащихся следующие **виды УУД** [3, с. 7]:

Личностные – система ценностных ориентаций школьника, отражающих личностные смыслы, мотивы, отношения к различным сферам окружающего мира. Личностные УДД выражаются формулами «Я и природа», «Я и другие люди», «Я и общество», «Я и познание», «Я и я». В обучении математике это смыслообразование.

Регулятивные – отражают способность обучающегося строить учебно-познавательную деятельность, учитывая все ее компоненты (цель, мотив, прогноз, средства, контроль, оценка).

В обучении математике это целеполагание, планирование, прогнозирование, контроль, оценка, алгоритмизация действий.

Познавательные – система способов познания окружающего мира, построение самостоятельного процесса поиска, исследования и совокупность операций по обработке, систематизации, обобщению и использованию полученной информации.

При обучении математике выделяют **познавательные общеучебные** – моделирование, выбор наиболее эффективного способа решения задач; **познавательные логические** – анализ, синтез, сравнение, группировка, причинно-следственные связи, логические рассуждения, доказательства, практические действия.

Коммуникативные – способность обучающегося осуществлять коммуникативную деятельность, использования правил общения в кон-

кретных учебных и внеурочных ситуациях; самостоятельная организация речевой деятельности в устной и письменной форме

В обучении математике это использование средств языка и речи для получения информации, участия в продуктивном диалоге, самовыражение, монологические высказывания разного типа.

Формирование универсальных учебных действий в процессе обучения математике предполагает использование разнообразных средств обучения, перечислим некоторые из них.

Личностные УУД

- Участие в проектах.
- Выполнение творческих заданий.
- Мысленное воспроизведение ситуации.
- Самооценка событий происходящих на уроке.
- Дневники достижений

Регулятивные УУД:

- Нахождение преднамеренных ошибок.
- Поиск информации в предложенных источниках.
- Взаимоконтроль
- Игра-соревнование «Найди ошибку».

Познавательные УУД:

- Упорядочивание
- «Цепочки»
- Составление опорных логических схем.
- Работа с разного вида таблицами
- Составление и распознавание диаграмм
- Поиск «лишнего» (условия задачи, понятия).

Коммуникативные УУД:

- Составь задание однокласснику.
- Оцени работу товарища.
- Работа в группах
- «расскажи ...», «объясни...», «прокомментируй...» и другое .

Основным средством обучения математике являются задачи. Учителю следует помнить о том, что всякая решаемая школьниками задача должна учить их умению ориентироваться в различных проблемных ситуациях, обогащать их знания и опыт, учить их математической деятельности.

Приведем примеры математических задач, рассматриваемых при формировании УУД.

Личностные УУД

Задача 1. Сколько существует маршрутов, посещения трех памятных мест: Кузнечики, Подольские курсанты, памятник Виктору Талалихину в парке Культуры и отдыха. Есть ли среди этих памятников летчик-истребитель герой Советского союза?

Задача была предложена ученикам города Подольска [4]. Аналогичные задачи может составить на основе местного исторического или краеведческого материала.

Решение задачи предполагает патриотическое воспитание, отношение к социальным ценностям: формирование интереса к культуре и истории родного края

Задача 2. Калорийность рациона школьника 11-15 лет должна составлять 2500 ккал. На завтрак приходится 35%, на обед 40%, на полдник 10%, на ужин 15%. Найдите количество калорий на каждый прием пищи школьника.

Дополнительное задание: составьте меню на 1 день, учитывая калорийность на этикетке каждого продукта, или воспользовавшись таблицей калорийности продуктов, рекомендованных для питания школьников (на стенде в кабинете математике).

При решении задачи происходит знакомство с рациональным режимом питания, формирование навыков здорового питания.

3. Образец дневника достижений (распечатка для каждого учащегося в начале урока) – ученик сам оценивает свою деятельность.

этап урока	устный счет	домашнее задание	первичное закрепление нового материала	итог урока	рефлексия
моя оценка					

Регулятивные УУД

1. Найди ошибку, которая допущена при решении уравнения:

$$4(x - 3) = x + 2(x + 5)$$

$$4x - 12 = x + 2x + 2$$

$$4x - x - 2x = 2 + 12$$

$$x = 14 \quad \text{Ответ: } 14$$

Анализ решения уравнения. Учащийся должен вспомнить все правила, которые используются в ходе его решения.

2. Правильно прочитай сведения о древнегреческом ученом, записанное без пробелов

Приблизительные годы жизни Пифагора – **570 – 500 года до н.э.** Родился будущий математик на острове Самос, позже переехал в Кротон. Именно там Пифагор начал заниматься наукой, проводить исследования и хитроумные вычисления...

3. Определить цель учебной деятельности, составить план решения проблемы творческого характера, редактирование текста.

4. Решение различных текстовых задач максимально способствует развитию универсальных учебных действий на уроках математики

Задача 3. Для приготовления сдобного дрожжевого теста нужно взять муку, маргарин, молоко и сахар в пропорции 5:1:3:1 соответственно (личностные УДД: проявление внимания, интереса, желания больше узнать). Сколько сахара (в килограммах) необходимо взять для приготовления 4 кг теста? (создание проблемной ситуации учителем и формирование проблемы учащимися)

Решение

Регулятивные УУД

Пусть масса одной части x кг,

Тогда для теста потребуется $5x$ кг муки; x кг маргарина; $3x$ кг молока; x кг сахара (поиск решения проблемы учащимися)

По условию задачи надо приготовить 4 кг теста. Составим уравнение:

$$5x + x + 3x + x = 4$$

$$10x = 4$$

$$x = 0,4 \text{ (кг) (решение задачи)}$$

проверка: $5 \cdot 0,4 + 0,4 + 3 \cdot 0,4 + 0,4 = 4$ (определение успешности выполнения своей работы)

Ответ: 0,4 кг сахара необходимо

В заключение приведем некоторые методические рекомендации по развитию УУД.

Личностные УУД

- помните, что каждый ребенок индивидуален. Помогите найти в нем его индивидуальные личные особенности;
- в жизни ребенка, в каком бы возрасте он ни был взрослый это тот человек, который открывает ему реальный мир. Помогите раскрыть и развить в каждом ученике его сильные и позитивные личные качества и умения;
- организуя учебную деятельность по математике, учитывайте индивидуально-психологические особенности каждого ученика. Используйте данные психологической диагностики (сотрудничество со школьным психологом).

Регулятивные УУД

- научите учащегося контролировать свою речь при выражении своей точки зрения по заданной теме;
- научите учащегося контролировать, выполнять свои действия по заданному плану, образцу, правилу, алгоритму;
- помогите учащемуся научиться адекватно оценивать выполненную им работу. Научите исправлять ошибки.

Познавательные УУД

- чтобы учащиеся усвоили материал по математике, научите их мыслить системно (например – основное понятие (правило) – пример – значение материала)

- постарайтесь помочь учащимся овладеть наиболее продуктивными методами учебно-познавательной деятельности, учите их учиться;
- найдите способ, чтобы учащиеся применяли свои знания на практике;
- развивайте творческое мышление, познавательные задачи решайте несколькими способами, чаще предлагайте учащимся творческие задания

Коммуникативные УУД

- создавайте условия, чтобы учащиеся чаще высказывали свои мысли, мнения, задавали вопросы;
- не бойтесь «нестандартных уроков», внедряйте различные виды современных технологий в образовательный процесс, различные виды и формы работы на уроке;
- изучайте и учитывайте жизненный опыт учащихся, их интересы, особенности развития.

ЛИТЕРАТУРА

1. Асмолов А.Г., Бурменская Г.В., Володарская И.В., Карабанова О.А., Салмина Н.Г., Молчанов С.В. Пособие для учителя. – 2-е изд. – М.: Просвещение, 2011. – 159 с. - (Стандарты второго поколения).
2. Педагогический словарь: Для студентов высших и средних педагогических учебных заведений. Под ред. Коджаспиров А. Ю. – М.: Издательский центр «Академия», 2000. – 176 с.
3. Примерные программы по учебным предметам. Математика. 5-9 классы [Текст] : проект / А. А. Кузнецов, М. В. Рыжаков, А. М. Кондаков [и др.]. – 2-е изд. – М.: Просвещение, 2010. – 67 с. – (Стандарты второго поколения).
4. Шегаев И.С. Способы формирования универсальных учебных действий в рамках реализации ФГОС (начальная школа) [Текст] / И. С. Шегаев, А. В. Шегаева // Молодой ученый. – 2013. №10. – С. 550-552.

МЕТОДИЧЕСКИЕ ПРИЕМЫ РЕАЛИЗАЦИИ ЛИЧНОСТНО-ОРИЕНТИРОВАННОГО ОБУЧЕНИЯ В СРЕДЕ КОМПЬЮТЕРНОГО КЛАССА

Я.А. Ваграменко, д.т.н., проф.

ФГБНУ «Институт управления образованием РАО»

e-mail: *ininforao@gmail.com*

А.Н. Афонин, аспирант

ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет им. И.С. Тургенева»

e-mail: *Afoninalexsandr@mail.ru*

Личностно-ориентированное обучение это процесс, направленный на формирование человека, как личности. То есть на его развитие в тех направлениях деятельности, в которых он делает определенные успехи.

Главная цель личностно-ориентированного подхода к обучению, по мнению Е. Толкачевой, является «развитие личностных способности учеников к образованию. Ученику предоставляется активная позиция для того, чтобы самостоятельно управлять своим обучением: формировать цели, планировать выполнение заданий, формулировать принципы оценки и так далее» [2].

В среде компьютерного класса повышается степень взаимодействия между человеком и компьютером. Другими словами в классическую схему обучения от учителя к учащемуся «вклинивается» компьютер. Такое обучение можно называть личностно-компьютерным обучением.

В своей книге [3] И.С. Якиманская считает что «реализация личностно ориентированной системы обучения требует смены «векторов» в педагогике: от обучения, как нормативно построенного процесса (и в этом смысле жестко регламентированного), к учению, как индивидуальной деятельности школьника, её коррекции и педагогической поддержки» [3]. Поэтому задача учителя в такой среде, грамотно построить процесс взаимодействия студента и компьютера, так сказать задать «вектор» деятельности учащегося.

В современном мире человек, умеющий работать с персональным компьютером, может преуспевать в обучении, в сравнении с людьми, у которых этот навык не развит. Никто не отменяет в среде компьютерного класса классическую классно-урочную систему обучения, она является на текущий момент общепринятым лидером образования. Но включение третьего звена (компьютера) в цепь учитель-ученик, открывает массу возможностей, как одной, так и другой стороне. Среди всех задач учителя в образовательной среде компьютерного класса можно определить и такую как, поиск и реализация методов взаимодействия ученик-компьютер. Под компьютером следует рассматривать все возможности информационного взаимодействия, им обеспечиваемые, в том числе и возможности исполь-

зования сети интернет, а также информационные ресурсы предоставляемые компьютером.

В процессе работы за персональным компьютером учащегося, как личность, интересуют всесторонние вопросы использования последнего, а именно: посещение социальных сетей, поиск информации, просмотр видеороликов, общение в чатах и другое. Эта проблема очень остро стоит перед современным учителем, который проводит свои уроки в компьютерном классе. Определим следующие пути ее решения:

- отключение сети Интернет или локальной сети, и как следствие потеря преимуществ использования сетевой инфраструктуры такого кабинета;
- использование специализированного программного обеспечения – это финансовое вложение, которое может позволить себе не каждая школа;
- морально-нравственная форма взаимодействия в виде беседы с учащимися, которых, как правило, не хватает на долгое время, и их вновь и вновь приходится нравоучать.

Поэтому наиболее успешный результат принесет поочередное использование комплекса всех вышеперечисленных мер.

Но, безусловно, возможности среды компьютерного класса в процессе обучения позволяют разрабатывать и применять на практике новые эффективные методы обучения. Одно из направлений использования персонального компьютера и в частности Интернет, является посещение различных Интернет-площадок по продажам. Это Ebay.com, Aliexpress.com, Avito.ru и многие другие сайты.

Рассмотрим реализацию личностно-ориентированного обучения в среде компьютерного класса на примере фрагмента урока, с использованием таких сайтов. Дисциплина называется «Архитектура компьютерных систем», тема урока «Материнские платы». После изучения материала, посвященного устройству, характеристикам и видам материнских плат, проводилось закрепление на специализированной программе, позволяющей виртуально сконфигурировать системный блок персонального компьютера.

Следующим элементом урока стало посещение Интернет-магазина по продаже цифровой и компьютерной техники dns-shop.ru. В частности в разделе «Комплектующие для ПК» можно было подобрать и изучить характеристики и особенности, как самих материнских плат, так и различных компонентов, которые подключаются непосредственно к материнским платам. По предложенной схеме, учащиеся смогли в таком виртуальном магазине заказать себе в корзину все комплектующие, необходимые для конфигурирования сборки персонального компьютера или его основного компонента материнской платы. Каждый студент смог самостоятельно собрать конфигурацию персонального компьютера на указанную сумму денег.

И последний штрих этапа закрепления такого урока был реализован через посещение электронных торговых площадок, на которых осуществлялся подбор комплектующих для персональных компьютеров нашего класса. Каждый студент апгрейдил(модернизировал) тот персональный компьютер, за которым работал. Как результат, ребенок работал в той среде, которую он с удовольствием посетил бы и без указания преподавателя, а еще и развивался в нужном направлении, ведь чтобы правильно подобрать нужный элемент персонального компьютера нужно внимательно изучить все его характеристики, установить специальную программу и определить эти характеристики. Провести сравнительный анализ и сделать соответствующие выводы. Осуществить непосредственный поиск и подбор компонентов.

Внесем небольшое пояснение к использованию электронных торговых площадок в учебном процессе. Дело в том, что развитие персональных компьютеров происходит настолько быстро, что компоненты компьютеров наших школьных классов уже не продают в современных магазинах. Они как правило, почти все морально и физически устарели. Но на электронных торговых площадках можно найти все необходимое. Занимаясь подобной деятельностью, учащиеся ничего не приобретают на таких сайтах, но описание нужных товаров позволяет сформировать четкое представление о взаимодействии всех компонентов компьютерной системы.

Подводя итог такого урока можно отметить следующие преимущества:

- каждый студент использовал повседневно среду для обучения;
- очевидна, личностная направленность обучения, так как каждый апгрейдил свой персональный компьютер;
- не сильно сложная практическая задача потребовала от учащихся не только выполнения определенного алгоритма действий, но и заставила их самих развиваться и самообразовываться.

По мнению Е.С Полата в книге [1] в личностно-ориентированном обучении приоритетными направлениями деятельности учащихся являются «самостоятельное приобретение знаний» и особенно «применение полученных знаний» [1, с. 115]. Подводя итог, можно с уверенностью сказать, что в процессе обучения на данном уроке, главные задачи личностно-ориентированного обучения были достигнуты.

В современных условиях не всем образовательным учреждениям представляется возможным обеспечить, практическую базу для сборки персональных компьютеров. Использование в процессе обучения подобных технологий расширяет возможности не только среды компьютерного класса или личностно-ориентированного обучения, но и позволяет эффективно подменять реальную образовательную среду виртуальной.

ЛИТЕРАТУРА

1. Полат Е.С., Бухаркина М.Ю., Моисеева М.В., Петров А.Е. Новые педагогические и информационные технологии в системе образования. Учебное пособие для студентов педагогических вузов и системы повышения квалификации педагогических кадров. Под ред. Е.С.Полат. – М.: Издательский центр «Академия», 1999. - 224 с.
2. Толкачева Е. Как создать среду для личностно-ориентированного обучения. [Электронный ресурс]//newtonew.com[сайт]. (дата обращения: 31.10.2016) URL:<https://newtonew.com/discussions/learner-first-way>
3. Якиманская И.С. Личностно-ориентированное обучение в современной школе. – М.: Сентябрь, 1996. – 96 с.

УДК 378.147

ОСОБЕННОСТИ ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ОСНОВ КРИПТОГРАФИИ ПРИ РЕАЛИЗАЦИИ МЕЖПРЕДМЕТНЫХ СВЯЗЕЙ В ВЕДОМСТВЕННЫХ ВУЗАХ

О.Ю. Данилова, к.ф.-м.н., доц.

Воронежский институт МВД России

e-mail: danilova_olga@hotmail.com

С.А. Телкова, к.п.н., доц.

Воронежский институт МВД России

e-mail: tsa76@inbox.ru

В статье рассматривается вопрос преподавания математических основ криптографии при реализации межпредметных связей дисциплин математического и естественнонаучного циклов с профессиональными дисциплинами и дисциплинами специализации, преподаваемых курсантам технических специальностей образовательных организаций МВД России.

В настоящее время российское образование выдвигает повышенные требования к качеству профессиональной подготовки инженера – сотрудника органов внутренних дел. В современных условиях обучение в образовательных организациях высшего образования происходит по новым Федеральным государственным образовательным стандартам третьего поколения. Для обучающихся технических специальностей основа фундаментальных знаний, применяемых далее в профессиональных дисциплинах и дисциплинах специализации, закладывается при изучении учебных курсов математического и естественнонаучного циклов.

Для оптимизации подготовки в образовательных организациях МВД России курсантов технических специальностей важно определить межпредметные связи и рассмотреть их профессиональную направленность при отборе содержания учебных дисциплин. Межпредметные связи объединяют структурные элементы учебного процесса в единое целое, что способствует повышению его эффективности и качества научно-теоретической и практической подготовки курсантов.

Проблему межпредметных связей рассматривали в своих работах известные ученые и педагоги:

– понятия и классификацию межпредметных связей Г.И. Беленький, И.Д. Зверев, Д.М. Кирюшин, Н.С. Пурышева, Ф.П. Соколова и др.;

– межпредметные связи в области общего, среднего образования, в области профессионально-технического образования - Н.С. Антонов, П.Р. Атутов, С.Я. Батышев, И.Д. Зверев, И.В. Евграфова, Д.М. Кирюшкин, О.Е.Кириченко, К.П. Королева;

– реализации межпредметных связей через построение оптимальной системы прикладных задач и упражнений, через систему лабораторных работ Р.П. Исаева, Н.В. Чхаидзе.

Анализ педагогической литературы показал, что имеется много определений понятия «межпредметные связи», существуют разные подходы к их педагогической оценке и различные классификации. Мы придерживаемся следующего определения межпредметных связей: «Межпредметные связи есть отражение в курсе, построенном с учетом его логической структуры, признаков, понятий, раскрываемых на уроках других дисциплин» [1].

Рассматривая характеристику межпредметных связей по структуре, можно выделить следующие формы связей: по составу, по направлению действия, по способу взаимодействия направляющих элементов (многообразие вариантов связи).

Межпредметные связи по составу показывают, что используется, трансформируется из других дисциплин при изучении конкретных тем.

Исходя из того, что состав межпредметных связей определяется содержанием учебного материала, формируемыми навыками, умениями и мыслительными операциями, то в этом случае следует выделить следующие типы межпредметных связей: содержательные (по фактам, понятиям, законам, теориям, методам наук); операционные (по формируемым навыкам, умениям и мыслительным операциям); методические (по использованию педагогических методов и приемов); организационные (по формам и способам организации учебно-воспитательного процесса) [2].

В своем исследовании мы рассматриваем межпредметные связи дисциплин «Алгебра и геометрия» и «Математические основы криптографии». Выбор связан с тем, что при подготовке специалистов по защите информации алгебра и геометрия относится к базовой части, а математиче-

ские основы криптографии – к дисциплинам специализации математического и естественнонаучного цикла.

Дисциплина «Математические основы криптографии» способствует реализации межпредметных связей математических дисциплин и дисциплин специализации. При этом решаются такие задачи, как изучение

– современных математических методов, используемых в криптографии, иллюстрация их применения на примерах;

– различных криптографических задач; обучение будущих специалистов основным математическим понятиям и методам, необходимым для изучения дисциплин специализации;

– формирование у обучающихся моделирующих умений решать профессиональные задачи с применением математических методов;

– показ возможностей применения математических методов для решения задач криптографии;

– повышение уровня математической подготовки, необходимого для овладения профессиональными дисциплинами, базирующимися на основе математики;

– овладение общими основами современного математического аппарата применительно к криптографии.

Мы выявили те разделы алгебры и геометрии (методы, понятия, умения и навыки), которые необходимы и достаточны обучающемуся для освоения программы «Математические основы криптографии» на требуемом уровне и на этой основе дали рекомендации для уточнения программ и методов преподавания обеих дисциплин.

Разделы дисциплин «Алгебра и геометрия» и «Математические основы криптографии» взяты в соответствии с программой специальности «Информационная безопасность телекоммуникационных систем». В таблице 1 представлены связи между родственными разделами обоих курсов. Они отмечены знаком (+).

Таблица 1 – Связи между основными разделами курсов «Алгебра и геометрия» (строки) и «Математические основы криптографии» (столбцы)

«Математические основы криптографии»	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
«Алгебра и геометрия»										
Основные алгебраические структуры	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
Кольцо целых чисел	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
Матрицы и определители над полем		+								
Системы линейных уравнений над полем		+								
Элементы теории множеств										

Векторная алгебра	+	+	+							
Векторные пространства и линейные операторы	+	+		+						
Комплексные числа										
Многочлены над полем						+			+	+
Прямая на плоскости										
Кривые второго порядка									+	+
Прямая и плоскость в пространстве										
Поверхности второго порядка										

В таблице цифрами обозначены следующие разделы дисциплины «Математические основы криптографии»: 1. Аффинные криптосистемы, 2. Шифрующие матрицы, 3. Криптосистема Диффи-Хеллмана, 4. Криптосистема без передачи ключей, 5. Криптосистема с открытым ключом, 6. Система Рабина, 7. Методы аутентификации, 8. Электронная подпись, 9. Криптосистемы на эллиптических кривых, 10. Цифровая подпись на эллиптических кривых

Разделы дисциплин «Алгебра и геометрия» и «Математические основы криптографии» взяты в соответствии с программой специальности «Информационная безопасность телекоммуникационных систем». В таблице связи между родственными разделами обоих курсов отмечены знаком (+).

Как видно из таблицы, курс «Математические основы криптографии» в достаточной мере использует математический аппарат.

Таким образом, при преподавании дисциплины «Алгебра и геометрия» особое внимание следует уделять темам:

- основные алгебраические структуры;
- кольцо целых чисел;
- матрицы и определители над полем;
- векторная алгебра;
- векторные пространства и линейные операторы;
- кривые второго порядка.

Данные темы широко используются при решении задач криптографии [3,4].

ЛИТЕРАТУРА

1. Евграфова И.В. Межпредметные связи курсов физики и высшей математики в технических вузах Дис. канд. пед. наук: 13.00.02 Санкт-Петербург, 2010.-160 с.

2. Кириченко О.Е. Межпредметные связи курса математики смежных дисциплин в техническом вузе связи как средство профессиональной подготовки студентов Дис.канд. пед. наук: 13. 00.02 - Орел, 2003.-170 с.
3. Думачев В.Н. Математические основы криптографии: учебник // Воронеж: ВИ МВД России. – 2008. – 240 с.
4. Думачев В.Н., Меньших В.В., Телкова С.А. Алгебра и геометрия: учебник // Воронеж: ВИ МВД России. – 2014. – 431 с.

УДК 378

ФОРМИРОВАНИЕ ПРОЦЕДУРНЫХ ЗНАНИЙ КАК СРЕДСТВО ПОВЫШЕНИЯ ПРОДУКТИВНОСТИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ

А.И. Дзундза, д.п.н., проф.

ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»

e-mail: *mian@i.ua*

В.А. Цапов, к.ф.-м.н., доц.

ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»

e-mail: *tsapva@mail.ru*

Целесообразно университетское математическое образование переориентировать на формирование процедурных знаний, учить студентов алгоритмам, схемам логических переходов, методам доказательства.

Молодых людей, рожденных в XXI веке, в научно-педагогической литературе называют поколением Z, «цифровыми» или «электронными» детьми. Психологи утверждают, что у цифрового поколения имеются значительные специфические особенности функционирования памяти. Представители цифрового поколения неохотно запоминают содержание той или иной информации, для них привычнее и удобнее запомнить способ получения этой информации в Интернете. Преподаватели констатируют, что современные студенты «не знают формул». При этом студенты достаточно быстро находят в Интернете любую справочную информацию (хотя воспринимают эту информацию преимущественно на сенсорном уровне). Задача преподавателей – научить разумно комбинировать «содержательное» обучение и «информационное», сочетать аналитически-цифровое и сенсорное восприятие. Заметим, что, во-первых, всегда существует опасность «отключения сетевого рубильника» по тем или иным техническим причинам. А, во-вторых, чтобы создавать программные сервисы, автор должен изучить соответствующие теории, методы, подходы, идеи, накопленные социо-культурным опытом человечества.

Мы, безусловно, можем, пользуясь своим авторитетом попытаться заставить студентов учить наизусть материалы лекций, учебников, с последующей проверкой качества усвоения материала во время контрольных мероприятий. Нам видится более продуктивным очертить в рабочих программах а) круг действительно необходимых для выпускника университета знаний, так называемых «декларативных знаний», которые все-таки необходимо глубоко освоить, выучить, б) круг «декларативно-процедурных знаний», которые в виде пакетов прикладных программ, стандартных алгоритмов могут быть использованы из Интернета, в) круг «процедурных знаний», которые, как правило, в виде готовых сведений найти среди сетевых ресурсов затруднительно и требуется достаточно высокий уровень подготовки для их воспроизведения и применения в практических моделях.

Под *декларативными знаниями* мы понимаем такие, в которых содержатся представления о сущности, структуре, свойствах тех или иных понятий. Эти знания являются фактическими, описательными, информационными, они несут в себе информацию о фактах и свойствах определенной предметной области. С точки зрения доступности в Интернете, декларативными являются такие знания, которые содержатся в памяти информационно-коммуникационной системы так, что они легко доступны после соответствующего обращения к определенному полю памяти.

Под *декларативно-процедурными знаниями* мы понимаем общепринятые, стандартизированные методы, алгоритмы широко доступные в Интернете в виде пакетов прикладных программ, текстов доказательства известных теорем и пр. *Процедурные знания* характеризуются трансформационной и управляющей природой. Они содержат средства, методы преобразования декларативных знаний, способы получения новой информации. Это различные процедуры, алгоритмы, методы, формализованные цепочки логических умозаключений. С точки зрения доступности в Интернете, процедурные знания в явном виде не содержатся в памяти информационно-коммуникационной системы, они присутствуют в виде описаний алгоритмов, процедур, инструкций, методик с помощью которых можно трансформировать декларативные или декларативно-процедурные знания в процедурные[1].

Соотношение декларативных и процедурных знаний в содержании современного образования мы оцениваем, по оптимистичной оценке, как 50 на 50. Хотя в реальных условиях, скорее, акцент смещен в сторону декларативных знаний. Наш опыт позволяет нам утверждать, что преподавание математических дисциплин демонстрирует доминирование декларативных знаний, что отчасти объясняется попытками адаптировать курсы к уровню знаний современных студентов, отчасти неготовностью преподавателей пользоваться пакетами компьютерной математики.

Очевидно, что в настоящее время происходит трансформация знаний. Некоторые знания, ранее процедурные, становятся декларативными, например, решение алгебраических уравнений, извлечение корней, значения тригонометрических функций, логарифмов и прочее. Некоторые процедурные знания становятся декларативно-процедурными. Например, умножение матриц или решение систем линейных уравнений в условиях доступности различных пакетов прикладных программ, переходят из разряда «Уметь» в разряд «Знать, где найти программу». Безусловно, показать, как эти операции делаются вручную, и заставить студентов это проделать, необходимо. Но, на наш взгляд, нет необходимости предлагать для выполнения объемные индивидуальные задания с необходимостью ручного счета. То есть определенные стандартные алгоритмы, безусловно, из разряда «процедурных» знаний уместно переводить в разряд «декларативных» или «декларативно-процедурных». Мы полагаем, что «процедурные» или «функциональные» знания это – методы, модели, алгоритмы, при реализации которых требуются человеческий интеллект (недостаточно компьютерного интеллекта), это – функция, областью определения которой являются «декларативные» и «декларативно-процедурные» знания, а множеством значений – новые знания в явном виде не представленные в сети Интернет.

Для актуализации декларативно-процедурных знаний в рамках учебных дисциплин «Алгебра и геометрия», «Дискретная математика», «Математический анализ» мы некоторые стандартные процедуры и алгоритмы реализуем не только классическим способом «на доске и в тетради», но и с использованием электронных калькуляторов, пакетов прикладных программ и пр. Например, на практических занятиях и при выполнении индивидуальных заданий по «Дискретной математике» мы предлагаем студентам воспользоваться прикладной компьютерной программой eXpimal free 1.4, которая доступна на любых андроид-устройствах. Во время контрольных работ, зачетов, экзаменов мы проверяем, в основном, процедурные знания, студенты должны решить задачи самостоятельно с подробным изложением этапов решения.

Например: 1. Доказать по определению $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n + 2n^2 + 5}{2n^2 + n + 1} = 1$.

2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x, y) = 2x^2 - xy + y^2 + 7x$ на множестве $-3 \leq x, y \leq 3$.

3. Доказать методом от противного одну из теорем:
 теорема Дарбу;
 теорема об интегрируемости монотонных функций;
 теорема о непрерывности интеграла по верхнему пределу;
 признак сравнения для знакоположительных числовых рядов;
 теорема о непрерывности суммы функционального ряда.

Таким образом, благодаря доступности декларативных и декларативно-процедурных знаний в Интернете, в университетском математическом образовании имеется реальная возможность высвободить временные и интеллектуальные ресурсы для формирования процедурных знаний. В условиях доступности любой информации в любое время образование может сосредоточиться преимущественно на процедурных и декларативно-процедурных знаниях (учить алгоритмам, логическим переходам, методам доказательства). С этой точки зрения, систему университетского образования, в особенности математического, целесообразно трансформировать в некую функциональную модель, в которой аргументом являлись бы декларативные знания, а значением функции – процедурные знания. Тогда университет будет действительно выпускать интеллектуала с широким культурным кругозором и способностью усваивать и продуцировать процедурные знания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кордуэлл М. Психология от А до Я: Словарь-справочник. М.: Фаир-Пресс, 2000. – 448 с.
2. Palfrey J., Born Digital. Understanding the first generation of digital natives / J. Palfrey, U. Gasser. - N.Y., Basic, 2008. – 375 p.

УДК 378.147.091.3:51

ЦЕЛЕСООБРАЗНОСТЬ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ КОМПЕТЕНТНО-ОРИЕНТИРОВАННЫХ ДИФФЕРЕНЦИРОВАННЫХ ЗАДАНИЙ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ СТУДЕНТОВ ЭКОНОМИЧЕСКИХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ

Т.В.Думанская, аспирант
В.А.Швец, к.п.н., проф.

В статье обоснованно целесообразность использования компетентно-ориентированных заданий по высшей математике для студентов экономических специальностей.

Ключевые слова: компетентный подход, высшая математика, экономика, уровневая дифференциация, компетентно-ориентированные задания.

Постановка проблемы. В связи с внедрением в учебный процесс компетентно-ориентированной методической системы и разным уровнем учебных достижений по математике первокурсников экономических

специальностей нами видится необходимость использования компетентно-ориентированных дифференцированных заданий по высшей математике (в дальнейшем КОДЗ).

Одним с важнейших направлений профессиональной подготовки специалистов-экономистов есть овладение студентами умением решать практические и прикладные математические задачи разного содержания.

Анализ последних исследований и публикаций. Проблемой повышения уровня математической компетентности будущих экономистов занимались такие ученые как Н.В. Ванжа, А.Я. Дутка, Л.И. Ничуговская, Г.С. Пастушок, Ю.Н. Ткач, Е.Г. Фомкина, В.А. Швец и другие.

В работе Г.С. Пастушок отмечается, что „курс математики для экономических отделений высших учебных заведений требует разработки методики и форм организации учебного процесса ...” [5, с. 1].

По мнению Ю.Н. Ткач, в основе дифференциации обучения должна лежать успеваемость студентов, при этом важно осуществляться варьирование заданий по объему и сложности [6, с. 240].

А.Я. Дутка рекомендует использовать в учебе систему задач трех уровней сложности, особенность которой состоит в том, что, во-первых, каждый следующий уровень сложности задач требует от студентов более полного использования как математических, так и экономических, знаний, во-вторых, задачи третьего уровня сложности включают элементы задач первого и второго уровней, а задачи второго уровня сложности содержат элементы задач минимально базового уровня [2, с. 8].

Е.Г. Фомкина рассматривает уровневую дифференциацию как дифференциацию за уровнем сложности и глубины усвоения учебного материала, и выделяет группы основных, дополнительных и специальных вопросов темы. Система формальных задач, по мнению исследователя, обязательно должна быть дифференцированной (с целью обеспечения условий для работы разных типологических групп студентов), с нарастающей сложностью (группы А, Б, В) и по возможности с использованием знаний с разных тем курса математики [8, с. 62-63].

Проанализировав результаты исследований указанных ученых, наблюдаем рассмотрение на занятиях по высшей математике формальных, профессионально ориентированных задач. Но не встречаем разработок компетентно-ориентированных дифференцированных заданий, которые бы совмещали формальность и профессиональную направленность обучения высшей математике будущих специалистов экономики.

Целью статьи является освещение вопроса целесообразности КОДЗ во время формирования математических компетентностей бакалавров экономических специальностей при изучении высшей математики.

Изложение основного материала. Компетентный подход – подход к определению результатов обучения, которое базируется на их описании в терминах компетентностей. Компетентный подход является клю-

чевым методологическим инструментом реализации целей Болонского процесса и за своей сущностью есть студентоцентрированным [3, с. 28].

Поэтому для преподавателей математики высших учебных заведений первоочередной является проблема улучшения качественной стороны подготовки экономистов нового поколения. Предпосылкой является создание такой программы курса высшей математики, которая бы была наполнена математическими задачами профессионального направления, в процессе решения которых студенты оперировали бы не только математическими, но и экономическими, понятиями, необходимыми для будущей профессиональной деятельности. Во время решения экономических задач математическими методами у студентов формируется установка на будущую профессию, производится стойкая заинтересованность и к математике, и к экономике [1, с. 72].

Компетентно-ориентированные задания способны выполнять следующие функции:

- *мотивационную* (представление жизненной (проблемной) ситуации с привлечением актуального для студента материала обеспечивает его внутреннюю мотивацию);
- *создание психологически комфортных условий* для организации и осуществления учебной деятельности;
- *активизации познавательной деятельности* (внутреннее побуждение мобилизует первокурсника, активизирует его мыслительную деятельность);
- *организационную* (наличие плана действий помогает студенту выстроить правильную траекторию направления и решения предъявленных заданий);
- *формирующую* (усваиваются способы действий, вырабатываются умения не только оперировать математическим материалом, но и привлекать знания и умения со смежных дисциплин, общеучебные знания и умения);
- *оценивающую* (поскольку компетентность обнаруживается лишь в деятельности, поэтому приложение компетентно-ориентированных вопросов, заданий, задач и тестов, дает возможность выяснить уровень ее сформированности);
- *мировоззренческую* (студент получает возможность увидеть целостную картину мира во взаимосвязях и взаимозависимости фактов и явлений с разных сфер, учебных предметов и т. п.);
- *личностную* (через создание ситуации успеха способствует утверждению личности собственного „Я”) [7, с. 15-16].

Во время обучения высшей математике следует придерживаться принципа свободного выбора личностью предложенных преподавателем заданий. При этом стоит руководствоваться тем, что осознанность посиль-

ности заданий вызывает у студента чувство удовлетворения и подъем. Именно на этих положительных эмоциях основывается положительная мотивация к изучению высшей математики.

Как и большинство исследователей, мы предлагаем выделять такие уровни сложности КОДЗ: *минимальный (обязательный), средний и повышенный*. Особенностью является то, что решение задач каждого следующего уровня сложности предусматривает умение решать задачи предыдущего уровня. Для решения упражнений повышенного уровня сложности желательно предлагать задачи, решения которых требовало бы применения не только математических знаний, но и знаний с профессионально-ориентированных дисциплин.

Основное отличие предлагаемой нами системы КОДЗ видится в нестандартной формулировке условия и требования задания, которые предполагают проявления у студента логического мышления и изобретательности. Такой принцип формулировки заданий применяется к каждому с трех уровней дифференциации.

Рассмотрим примеры КОДЗ по теме „Прямая на плоскости”:

Минимальный уровень сложности (Группа А)

Установите соответствие между понятиями и их толкованием:

Понятия		Толкования	
1	Уравнение прямой в общем виде	а	$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$
2	Уравнение прямой с угловым коэффициентом	б	$Ax + By + C = 0$
3	Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки	в	$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}$
4	Уравнение прямой, проходящей через заданную точку перпендикулярно заданному вектору	г	$y = kx + b, k = \operatorname{tg}\varphi$
5	Уравнение прямой, проходящей через заданную точку параллельно заданному вектору	д	$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$

Для решения вышеприведенных упражнений нужно знать лишь теоретический материал относительно избранной темы.

Средний уровень сложности (Группа Б)

1. *Запишите заданное уравнение прямой в виде уравнения прямой в отрезках:*

$$y = -\frac{2}{3}x + 2.$$

Прежде чем записать искомое уравнение, студенты должны определить точки пересечения прямой с осями координат, после чего подставить

соответствующие значения в уравнение прямой в отрезках. Задача решается в два шага.

2. *Найти площадь квадрата, две стороны которого лежат на прямых $4x - 3y - 10 = 0$ и $8x - 6y + 15 = 0$.*

Чтобы решить эту задачу нужно, учитывая условие параллельности указанных прямых, выбрать произвольную точку на одной из них и найти расстояние от этой точки ко второй прямой. Найденное значение будет длиной стороны квадрата, которое необходимо подставить в формулу площади квадрата.

Повышенный уровень сложности (Группа В)

1. *Определите цену равновесия, если заданы уравнения спроса и предложения соответственно: $p(Q) = 500 - 10Q$, $p(Q) = 50 + 5Q$.*

Это прикладная задача. Для ее решения студенты должны ориентироваться в таких понятиях как спрос, предложение, цена равновесия.

Чтобы найти цену равновесия графически необходимо построить кривые спроса и предложения и найти точку их пересечения. Одна из координат этой точки и будет ценой равновесия.

2. *Транспортные расходы на перевозку единицы груза железнодорожным транспортом выражаются функцией $y = 2x + 10$, а автомобильным – функцией $y = x + 20$, где x измеряется десятками километров. Определите, на какие расстояния более выгодно перевозить груз железнодорожным и автомобильным транспортом.*

Чтобы найти оптимальные варианты перевозки груза, необходимо построить графики указанных функций расходов, найти точку их пересечения и осуществить графический анализ.

Учитывая результаты применения в своей практике уровневой дифференциации на практических занятиях по высшей математике, мы убедились, что КОДЗ помогают:

- формировать математические компетентности студентов;
- обеспечивать выполнение требований государственного стандарта;
- обеспечивать личностно-ориентированное обучение студентов;
- повышать заинтересованность студентов-экономистов высшей математикой;
- создавать ситуацию успеха на занятиях.

Решение таких заданий не значит снижение общих требований к более „слабым” и повышение к более „сильным” студентам. Свободный выбор студентом варианта и уровня усвоения помогает ему осознано и более глубоко усвоить изученный материал курса высшей математики. КОДЗ постепенно выравнивают знания менее подготовленных студентов экономических специальностей, а более подготовленных – побуждают к самостоятельному поиску и творческому подходу к решению поставленных заданий.

Выводы. Система КОДЗ по высшей математике в вузе не только дает возможность эффективно формировать знания и умения студентов с учебной дисциплины, но и активизирует их учебно-познавательную деятельность, содействует развитию положительной учебной мотивации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гусак Л. П. Изучение высшей математики в условиях компетентного подхода в образовании [Текст] / Л. П. Гусак // Научный вестник Ужгородского национального университета: Серия: Педагогика. Социальная работа / гл. ред. И.В. Козубовская. – Ужгород: Издательство УжНУ „Горверла”, 2014. – Вып. 34. – С. 71–73.
2. Дутка А. Я. Формирование умений студентов решать прикладные задачи при обучении математики в колледжах экономического профиля: автореф. дис. на получение научн. степени канд. пед. наук: 13.00.02 / А. Я. Дутка; Нац. пед. ун-т им. М.П. Драгоманова. — К., 1999. — 20 с.
3. Национальный образовательный глоссарий: высшее образование / 2-ое изд., пердел. и доп. / авт.-укладч.: В. М. Захарченко, С. А. Калашникова, В. И. Луговой, А. В. Ставицкий, Ю. М. Рашкевич, Ж. В. Таланова / Под ред.. В. Г. Кременя.– К.: ООО „Издательский дом „Плеяды”, 2014.– 100 с.
4. Низамиева Л. Ю. Дифференцированная профессионально-ориентированная математическая подготовка специалистов экономического профиля с использованием мультимедийных технологий: автореф. дис. ... канд. пед. наук. – Казань, 2010. – 24 с.
5. Пастушок Г. С. Методика изучения математики на экономических факультетах высших заведений образования: автореф. дис. на получение научн. степени канд. пед. наук / Г. С. Пастушок: спец. 13.00.02. – К., 2000. – 20 с.
6. Ткач Ю. Н. Реализация уровневой дифференциации в обучении математики в ВУЗЕ / Ю. Н. Ткач // Проблемы современного педагогического образования. Серия: Педагогика и психология. – 2014. – Вып. 44. – Ч. 3. – С. 237-244.
7. Фасоля А. Компетентно сориентированные задания: новация? Имитация? / А. Фасоля // Украинская литература в общеобразовательной школе. – 2014. – Вып. 5. – С. 14-20.
8. Фомкина Е. Г. Усовершенствование методики обучения математики в экономическом вузе: пути, формы и средства, перспективы: монография / Е. Г. Фомкина – Полтава: РВВ ПУСКА, 2008. – 90 с.

МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ СТУДЕНТОВ ВЫСШЕЙ ТЕХНИЧЕСКОЙ ШКОЛЫ НА ОСНОВЕ ДЕЯТЕЛЬНОСТНОГО ПОДХОДА

Е.Г. Евсеева, д.п.н, проф.

ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»

e-mail: *eeg.donntu@rambler.ru*

В работе рассмотрены основные положения, которые положены в основу методики обучения математике студентов технических образовательных учреждений высшего профессионального образования на основе деятельностного подхода с использованием предметной модели студента. С целью реализации методики разработана методическая система такого обучения. Результаты экспериментального обучения подтвердили эффективность методической системы обучения математике студентов высших технических учебных заведений на принципах деятельностного подхода.

В настоящее большое количество исследований в области дидактики математики посвящено оптимизации математической составляющей высшего инженерного образования. При этом одним из подходов, позволяющим сформировать у специалиста высокую готовность к успешной профессиональной деятельности, является деятельностный подход. Этот подход смещает акценты с процесса накопления нормативных знаний, умений и навыков в плоскость формирования и развития у студентов способности практически действовать и творчески применять приобретенные знания и опыт в профессиональной сфере.

Основные положения деятельностного подхода охарактеризованы в трудах таких психологов, как Б. Ц. Бадмаев, Л. С. Выготский, П. Я. Гальперин, Г. С. Костюк, А. Н. Леонтьев, Ю. И. Машбиц, З. А. Решетова, С. Л. Рубинштейн, Н. Ф. Талызина, Ю. Л. Трофимов и др.

К проблеме развития идей деятельностного подхода в методике обучения математике обращались О. Б. Елишева, Т. А. Иванова, В. И. Крупич, О. А. Малыгина, Н. А. Родионов, Г. В. Саранцев, А. А. Столяр и др. Однако большинство исследований выполнено на материале средней школы.

Деятельностный подход служит методологической основой значительного количества исследований в области методики обучения математике в основной и высшей школе. Несмотря на это, теоретические основы обучения математике в техническом вузе на основе деятельностного подхода ранее практически не были разработаны.

Одним из направлений внедрения деятельностного подхода в практику обучения является использование знаний как средств обучения, что требует применения методов структурирования знаний. Проблемы структурирования предметных знаний в обучении обоснованы в трудах

Г. А. Атанова, Дж. Брауна, Дж. Брунера, Н. А. Галибиной, Е. Даленбурга, А. М. Довгяло, Н. Г. Коляды, Н. Л. Миллера, В. А. Петрушина, А. М. Печуровой, Дж. Селфа, Д. Слимена, К. Стауфера, и др.

Среди методов структурирования знаний, которые используют в обучении, различают метод моделирования студента, который заключается в создании предметной модели студента. Такая модель представляет собой нормативную модель специалиста с отдельного учебного предмета и содержит описание предметных компетентностей и связей между ними. Из всех видов предметных моделей студента, которые применяют для проектирования и организации обучения, выделяют пятикомпонентную модель, которая состоит из тематического, семантического, функционального, процедурного и операционного компонентов. Однако в обучении математике студентов технических направлений подготовки такую модель раньше не использовали, хотя она дает возможность формирования основы для проектирования и организации обучения.

Предлагаемая методика обучения математике основана на фундаментальном положении теории деятельности о том, что развитие студента, а, следовательно, и результаты его обучения, зависят от деятельности, которую он выполняет в обучении, или от учебной деятельности. При этом деятельность преподавателя в обучении заключается в проектировании учебной деятельности студентов, ее организации и управлении ею. Проектирование и организация обучения математики на основе деятельностного подхода студентов технических направлений подготовки должно происходить на основе ряда концептуальных положений [2].

1. Приоритетным направлением модернизации системы инженерного образования, в частности фундаментальной подготовки студентов технических направлений подготовки, является внедрение деятельностного подхода в обучение математике. Обучение математике в техническом вузе на основе деятельностного подхода должно происходить согласно устоявшимся дидактическим принципам обучения в технической высшей школе: научности, систематичности и последовательности, сознательности обучения, активности и самостоятельности, наглядности, основательности, связи обучения с практической деятельностью, единства образовательных, развивающих и воспитательных функций обучения. Эти принципы должны быть дополнены принципами первичности деятельности; деятельностного целеполагания; деятельностное определение содержания обучения, деятельностного усвоения содержания обучения, профессиональной направленности обучения математике.

Например, принцип профессиональной направленности обучения требует, чтобы в процессе обучения математике студенты осуществляли учебную деятельность, которая обеспечивает будущую профессиональную деятельность путем решения профессионально направленных задач. Для реализации этого принципа необходимо, чтобы во все виды учебной дея-

тельности студентов были включены задания, реализующие способы действий будущей профессиональной деятельности. Это могут быть профессионально направленные, интегративные, квазипрофессиональные задачи, которые решаются на лекциях, практических занятиях, в индивидуальных домашних заданиях, реферативной и научно-исследовательской работе.

2. Обучение математике в техническом вузе на основе деятельностного подхода – это воспроизведение опыта общественно-исторической практики в предметной области математических дисциплин, что является частью фундаментальной подготовки в системе инженерного образования. Цели обучения математики для каждого конкретного направления подготовки регламентированы государственным стандартом в виде учебных действий, которые должны быть освоены студентом в учебной деятельности по математике.

3. Содержание обучения математике на основе деятельностного подхода должен быть представлен системой учебных действий в предметной области математики, что вытекает из характера будущей профессиональной деятельности, и знаниями, которые позволяют выполнения и освоения этих действий.

4. Деятельностный механизм усвоения содержания обучения математики состоит в том, что студент усваивает знания благодаря собственной активной деятельности, во время которой происходит освоение учебных действий. При этом освоением учебных действий необходимо управлять как поэтапным процессом, который предполагает последовательное овладение действиями на трех уровнях: низком, среднем и высоком. Низкий уровень овладения учебными действиями означает выполнение действия, опираясь на материальные носители информации в отношении нее; средний – выполнение действия, опираясь на постоянный умственный контроль без помощи материальных носителей информации; высокий уровень овладения действием – выполнение студентом действия автоматически.

5. Учебная деятельность – системообразующий фактор обучения математике на основе деятельностного подхода в техническом вузе, потому что именно в ней формируют способы действий по специальности и осваивают содержание обучения. Учитывая это, деятельность преподавателя заключается в проектировании и организации учебной деятельности студентов, а также в управлении ею.

6. Проектирование обучения на основе деятельностного подхода предполагает проектирование целей, содержания и деятельностно-ориентированной технологии обучения, которая требует специальных методов, организационных форм и средств обучения, а также методического сопровождения, которая реализуется через комплекс учебно-методических материалов.

7. Для разработки методического сопровождения обучения важно применять специальное средство проектирования и организации обучения

математике на основе деятельностного подхода в виде предметной модели студента по математике, что является структурированным представлением той части модели специалиста, которая отражает нормативные требования к его математическим компетентностям. Целесообразно использовать пятикомпонентную модель студента, которая состоит из тематического, семантического, функционального, операционного и процедурного компонентов.

8. Организация обучения на основе деятельностного подхода – это процесс реализации созданного проекта обучения, что приобретает особую значимость в обучении математике на основе деятельностного подхода. При этом важным механизмом организации обучения является деятельность по решению системы учебных задач, направленных на последовательное овладение учебными действиями в предметной области математики.

9. Управление учебной деятельностью должно происходить через систему контроля, в которой заложено проектирование, организацию контроля, анализ его результатов и их коррекцию. В обучении математике на основе деятельностного подхода подлежит контролю освоения учебных действий и усвоение необходимых для этого знаний.

10. Учебная деятельность студента в обучении математике на основе деятельностного подхода, кроме традиционных видов деятельности, должна включать: деятельность по решению задач с помощью процедуры ориентирования; деятельность по решению системы задач, направленной на освоение учебных действий в предметной области математики; деятельность по решению задач профессиональной направленности и деятельность математического моделирования в профессиональной области; деятельность по структурированию математических предметных знаний на уровне понятий и определение иерархии математических понятий; деятельность по решению системы тестовых заданий на соответствие, направленной на формирование понятий.

11. Для внедрения деятельностного подхода в обучение математике студентов ВТУЗА необходимым является введение в деятельность преподавателя: деятельности по разработке системы задач на основе анализа знаний и действий, необходимых для их реализации; деятельности по разработке схем ориентировки, используют во время решения задач; деятельности по разработке системы заданий, направленных на последовательное овладение учебными действиями в области математики, формирование математических понятий на базе предметной модели студента; проектирования и организации учебной деятельности с помощью компьютерно-ориентированных систем.

Предложенная методика уже реализована для разработки методической системы обучения математике на основе деятельностного подхода в высшей технической школе [2], методической системы обучения матема-

тике студентов строительных направлений подготовки [1]. В парадигме деятельностного подхода ведется разработка методической системы обучения математике на основе интеграции математики и других фундаментальных дисциплин в системе высшего инженерного образования [3].

Предложенная методика обучения математике студентов на основе деятельностного подхода дает возможность перестроить процесс обучения высшей математике в технических образовательных учреждениях высшего профессионального образования в соответствии с потребностями общества в конкурентоспособных на внутреннем и мировом рынках труда инженерных кадрах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Глибина Н.А. Обучение математике студентов строительных направлений подготовки на основе деятельностного подхода. Автореф. дисс. ... канд. пед. наук : 13.00.02 – теория и методика обучения и воспитания по областям и уровням образования (математика). – Донецк : ДонНУ, 2016. – 28 с.
2. Евсеева Е. Г. Теоретико-методические основы деятельностного подхода к обучению математике студентов высших технических заведений образования : монография. – Донецк : ДонНТУ, 2012. – 455 с.
3. Евсеева Е. Г. Интеграция высшей математики и фундаментальных дисциплин как базис для формирования профессиональной компетентности будущих инженеров / Е.Г. Евсеева, Н.А. Прокопенко // Дидактика математики: проблемы и исследования: междунар. сб. научн. работ. – Донецк, 2015. – Вып. 42. – С. 38-45.

ФОРМИРОВАНИЕ ПРОЕКТНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ В СООТВЕТСТВИИ С ТРЕБОВАНИЯМИ ФГОС ПРИ ИЗУЧЕНИИ НАЧАЛЬНОГО КУРСА МАТЕМАТИКЕ

И.В. Ефимова

ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет им. И.С. Тургенева»
e-mail: efimova.inna3000@yandex.ru

С введением ФГОС меняется и парадигма образования. Вместо понятий «изучение», «усвоение знаний» переходим к таким понятиям как «познание», «исследование», «создание», «разработка». Именно учитель может влиять на развитие личности каждого своего воспитанника, создавая ему благоприятную среду.

Речь идёт, во-первых, об универсальных учебных действиях, составляющих основу умения учиться: навыках решения творческих задач и на-

выках поиска, анализа и интерпретации информации. Во-вторых, речь идет о формировании у детей мотивации к обучению, о помощи им в самоорганизации и саморазвития. Эти задачи позволяет успешно решать проектная деятельность.

Метод проекта – это одна из личностно-ориентированных технологий, в основе, которой лежит развитие познавательных навыков учащихся, умений самостоятельно конструировать свои знания, ориентироваться в информационном пространстве, развитие критического и творческого мышления.

Реализуя проектную деятельность в начальной школе, учителя используют активные методы обучения, которые являются развивающими по своей сути, так как не только способствуют лучшему усвоению учебного материала, активизации мыслительной деятельности, повышению интереса к предмету, устранению перегрузок, но и формируют поисковую активность учащихся, что является крайне важным в процессе формирования различных компетенций. Результатом использования проектной деятельности младших школьников в учебном процессе можно считать повышение уровня усвоения знаний, а также сформированность общеучебных умений школьников, входящих в структуру «Мыслительной компетенции» и определяющих достижение высокого уровня готовности и способности решать значимые для учащегося проблемы.

В учебниках математики с 1 по 4 класс УМК «Школа России» предложена общая рубрика «Наши проекты» с указанием темы проекта, соответствующих комментариев, советов, плана выполнения проектной работы. Учащиеся вместе обсуждают и формулируют цель работы над заявленной в проекте темой, план своих действий, промежуточные и итоговые результаты работы. Некоторые из этих проектов направлены на организацию сотрудничества со взрослыми. Так, в 4 классе при изучении раздела «Числа, которые больше 1000», авторы учебника предлагают проект «Числа вокруг нас». Создание математического справочника «Наш город в числах и величинах». Здесь предполагаются встречи и общение с краеведами, работниками муниципальной администрации, участниками Великой Отечественной войны с последующим обсуждением результатов проектной деятельности. Собранную в справочнике информацию в дальнейшем использовать для составления и решения различных задач практического содержания. Можно провести конкурс на самую интересную задачу, составленную по материалам справочника.

Проектная деятельность может быть эффективно использована, начиная с начальной школы, при этом, не заменяя традиционную систему, а органично дополняя, расширяя ее. Учебная программа, которая последовательно применяет этот метод, строится как серия взаимосвязанных проектов, вытекающих из тех или иных жизненных задач. От ребёнка требуется умение координировать свои усилия с усилиями других. Чтобы добиться

успеха, ему приходится добывать необходимые знания и с их помощью проделывать конкретную работу. Идеальным считается тот проект, для исполнения которого необходимы различные знания, позволяющие разрешить целый комплекс проблем. При работе по методу проектов необходимо учитывать психолого-физиологические особенности младших школьников. Темы проектов учащихся этого возраста должны быть тесно связаны с предметным содержанием. Поэтому значительная часть учебного времени, отведенного на повторение и закрепление изученного материала, может быть использована для организации проектной деятельности. Проблема проекта, обеспечивающая мотивацию включения в самостоятельную работу, должна находиться в зоне ближайшего развития.

Длительность выполнения проекта или исследования целесообразно ограничить 1-4 неделями в режиме урочных и внеурочных занятий или 1-2 сдвоенными уроками. Однако, на традиционных занятиях, начиная с 1 класса, учитель постепенно должен формировать у младших школьников умения по отдельным элементам проектной и исследовательской деятельности (целеполагание, формулирование вопросов, рефлексия, планирование действий, работа с различными источниками информации и так далее). На этой ступени обучения особую роль играют групповые проекты. Индивидуальные проекты также могут быть собраны под эгидой общей темы или формы презентации продукта (например, книга, выставка, викторина, панно и т.п.).

Метод проектов необходимо начинать реализовывать с 1 класса. В 1-ом классе основное внимание уделяем развитию умений и навыков проектирования и исследовательской деятельности, привитию интереса к познавательной деятельности, расширению детского кругозора. Эти умения затем совершенствуются в последующих классах.

В рамках традиционных учебных занятий использую следующие этапы работы над проектами:

1. Погружение в проект – определение проблемы, темы и целей проекта в ходе совместной деятельности педагога и обучающихся.
2. Планирование деятельности – определение источников информации, форм презентации результатов, сроков выполнения, распределение обязанностей.
3. Осуществление деятельности по решению проблемы – самостоятельная работа над проектом, промежуточные обсуждения полученных данных.
4. Оформление результатов – анализ и синтез данных, формулирование выводов.
5. Презентация результатов – демонстрация материалов, представление результатов.
6. Оценка результатов и процесса проектной деятельности – коллективное обсуждение результатов проекта, самоанализ.

Прежде чем начать практическую разработку проекта (то есть, уже определившись с целями и задачами, но, еще не начав действовать), мы должны познакомить детей с методами исследования, которыми они будут пользоваться при работе над проектом:

- подумать самостоятельно;
- посмотреть книги;
- спросить у взрослых;
- обратиться к компьютеру;
- понаблюдать;
- проконсультироваться со специалистом;
- провести эксперимент.

Удачные находки во время работы над проектом желательно сделать достоянием всего класса, это может повысить интерес и привлечь к работе над проектом других ребят.

Формируемые компоненты исследовательской культуры школьника:
1–2-й классы:

- включение в урок заданий, направленных на составление последовательности действий;
- решение задач по комбинаторике, логических задач с понятиями «истина», «ложь»;
- проведение работы по выявлению причинно-следственных связей;
- обучение приемам наблюдения и описания;
- знакомство с терминологией, некоторыми понятиями о методах исследования;
- формирование опыта работы со словарями и другими источниками информации;
- осуществление коллективных исследований по определенному плану.

3-й класс:

- осуществление долговременных исследований с применением имеющихся знаний и умений;
- ведение поиска информации, выделение главного;
- постановка опытов, проведение наблюдений, защита сообщений, докладов.

4-й класс:

- формирование читательской компетентности;
- формирование желания и основы умения учиться: умение видеть границу между известным и неизвестным;
- соотношение результатов с образцом, нахождение ошибок и устранение их, выработка критериев для оценки работы;
- формирование приемов и навыков учебного сотрудничества.

Особое значение проектной деятельности в начальной школе заключается в том, что в ее процессе младшие школьники приобретают социаль-

ную практику за пределами школы, адаптируются к современным условиям жизни. Использование технологии проектного обучения в начальной школе способствует развитию таких качеств личности, как самостоятельность, целеустремленность, ответственность, инициативность, настойчивость, толерантность.

Можно выделить несколько групп компетенций, на которые проектная деятельность оказывает наибольшее влияние у младших школьников:

- исследовательские (генерировать идеи, выбирать лучшее решение);
- социального взаимодействия (сотрудничать в процессе учебной деятельности, оказывать помощь товарищам и принимать их помощь, следить за ходом совместной работы и направлять ее в нужное русло);
- оценочные (оценивать ход, результат своей деятельности и деятельности других);
- информационные (самостоятельно осуществлять поиск нужной информации; выявлять, какой информации или каких умений не хватает);
- презентационные (выступать перед аудиторией; отвечать на незапланированные вопросы; использовать различные средства наглядности; демонстрировать артистические возможности);
- рефлексивные (отвечать на вопросы: «Чему я научился?», «Чему мне необходимо научиться?»).

Успешная реализация государственных образовательных стандартов второго поколения не возможна без формирования информационно-образовательной среды школы, причём такой, которая позволит нормально себя в ней чувствовать и успешно развиваться учащимся начальной школы. При подготовке и защите проектов ребята используют ИКТ.

Каждый проект должен быть доведён до успешного завершения, оставляя у ребенка ощущение гордости за полученный результат, который является, несомненно, значимый для школьника. Во время работы над проектом строятся новые отношения между учителем и учеником. Учитель уже не является единственным источником информации. Его роль направляющая, оказывающая помощь. Ученик же представляет свою работу своим товарищам, одноклассникам.

Таким образом, проектная деятельность способствует формированию ключевых компетенций учащихся, подготовке их к реальным условиям жизнедеятельности, выводит процесс обучения и воспитания из стен школы в окружающий мир. Проектная деятельность позволяет закрепить, расширить, углубить полученные знания, создаёт условия для творческого развития детей, формирования позитивной самооценки, навыков совместной деятельности со взрослыми и сверстниками, умений сотрудничать друг с другом, совместно планировать свои действия, вести поиск и систематизировать нужную информацию.

Девизом этой деятельности могут служить слова выдающегося немецкого драматурга и философа Г.Э. Лессинга: «Спорьте, заблуждайтесь, ошибайтесь, но ради бога, размышляйте, и хотя и криво, да сами».

ЛИТЕРАТУРА

1. Иванова Н.В. Возможности и специфика применения проектного метода в начальной школе // Начальная школа. 2004. № 2. С. 96-102.
2. Матяш Н.В., Симоненко В.Д. Проектная деятельность младших школьников: Книга для учителя начальных классов/ М.: Вентана-Граф, 2004. – 112 с.
3. Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования / М-во образования и науки Рос. Федерации. – М.: Просвещение, 2011. – (Стандарты второго поколения). – 48 с.

РОЛЬ ВНЕУРОЧНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ПО МАТЕМАТИКЕ В УСЛОВИЯХ ВНЕДРЕНИЯ ФГОС ОСНОВНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

Е.С. Игнатова

ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет им. И.С. Тургенева»

В статье приводится определение внеурочной деятельности, раскрываются цели, поставленные перед внеурочной деятельностью по математике в основной школе. Выделены направления и виды внеурочной деятельности. Рассмотрены формы научно-познавательной деятельности.

Ключевые слова: внеурочная деятельность, цели внеурочной деятельности, направления и виды внеурочной деятельности, форма внеурочной деятельности.

Образовательная программа основного общего образования на сегодняшний день реализуется самим общеобразовательным учреждением через внеурочную и урочную деятельность со строгим соблюдением государственных требований, санитарно-эпидемиологических правил и нормативов. В результате чего в формах организации образовательного процесса, происходит чередование внеурочной и урочной деятельности [7].

В настоящее время существует несколько определений понятия «внеурочная деятельность», например.

Ильина Т.И, внеурочной деятельностью называет воспитательную работу, проводимую классными руководителями и учителями-предметниками с учащимися своей школы [3].

Советова Е.В. считает, что внеурочная деятельность школьников – понятие, объединяющее все виды деятельности школьников (кроме учебной), в которых возможно и целесообразно решение задач их воспитания и социализации. Внеурочная деятельность является составной частью учебно-воспитательного процесса и одной из форм организации свободного времени учащихся [6].

В рамках ФГОС внеурочная деятельность организуется по направлениям развития личности (духовно-нравственное, физкультурно-спортивное и оздоровительное, социальное, общеинтеллектуальное, общекультурное) в таких формах, как кружки, художественные студии, спортивные клубы и секции, юношеские организации, краеведческая работа, научно-практические конференции, школьные научные общества, олимпиады, поисковые и научные исследования, общественно полезные практики, военно-патриотические объединения и т. д. [7].

Таким образом, под внеурочной деятельностью следует рассматривать деятельность, объединяющую все виды деятельности учащихся, кроме учебной и на самом уроке, для удовлетворения некоторых потребностей учащихся в содержательном досуге, общественно полезной деятельности, целесообразном решении жизненных задач, а так же значительное участие в воспитании и социальном развитии школьников.

Согласно Федеральному учебному плану, разработанного для общеобразовательных учреждений РФ, организация некоторых занятий по разным направлениям внеурочной деятельности является значимой частью учебного процесса в школе.

Внеурочная деятельность развивает большой интерес к изучению математики, что способствует глубокому и прочному овладению изучаемого материала, развитию математической культуры и творческих способностей обучающихся.

Внеурочная деятельность по математике направлена на решение целого комплекса задач по углублению математического образования, формированию всестороннего развития индивидуальных способностей учащихся и максимальное удовлетворение их способностей и жизненных потребностей. Управлять таким процессом - это значит не только развивать и совершенствовать заложенные природные качества в человеке, но и формировать у него потребность в постоянном развитии самостоятельности и творческой активности, в воспитании навыков самообучения математике. Ведь саморазвитие и самореализация, заключаются в том, что каждый человек воспитывает себя сам.

Выделим цели внеурочной деятельности по математике:

1. Организация индивидуальной и коллективной деятельности по ликвидации пробелов учащихся в программном материале по математике.
2. Развитие интереса к математике.

3. Систематическое развитие математических способностей и умений учащихся, а также привитие им определенных навыков в научно-исследовательской деятельности.

4. Развитие у учащихся умения самостоятельно мыслить, творчески работать с учебной литературой.

5. Расширить и углубить представления учащихся о культурно-исторической ценности математики, о ведущей роли российской математической школы в мировой науке.

6. Приучить учащихся анализировать возможные причины отставания при изучении ими математики, разбирать типичные ошибки, допускаемые учащимися при использовании математики.

7. Способствовать созданию актива, призванного оказать учителю помощь в организации эффективного обучения математике всего класса (помощь в изготовлении наглядных пособий, занятиях с отстающими учениками, в пропаганде математических знаний среди школьников).

Учитель математики при обучении конкретизирует для себя задачи организации внеурочной деятельности в соответствии с ее целями и конкретным контингентом учащихся.

Во внеурочной деятельности, так же, как и в любом другом виде деятельности, существуют свои виды и направления.

Приведем направления, которые выделены в базисном учебном плане, это:

- 1) спортивно-оздоровительное;
- 2) художественно-эстетическое;
- 3) научно-познавательное;
- 4) военно-патриотическое;
- 5) общественно полезная деятельность;
- 6) проектная деятельность.

Рассмотрим в качестве примера одно направление внеурочной деятельности по математике – научно-познавательное.

Внеурочная познавательная деятельность школьников может быть организована в форме факультативов, кружков познавательной направленности, научного общества учащихся, интеллектуальных клубов, библиотечных вечеров, дидактических театров, познавательных экскурсий, олимпиад, викторин и т. п.

Рассмотрим некоторые формы научно-познавательной деятельности более подробно.

Математический факультатив

Назначение факультативных занятий состоит в развитии способностей и интересов учащихся в сочетании с общеобразовательной подготовкой, а так же зарождение интереса к математике на первичном уровне, поддерживать его до познавательного уровня и тем самым создавать основы для выбора профиля [4].

Основная задача факультативных занятий состоит в учете интереса и склонности учащихся, расширении и углублении их знаний по предмету, обеспечении усвоения ими программного материала, ознакомлении школьников с общими идеями современной математики.

Факультативные занятия играют важную роль в совершенствовании математического образования. Они позволяют проводить поиск и экспериментальную проверку нового содержания, новых методов обучения, в широких пределах варьировать уровень сложности изучаемого материала.

Факультативные занятия на сегодняшний день предусмотрены для учащихся, начиная с VII класса. Факультативные группы по 15-20 человек создаются из учеников параллельных классов. Выбор факультатива производится школьниками свободно.

Математическая олимпиада

Олимпиада – соревнование, которое, несомненно, стимулирует рост учащихся в смысле их математического образования, воспитывает у них математическое мышление, интерес к математике, настойчивость – желание не отстать от тех, кто успешно справляется с олимпиадными заданиями, порой именно участие в олимпиаде и подготовка к ней побуждают учащихся к самостоятельной работе с научно-популярной литературой и т.д. Математические олимпиады проводятся на разных уровнях: школьные, районные, городские, областные, региональные, международные.

Олимпиада так же оказывает положительное влияние и на общий уровень преподавания математики, во многом позволяет выделить качество математических знаний учащихся и в какой-то степени ориентирует учителя, характеризуя уровень математической подготовки учащихся, которая считается высокой [5].

Математический кружок

Математический кружок – это одна из наиболее действенных и эффективных форм внеклассных занятий в основной школе. В основе работы кружков лежит принцип строгой добровольности. Обычно кружковые занятия организуются для хорошо успевающих учащихся. Однако следует иметь в виду, что иногда и слабоуспевающие учащиеся изъявляют желание участвовать в работе математического кружка и не редко весьма успешно занимаются там.

Формирование состава кружка часто происходит после проведения школьной математической олимпиады среди учащихся пятых классов, где выявляется уровень математических способностей учащихся.

Оптимальное количество членов кружка от 10 до 20 учащихся. Работа кружка планируется на учебный год и на перспективу. Руководство кружком осуществляет учитель математики.

Творческая математическая группа

По сравнению с математическим кружком, творческая математическая группа более узкопрофильная форма внеурочной работы по матема-

тике. Творческая группа создается, как правило, из особо одаренных учащихся. Как показывает практика, целесообразно руководство творческой группой поручать наиболее квалифицированному учителю математики или вузовскому специалисту-математику, имеющему высокую научную квалификацию. Основная дидактическая задача творческой математической группы — создание максимальных условий для развития индивидуальных математических способностей учащихся.

В состав творческой группы должно входить не более 7 учащихся, оптимально 3-5, при этом каждый член группы может разрабатывать отдельную математическую проблему, однако обсуждение промежуточных и конечных результатов индивидуальной работы проводится на заседании творческой группы. В школах нового типа (гимназия, лицей, колледж, школа с углубленным изучением математики), где в старших классах вводятся предметные спецкурсы и спецсеминары, внеурочная деятельность творческой математической группы органически связана со специальными аудиторными формами учебной работы по математике. В тех школах, где внеурочная математическая деятельность поставлена основательно, где имеются несколько математических кружков, творческие математические группы, где активно внедряются формы аудиторных занятий по математике, в последнее время получило распространение создание научных математических обществ.

Математические игры и соревнования

Математическое соревнование – это форма учебной деятельности учащихся, при которой участники стремятся превзойти друг друга в решении математических задач.

Выделяют следующие *виды математических соревнований*: математическая олимпиада; математический бой; математический конкурс; математическая игра; математический турнир; математическая карусель; математическая викторина; математическая эстафета и др. [1].

Математические игры, несомненно, приносят пользу. Они формируют у учащихся коммуникативные компетенции, вычислительные навыки и помогают быстро находить решение математических задач. Если с интересом преподнести математику учащийся может полюбить этот предмет, даже если он ему на данный момент не совсем нравится, или он испытывает трудности при его изучении. Урок, построенный в виде математической игры, даст возможность школьникам учиться с увлечением.

Игры-соревнования, как видно из названия, построены на соревновательности, состязательности в области познания. Они требуют от ребят проявления смекалки, разносторонних знаний. По своему характеру это интеллектуальные состязания, выходящие за пределы содержания учебных программ и учебников. В них всегда есть победители и проигравшие. Выигрыш или проигрыш в игре стимулирует познавательную активность учащихся: желание читать, узнавать новое, расширять круг своих знаний.

Математические игры должны разрабатываться с учетом предмета и специфики его материала, они должны быть разнообразными.

Вот некоторые виды таких игр:

- настольные игры (математическое лото, кроссворд);
- математические мини-игры;
- викторины;
- математические конкурсы;
- игры-путешествия;
- математические лабиринты;
- математическая карусель;
- бои;
- регаты.

Приведем несколько примеров игр.

Математические викторины легко организовать. В них может принять участие каждый желающий. Суть их заключается в том, что участникам задаются вопросы, на которые они должны ответить.

На обдумывание ответа дается несколько секунд. Отвечает тот, кто первым поднимет руку. Если ответ не полный, то можно предоставить возможность высказаться еще и другому участнику. За правильный ответ присуждается определенное количество очков.

Победителями становятся участники, набравшие наибольшее количество баллов.

Возможны случаи, когда викторины проводятся для команд. В этом случае каждой команде зачитывается определенное количество вопросов, возможны варианты ответов на них. Участники команд должны за определенное время ответить правильно на как можно большее количество вопросов. Выигрывает команда, давшая больше правильных ответов. Вопросы, задаваемые командам должны быть равноценными.

Математический конкурс – это соревнование, имеющее целью выделить лучших из числа участников. Конкурсы позволяют организовать досуг учащихся, систематически повышать интерес к математике, развивать склонности и способности школьников, прививать вкус к самостоятельному чтению математической литературы, выявлять одаренных детей. Конкурсы способствуют повышению качества знаний. Они могут быть эффективны и в том случае, когда у ребенка отсутствует познавательный интерес, поскольку позволяют вызвать этот интерес. Конкурсы обладают большим эмоциональным воздействием, как на участников, так и на зрителей [2].

Среди различных форм внеклассной работы по математике особое место занимают *математические вечера*, конференции и веселые турниры. Присущий им дух соревнований и юмор нравится, как младшим, так и старшим школьникам. Для некоторых ребят такие турниры становятся началом большого пути в математику. Задорные состязания способствуют

сплочению коллектива учащихся, укреплению их дружбы. В школе появляются новые художники и поэты, становятся больше весёлых, остроумных и общительных людей. Пусть даже незначительный успех в математических играх вселит в них уверенность в своих силах, а это может привести и к более усиленным занятиям и действительным успехам по математике.

В 5-х классах главной целью внеурочной деятельности по математике является развитие интереса к предмету, вселение уверенности в свои силы. Как показывает практика, правильно организованная внеурочная деятельность по математике – залог высокого качества обучения на уроках.

ЛИТЕРАТУРА

1. Борисова А. Игры в которых можно играть на уроке // Математика – 2006. – №23.
2. Валеева Л. Математическая игра Что? Где? Когда? // Математика – 2010. – №12.
3. Ильина Т.А. Педагогика: курс лекций: учеб. Пособие для пед. институтов / Т. А. Ильина. – М.: Просвещение, 1984. – С. 118.
4. Методика преподавания математики в средней школе: Общ. методика: Учеб. пособие/ Сост. Р.С. Черкасов, А.А. Столяр. – М.: Просвещение, 1985.
5. Сидорова Е.Г. Старинные задачи // Математика в школе. – 1994. – № 5
6. Советова Е.В. Система воспитательной работы в школе / Е. В. Советова, О. В. Шувалова. – М.: Чистые пруды, 2008. – С. 8.
7. Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования. Ст. 13.

ПОВЫШЕНИЕ ИНТЕРЕСА К МАТЕМАТИКЕ У ОБУЧАЮЩИХСЯ ПРИ ПРОВЕДЕНИИ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

Г.А. Кирюхина, к.ф.-м.н., доц.
Академия Федеральной службы охраны РФ
e-mail: galina.kiruhina.new@yandex.ru

Интерес обучающихся к математике зависит от качества постановки учебной работы на аудиторном занятии. Привитие этого интереса – большая заслуга преподавателя. Одной из причин сравнительно невысокой успеваемости является слабый интерес курсантов первого года обучения к этой дисциплине. Особенно это наблюдается в первые месяцы после их поступления, когда еще слаба мотивация, не понятны дальнейшие пер-

спективы. Немало курсантов считают математику «скучной, сухой наукой».

В любой учебной группе, наряду с обучающимися со слабым интересом к математике, всегда есть и другие курсанты, которые увлекаются этим предметом. Им не хватает только тех знаний, которые они получают на занятии. Они хотят больше узнавать о математике, о ее приложениях, о том, где в будущем применят полученные знания в жизни и на службе. Такие курсанты просят решать более трудные математические задачи.

Использование нестандартных форм и методов обучения могут использоваться для углубления, дифференциации и систематизации знаний обучающихся в области программного материала, развития пространственного воображения, логического мышления, навыков исследовательского характера, развития правильной речи, привития навыков изучения и анализа математической литературы у курсантов.

Из всех видов аудиторных занятий по математике рассмотрим практические занятия. Остановимся на описании наиболее интересных и проводимых уже несколько лет занятий, результат проведения которых можно методически проанализировать.

Тема «Введение в математический анализ» для первокурсников бывает достаточно сложной и абстрактной. Однако понятие предела в математике крайне важное, и его понимание необходимо.

Предварительно вводятся математические символы и кванторы. Учеными-математиками и методистами поощряется употребление этих знаков и сокращений, особенно при решении математических задач. Тренировать запоминание символов нужно систематически как «разминку». В течение нескольких минут первых занятий проводится небольшой математический диктант. Например: 1) запишите, что числовая последовательность ограничена сверху; 2) запишите, что числовая последовательность неубывающая; 3) запишите определение предела числовой последовательности по Коши; 4) запишите определение числовой последовательности функции по Гейне.

Такие задания развивают мыслительную деятельность курсантов, их абстрактное и логическое мышление, понимание дефиниций в математике.

Числовая последовательность – древний математический объект, встречающийся еще у греческих, египетских, индийских и китайских ученых. В основном, рассматривались арифметическая и геометрическая прогрессии. Пределом последовательности определяется и одно из важных трансцендентных чисел, употребляемых в математике – число e (основание натурального логарифма, экспонента), необходимое для различных вычислений. С помощью этого числа устанавливается связь между функциями действительного и комплексного переменного. Формулы Л. Эйлера указывают на возможность на привлечение больших возможностей благодаря комплексным числам. Также в качестве примера рассматривается линей-

ная рекуррентная последовательность Фибоначчи. Курсант второго года обучения на внеаудиторном мероприятии делает сообщение с компьютерной презентацией о большой разнообразии того, где мы встречаем в живой и неживой природе числа этой последовательности.

Данная тема является базовой для всего курса математического анализа и имеет различные прикладные аспекты. Это и внутридисциплинарные связи: другие разделы математики, и межпредметные связи: физика, электротехника и т. д. Из вышеизложенного вытекает, что последовательности – простые модели явлений и процессов реального мира, обладающие интересными структурными свойствами (монотонность, ограниченность) и имеющие различное качественное поведение (иметь или не иметь предел). Рассматриваемая тема прививает у курсантов навыки мыслительной деятельности, развивает математические способности и творческое мышление, тем самым формируя соответствующие компетенции. Проблемное обучение – лучшее средство для активизации деятельности курсантов.

Пример с последовательностями мы рассмотрели, чтобы показать, как можно учить курсантов запоминать трудные темы.

Теперь приведем пример как запомнить надолго саму форму занятия. При изучении темы «Элементы теории функций комплексного переменного» вводится понятие интеграла функции комплексного переменного и методы его вычисления. Тема также достаточно трудная и методов интегрирования несколько в зависимости от разных данных. Но несмотря на все трудности опрос курсантов проходит в игровой форме. Учебная группа разбивается на несколько подгрупп по 4–5 человек – команд (по возможности дифференцированно). Каждой подгруппе предлагается карточка с четырьмя примерами на лицевой стороне и четырьмя «ячейками» на оборотной. Задание: вычислить четыре интеграла и найденные значения вписать в соответствующую «ячейку». В результате чего получится некоторое четырехзначное число, которое кое-что означает. Преподаватель оценивает скорость и правильность выполнения заданий каждой командой. Если члены команды правильно распределяют выполнение, то скорость будет высокой. Интегралы в заданиях подобраны таким образом, чтобы, во-первых, были рассмотрены все изученные к тому моменту методы решения, и, во-вторых, чтобы с заданиями справились и слабоуспевающие курсанты тоже. В 2015/2016 учебном году зашифрованное число было 2020 – год выпуска учебных групп (рисунок 1).

На одном из практических занятий по теме «Числовые и функциональные ряды» проводится опрос по теории также «покомандно», но только команды формируются по рядам сидящих друг за другом. Впередисидящий отвечает письменно на вопрос и передает листок назад своему товарищу (так называемая детская игра «Гармошка» (рисунок 2)). Преподаватель снова оценивает правильность и скорость ответов.

- 1) $\int_{\Gamma} (1-z) \cos z \, dz$ от $z_1 = -\frac{\pi}{2}$ до $z_2 = \frac{\pi}{2}$;
- 2) $\int_{\Gamma} \frac{dz}{(z-1)^3}$, Γ – окружность $(x-4)^2 + (y+5)^2 = 4$;
- 3) $\frac{4e}{1-e} \int_{\Gamma} z e^{z^2} \, dz$ от точки $A(0)$ до точки $B(i)$;
- 4) $\int_{\Gamma} (x-iy) \, dz$, Γ – отрезок $AB : z_A = -1-i, z_B = 1+i$.

Группа:			
ФИО:			

Рисунок 1 – Учебные примеры

Сформулируйте признак Лейбница для знакочередующегося ряда
Сформулируйте любые два свойства абсолютно сходящихся рядов
Сформулируйте теорему Римана для условно сходящегося ряда
Сформулируйте теорему об остатке знакочередующегося ряда

Рисунок 2 – Гармошка

Интерес к таким формам проведения практических занятий очень большой. Бывает, что через несколько лет на встречах с молодыми уже лейтенантами вспоминали, как они, играючи и смеясь, вычисляли интегралы и составляли число года их выпуска!

Нестандартные формы и методы обучения при проведении занятий по математике создают большие возможности для решения целого ряда образовательных, развивающих и воспитательных задач, стоящих перед преподавателем. Они стимулируют устойчивый интерес к обучению курсантов в академии, получению ими новых знаний, умений и навыков, формированию необходимых компетенций, воспитанию настойчивости, инициативы, чувства коллективизма. Все это приносит пользу и преподавателю. Это благотворно сказывается на качестве занятий по математике.

ЛИТЕРАТУРА

1. Балк М. Б. Математика после уроков. – М.: Просвещение, 1971. – 462 с.
2. Лунгу К. Н. Систематизация приемов учебной деятельности студентов при обучении математике. – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2010. – 424 с.
3. Кирюхина Г. А. Дифференцированное обучение математике в организации самостоятельной работы курсантов военного вуза. *CONTINUUM Математика. Информатика. Образование.* № 3. – Елец, ЕГУ, 2016. – с. 60-65.

ТРЕБОВАНИЯ К ГЕОМЕТРИЧЕСКОМУ ЧЕРТЕЖУ

И.С. Логунов, к.ф.-м.н., доц.

ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет им И.С. Тургенева»

В работе описываются принципиальные и методические требования, предъявляемые к учебному чертежу в геометрии.

Геометрические сведения и практические навыки необходимы при изучении инженерно-технических дисциплин в различных учебных заведениях и на производстве. Основными требованиями к чертежу являются его правильность и наглядность. Поэтому каждый чертеж к задаче или теореме можно рассматривать как наглядное пособие, отвечающее некоторому перечню научно-методических требований.

При выполнении чертежа на доске перед студентами или учащимися преподаватель должен владеть основами начертательной геометрии и технического черчения. Прямолинейные фигуры можно чертить мелом от руки, используя глазомер и здравый смысл, а при изображении окружностей и более сложных фигур следует использовать циркуль, линейку и другие доступные геометрические инструменты.

Особые требования предъявляются к чертежам пространственных фигур, т.к. многие привычные для плоскости величины углов и длины отрезков искажаются при переходе к пространству. Кроме того, иногда трудно вообще определить, пересекаются линии или нет.

При построении учебных геометрических чертежей в основном используется фронтальная проекция фигур, выполняемая при параллельном, реже ортогональном или центральном проектировании, содержащая минимальное количество правил построения. Укажем эти основные правила и свойства параллельного проектирования.

1. Прямолинейные фигуры изображаются прямолинейными же фигурами (сохраняются прямолинейность и взаимная принадлежность точки и прямой).
2. Проекция отрезка, параллельного плоскости проекций, не изменяет размеров отрезка-оригинала независимо от его расстояния до плоскости проекций.
3. Проекция перпендикулярного плоскости проекций отрезка-оригинала изображается в виде отрезка, направленного под углом 45° к горизонтали на чертеже, а его длина уменьшается вдвое (рисунок 1).

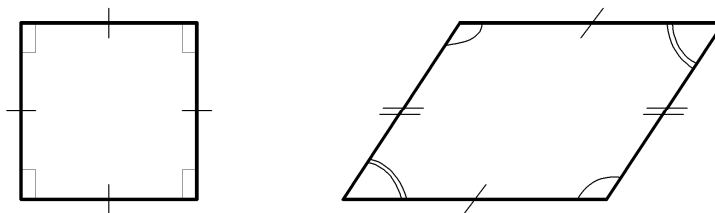


Рисунок 1 – Квадрат и параллелограмм

4. При изображении круглых тел следует круги, лежащие в непараллельных плоскости проекции плоскостях, изображать эллипсами. Если плоскость круга является горизонтальной, то большая ось эллипса располагается также на горизонтальной прямой чертежа (рисунок 2).

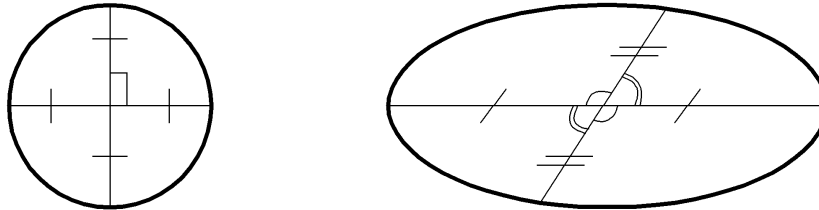


Рисунок 2 – Окружность и эллипс

Для грамотного и наглядного изображения любой из фигур учебной практики указанных простых правил вполне достаточно. Но иногда к этим правилам добавляется некоторые дополнительные условности:

- все фигуры из условия теоремы или задачи изображаются сплошными линиями наиболее подходяще толщины;
- вспомогательные и осевые линии чертят в виде штрих-пунктиров меньшей толщины, это же относится и к невидимым частям пространственных фигур (тел);
- плоские сечения штрихуются параллельно сплошными отрезками;
- равные отрезки перечеркиваются одинаковым количеством штрихов;
- равные углы отмечают перечеркиванием одинаковым количеством дуг.

Указанные выше правила и принципы являются общими для геометрического черчения и начертательной геометрии.

Кратко остановимся на методике построения чертежей и их понимании учащимися и студентами. Обычно плоский чертеж условно изображает геометрическую фигуру-оригинал и играет при этом двойную роль: он иллюстрирует теорему курса или задачу практики. При иллюстрации теоремы или аксиомы, которые обычно имеют общий, абстрактный характер, надо изображать фигуру так, чтобы она относилась к наиболее общему случаю фигур рассматриваемого вида, а не к частному. Например, при иллюстрации теоремы косинусов или синусов, следует изображать разносторонний, а не прямоугольный, равнобедренный или равносторонний треугольники.

В некоторых учебных пособиях и публикациях это требование иногда не соблюдается, что может привести к некоторым недоразумениям в понимании смысла теоремы или аксиомы.

При графическом иллюстрировании задачи чертеж наоборот должен соответствовать именно частному случаю данной фигуры. Например, если трапеция-оригинал является прямоугольной и отношение длин оснований равно 1:2, то начертить следует именно такую, подобную данной трапецию.

Задачи на построение и вычисление в геометрии довольно серьёзно отличаются друг от друга по многим параметрам. В задачах первого типа все чертежи следует выполнять строго инструментами (циркуль, линейка, транспортир, прямой угол и т.д.) по указанным выше правилам параллельного проектирования.

Напротив, чертежи в задачах вычислительного типа допустимо выполнять от руки с наиболее точным соблюдением линейных и угловых размеров данных элементов фигур-оригиналов. После прочтения условия задачи полезно провести его анализ с одновременным выполнением рисунка последующим его уточнением и доведением до статуса чертежа.

Поводом для появления настоящей статьи явилось наблюдение автором «шедевральных» чертежей в некоторых учебных пособиях и письменных работах студентов и школьников.

УДК 372.851

ПЕРСПЕКТИВЫ ЭЛЕКТРОННОГО ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ В СИСТЕМЕ РОССИЙСКОЙ ВЫСШЕЙ ШКОЛЫ

Т.Л. Овсянникова, к.п.н., доц.

ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет им. И.С. Тургенева»

А.С. Тугарев, к.т.н., доц.

ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет им. И.С. Тургенева»

В развитии системы высшего образования можно видеть противоречивые тенденции. С одной стороны, непрерывно расширяется объём информации, которую необходимо освоить в процессе получения высшего образования, а с другой стороны – объём изучаемых курсов имеет тенденцию к уменьшению (в частности, можно отметить радикальное сокращение трудоёмкости большинства дисциплин, произошедшее при переходе к двухуровневой системе высшего образования). Разрешить это противоречие возможно путём интенсификации процесса обучения за счёт минимизации времени на типовые действия на основе широкого внедрения информационных технологий.

Система обучения, основанная на использовании компьютерных технологий, всё чаще обозначается термином «электронное обучение», калькированным с англоязычного термина E-learning. Электронное обучение можно разделить на реализуемое непосредственно в учебном заведении (с использованием компьютеров) и дистанционное, реализуемое только через интернет.

Первоначально (до развития интернета) термин «дистанционное обучение» обозначал преимущественно заочное обучение – с передачей

информации преимущественно по почте или при редких (раз в месяц или реже) визитах в учебное заведение. Имели место и иные формы дистанционного обучения (например, телелекции, передача материалов на CD-ROM и т.п.), но все они были вытеснены в начале XXI века интернет-технологиями.

Среди основных технологий электронного обучения можно выделить:

- сетевое общение обучающихся с преподавателями;
- изучение вынесенного в сеть образовательного контента (текста, изображений, видео, а также материалов, оформленных в виде интерактивных электронных учебников) – часто с ограниченным доступом или выдаваемого последовательно;
- изучение материалов, находящихся в сети на других сайтах (обучающих, информационных и т.п.);
- автоматизированное тестирование в режиме реального времени;
- пересылка по сети файлов (как правило, от студента преподавателю) с материалами контрольных работ, проектов и т.п.

Очевидно, что все эти технологии вполне могут быть распространены и на традиционное очное обучение – кроме разве что первой из вышеупомянутых. Такая система обучения, обозначаемая англоязычным термином *Blended Learning* и русскоязычным (не вполне общепринятым) термином «смешанное обучение» [1], имеет достаточно большие перспективы развития.

Долгое время широкому внедрению дистанционного и смешанного обучения в России мешала неопределённость статуса электронных форм обучения, однако в апреле 2013 года Министерство образования и науки РФ года выпустило документ, стимулирующий развитие в вузах всех реально существующих форм электронного обучения.

Развитие электронного обучения наиболее очевидно для учебных дисциплин, не требующих изучения специфического оборудования или формирования моторных навыков либо приобретения опыта устного выступления.

Несомненно, что к группе дисциплин, наиболее приспособленных к переводу на электронное обучение, относится и математика, в большей или меньшей степени присутствующая в большинстве вузовских образовательных программ. Рассмотрим возможности электронного (дистанционного и смешанного) обучения математике в российской высшей школе.

Системы электронного обучения можно разделить на:

- локальные – реализуемые отдельными преподавателями, кафедрами или факультетами;
- вузовские (например, системы электронного обучения, реализованные в НИУ ВШЭ и РУДН);

– межвузовские, предполагающие обмен учебными материалами и технологиями обучения (например, ассоциация «Сибирский открытый университет» [2]);

– надвузовские, реализуемые в России под эгидой Минобрнауки (на сегодня в этом сегменте можно отметить только систему тестирования i-exam.ru, которую разработал Научно-исследовательский институт мониторинга качества образования)

– вневузовские: массовые открытые онлайн-курсы (MOOK) – бесплатные и коммерческие, системы тестирования и коллекции учебных материалов.

Развёртывание вузовских систем электронного обучения, как правило, реализуется на основе систем управления обучением – LMS (learning management systems). В российских вузах используется не менее трёх десятков различных LMS, среди которых: Moodle, Blackboard, Sakai, eFront, ATutor, SITOS, ILIAS, Claroline, OLAT, learn eXact, SharePoint LMS (Enigma), e-University, IBM Lotus Workplace Collaborative Learning, Dokeos, OpenACS, LON-CAPA, Docebo, Прометей, iSpring, WebTutor, TrainingWare, STELLUS, Naumen University, СДО Доцент, СДО Стимул, eLearning 4G, Электронный университет.

Столь большое разнообразие и закрытость информации о большинстве вузовских систем управления обучением свидетельствуют о том, что вузы, как правило, самостоятельно решают организационные проблемы электронного образования, и самостоятельно генерируют образовательный контент и оценочные средства. Здесь важно отметить наличие нескольких уровней и направлений изучения математики в вузе:

1) адаптационные курсы элементарной математики, призванные ликвидировать пробелы в знаниях студентов первого курса;

2) базовый курс высшей математики для непрофильных направлений подготовки (в первую очередь – экономических и инженерных): аналитическая геометрия и линейная алгебра, основы математического анализа, теория вероятностей и математическая статистика;

3) дополнительные и разнообразные спецкурсы для инженерных направлений подготовки;

4) расширенные (относительно базового) курсы подготовки будущих учителей математики (в частности, с более углубленным изучением элементарной математики, геометрии и начал анализа);

5) дисциплины для будущих специалистов по прикладной математике и математическому моделированию;

6) дисциплины для направления подготовки 010100 (Математика).

В принципе для любой из этих групп дисциплин может быть развёрнут полноценный электронный курс.

Рассмотрим ресурсы русскоязычного сегмента интернета, которые могут быть при этом использованы. Здесь можно отметить:

– коллекции учебников, доступных в электронном виде (на сайтах mcsme.ru, math.ru, techlibrary.ru, all-library.com, ph4s.ru, twirpx.com и др.);

– математические энциклопедии (например, algebraic.ru – этот ресурс по принципам построения сходен с англоязычной энциклопедией PlanetMath);

– математические курсы на порталах мультязычных MOOK: Coursera (имеется около 20 русскоязычных курсов), в русскоязычных системах MOOK: ИНТУИТ (около 100 курсов), Лекториум (около 80 курсов); Stepic (около 20 курсов); Открытое образование (около 10 курсов), Универсариум (пока только один курс);

– коллекции видеолекций (в основном записанных в вузах, хотя есть тенденция увеличения количества лекций, специально прочитанных на камеру – без аудитории): на сайтах сайты Univertv.ru (более 200 видеолекций по математике) и Лекториум (более 400 лекций) и на видеохостингах; среди источников видеолекций по математике, ориентированных на высокий уровень подготовки, можно отметить Независимый Московский Университет (НМУ) при Московском центре непрерывного математического образования (МЦНМО), Научно-образовательный центр (НОЦ) при Математическом институте им. В.А. Стеклова Российской академии наук (МИАН), Междисциплинарную исследовательскую лабораторию имени П.Л. Чебышёва при СПбГУ, Физико-математический клуб при ПОМИ (Петербургское отделение Математического института им. В.А. Стеклова);

– коллекции задач по математике: здесь можно отметить специализированные сайты problems.ru (преимущественно элементарная математика, но не только) и ИПС «Задачи по геометрии» (zadachi.mcsme.ru), а также коллекции задач на порталах pm298.ru, math24.ru, mathprofi.ru и reshu.pf;

– специализированные сайты, посвящённые отдельным областям математики, в частности: сайт «Мир математических уравнений» (EqWorld), специализирующийся на вопросах математического анализа, математической физики и механики; математический портал Artspb.com, специализирующийся на дискретной математике, кибернетике и программировании; сайт r-project.org, специализирующийся на математической статистике; портал Eхponenta.ru, посвящённый использованию специализированных математических пакетов Maple, Mathcad, Mathematica, Matlab, Statistica и др.; сайт «Математические этюды» (etudes.ru), где представлены модели, выполненные с использованием современной компьютерной 3D-графики;

– коммерческие сайты дистанционного обучения математике можно разделить на две группы, ориентированные преимущественно на репетиторство, но включающие элементы открытого образовательного портала (книги, конспекты, видеолекции): primery.ru, math4you.ru, mathserfer.com, reshebnik.ru, matemonline.com, toehelp.ru и др.

– онлайн-калькуляторы (здесь очевидно преимущество портала wolframalpha.com, но существует и ряд русскоязычных ресурсов, оформ-

ляющих задачи с промежуточными выкладками: math-pr.com, mathserfer.com и др.); можно отметить также систему динамической геометрии GeoGebra, доступную в онлайн версии;

– редакторы курсов – как инструмент подготовки электронных учебников, интегрированных в LMS: наиболее популярны платные, но имеющие бесплатные версии редакторы CourseLab и iSpring (надстройка над MS PowerPoint), но используются также и другие средства, в частности бесплатные редакторы Xerte, eXeLearning, SoftChalk Create, Document Suite, Reload Editor и коммерческие: ActivePresenter, Adobe Captivate, Articulate Storyline, Lectora, ViewletBuilder, ToolBook, GOMO, eAuthor CBT.

– системы сетевого тестирования; надо отметить, что среди более чем десятка русскоязычных систем проверки знаний к вводу формул (и то, только преподавателем, а не студентом) и загрузке студентом файлов приспособлена только система OnlineTestPad, при этом её возможности существенно уступают англоязычной коммерческой системе WebAssign, предусматривающей широкие возможности формульного и графического ввода данных.

При использовании электронного обучения математике важно обеспечить возможность использования сетевых ресурсов и специализированного программного обеспечения при выполнении студентами заданий. Действительно, ситуация, при которой компьютер и интернет недоступны, является всё менее реальной. Кроме того, максимально широкое использование специализированного ПО позволяет:

– сокращать время решения каждой задачи за счёт рутинных преобразований, расчётов и построений;

– формировать навыки работы с разнообразными прикладными пакетами: средствами ввода формул, электронными таблицами, системами компьютерной алгебры, системами динамической геометрии, средами для численных методов и статистическими пакетами;

– перевести обмен информацией между студентом и преподавателем в безбумажную форму – в форматах используемых приложений, а также в виде текстовых файлов или веб-страниц с интегрированными формулами, чертежами, графиками, видеофрагментами.

Можно рассмотреть примерные сценарии организации электронного обучения математике:

– минимальный – элементы электронного обучения вводятся преподавателем или кафедры самостоятельно с минимальными затратами ресурсов: LMS не развёртывается; учебный контент формируется из свободно распространяемых учебников, веб-страниц, видеоматериалов, но возможно и создание оригинальных курсов; может быть рекомендовано прохождение отдельных курсов в MOOC до начала изучения дисциплины или параллельно с ней; для тестирования используются свободные системы (например, OnlineTestPad); информационный обмен между студентами и преподавателем

давателями осуществляется через электронную почту, IP-телефонию и закрытые группы социальных сетей;

– базовый – электронное обучение развёртывается на уровне кафедры, факультета или университета: LMS развёртывается в локальной сети вуза (с возможностью удалённого доступа по логинам); оригинальный контент выдаётся студентам в жёсткой увязке с пороговым тестированием; могут быть реализованы дифференциация и асинхронное прохождение модулей дисциплины; курсы MOOC могут рекомендоваться как дополнительные источники информации или заменять отдельные модули – с дополнительным тестированием; информационный обмен между студентами и преподавателями осуществляется также с использованием средств LMS;

– максимальный (требующий привлечения значительных ресурсов): создаётся специализированный портал электронного обучения, интегрирующий силы и материалы нескольких ведущих вузов, и доступный всем высшим учебным заведениям России; разрабатывается адаптированная для математики и прикладных дисциплин система тестирования и закрытый банк заданий; предусматриваются меры обеспечения честности при тестировании (например, тестирование в аудиториях учебного заведения или специально оборудованных помещениях, видеонаблюдение и т.п.).

Очевидно, что течение ближайшего десятилетия система обучения математике в российской высшей школе будет всё более смещаться в сторону электронного обучения. Предполагается даже смещение вектора электронного обучения в сторону всё более широкого использования мобильных технологий [3]. Можно предполагать, что размещение в сети образовательного контента и тестовых заданий станут нормой для абсолютного большинства российских вузов, а и их конкурентоспособность в условиях всё большего развития открытых образовательных ресурсов в значительной мере будет зависеть от того, насколько качественными будут контент, задания и методическая организация учебного процесса.

ЛИТЕРАТУРА

1. Фазлеева Э.И. Дистанционные образовательные технологии в обучении математике // Гуманитарные, социально-экономические и общественные науки. 2012. № 5.
2. Ассоциация «Сибирский открытый университет» – URL: <http://ou.tsu.ru/about/tasks.php>
3. Соловов А.В., Меньшикова А.А. Электронное обучение: вектор развития // Высшее образование в России. 2015, № 11. С. 66-75.

МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Л. К. Проскурякова, к.п.н., доц.

Академия Федеральной службы охраны РФ

Н. Н. Морозова, к.ф.-м.н., доц.

Академия Федеральной службы охраны РФ

Статья посвящена рассмотрению возможностей развития способностей обучающихся к исследовательской деятельности в процессе изучения математических дисциплин. Представлены методические подходы к организации решения прикладных задач с использованием метода математического моделирования. Продемонстрированы особенности реализации этого метода при изучении физических процессов, протекающих в электрических контурах, средствами линейных обыкновенных дифференциальных уравнений.

В условиях реализации компетентного подхода к организации образовательного процесса по курсу математики в техническом вузе в соответствии с программой Государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования возрастает необходимость развития у обучающихся способностей к исследовательской деятельности. Особое значение в связи с этим в ходе изучения математических дисциплин приобретает системная дидактически целесообразная организация освоения такого исследовательского метода как математическое моделирование.

Большими возможностями в плане математического моделирования располагает аппарат обыкновенных дифференциальных уравнений. При изучении этого раздела могут быть рассмотрены практико-ориентированные задачи, для решения которых обучающиеся располагают необходимой базой знаний по курсу физики. Использование метода математического моделирования предполагает реализацию определенного законченного цикла действий, который реально имеет место при решении подобных задач в соответствующей профессиональной области. Его основными этапами являются:

- анализ условия задачи, выяснение предметной области принадлежности задачи и определение специального предметного аппарата, который планируется использовать для решения задачи;
- выбор адекватного математического аппарата и построение математической модели рассматриваемого в задаче процесса;
- анализ, уточнение и конкретизация построенной модели; введение, при необходимости, более удобной для последующего решения символики;

- решение собственно математической задачи с отвлечением от ее прикладного содержания;
- оценка полученного математического результата;
- формулирование вывода на языке предметной области по результатам решения задачи;
- при необходимости модификация построенной модели, изменение значений входящих в нее.

Перечисленные этапы решения практико-ориентированных задач имеют место при решении задач на моделирование физических процессов, протекающих в линейных электрических цепях, с использованием линейных дифференциальных уравнений. Рассмотрим в качестве примера решение следующих задач.

Задача 1. Найти закон изменения силы тока $i = i(t)$ в замкнутом контуре, обладающем индуктивностью L и активным сопротивлением R , если электродвижущая сила (ЭДС) источника $E = E_0 \sin \omega t$ ($L, R, E_0, \omega - const$).

Р е ш е н и е:

1. Анализируя условие задачи, делаем вывод о том, что для определения закона изменения силы тока в $L - R - E$ контуре будем использовать второе правило Кирхгофа [1, с.54].

2. Строим математическую модель, соответствующую содержанию данной задачи. За независимую переменную принимаем время t , за искомую функцию – величину силы тока i , т.е. $i = i(t)$.

По второму правилу Кирхгофа получаем

$$U_L + U_R = E,$$

где $U_L = L \cdot \frac{di}{dt}$, $U_R = Ri$, $E = E_0 \sin \omega t$.

Приходим к уравнению

$$L \frac{di}{dt} + Ri = E_0 \sin \omega t,$$

которое можно рассматривать в качестве математической модели процесса изменения силы тока в рассматриваемом $L - R - E$ контуре.

3. Анализируем и уточняем полученную математическую модель. Преобразуя дифференциальное уравнение к виду

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{E_0}{L} \sin \omega t, \tag{1}$$

делаем вывод, что имеем линейное неоднородное дифференциальное уравнение (ЛНДУ) первого порядка.

4. Используя метод И. Бернулли [2, с.507], решаем полученное ЛНДУ [3, с.457].

4.1. Будем искать решение в виде произведения двух функций

$$i = u(t) \cdot v(t). \quad (2)$$

При этом одну из функций выбираем произвольно, но так, чтобы функция (2) удовлетворяла уравнению (1).

Находим производную

$$\frac{di}{dt} = v \frac{du}{dt} + u \frac{dv}{dt}.$$

4.2. Подставляя функцию (2) и ее производную в уравнение (1), получаем

$$v \frac{du}{dt} + u \frac{dv}{dt} + \frac{R}{L} uv = \frac{E_0}{L} \sin \omega t$$

или

$$v \frac{du}{dt} + u \left(\frac{dv}{dt} + \frac{R}{L} v \right) = \frac{E_0}{L} \sin \omega t. \quad (3)$$

4.3. В силу возможности произвольного выбора одной из функций $u(t)$, $v(t)$, выбираем произвольно функцию $v(t)$ так, чтобы она была частным решением дифференциального уравнения

$$\frac{dv}{dt} + \frac{R}{L} v = 0 \quad (4)$$

при условии, что произвольная постоянная $C = 0$ и функция $v(t) > 0$.

Уравнение (4) – это уравнение с разделяющимися переменными. Решая его, находим функцию $v(t)$ с учетом выдвинутых ограничений на C и $v(t)$:

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{R}{L} v, \quad \frac{dv}{v} = -\frac{R}{L} dt, \quad \ln v = -\frac{R}{L} t.$$

Таким образом,

$$v = e^{-\frac{R}{L} t}. \quad (5)$$

4.4. Определяем функцию $u(t)$, подставляя найденную функцию $v(t)$ в уравнение (3) и учитывая равенство (4):

$$e^{-\frac{R}{L} t} \cdot \frac{du}{dt} = \frac{E_0}{L} \sin \omega t, \quad du = \frac{E_0}{L} e^{\frac{R}{L} t} \cdot \sin \omega t dt,$$

$$u = \frac{E_0}{L} \int e^{\frac{R}{L} t} \cdot \sin \omega t dt.$$

Полученный интеграл находится методом интегрирования по частям, использование которого в данном случае представляет собой достаточно трудоемкий процесс, поскольку предполагает двукратное применение ме-

тогда с последующим решением уравнения относительного искомого интеграла. В условиях дефицита учебного времени занятия можно предложить обучающимся воспользоваться для нахождения интеграла справочной таблицей интегралов.

Согласно формуле 577.1 [4, с.118]:

$$\int e^{ax} \cdot \sin nxdx = \frac{e^{ax}}{a^2 + n^2} (a \sin nx - n \cos nx),$$

функция $u(t)$ может быть представлена в виде

$$u = \frac{E_0}{L} \cdot \frac{e^{\frac{R}{L}t}}{\frac{R^2}{L^2} + \omega^2} \left(\frac{R}{L} \sin \omega t - \omega \cos \omega t \right) + C. \quad (6)$$

В целях совершенствования умений обучающихся интегрировать функции полезно предложить им убедиться в справедливости полученного выражения (6), выполнив самостоятельно процедуру интегрирования в часы внеаудиторной самостоятельной работы.

4.5. Записываем общее решение дифференциального уравнения (1) согласно формуле (2), используя выражения (5) и (6):

$$i = u(t) \cdot v(t) = \frac{E_0}{L} \cdot \frac{1}{\frac{R^2}{L^2} + \omega^2} \left(\frac{R}{L} \sin \omega t - \omega \cos \omega t \right) + C e^{-\frac{R}{L}t}$$

или

$$i(t) = \frac{E_0}{R^2 + L^2 \omega^2} (R \sin \omega t - \omega L \cos \omega t) + C e^{-\frac{R}{L}t}. \quad (7)$$

Необходимо отметить, что процедура решения полученного в процессе рассмотрения данной задачи ЛНДУ имеет собственно математическое значение, поскольку позволяет обучающимся закрепить метод решения такого типа дифференциальных уравнений первого порядка и сделать более гибкими умения по его применению, поскольку метод реализуется в общем виде с использованием символики, принятой в физике и электротехнике.

5. Даем оценку полученному математическому результату. Второе слагаемое в правой части равенства (7) содержит показательную функцию с основанием $e > 1$ и величины $R, L > 0$. Следовательно, если $t \rightarrow +\infty$, то

$C e^{-\frac{R}{L}t} \rightarrow 0$, а значит,

$$i(t) \approx \frac{E_0}{R^2 + L^2 \omega^2} (R \sin \omega t - \omega L \cos \omega t).$$

6. В силу того, что решаемая задача имеет физический смысл, интерпретируем полученный результат с физической точки зрения, т.е. на языке ее предметной области.

Искомой функцией $i(t)$ является сила тока, а независимой переменной t – время. Для облегчения исследования характера изменения сила тока в данном контуре преобразуем формулу (7):

$$i(t) = \frac{E_0}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} \left(\frac{R}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} \sin \omega t - \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} \cos \omega t \right) + Ce^{-\frac{R}{L}t}.$$

Так как сумма квадратов коэффициентов при $\sin \omega t$ и $\cos \omega t$ равна единице, то считаем, что

$$\frac{R}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} = \cos \varphi, \quad \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} = \sin \varphi,$$

где φ – некоторый угол. Обозначая при этом

$$\frac{E_0}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} = A,$$

получаем

$$i(t) = A(\cos \varphi \sin \omega t - \sin \varphi \cos \omega t) + Ce^{-\frac{R}{L}t}$$

или, с учетом известной формулы тригонометрии,

$$i(t) = A \sin(\omega t - \varphi) + Ce^{-\frac{R}{L}t}. \quad (8)$$

На заключительном этапе решения данной задачи, используя результаты п.5, делаем вывод о том, что в рассматриваемом $L - R - E$ контуре с течением времени величина $Ce^{-\frac{R}{L}t}$ очень быстро стремится к нулю и перестает оказывать заметное влияние на силу тока. Практически через короткий промежуток времени после включения ток в контуре можно считать установившимся и изменяющимся по тригонометрическому закону, т.е. гармонически:

$$i(t) \approx A \sin(\omega t - \varphi),$$

где A – амплитуда колебаний, ω – циклическая (круговая) частота, φ – начальная фаза.

Таким образом, сила тока в контуре, как и заданная ЭДС подчиняются синусоидальному закону с той же частотой, но между ЭДС и силой тока существует сдвиг по фазе [5, с.348], [6, с.26].

В процессе дискуссионного обсуждения полученного результата решения ЛНДУ (1) полезно напомнить обучающимся, что найденное его

общее решение (8) представляет собой сумму общего решения $Ce^{-\frac{R}{L}t}$ соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения (ЛОДУ)

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = 0$$

и частного решения ЛНДУ (1) при $C = 0$. Причем последнее дифференциальное уравнение является математической моделью процесса изменения тока в $L - R$ контуре с отсутствующим внешним источником и, как было

установлено ранее, величина силы тока $Ce^{-\frac{R}{L}t}$ с течением времени убывает, что согласуется с конструкцией этого контура.

Задача 2. Найти закон изменения заряда на обкладках конденсатора емкостью C , включенного последовательно с катушкой индуктивностью L , при наличии в контуре источника с ЭДС $E = E_0 \sin \omega t$ ($L, R, E_0, \omega - const$).

Р е ш е н и е:

1. Анализ условия задачи позволяет сделать вывод о том, что для определения закона изменения заряда на обкладках конденсатора в $L - C - E$ контуре необходимо, как и в задаче 1, использовать второе правило Кирхгофа.

2. Принимая за независимую величину время t , а за искомую функцию – величину заряда $q = q(t)$, строим математическую модель процесса изменения заряда на полюсах конденсатора в данной цепи

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{1}{C} q = E_0 \sin \omega t.$$

3. Преобразуем полученное дифференциальное уравнение к виду

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{1}{LC} q = \frac{E_0}{L} \sin \omega t$$

или

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \omega_0^2 q = \frac{E_0}{L} \sin \omega t, \quad (9)$$

где $\frac{1}{LC} = \omega_0^2$.

Делаем вывод о том, что это – ЛНДУ второго порядка с постоянными коэффициентами. Будем для определенности считать, что $\omega_0 \neq \omega$.

4. Используя теорему о структуре общего решения ЛНДУ второго порядка [7], с.470, находим общее решение уравнения (9) как сумму его некоторого частного решения $\check{q}(t)$ и общего решения $q^*(t)$ соответствующего ЛОДУ

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \omega_0^2 q = 0. \quad (10)$$

4.1. Согласно теореме о структуре общего решения ЛОДУ [7, с.462], общее решение уравнения (10) находим в виде

$$q^*(t) = C_1 q_1(t) + C_2 q_2(t),$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные, $q_1(t), q_2(t)$ – линейно независимые на $(0; \infty)$ решения этого уравнения.

Составляем для ЛОДУ (10) с постоянными коэффициентами характеристическое уравнение

$$k^2 + \omega_0^2 = 0.$$

В соответствии с корнями этого алгебраического уравнения $k_{1,2} = \pm i\omega_0$ записываем общее решение уравнения (10)

$$q^* = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t.$$

4.2. Находим частное решение $\check{q}(t)$ ЛНДУ (9) согласно виду его правой части $f(t) = \frac{E_0}{L} \sin \omega t$ и, учитывая, что числа $\pm i\omega$ не являются корнями характеристического уравнения:

$$\check{q} = B \cos \omega t + C \sin \omega t, \quad (11)$$

где B, C – коэффициенты, которые, которые подлежат определению.

Находим производные

$$\begin{aligned} \frac{d\check{q}}{dt} &= -B\omega \sin \omega t + C\omega \cos \omega t, \\ \frac{d^2 \check{q}}{dt^2} &= -B\omega^2 \cos \omega t - C\omega^2 \sin \omega t. \end{aligned}$$

Подставляем функцию $\check{q}(t)$ и ее вторую производную в левую часть ЛНДУ (9)

$$-B\omega^2 \cos \omega t - C\omega^2 \sin \omega t + B\omega_0^2 \cos \omega t + C\omega_0^2 \sin \omega t = \frac{E_0}{L} \sin \omega t$$

Приравнивая коэффициенты при $\cos \omega t$ и $\sin \omega t$, находим B и C :

$$-B\omega^2 + B\omega_0^2 = 0, \quad B = 0 ;$$

$$-C\omega^2 + C\omega_0^2 = \frac{E_0}{L}, \quad C = \frac{E_0}{L(\omega_0^2 - \omega^2)}.$$

В силу формулы (11) получаем частное решение ЛНДУ (9)

$$\check{q} = \frac{E_0}{L(\omega_0^2 - \omega^2)} \sin \omega t.$$

4.3. Записываем общее решение ЛНДУ (9)

$$q = q^*(t) + \check{q}(t) = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t + \frac{E_0}{L(\omega_0^2 - \omega^2)} \sin \omega t. \quad (12)$$

5. Даем оценку полученному математическому результату. Обозначив

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}, \quad \sin \varphi = \frac{C_1}{A}, \quad \cos \varphi = \frac{C_2}{A},$$

получим решение (12) в виде

$$q = A \sin(\omega_0 t + \varphi) + \frac{E_0}{L(\omega_0^2 - \omega^2)} \sin \omega t. \quad (13)$$

Таким образом, общее решение ЛНДУ (9) представляет собой сумму двух тригонометрических функций.

6. Проанализируем найденное решение с физической точки зрения.

Первое слагаемое в формуле (13) есть общее решение ЛОДУ (10), которое представляет собой математическую модель процесса изменения заряда на полюсах конденсатора в $L - C$ контуре с отсутствующим источником, т.е. математическую модель так называемого свободного колебания с амплитудой A , заданной частотой ω_0 и начальной фазой φ (A , φ – произвольные постоянные).

Второе слагаемое в формуле (13) – частное решение ЛНДУ (9) определяет так называемое вынужденное колебание, которое имеет ту же частоту ω , что и источник. Его амплитуда

$$\frac{E_0}{L(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

постоянна. Однако если частота ω_0 собственного колебания близка к частоте вынужденного колебания, т.е. к частоте ω источника, то разность $\omega_0^2 - \omega^2$ становится близкой к нулю и амплитуда колебаний резко возрастает. Такое явление называется резонансом [8, с.188].

Организуемая таким образом работа с практико-ориентированными задачами способствует более глубокому усвоению обучающимися теоретического материала, совершенствованию у них устойчивых умений по использованию необходимых для решения таких задач математических методов, формированию понимания прикладного значения изучаемого математического аппарата и развитию способностей по практическому ис-

пользованию метода математического моделирования, который в настоящее время находит широкое применение в различных областях науки и техники.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тверской, Н. В. Справочное пособие по физике / Н.В. Тверской, В.Н. Юшин ; под общ. Ред. М.С. Мартынова. – Орел : Академия ФСО России, 2010. – 274 с.
2. Натансон И. П. Краткий курс высшей математики. – М.: Изд-во «Наука», 1968. – 727 с.
3. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления для вузов. Т. 1. – М.: Изд-во «Наука», 1965. – 548 с.
4. Двайт Г. Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы. – М.: Изд-во «Наука», 1973. – 228 с.
5. Курс математического анализа. Т. 2. Учебное пособие для студентов заочников физ.- мат. фак-тов пед. ин-тов. Под ред. проф. Б.З. Вулиха. М., «Просвещение», 1972. – 439 с.
6. Смирнов В. И. Курс высшей математики. Том II. – М.: Изд-во «Наука», 1967. – 655 с.
7. Игнатьева А. В., Краснощекова Т. И., Смирнов В. Ф. Курс высшей математики. Под ред. П. И. Романовского. – М.: Высшая школа, – 1964, 682 с.
8. Федорова С.И. Математический анализ. Учебно-методическое пособие. – Орёл: ОВВКУС, 1991. – 218 с.

ФОРМИРОВАНИЕ ИКТ-КОМПЕТЕНЦИЙ ПРИ ИЗУЧЕНИИ МЕТОДОВ ДИСПЕРСИОННОГО АНАЛИЗА

А.А. Русаков, д.п.н., проф.

ФГБОУ ВО «Московский технологический университет»

e-mail: *v.m.kafedra@yandex.ru*

В.Н. Русакова, к.п.н., доц.

ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева»

e-mail: *v.n.rusakova@yandex.ru*

Е.С. Саватеева, к.п.н.

ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева»

e-mail: *katrin_s@mail.ru*

В статье рассматривается методика формирования ИКТ-компетенций за счет применения инструмента MS Excel «Однофакторный дисперсионный анализ» при обучении студентов гуманитарных и прикладных направлений подготовки методам соответствующего раздела изучаемой математической дисциплины.

Важнейшей целью обучения математическим дисциплинам студентов гуманитарных и прикладных направлений подготовки является овладение инструментарием математических методов обработки результатов экспериментов.

Значительную роль в проведении научного исследования играет анализ полученных данных. Будущий специалист должен понимать, что выводы, сделанные на основе только интуитивных, умозрительных заключений не могут иметь научной и практической ценности. В отличие от эмпирических, математические методы дают строго обоснованное подтверждение предположениям исследователя. Именно поэтому, наиболее правдоподобными считаются выводы, подтвержденные математическими методами. Для увеличения степени достоверности заключений и обобщения информации, получаемой в ходе практических исследований, применяются, в том числе, различные методы математической статистики.

Для оценки влияния различных факторов на результат эксперимента, а также для последующего планирования аналогичных экспериментов применяется такой статистический метод как дисперсионный анализ [1-3].

На практике дисперсионный анализ применяют, чтобы установить, оказывает ли на изучаемую величину X существенное влияние некоторый качественный фактор F , который имеет m уровней F_1, F_2, \dots, F_m . Число испытаний одинаково и равно n .

Основная идея дисперсионного анализа состоит в сравнении «факторной дисперсии», порождаемой воздействием фактора, и «остаточной дисперсии», обусловленной случайными причинами. Если различие между этими дисперсиями значимо, то фактор оказывает существенное влияние

на X ; в этом случае средние наблюдаемых значений на каждом уровне (групповые средние) различаются значительно. Другими словами, проверяется нулевая гипотеза H_0 о равенстве математических ожиданий.

Для этого находятся:

Компоненты дисперсии	Сумма квадратов	Число степеней свободы	Средний квадрат
Межгрупповая (факторная) сумма квадратов отклонений	$Q_1 = \frac{\sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n x_{ij} \right)^2}{n} - \frac{\left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij} \right)^2}{mn}$	$k_1 = m - 1$	$s_1^2 = \frac{Q_1}{m - 1}$
Внутригрупповая (остаточная) сумма квадратов отклонений	$Q_2 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij}^2 - \frac{\sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n x_{ij} \right)^2}{n}$	$k_2 = m(n - 1)$	$s_2^2 = \frac{Q_2}{m(n - 1)}$
Общая (полная) сумма квадратов отклонений	$Q_2 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij}^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij} \right)^2}{mn}$	$k = mn - 1$	

В случае однофакторного комплекса условий средние квадраты s_1^2 и s_2^2 являются несмещенными выборочными оценками одной и той же дисперсии σ^2 .

Таким образом, проверка нулевой гипотезы H_0 сводится к проверке существенности различия s_1^2 и s_2^2 .

Гипотеза H_0 отвергается, если фактически вычисленное значение статистики $F = \frac{s_1^2}{s_2^2}$ больше критического F_{α, k_1, k_2} , определенного на уровне значимости α по таблице критических точек распределения F Фишера-Снедекора (приложение 8), и принимается, если $F \leq F_{\alpha, k_1, k_2}$.

Рассмотрим задачу.

Произведено 3 испытания на каждом из четырех уровней. Результаты испытаний приведены в таблице:

Номер испытания i	Уровни фактора F_j F_j	Уровни фактора F_j			
		F_1	F_2	F_3	F_4
1		1	3	6	2
2		5	4	5	2
3		6	1	2	4

Методом дисперсионного анализа при уровне значимости 0,01 проверить нулевую гипотезу о равенстве групповых средних, т.е. незначительности влияния фактора на исследуемый параметр. Предполагается, что

выборки извлечены из нормальных совокупностей с одинаковыми дисперсиями.

○ В нашем случае имеем $m=4$, $n=3$. Заполним таблицу, для этого найдем:

$$Q_1 = \frac{\sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n x_{ij} \right)^2}{n} - \frac{\left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij} \right)^2}{mn} = \frac{\sum_{i=1}^4 \left(\sum_{j=1}^3 x_{ij} \right)^2}{3} - \frac{\left(\sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^3 x_{ij} \right)^2}{4 \cdot 3} =$$

$$= \frac{(1+5+6)^2 + \dots + (2+2+4)^2}{3} - \frac{(1+5+\dots+4)^2}{4 \cdot 3} =$$

$$= 147 - 140,08 = 6,92;$$

$$Q_2 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij}^2 - \frac{\sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n x_{ij} \right)^2}{n} = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^3 x_{ij}^2 - \frac{\sum_{i=1}^4 \left(\sum_{j=1}^3 x_{ij} \right)^2}{3}$$

$$= 1^2 + 5^2 + 6^2 + 3^2 + 4^2 + 1^2 + 6^2 + 5^2 + 2^2 + 2^2 + 2^2 + 4^2 - 147 =$$

$$= 177 - 147 = 30;$$

$$Q = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij}^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij} \right)^2}{mn} = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^3 x_{ij}^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^3 x_{ij} \right)^2}{4 \cdot 3} = 177 - 140,08 = 36,92.$$

Таким образом, получаем

Компоненты дисперсии	Сумма квадратов	Число степеней свободы	Средний квадрат
Межгрупповая (факторная) сумма квадратов отклонений	$Q_1 = 6,92$	$k_1=3$	$s_1^2 = \frac{6,92}{3} = 2,3$
Внутригрупповая (остаточная) сумма квадратов отклонений	$Q_2 = 30$	$k_2=8$	$s_2^2 = \frac{30}{8} = 3,75$
Общая (полная) сумма квадратов отклонений	$Q = 36,92$	$k=11$	

$$\text{Тогда } F = \frac{s_1^2}{s_2^2} = 0,61.$$

По таблице критических точек распределения F Фишера-Снедекора (Приложение 8) $F_{0,01, 3, 8}=7,59$.

Поскольку $F_{0,01, 3, 8}>F$, то H_0 принимаем. Следовательно, влияние фактора незначительно. ●

Подобные громоздкие вычисления, проводимые «вручную» при помощи только калькулятора, несомненно, развивают внимание и трудолюбие, но не помогают усвоению самого метода дисперсионного анализа, быть может, даже отвлекая от его сути.

Между тем профессиональная компетентность современного специалиста практически любого профиля включает в себя обязательное владение информационными и коммуникационными технологиями (ИКТ). В связи с этим необходима всесторонняя подготовка студентов-гуманитариев и прикладников в этой области.


Учитывая вышесказанное, можно познакомить студентов с возможностями компьютерных пакетов программ, например, STATISTICA, SPSS, STADIA, ЭВРИСТА, MS Excel, которые содержат широкий набор процедур статистического анализа и позволяют облегчить работу специалиста за счет выполнения необходимых расчетов, оставляя за пользователем лишь интерпретацию полученных результатов. Это позволит расширить ИКТ-компетентность учащихся; сэкономить время, необходимое на рутинные вычисления; избавиться от неизбежных при таких объемах числовых данных вычислительных ошибок; ставить реальные практические задачи не «сглаживая» информацию (округляя числа до целых, уменьшая количество испытаний и т.п.) для упрощения ее решения.

В качестве примера предложим выполнение лабораторной работы по теме «Однофакторный дисперсионный анализ» в пакете MS Excel для специальности 04.03.01 – Химия, профиль обучения – Аналитическая химия.

Задача. Возникли подозрения, что между результатами определения содержания Al_2O_3 в нефелиновой руде, полученными в химической лаборатории рудника, который поставляет руду на глиноземный комбинат, и в центральной лаборатории комбината (ЦЛК) имеют место систематические расхождения, хотя обе лаборатории использовали для анализа проб нефелиновой руды одну и ту же стандартизованную методику. Для оценки значимости расхождения между результатами анализа указанных лабораторий был организован следующий эксперимент. Группа проб, адекватно отражающая вариации химического состава проб нефелиновой руды, была независимо проанализирована в условиях внутрилабораторной прецизионности в ЦЛК и в лаборатории рудника. Средние результаты определения содержания Al_2O_3 в этих пробах приведены в таблице [4].

№ пробы	Рудник	ЦЛК
1	29,13	29,12
2	23,96	23,76
3	26,64	26,67

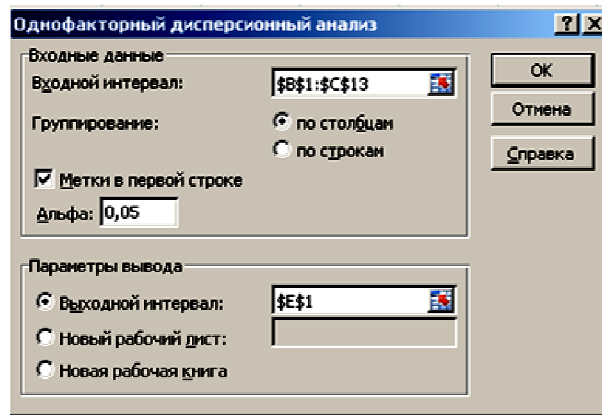
4	28,15	27,9
5	26,12	26,02
6	26,62	26,49
7	27,74	27,61
8	26,65	26,49
9	23,82	23,92
10	27,4	27,43
11	26,16	26,07
12	27,43	27,26

Для определения зависимости между результатами анализа содержания Al_2O_3 в нефелиновой руде и лабораторией, в которой они получены на уровне значимости $\alpha=0,05$, воспользуемся инструментом «Однофакторный пакет анализа» надстройки «Пакет анализа». Отметим, что, например, в версии MS Excel 2007 средства, которые включены в надстройку *Пакет анализа*, доступны через команду *Анализ данных* вкладки *Данные*. (Если кнопки *Анализ данных* нет на вкладке *Данные*, нужно подключить эту надстройку: кнопка *Microsoft Office*  → кнопка *Параметры Excel* → на вкладке *Надстройки* в поле *Управление* → *Надстройки Excel* → кнопка *Перейти* → в поле *Доступные надстройки* установить флажок *Пакет анализа* → ОК) [5].

1. Скопируем или перенесем данные из таблицы в книгу MS Excel (ячейки A1:B13).

	A	B	C	D
1		рудник	ЦЛК	
2	1	29,13	29,12	
3	2	23,96	23,76	
4	3	26,64	26,67	
5	4	28,15	27,9	
6	5	26,12	26,02	
7	6	26,62	26,49	
8	7	27,74	27,61	
9	8	26,65	26,49	
10	9	23,82	23,92	
11	10	27,4	27,43	
12	11	26,16	26,07	
13	12	27,43	27,26	
14				
15				

2. Выберем *Данные* → *Анализ данных* → *Однофакторный дисперсионный анализ*.



В открывшемся диалоговом окне в поле *Входной интервал* выбираем интервал \$B\$1:\$C\$13. Устанавливаем *Группирование* → *по столбцам*. Ставим галочку в поле *Метки в первой строке* и уровень значимости в поле *Альфа* оставляем равным 0,05. В разделе *Параметры вывода* выбираем *Выходной интервал* (Указываем первую ячейку выходного интервала, например, \$E\$1. Можно вывести данные на новый рабочий лист или в новую книгу MS Excel, выбрав соответствующий пункт данного раздела).

3. После нажатия кнопки ОК, получим следующие результаты:

Однофакторный дисперсионный анализ

ИТОГИ

Группы	Счет	Сумма	Среднее	Дисперсия
Рудник	12	319,82	26,6516	2,4114878
ЦЛК	12	318,74	26,5616	2,36925152

Дисперсионный анализ

Источник вариации	SS	df	MS	F	P-Значение	F критическое
Между группами	0,0486	1	0,0486	0,02033158	0,887912741	4,300949462
Внутри групп	52,58813	22	2,39037			
Итого	52,63673	23				

Здесь в столбце *SS* приведены суммы квадратов (межгрупповая, внутригрупповая и полная); в столбце *df* – значения степеней свободы, а в столбце *MS* – дисперсии, межгрупповая и внутригрупповая. В столбце *F* записано значение критериальной статистики, в столбце *P-Значение* – значение вероятности $P(X \geq x)$, где X – случайная величина, имеющая F -распределение Фишера-Снедекора с df степенями свободы. В столбце *F критическое* приводится критическое значение t , рассчитанное в соответствии с заданным уровнем значимости. Нулевая гипотеза о равенстве математических ожиданий всех выборок (т.е. о незначительном влиянии фактора на исследуемый параметр) принимается, если выполняется неравенство $F \leq F \text{ критическое}$ [2].

В нашем примере нулевая гипотеза принимается, т.е. влияние той или иной лаборатории на результат анализа содержания Al_2O_3 в нефелиновой руде незначителен.

Задача для самостоятельного исследования.

На уровне значимости $\alpha=0,01$ установить зависимость правильности оценивания результатов определения массы бенз(а)пирена (Б(а)П) в газопылевых потоках промышленных выбросов в атмосферу от выбранного метода исследования. Результаты эксперимента приведены в таблице [4].

№ пробы	Масса Б(а)П (нг) в пробе		
	Контрольной	разбавленной н-гексаном	разбавленной с до- бавкой C_m
1	182	89	136
2	182	89	194
3	182	89	228
4	275	141	200
5	275	141	252
6	275	141	305
7	275	141	355
8	230	115	146
9	230	115	186
10	230	115	218
11	230	115	252
12	230	115	286
13	230	115	354

ЛИТЕРАТУРА

1. Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебник для вузов /Н.Ш. Кремер. – М. : ЮНИТИДАНА, 2004. – 573 с.
2. Минько А.А. Статистический анализ в MS Excel / А.А. Минько. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2004. – 448 с.
3. Русаков А.А., Русакова В.Н, Ильина Н.А. Учебный курс математики для преподавателей, студентов, учащихся старших классов и учителей математики. – Saarbrücken : LAP LAMBERT Academic Publishing GmbH & Co. KG, 2012. – 340 с.
4. Смагунова А.Н. Методы математической статистики в аналитической химии : учебное пособие / А.Н. Смагунова, О.М. Карпукова. – Ростов н/Д : Феникс, 2012. – 346 с.
5. Справка: MS Excel // <http://support.office.microsoft.com/ru-ru/excel>

ИСТОРИЧЕСКИЕ ПРЕДПОСЫЛКИ ВВЕДЕНИЯ СТОХАСТИКИ В ШКОЛЬНУЮ МАТЕМАТИКУ

В.Д. Селютин, д.п.н., проф.

ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени М.С. Тургенева»
e-mail: *selutin_v_d@mail.ru*

Л.А. Терехова, к.п.н., доц.

ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени М.С. Тургенева»
e-mail: *lterehova@mail.ru*

В работе выявляются исторические предпосылки появления элементов стохастики в школьном курсе математики. Затрагиваются причины неудач при попытках внедрения элементов вероятностно-статистических знаний в школьное обучение.

Включение элементов стохастики в структуру школьного курса математики стало результатом более чем полутора вековой истории различных попыток внедрения этого материала в отечественную среднюю школу. Однако, несмотря на это элементы статистики, комбинаторики и теории вероятностей всё ещё стоят обособленно от разделов традиционного курса [7]. На современном этапе внедрения, учителя математики и методисты столкнулись с рядом методических проблем: нехваткой учебного времени, несогласованностью нового материала с «традиционным» и недостаточным уровнем подготовки учителей. Для того, чтобы понять, каким образом решить возникшие противоречия, необходимо рассмотреть историю введения элементов стохастики в отечественную школу.

Еще в царской России неоднократно предпринимались попытки включить начала теории вероятностей в школьный курс математики. Начиная с первой половины 19 века, элементы теории вероятностей в нашей стране периодически появлялись, а затем вновь исчезали из школьных программ [8, 9, 2].

Первый учебник по теории вероятностей в России «Основы математической теории вероятностей» был издан в 1846 году в С.-Петербурге [1]. Элементы теории вероятностей рассматривались в учебниках алгебры Н.Т. Щеглова [9] и К.Д. Краевича [2]. В 1902г. была опубликована программа теории вероятностей для средних учебных заведений, составленная П.С.Флоровым, а в 1907 г. – разработанная Брандтом.

В дореволюционной России существовали различные типы средних учебных заведений: реальные училища, гимназии, кадетские корпуса, епархиальные училища, коммерческие училища. В частности, средние коммерческие училища разделялись на семиклассные (дающие общее и специальное образование) и трехклассные (дающие только специальное образование).

На состоявшихся в 1901-1902 г.г. съездах директоров и попечительских советов коммерческих училищ было принято предложение о введе-

нии преподавания так называемой политической арифметики, куда должны были войти теория сложных процентов, теория соединений и теория вероятностей [10]. В первой половине XIX века появились учебники, содержащие элементы теории вероятностей и статистики [1,2,4].

Попытки введения элементов статистики и теории вероятностей в школьную математику предпринимались в России, и после революции 1917 года; к этому вопросу неоднократно возвращались и в последующие годы. Н.К. Крупская указывала на то, что «необходимо обратить особое внимание на увязку теории с практикой, на увязку математики с окружающей, хорошо знакомой учащимся общественной жизнью, со знакомыми фактами в области естествознания, техники. Совершенно особое внимание надо обратить на статистику, на чем настаивал В.И. Ленин и что играет особо большое значение, когда массы все больше и больше втягиваются в дело строительства социализма, когда осуществляется плановое хозяйство» [3]. Н.К. Крупская вспоминала также, что В.И. Ленин «настаивал, чтобы преподавание статистики было введено в наших школах» [3].

После революции 1917 года создается единая трудовая школа с определенными образовательными и воспитательными задачами. Советская средняя школа, оставаясь единой в смысле программы, на протяжении I ступени и двух первых классов II ступени, разделялась затем по трем направлениям: науки гуманитарные; науки естественно-математические; науки технические [5].

В программу для физико-технического направления входили разделы:

«Основы теории вероятностей (прямое и косвенное определение вероятности), сложение и умножение вероятностей. Понятие о математическом ожидании. Исторические сведения» [5].

Для биологической и естественных групп предусматривалось изучение следующих тем: «Происхождение теории вероятностей. Случайность. Понятие о вероятности. Математическое выражение вероятности. Приложение теории вероятностей к статистике. Обработка экспериментальных данных» [5].

В 1925 г. для школ II ступени и рабочих факультетов вышла программа, в которую вошли вопросы теории вероятностей и статистики. Однако эти программы не нашли реального отражения в жизни. Впоследствии, в течение длительного периода в средних школах изучались лишь элементы комбинаторики. Понятия о вероятности события и вычислении вероятностей были включены в 1956 г. в программу лишь для технического класса отделения экспериментальных наук (раздел «Арифметика»).

В начале шестидесятых годов XX века на необходимость изучения в средней школе вероятностно-статистического материала обращали внимание выдающиеся математики А.Я. Хинчин, А.Н. Колмогоров, Б.В. Гнеденко.

В ходе реформы школьного математического образования, проходившей в конце шестидесятых - начале семидесятых годов XX века, вопрос о месте элементов статистики и теории вероятностей в школьной программе встал со всей остротой. В учебниках для массового обучения появилось понятие вероятности и подсчет вероятностей с помощью формул комбинаторики. Однако этот материал оказался инородным, изолированным от остальных разделов школьной математики. Было принято решение о переносе его на факультативные занятия, а также в программу школ с углубленным изучением математики.

Элементы теории вероятностей вошли в курс углубленной математики 9 и 11 классов как материал, необязательный для изучения (по выбору учителя), и до сих пор воспринимаются как некоторое приложение к теме «Комбинаторика», поскольку изложены с точки зрения «чистой» математики, практически без упоминаний хотя бы о некоторых приложениях. Поэтому многие педагоги констатируют неразвитость статистического стиля мышления у школьников, заканчивающих «углубленку».

Исторический анализ показал, что многочисленные попытки включения элементов стохастики в различные школьные программы, в виде факультативов или разделов учебников, так и не смогли связать их с основным – «традиционным» содержанием. Элементы стохастики так и остались инородным материалом для основного курса математики [6].

В связи с этим многие педагоги-математики уже в конце советского периода, пришли к выводу, что статистика и вероятности (стохастика) должны вводиться в школьное обучение не отдельным, изолированным курсом, а в виде сквозной содержательно-методической линии, которая обеспечивает формирование, систематизацию и развитие *представлений* о стохастической природе (структуре) явлений окружающего мира. При этом обучение должно строиться на основе преимущественного решения статистических задач, выдвигаемых практикой.

Современное развитие общества, экономики и социальной сферы, привело к пересмотру роли человека. В настоящее время человек выступает не как средство достижения результата, а как цель. В связи с этим изменилось и отношение к процессу образования человека, в педагогике стали преобладать идеи гуманизации образования. Всё это позволило по-новому взглянуть на высокий общекультурный потенциал стохастики, который для развития личности трудно переоценить. Задачи развития экономики требуют, чтобы выпускники школ становились организаторами и участниками производства нового типа, жили и работали в условиях рыночного хозяйствования. В связи с этим возникла концепция о необходимости формирования статистической культуры с ранних лет. Однако, конкретные шаги в этом направлении были сделаны только в последнее десятилетие.

Современный стандарт основного общего образования по элементам логики, комбинаторики, статистики и теории вероятностей предусматрива-

ет включение в содержание школьного образования, таких понятий как множество, элемент множества, подмножество; объединение и пересечение множеств; диаграммы Эйлера; примеры решения комбинаторных задач: перебор вариантов, правило умножения; представление статистических данных в виде таблиц, диаграмм, графиков; вычисление средних результатов измерений; частота события, вероятность; равновозможные события и подсчет их вероятности; представление о геометрической вероятности. Включение элементов стохастики в образовательный стандарт, привел к разработке новых школьных учебников, в которых представлены элементы статистики, теории вероятностей и в целом всей науки о случайном (стохастики).

На этом основании мы можем с уверенностью утверждать, что стохастика реально закрепилась в школе. Как ни парадоксально, выполнение ленинского завета осуществилось лишь в постсоветское время, хотя предпосылки для этого складывались на протяжении всех периодов.

Включение элементов стохастики привело не только к пересмотру их места в структуре школьного курса математики, но и к переподготовке учителей. В настоящее время, учитель должен обладать специфической методикой, направленной на развитие особого типа мышления и формирование особых, недетерминированных представлений.

Таким образом, анализ исторических предпосылок внедрения элементов стохастики в школьную математику показал, что их необходимо вводить в виде сквозной содержательно-методической линии. Поэтому необходимо осуществлять подготовку и переподготовку будущих учителей таким образом, чтобы они могли успешно реализовать вероятностно-статистические представления школьном курсе математики. Только в этом случае элементы стохастики смогут согласовать полученные учащимися знания по математике с потребностями современного общества.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ефимочкина Е.П. К истории развития теории вероятностей в России в XIX веке: Автореф. дис. ... канд. пед. наук: – М., 1953. – 24 с.
2. Краевич К.Д. Курс начальной алгебры, – СПб., 1872.
3. Крупская Н.К. Главное в преподавании математики. – Пед. Соч.: в 10-ти т., т.9. – М., 1960. – С. 700-701.
4. Ланков А.В. К истории развития передовых идей в русской методике математики –1951. – С. 139.
5. Программы советской единой трудовой школы I и II ступени. – Минск, 1919. – С. 41.
6. Селютин В.Д., Терехова Л.А. Укрепление внутрипредметных связей школьного курса математики средствами стохастики: Монография / В.Д. Селютин, Л.А. Терехова – Орел: ОГУ, 2008. – 198 с.

7. Селютин В.Д., Терехова Л.А. Об интеграции стохастической линии в канву традиционных разделов школьной математики // Математика в школе. – 2009. – №7. – С.54-58.
8. Флоров П.С. Теория вероятностей как учебный предмет средней школы, СПб., 1913.
9. Щеглов Н.Т. Начальные основания алгебры. – СПб., 1853.
10. Щербина К.М. Математика в русской средней школе. Обзор трудов и мнений по вопросу об улучшении программ математики в средней школе за последние девять лет (1899-1907). – Киев, 1908. – С.72.

УДК 378.147:512

О РОЛИ КУРСА АЛГЕБРЫ ПРИ ПОДГОТОВКЕ БУДУЩЕГО УЧИТЕЛЯ МАТЕМАТИКИ

Л. И. Селякова, ст. преп.

ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»

Современный этап развития высшего образования в ДНР предъявляет повышенные требования к профессиональной (особенно, предметной) подготовке учителя, вооруженного новейшими методиками и технологиями обучения, творчески мыслящего творца учебного процесса. Изменения в структуре высшего образования, изменения в общественной жизни молодой республики создают предпосылки и необходимость пересмотра и улучшения качества подготовки учителя. Образование в ДНР должно стать частью открытого мирового пространства высшего образования, и быть более конкурентоспособным на мировом рынке. Индивидуализация и мотивация обучения, дифференцированный подход, использование исследований в областях психологии и педагогики для усовершенствования процесса обучения, поиск оптимальных условий для реализации сложного математического содержания требуют от учителя математики не только высокой компетентности в предметной области, но и достаточной подготовленности к самообразованию, к проявлению творческой активности. Проблема образования будущего учителя математики является многоплановой и требует целостного и всестороннего рассмотрения. Это и вопрос предметной математической подготовки, и вопрос общекультурной гуманитарной подготовки.

Проблема формирования будущего учителя математики решается не только в процессе изучения общих педагогических дисциплин, но и должна систематически осуществляться в процессе изучения математических дисциплин. Одной из таких основополагающих для учителя математики дисциплин является алгебра. При подготовке учителя математики на пер-

вый план выдвигается не только понимание логических истоков науки, ее истории, но и ее связи с практикой и применением. Одна из первых мотиваций изучения предмета - знание области его использования. Зарождение, возникновение и применение алгебраических структур можно найти в каждой математической дисциплине, то есть в предметной области будущего учителя математики. Кроме того, если речь идет о подготовке будущих учителей, то высшая математика должна давать не только общее математическое образование, но и отвечать на целиком определенные и конкретные вопросы школьного курса. Поэтому в числе основных идей любого курса высшей математики должна найти себе место идея его связи с элементарной математикой. И здесь уже трудно переоценить роль таких алгебраических структур, как группы, кольца и поля, которые фактически, обязаны своим появлением развитию понятия числа и арифметических операций и которые крайне необходимы при изучении теории чисел и числовых систем, имеющих прямое отношение к школьной математике.

Целью статьи является рассмотрение некоторых аспектов подготовки будущих учителей математики на примере курса алгебры и разработка дидактических материалов для самостоятельной работы по алгебре.

Потребность молодой республики в квалифицированных учителях математики стала одной из причин для открытия в Донецком национальном университете направления подготовки 44.03.05 Педагогическое образование Профиль: математика и информатика. Чтобы понять, как решается задача алгебраической подготовки, нами рассмотрены учебные планы различных российских высших учебных заведений по разным направлениям подготовки («Математика» или «Педагогическое образование» с профилем подготовки «Математика») с разными сроками обучения (4 или 5 лет) [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9]. Мы проанализировали наличие в учебном плане дисциплин, связанных с алгебраической подготовкой студентов. Рассматривались дисциплины всех блоков, базовой и вариативной частей.

В найденных учебных планах по направлению «Математика» одна дисциплина «Алгебра» или две дисциплины «Алгебра» и «Линейная алгебра» относятся к базовой части профессионального блока и изучаются в общем объеме от 400 до 500 академических часов в 1, 2, 3 семестрах. Как правило, изучение теории алгебраических структур продолжается и при изучении курсов «Теория чисел» и/или «Дополнительные главы алгебры». Таким образом, можно говорить о том, что будущий математик получает полноценную алгебраическую подготовку.

Если обратимся к учебным планам с направлением подготовки «Педагогическое образование», профиль подготовки «Математика», то здесь проблема алгебраического образования будущих учителей математики решена иначе. Алгебраические курсы видим среди обязательных дисциплин вариативной части учебного плана («Алгебра» или «Алгебра и теория чисел» или «Алгебра и компьютерная алгебра»). При этом указанные курсы

усиливаются такими дисциплинами, как «Числовые системы» и «Теория чисел». Они встречаются в учебном плане либо среди обязательных дисциплин вариативной части, либо среди дисциплин по выбору (реже). Кроме того, среди дисциплин по выбору всегда можно найти такие курсы, как «Избранные вопросы алгебры», «Дополнительные вопросы алгебры», «Элементы абстрактной и компьютерной алгебры» или «Избранные вопросы высшей алгебры». Эти дисциплины преподают, как правило, на 4 курсе (7 или 8 семестр) в общем объеме от 72 до 144 часов (соответственно, от 36 до 72 аудиторных часов). Специальный курс с названием «Алгебраические структуры» нам удалось найти только в учебном плане Пермского государственного гуманитарно-педагогического университета за 2014 год (направление 050100 «Педагогическое образование», профиль «Математика», квалификация «бакалавр», 5 лет обучения) [8]. Этот курс – среди дисциплин по выбору вариативной части профессионального цикла. Он предлагается студентам в 7 семестре в общем объеме 108 часов (44 - аудиторных). Следует отметить, что в каждом конкретном случае, в каждом конкретном ВУЗе, проблема преподавания алгебры решается по-своему. Так, например, в Соликамском государственном педагогическом институте будущим учителям математики сначала читают дисциплину «Алгебра и компьютерная алгебра» в общем объеме 432 часов. Согласно рабочей программе этой дисциплины, ее изучение начинается с изучения алгебраических операций, групп, колец и полей, то есть с изучения важнейших алгебраических структур. Кроме этого, студенты изучают курс «Дополнительные главы алгебры» в общем объеме 72 часов. А уже в 10 семестре студентам предлагают «Обобщающий курс алгебры» среди дисциплин по выбору в общем объеме 108 часов[7].

В Донецком национальном университете согласно учебному плану по направлению подготовки 44.03.05 Педагогическое образование. Профиль: математика и информатика, дисциплина «Алгебра» изучается в 1, 2, 3 семестрах в общем объеме 360 часов (из них аудиторных - 194 часов). При этом нужно успеть не только изложить программный материал, довольно насыщенный, с большим количеством доказательств, привить необходимые навыки и умения решать важнейшие, «стандартные», задачи по алгебре, но и научить студентов действовать не по шаблону, не стандартно мыслить, уделить внимание развитию творческих способностей студентов. Для достижения таких целей студентам предлагаются эвристические самостоятельные работы (на самостоятельную работу отводится 166 часов), связанные с решением отдельных вопросов и проблем, очерченных на лекциях, лабораторных, практических занятиях. Для решения этих заданий важен такой тип умственной деятельности, который предусматривает умение видеть проблему, самостоятельно ее формулировать, разрабатывать план ее решения. Это уровень умственной деятельности, на котором осуществляется более глубокое понимание явлений, процессов и начинается

творческая деятельность. Студенту на первом курсе достаточно сложно справляться с подобными заданиями, поэтому мы предлагаем указания-подсказки к таким задачам. Предложены указания двух уровней. Предполагается, что студент попытается решить задачу самостоятельно. Если не удастся это сделать, студент обращается к первому указанию к задаче. Если указание не помогло, то студент обращается ко второму, более развернутому, указанию. Именно, задачи на доказательство с разработанной системой подсказок предназначены для самостоятельной работы, которая носит эвристический характер. Решение этих задач связано с поиском и формированием «нестандартных» путей мышления. А указания только помогают направить процессы мышления. **Приведем примеры таких задач.**

1. Существует ли такая алгебраическая система, в которой выполняются все аксиомы линейного пространства, кроме равенства $1 \cdot a = a$?

Указания 1. Попробуйте рассмотреть какой-нибудь линейное пространство и заменить операцию умножения на «экзотическую», для которой бы не выполнялась обозначенная аксиома.

Указания 2. Вспомните определение линейного пространства. Рассмотрите какую-нибудь известную алгебраическую систему, которая образует коммутативную группу относительно сложения (удовлетворяет первым четырем аксиомам линейного пространства). Рассмотрите любое поле и определите нулевое произведение любого элемента избранной системы на любой элемент поля. Будет ли построенная алгебраическая система удовлетворять всем аксиомам линейного пространства? Проверьте.

2. Привести пример подмножества линейного пространства, которое является линейным пространством, но не является подпространством данного линейного пространства.

Указания 1. Верно ли, что \mathbb{R} над \mathbb{R} и \mathbb{R} над \mathbb{Q} являются линейными пространствами? Они одинаковы или различны?

Указания 2. Вспомните определение линейного подпространства. Исходя из этого определения: что еще для подмножества пространства должно выполняться, кроме аксиом линейного пространства? Вспомните примеры множества, которое является линейным пространством над разными полями.

3. Пусть система векторов a, b, c линейно зависима. Верно ли, что система векторов $a+b, b+c, a+c$ является линейно зависимой?

Указания 1. Примените определение линейно независимой системы к векторам $a+b, b+c, a+c$. В каком случае удалось получить противоречие с условием задачи?

Указания 2. Вспомните определение линейно зависимой и линейно независимой систем векторов. Предположите, что последняя система является линейно независимой, и запишите это по определению. Перепишите полученную линейную комбинацию векторов $a+b, b+c, a+c$ в виде линей-

ной комбинации векторов a, b, c , следите за коэффициентами. Удалось ли получить противоречие?

При выполнении эвристических самостоятельных работ студенты должны отходить от образца. Познавательная деятельность при этом уже приобретает творческий, поисковый характер. Это такой уровень умственной деятельности, на котором проявляется интеллектуальный потенциал и творческие способности студентов, начинают реализовываться их исследовательские способности. Для такой реализации предлагаются дополнительные задачи на доказательство (без указаний). *Приведем примеры некоторых из таких задач.*

1. Доказать, что однородная система линейных уравнений, которая имеет ненулевое решение, имеет бесконечное множество решений.

2. Доказать или опровергнуть что:

а) система линейных уравнений, которая имеет 2 решения, имеет бесконечное множество решений;

б) если неоднородная система линейных уравнений несовместна, то приведенная однородная система имеет ненулевые решения.

3. Доказать, что для произвольного $k \left(0 \leq k \leq n \frac{n-1}{2} \right)$ существует перестановка из n чисел ($n \in N, n > 1$), которая имеет k инверсий.

4. Пусть A и B - квадратные матрицы n -го порядка. Доказать, что $A=B$ тогда и только тогда, когда $AX=BX$ для произвольной матрицы-столбца X из n элементов.

Образование определяет не только интеллектуальные и профессиональные возможности человека, образование участвует в формировании личности и в определенном смысле влияет на судьбу человека. Именно поэтому любые изменения в сфере образования должны быть тщательно продуманными и взвешенными. Сейчас, при переходе на новые учебные планы, мы должны, руководствуясь многолетним опытом и традициями математического образования, ответственно и не формально отнестись к работе по составлению новых рабочих программ, очень бережно отнестись к формированию содержания дисциплин. Особенно груз ответственности в такой работе чувствуется еще и потому, что речь идет о подготовке в классическом университете будущих учителей математики, ошибки которых могут дорого обходиться новым поколениям. Роль, место и содержание алгебраических курсов в подготовке будущих учителей математики требуют уточнения и переоценки на фоне происходящих изменений в учебных планах. Это важно и для формирования грамотного математика, и для подготовки квалифицированного учителя математики.

ЛИТЕРАТУРА

1. kantiana.ru [Электронный ресурс]: Основная образовательная программа высшего образования 01.03.01. МАТЕМАТИКА. – Электрон. дан. –

- Калининград, 2015. – Реж. доступа: <https://www.kantiana.ru/entrant/-programms/b/01.03.01.doc> (дата обращения: 09.11.2015)
2. mmft.psu.ru [Электронный ресурс]: Учебный план подготовки бакалавров. – Электрон.дан. – Пермь, 2013. – Реж. доступа: http://mmft.psu.ru/plans/010800_62_mmm.pdf (дата обращения: 10.11.2015)
 3. altspu.ru [Электронный ресурс]: Основная образовательная программа высшего образования 050201.65 Математика. – Электрон.дан. – Воронеж, 2013. – Реж. доступа: <http://www.altspu.ru/uploads/gos/050201.65-MI.pdf> (Дата обращения: 09.11.2015)
 4. mmcs.sfedu.ru [Электронный ресурс]: Рабочий учебный план 01.01.01. МАТЕМАТИКА. – Электрон.дан. – Ростов-на-Дону, 2009 – Реж. доступа: http://www.mmcs.sfedu.ru/_old/docmanupload/doc_download/138-----010101----q-q (дата обращения: 08.11.2015)
 5. vggu.ru [Электронный ресурс]: Рабочий учебный план подготовки бакалавров 01.01.01. МАТЕМАТИКА. – Электрон.дан. – Вятка, 2012. – Реж. доступа: http://vggu.ru/sites/default/files/public/05010004_62_ped.obr_.mi.xls (дата обращения 14.11.2015)
 6. hse.ru[Электронный ресурс]: Учебный план подготовки бакалавров. – Электрон.дан. – Москва, 2015. – Реж. доступа: https://www.hse.ru/ba/math/learn_plans/ (дата обращения 14.11.2015)
 7. fgosvo.ru[Электронный ресурс]: Основная образовательная программа. – Электрон.дан. – Соликамск, 2011. – Реж. доступа: <http://fgosvo.ru/uploadfiles/pv/1/5/20120723161324.pdf> (дата обращения 11.11.2015)
 8. pspu.ru [Электронный ресурс]: Рабочий учебный план подготовки бакалавров 05.01.00. Педагогическое образование. – Электрон.дан. – Пермь, 2014. – Реж. доступа: http://pspu.ru/upload/pages/24397/nagruzka_01_050100_62-121.plm.xml.xls (дата обращения 14.11.2015)
 9. ospu.ru [Электронный ресурс]: Рабочий учебный план подготовки бакалавров 05.01.00. Педагогическое образование. – Электрон.дан. – Оренбург, 2012. – Реж. доступа: http://www.ospu.ru/userfiles/ufiles/OOP/-uchebnyu_plan_m.xls (дата обращения 11.11.2015)

ОРГАНИЗАЦИЯ ПРОФИЛЬНОГО ОБУЧЕНИЯ ИНФОРМАТИКЕ В УСЛОВИЯХ ВНЕДРЕНИЯ ФГОС

Т.А. Симанева, к.п.н., доц.

ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет им. И.С. Тургенева»

e-mail: *simanevata@mail.ru*

В статье рассматриваются вопросы организации профильного обучения информатике учащихся 10 – 11 классов.

В настоящее время произошли заметные изменения, в структуре обучения информатике на старшей ступени школьного образования.

В соответствии с Законом «Об образовании в Российской Федерации» [3], основная образовательная программа среднего (полного) общего образования содержит обязательную часть (60 %) и часть, формируемую участниками образовательного процесса (40%), в виде учебных курсов по выбору обучающихся в соответствии со спецификой (профилем) и возможностями образовательного учреждения. Содержание обязательной части основной образовательной программы определяется и утверждается на федеральном уровне. Вариативная часть ООП, структура и содержание внеурочной деятельности формируются региональными и муниципальными органами управления образованием, школами, самими учащимися и их родителями.

Согласно ст. 34 Федерального закона «Об образовании в Российской Федерации» [3], обучающийся имеет право на:

- обучение по индивидуальному учебному плану, в том числе ускоренное обучение в пределах осваиваемой образовательной программы в порядке, установленном локальными нормативными актами;
- выбор факультативных (необязательных для данного уровня образования) и элективных (избираемых в обязательном порядке) учебных предметов, курсов, дисциплин (модулей) из перечня, предлагаемой организацией, осуществляющих образовательную деятельность (после получения основного общего образования);
- освоение наряду с учебными предметами, курсами, дисциплинами (модулями) по осваиваемой образовательной программе любых учебных предметов, курсов, дисциплин (модулей), преподаваемых в организации, осуществляющей образовательную деятельность в установленном ей порядке, а также преподаваемых в других организациях, осуществляющих образовательную деятельность, учебных предметов, курсов, дисциплин (модулей).

В соответствии с ФГОС среднего общего образования [2], учебный план профиля обучения и (или) индивидуальный учебный план должны содержать 9 (10) учебных предметов и предусматривать изучение не менее одного учебного предмета из каждой предметной области, определенной стандартом. Количество учебных занятий на одного обучающегося в неделю не более 37 часов.

К сожалению, учебный предмет «Информатика», входящий в состав предметной области «Математика и информатика» не включен в набор обязательных образовательных курсов. Это можно объяснить двумя причинами. Во – *первых*, в новом учебном плане школы существенно увеличивается объем изучения информатики в основной школе. Это позволит учащимся уже на этой ступени школы в значительной мере получить необходимый объем содержания образования по этому предмету, обеспечивающий им формирование функциональной грамотности, социализацию и решение других задач общего образования. Во – *вторых*, специфика информатики как науки сферы деятельности человека заключается в том, что она обеспечивает своими методами, средствами, технологиями другие области знания, познавательной и практической деятельности человека. Поэтому нет смысла изучать на старшей ступени школы базовый (инвариантный для всех профилей) курс информатики. Более целесообразно профильное изучение, ориентированное на запросы конкретного профиля. Вместе с тем ФГОС не отвергает возможность изучения информатики на базовом, минимальном уровне, и ее включение в содержание того или иного профиля.

Во ФГОС СОО указано, что учебный план предусматривает изучение учебных предметов по выбору из обязательных предметных областей, дополнительных учебных предметов, курсов по выбору и общих для включения во все учебные планы учебных предметов, в том числе на углубленном уровне. Таким образом, предмет «Информатика», входящий в предметную область «Математика и информатика», может быть включен в программу обучения на базовом и углубленном уровнях.

Изучение предметов (курсов) по выбору обучающихся на старшей ступени образования нацелено на удовлетворение индивидуальных запросов, таких как:

- развитие личности обучающихся, их познавательных интересов, интеллектуальной и ценностно-смысловой сферы;
- развитие навыков самообразования;
- углубление, расширение и систематизация знаний в выбранной области научного знания или вида учебной деятельности

Кроме того, предусматривается изучение курсов по выбору (элективных курсов) в рамках внеурочной деятельности, такая деятельность становится обязательным компонентом основной образовательной программы старшей ступени образования

В соответствии с ФГОС СОО в старших классах средней школы предусматривается реализация обучения по пяти профилям:

- естественнонаучному,
- гуманитарному,
- социально-экономическому,
- технологическому
- универсальному.

Напомним, профильное обучение – средство дифференциации обучения, когда за счет целенаправленных изменений в структуре, содержании и организации образовательного процесса создаются условия для эффективной реализации индивидуализации обучения, более полно учитываются интересы, склонности и способности учащихся, открываются новые возможности для образования старшеклассников в соответствии с их профессиональными устремлениями и намерениями в отношении дальнейшего образования и выбора жизненного пути.

Заметим, что дифференциация обучения может осуществляться в двух основных формах: уровневой и профильной. Уровневую дифференциацию можно определить как организацию обучения, при которой школьники имеют возможность и право усваивать содержание обучения на различных уровнях. Примером уровневой дифференциации может служить углубленное изучение отдельных предметов. Профильная дифференциация заключается в направленной специализации содержания образования с учетом интересов, склонностей, способностей школьников, их последующих профессиональных намерений. В настоящее время в силу объективных причин стандартом предусмотрена уровневая дифференциация. При этом профильность обучения достигается на счет возможности изучения различных курсов на базовом или углубленном уровнях.

Содержание каждого профиля обучения формируется путем сочетания различных учебных предметов, содержание которых в свою очередь определяется образовательными стандартами и неизменно для любого профиля обучения. При этом учебный план профиля обучения (кроме универсального) должен содержать не менее трех (четырёх) учебных предметов на углубленном уровне из соответствующей профилю обучения предметной области и (или) смежной с ней предметной области [1].

Отметим некоторые особенности изучения информатики в старших классах в условиях профилизации обучения.

Информатика в *естественнонаучном профиле* представлена на базовом уровне. На ее изучение отводится 70 часов на два года обучения (1 час в неделю). Для естественнонаучного профиля характерен акцент на углубленное изучение предметов из предметных областей «Математика и информатика» и «Естественные науки». Межпредметные связи курса информатики с курсами химии, биологии, физики могут быть направлены на изучение структурных и классификационных моделей, на изучение ин-

формационных процессов в живой и неживой природе, на построение компьютерных моделей химических, биологических, физических объектов и процессов.

Рекомендуется дополнить профиль следующими элективными курсами: «Биоинформатика», «Исследование биологических моделей с использованием систем объектно-ориентированного программирования и электронных таблиц», «Управляемые и самоуправляемые системы», «Анимация как моделирование динамических систем», «Моделирование информационных процессов в биологических системах», «Средства обработки табличной информации», «Средства обработки графической информации», «Создание и использование баз данных», «Основы моделирования и интерпретации химических моделей», «Проектирование баз данных в медицине», «Методы математической обработки экспериментальных данных (разработка программ для различных областей научных исследований)».

Информатика в *социально-экономическом профиле* представлена на базовом уровне и на ее изучение отводится 70 часов на два года обучения (1 час в неделю). Особенности курса информатики в данном профиле является формирование навыков работы с программами, позволяющими решать задачи связанные с обработкой информации в социальной сфере, в сфере экономики, управления и др. Возможность увеличения количества часов информатики может быть достигнута введением в учебный план курсов по выбору, таких как «Технологии обработки экономической информации в табличном процессоре Excel», «Методы и средства компьютерной обработки статистических данных», «Информационные технологии в бизнесе» «Социальные последствия информатизации», «Исследование информационных моделей с использованием систем объектно-ориентированного программирования и электронных таблиц» «Информационный бизнес», «Коммуникационные технологии в коммерции», «Использование информационных технологий в управлении».

Информатика в *технологическом профиле* представлена на углубленном уровне. Для данного профиля характерным является углубленное изучение предметов из предметных областей «Математика и информатика» и «Естественные науки». На изучение информатики предлагается 280 часов за два года обучения [1]. В проекте учебного плана предлагается выделить 1 час в неделю на элективный курс «Компьютерная графика».

Основными задачами курса информатики в данном профиле является систематизация, расширение и углубление знаний, полученных в курсе информатики основной школы, а также формирование умений и навыков, необходимых для дальнейшей профессиональной деятельности в сфере производства, инженерии и информационно-коммуникационных услуг. Можно также предложить учащимся элективные курсы ««Основы микроэлектроники», «Архитектура компьютера», «Технические средства инфор-

матики», «Техническое обслуживание компьютера», «Искусственный интеллект», «Модели управления производством» «Использование информационных технологий в управлении», «Основы кибернетики», «Инженерная графика», «Робототехника».

Информатика в *гуманитарном профиле* не входит в перечень обязательных предметов в примерном учебном плане [1]. Для данного профиля характерным является углубленное изучение предметов из предметных областей «Филология» и «Общественные науки», что предполагает ориентацию данного профиля на такие сферы деятельности, как педагогика, психология, общественные отношения, геополитика, лингвистика и др. В данном случае информатика может выступать как предмет формирующий общекультурные качества человека, помогающие ему успешно развиваться в информационном обществе. Таким образом, изучение информатики в данном профиле в большей мере носит прикладной характер. Межпредметные связи информатики с профильными предметами можно реализовать через исторические, творческие, профориентационные проекты. Поэтому на наш взгляд было бы целесообразно включить информатику в учебный план данного профиля.

В качестве внеурочной деятельности можно рекомендовать следующие элективные курсы «Информационная культура и сетевой этикет», «Корпоративные автоматизированные библиотечно-информационные системы», «Информационно-поисковые системы», «Информационная безопасность», «Поисковые системы сети Интернет», «Гипертекстовые технологии», «Основы машинного перевода иноязычных текстов», «Средства обработки текстовой информации», «Издательские системы», «Технология работы с библиотечными и сетевыми ресурсами», «Приемы и методы компьютерной верстки», «Электронные энциклопедии: создание и использование», «Основы информационной безопасности», «Информационно-правовые системы», «Принципы построения мировоззренческих моделей», «Когнитивная информатика», «Когнитивная психология и программирование», «Использование компьютера в психологическом тестировании», «Моделирование в истории и интерпретация моделей», «Технология работы с библиотечными и сетевыми ресурсами», «Геоинформационные системы», «Инструментальные средства геоинформационных систем», «Инструментальные средства создания карт».

Универсальный профиль ориентирован на учащихся, которые еще не определились с будущей профессией. Этот профиль позволяет учащимся выбрать один из трех вариантов изучения информатики

- информатика изучается на базовом уровне 70 часов в год;
- информатика не входит в перечень обязательных предметов, но предусмотрен элективный курс;
- информатика изучается во внеурочной деятельности факультативно.

В качестве внеурочной деятельности в данном профиле можно рекомендовать следующие элективные курсы по информатике «Технология создания сайтов», «Методы математической обработки экспериментальных данных (разработка программ для различных областей научных исследований)», «Обеспечение информационной безопасности на персональном компьютере при работе в сети», «Искусственный интеллект», «Компьютерные сети и телекоммуникации», «Базы данных»; «Проектирование информационных систем», «Подготовка изображений (иллюстраций) с помощью средств цифрового моделирования художественных материалов (CorelPainter)», «Цифровой видеомонтаж с помощью AdobePremiere», «Использование трёхмерной графики для подготовки анимационных фильмов», «Основы презентационной графики».

Таким образом, выбирая тот или иной профиль обучения, учащиеся получают возможность не только выстроить индивидуальную траекторию обучения, но и удовлетворить свои познавательные интересы как в будущей профессиональной области так и сфере информатики и информационных технологий.

ЛИТЕРАТУРА

1. Общественные консультации по примерной основной образовательной программе среднего общего образования. Примерный учебный план. http://edu.crowdexpert.ru/secondary_school/doc/u4plan
2. Федеральный государственный стандарт среднего (полного) общего образования. <http://standart.edu.ru/catalog.aspx?CatalogId=6408>
3. Федеральный закон от 29 декабря 2012 г. №273-ФЗ «Об образовании в Российской Федерации». <http://standart.edu.ru/catalog.aspx?CatalogId=10681>

ДИДАКТИЧЕСКИЙ АСПЕКТ ПРИМЕНЕНИЯ ЭВРИСТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ В ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ

Е.И. Скафа, д.п.н., проф.

ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»

e-mail: *e.skafa@mail.ru*

Большое количество психологических исследований свидетельствует о том, что в основе создания ситуации, которая поможет управлять учебной деятельностью обучающихся по математике, лежат как алгоритмические, так и эвристические задачи. Эвристическим задачам отведена особая роль. В обучении они выступают как средство мотивации, средство создания проблемных ситуаций, их используют как средство конструирования новых математических задач и ситуаций, как средство построения гипотез, высказывания догадок и др. Для формирования умения использовать эвристические задачи, решать их и обучаться с их помощью математике необходимо построение специальной системы таких задач. На основе понятия эвристических задач и требований к их построению, предлагаем разработанную нами структуру применения систем эвристических задач в обучении математике.

В психологии мышления различают два принципиально различных способа деятельности по решению задач: алгоритмический и эвристический. Первый осуществляется обучаемым в соответствии с известным ему алгоритмом, второй – в соответствии с принятой им стратегией поиска решения задачи [5]. При разных условиях интеллектуальной деятельности человека можно обнаружить различное динамическое соотношение эвристических (поисковых, ведущих к открытию новых путей решения) и неэвристических (выполняемых по определенным предписаниям – алгоритмам) компонентов процесса решения задачи. Поэтому в реальном учебном процессе обучаемому необходимо предложить такие средства, которые позволили бы ему развивать репродуктивное и творческое мышление в их единстве. В математике к таким средствам обучения, как в средней, так и высшей школе, относятся алгоритмические и эвристические задачи.

Задача становится эвристической в зависимости от того, как ее воспринимает обучаемый: как лично значимую, имеющую для него самую ценность, или как незначимую, неценную. В первом случае ученик рассматривает решение задачи как способ осуществления внешних (относительно познания) целей, во втором – оно (познание) само является целью. В первом случае процесс познания обрывается, как только задача решена, во втором – наоборот, процесс развивается, приводя ученика к ситуативной нестимулированной эвристической деятельности, которая разрешает выходить за пределы заданного и увидеть "непредусмотренное". На данных позициях в современном подходе к эвристическим задачам находятся

и такие исследователи как Teoh Sian Hoon, Parmjit Singh, Cheong Tau Han, Kor Liew Kee [1], B.Koichu [2], L.Larson [3], Ji-Yeon Lee, C.Reigeluth [4], [6] и др.

Таким образом, под эвристической задачей понимаем задачу, допускающую самостоятельное формулирование способа ее решения, в процессе поиска которого обучающийся попадает в ситуацию проявления своих эвристических позиций.

Во время взаимодействия с эвристической задачей у обучающегося вырабатываются, так называемые, правила (приемы) преимущественного поиска ее решения. Они заложены у каждого обучаемого на подсознательном уровне, разрешая тем самым саморегулировать свою деятельность. Такие приемы мы относим к эвристическим приемам общего и специального видов. Они являются средством «нежесткого» управления процессом поиска решения задачи [7; 8; 9].

Эвристические задачи (имеют высокий уровень структурной организации) являются эффективным средством целенаправленного математического развития учащихся, они формируют и развивают познавательную самостоятельность, активность, интерес, мировоззрение и другие качества личности.

В нашем исследовании разработаны системы эвристических задач для управления эвристической деятельностью учащихся при обучении математике, в основе их построения лежат наборы общих и специальных эвристик [7]. Каждая такая система удовлетворяет следующим требованиям:

- полноты представления эвристик;
- целесообразного соотношения между эвристическим и алгоритмическим компонентами на каждом этапе обучения;
- возможного осознания главных математических идей путем выведения интуитивных рассуждений на уровень осознанных логических процессов по схеме «предзнание» – формализация – «послезнание», обеспечение мотивации этого перехода;
- обеспечение широты ориентировочной деятельности;
- направленности на «открытие».

Системы эвристических заданий предлагаются нами к разнообразным темам школьного курса математики и некоторым разделам курса высшей математики различных направлений подготовки студентов для коллективной, групповой и индивидуальной работы. Структура каждой системы заданий имеет следующий вид.

1. *Актуализация знаний.* Подобраны системы тестовых заданий, «блиц-опросы» на отработку базовых умений обучающихся по изучаемой теме с обязательной коррекцией и проверкой знаний, необходимых для изучения нового материала темы. Использование коррекционных материа-

лов позволяет сделать акцент на распознавание тех эвристик, которые используются в процессе поиска решения задачи.

2. *Организация мотивации.* Вводятся наборы задач-проблем, задач-шуток, практических и прикладных задач на постановку новой проблемы, иллюстрирующие необходимость изучения данной темы. Применяя процесс моделирования в прикладной задаче, строится математическая модель, для решения которой у обучаемых на данном этапе не хватает знаний. Создается ситуация необходимости введения новых фактов, теорий, алгоритмов и т.д.

3. *Система заданий с эвристическими подсказками.* Предлагаются задачи с эвристическим "наведением" на поиск решения каждой из них или цикла задач (эвристическая подсказка). Такая подсказка содержит различные эвристики (например, модифицируй ситуацию, нарисуй картинку, ищи аналогию, анализируй условие, интерпретируй результат, проверь по размерности и др.), что способствует осмысленному подходу к поиску решения задания. Кроме того, постоянное обращение к эвристическим приемам позволяет сформировать у обучаемого умения использовать подобные приемы в процессе поиска решения разнообразных математических заданий. Возможно также применение схем-ориентиров решения некоторых классов задач.

4. *Задания на проверку сформированных умений,* как учебных, так и эвристических. Такие задания представлены в виде «Задач-софизмов», «Задач-методов» (т.е. нахождение ошибки в рассуждении, либо нахождение способа решения предложенной задачи и т.д.), а также задач на распознавание эвристик.

5. *Эвристические задания на применение изученной математической теории в новых вариативных ситуациях.* На основе изученного теоретического материала и отработанных умений применения математического аппарата темы предлагаются задачи прикладного или профессионально-ориентированного содержания, решение которых позволяет студенту уяснить связь математики с другими науками [10].

Обучение математике с помощью разработанных таким образом систем задач позволяет сформировать у обучаемых эвристические умения вида:

- анализировать данную ситуацию с целью выявления существенных свойств;
- соотносить известные элементы задачи с неизвестными (то, что дано с тем, что нужно найти);
- распознавать известные или данные элементы в различных ситуациях;
- сопоставлять данную задачу с известными задачами;
- создавать новые комбинации известных понятий и фактов, которые принадлежат к элементам данной задачи, сопоставляя их с ее условием и целью;

- конструировать самые простые математические модели данной задачной ситуации;
- отождествлять элементы задачи с элементами модели;
- индуктивно строить гипотезы, высказывать догадки;
- расчленять данную задачу на подзадачи, обнаруживать отдельные задачи (решение которых ведет к установлению элементов, важных для решения основной);
- проверять выдвинутые гипотезы дедуктивным путем, опровергать контрпримером ;
- интерпретировать результаты работы над моделью данной задачной ситуации; кодировать язык ситуации в терминах модели и декодировать результаты, которые выражены языком модели и т.д.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hoon Teoh Sian, Singh Parmjit, Han Cheong Tau, Kee Kor Liew. Heuristic approach experience in solving mathematical problems // Educational Research. – 2013. – Vol. 4(8), pp. 607-611.
2. Koichu B. Junior high school students' heuristic behaviors in mathematical problem solving. – Unpublished Doctoral Dissertation, Technion, Haifa, 2003.
3. Larson L. Problem-solving through problems. – New York, Berlin, Heidelberg, Tokyo: Springer-Verlag, 1983. – 430 p.
4. Lee Ji-Yeon Reigeluth C. Heuristic Task Analysis on E-learning Course Development: A Formative Research Study. Asia Pacific Education Review. – 2009. – Vol.10 n2 p. 169-181.
5. Polya G. Mathematical discovery. On undestanding, learning and teaching problem solving. – New York – London: John Wiley & Sons, 1965. – 238 p.
6. Reigeluth C., Lee Ji-Yeon Formative Research on the Heuristic Task Analysis Process // Educational Technology Research and Development. – 2003. – Vol .51, pp.5-17.
7. Скафа Е., Милушев В. Конструирание на учебно-познавателна евристична дейност по решаване на математически задачи: монография. Пловдив: ПУИ «Паисий Хилендарски», 2009. – 340 с.
8. Скафа О, Прач В. Управління евристичною діяльністю учнів-гуманітаріїв на уроках математики // Математика в сучасній школі. – 2013. – №5. – С. 30-37.
9. Skafa O. Heuristically Oriented Systems of Problems in Teaching of Mathematics // Journal of Research in Innovative Teaching: Publication of National University. – 2014. – Vol 7, pp. 85-92. – La Jolla, CA USA.

10. Скафа Е.И. Место профессионально ориентированной эвристической деятельности в системе формирования профессиональной компетентности будущего учителя математики // Вестник Елецкого государственного университета им.И.А.Бунина. Серия «Педагогика (История и теория математического образования)». – 2016. – С.83-92.

УДК 372.851

КРАЕВЕДЧЕСКИЕ ЭКСКУРСИИ НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ В НАЧАЛЬНОЙ ШКОЛЕ

Д.В. Ставцева, учитель математики
e-mail: *masterkvok@mail.ru*

В статье рассмотрена значимость краеведческих экскурсий как для обучения в начальной школе в целом, так и для уроков математики, представлена методика проведения экскурсий.

Ключевые слова: краеведение, экскурсия, урок математики в начальной школе.

Мудрость народа, накопленный веками опыт поколений и культурно-исторические традиции – неизменное и незаменимое средство воспитания подрастающего поколения. Единство культурного и образовательного пространства является одним из основных принципов государственной политики в области образования, заключающимся в тесной связи федеральных образовательных программ с национальными, региональными, социально-экономическими и культурными особенностями и традициями. Краеведение призвано сохранить культурное и образовательное пространство. Краеведческий материал является отражением национального характера образования, который проявляется как в непосредственном использовании, так и требованием общества к личности [1, 14].

Российская педагогическая энциклопедия понимает под школьным краеведением – всестороннее изучение учащимися природы, экономики, истории и культуры своей местности — микрорайона, города, села, района, области. Школьное образование на всех своих этапах неразрывно связано с государственной политикой в области образования и национальными особенностями конкретного региона.

В отечественной системе образования выделяются три направления краеведческой работы: учебное, внеурочное, внешкольное.

Направления краеведческой работы возможно реализовать с помощью разнообразных методов обучения. Одним из которых является экскурсия

Экскурсия – одна из наиболее познавательных и интересных форм проведения учебных занятий, представляющая собой непосредственное, «живое» изучение природных и хозяйственных объектов в реальных условиях. Главная особенность и педагогическая ценность экскурсий заключается в реализации учебного плана и требований Федерального государственного образовательного стандарта не в условиях классного помещения, а на природе (хозяйственном объекте, производстве) во время непосредственного восприятия предметов и явлений. Главным методом познания является наблюдение за предметами, явлениями и взаимозависимостями между ними. Основные функции экскурсионной работы заключаются в реализации принципов наглядности, доступности, научности и связи теоретического материала с практической деятельностью, политехнизации процесса обучения и др. В учебных программах по каждому предмету закреплено обязательное количество экскурсий и их содержание. Содержательный компонент определяет вид экскурсий. Они делятся на: производственные, естественнонаучные, историко-литературные, краеведческие, комплексные. В зависимости от решаемых дидактических задач экскурсии делятся на 2 вида – экскурсии для изучения нового материала и экскурсии для закрепления изученного материала.

Методика проведения экскурсии любого вида состоит из трех этапов:

1. Подготовительный этап заключается в уточнении темы, выборе места проведения и разработке маршрута, составлении плана экскурсии, подборе заданий в ходе экскурсии.

2. Проведение экскурсии состоит из нескольких компонентов: следование к месту проведения экскурсии, организационный момент, непосредственно экскурсия, заключительный момент.

3. Обработка собранных материалов и подведение итогов экскурсии. По завершении экскурсии следует обработать собранные материалы и наблюдения, подготовить коллекции, альбомы, выставки, стенгазеты, доклады, сочинения, сообщения, проекты и др.

При организации и проведении экскурсий следует учитывать возрастные особенности младших школьников: эмоциональное преподнесение материала скорее заинтересует детей; самый важный материал следует изложить в начале экскурсии с учетом быстрой утомляемости и слабой устойчивости внимания детей младшего школьного возраста; опора на уже имеющиеся знания учащихся, использование системы исследовательских заданий, возможно даже с элементами игры, для стимулирования коммуникативной деятельности, познавательной активности, самостоятельного поиска ответов на посильные вопросы и задания.

Зачастую краеведческие экскурсии в начальной школе превращаются в урок под открытым небом, а исследовательские методы работы заменяются рассказом учителя или игрой. Основными причинами такой ситуа-

ции, на наш взгляд, являются следующие: недостаточный объем материала о родном крае, недостаточное владение умением сочетать краеведческий и какой-либо другой материал, неумение грамотно выбирать природные объекты для проведения наблюдений и исследований, неуверенное владение методикой проведения экскурсии [2, 56].

Краеведческие экскурсии на уроках математики в начальной школе дополняют объем изученной арифметической и геометрической информации, способствуют осуществлению того или иного вида учебной деятельности с использованием анализа, синтеза, индукции, классификации пр., способствуют получению опыта эмоционально-ценностных отношений. Краеведческий материал, полученный во время проведения экскурсии, активно встраивается в учебные задания и способствует лучшему усвоению программного материала, формированию интереса, активности и положительной мотивации.

О роли и значении экскурсионного метода в методике преподавания математике писал в 20-е годы XX в. математик и педагог Н.Н. Шемянов. Им введен термин «чисто математические экскурсии». Такие экскурсии, по мнению автора, позволяют отрабатывать навыки количественного подхода к миру, сблизить с математическими методами изучение действительности, развивать мышление, наблюдательность, самостоятельность, дают материал для дальнейшей работы в классе (для бесед, докладов, рассказов, составления таблиц, диаграмм, графиков, планов, схем и др.). Н.Н. Шемянов писал, что «дни потраченные на экскурсии вполне могут заменить чуть ли не месяцы классных занятий» [3, 4].

Проведение математических экскурсии в начальной школе прививает интерес к работе с геометрическими образами, формами и их размерами и пространственными отношениями, измерительно-вычислительной работе на местности, знакомит с простейшими измерительными приборами и их практическим применением, дает большой объем количественных и качественных характеристик окружающего мира для составления и решения задач и пр.

Использование краеведческих сведений для обучения математике в начальной школе способствует развитию и формированию разносторонней и интеллектуально богатой личности младшего школьника, лучшему усвоению теоретических знаний и является связующим звеном с окружающим миром, родным краем, малой Родиной. Уникальность, близость и высокая информативность краеведческого материала делает его незаменимым помощником в изучении всех учебных предметов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Данилюк, А.Я. Концепция духовно-нравственного развития и воспитания личности гражданина России в сфере общего образования /

- А.Я. Данилюк, А.М. Кондаков, В.А. Тишков. РАО. — М.: Просвещение, 2009. — 23с.
2. Смолеусова, Т.В. Уроки – экскурсии по математике в начальной школе. Методическое пособие. – М.: ТЦ Сфера, 2005. – 112с.
 3. Шемянов, Н.Н. Экскурсионный метод в математике. Иваново-Вознесенск, «Основа», 1925. – 55с.
 4. Шмидт, С.О. Краеведение и документальные памятники. – Тверь, 1992. С. 6.

УДК 514 (072.8)

ПРЕПОДАВАНИЕ ГЕОМЕТРИИ В ТРУДОВОЙ ШКОЛЕ В 20-30 ГОДЫ XX ВЕКА¹

О.В. Тарасова, д.п.н., проф.

ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет им. И.С. Тургенева»
e-mail: *tarasova_orel@mail.ru*

В работе изложены особенности преподавания школьного курса геометрии в отечественной трудовой школе в 20-30-е годы XX века.

Вопрос поиска новых методов преподавания актуален в любой временной промежуток. Смена парадигм образования, изменение целей образования, связанные с эпохой, историческими событиями отражаются на содержании программ, способах изложения материала, результатах, предъявляемых к обучению, в том числе и школьному, в том числе и математическому. В 20-е годы XX века отечественная школа взяла ориентир на трудовую школу. Трудовая школа была призвана реализовать две взаимосвязанные идеи: единства и трудового обучения и воспитания.

Сразу после событий октября 1917 года, руководство страны поставило цель – создание единой трудовой школы. Мысль эта была не нова и выдвигалась в России К.Д. Ушинским, ратующим за взаимосвязь труда и воспитания. Большевики поддерживали идеи социалистов-утопистов: Т. Мор и Т. Кампанелла, У. Петти, Дж. Беллерс и др.

В октябре 1918 года опубликовано Положение «О единой трудовой школе Российской Социалистической Федеративной Советской Республике». Это Положение намечало пути строительства такой школы, провозглашением принципов, на которых она должна была базироваться. В качестве принципов построения системы народного образования выдвигались: связь школы с жизнью, последовательное проведение социалистического

¹ Исследование выполнено при финансовой поддержке РГНФ. Проект «История становления и развития школьного курса геометрии в России от революции 1917 года до 30-х годов XX века» №16-06-00169».

демократизма, осуществление национального и полового равноправия, обучение на родном языке, преемственность различных ступеней обучения.

Единая трудовая школа вводилась двухступенчатая, с девятилетним сроком обучения. Первая ступень для детей от 8 до 13 лет (5-летний курс), вторая – от 13 до 17 лет (4-летний курс).

В 1924 году Коллегия Наркомпроса приняла решение о профессионализации 2-го центра школы второй ступени (8-й и 9-й классы). В результате на базе школы было развернуто широкое профессиональное образование юношей и девушек (15-17 лет).

В 20-е годы в научно-педагогической секции ГУСа была разработана комплексная система обучения. И к огромному счастью, во второй половине 20-х гг. была хотя бы частично возвращена предметная система преподавания, но разумеется при сохранении общего трудового характера школы.

Однако возврат, хотя бы и частичный, к предметному преподаванию повлек за собой значительно уменьшение количества времени, отводимого на преподавание математики. Сложившаяся ситуация заставила методистов, учителей искать пути реформирования дела ведения занятий по математике. Математическая комиссия Петрограда и Москвы, составлявшая «Примерные программы по математике для трудовой школы I и II ступени», включила в них «минимум того, что необходимо знать каждому молодому человеку, окончившему среднюю школу» [3; С. 215].

Сложилось затруднительное положение: «сокращать сколько-нибудь значительно объем тех вопросов, которые входят в программы, вовсе не представляется желательным, а рассчитывать на увеличение числа уроков математики не приходится» [3; С.215]. Выход из сложившейся ситуации стали искать не только в методах преподавания, ориентированных в первую очередь на принципы, выдвигаемые трудовой школой.

Очередной раз в отечественной методике преподавания математики поставили вопрос о целесообразности систематического курса геометрии. «Думается, что наступил момент, когда нужно определенно сказать или напомнить ту, уже не новую, но, по-видимому, забытую мысль, что изучение геометрии в нашей трудовой (средней) школе вовсе не должно превращаться в изучение «Начал» Евклида, как это было до сего времени и имеет место почти везде и сейчас. Пусть «Начала» Евклида, - это замечательный труд греческого гения, изучаются со всей подробностью и вниманием на соответствующих специальных факультетах, а в нашей 9-летней школе ему не место прежде всего потому, что он недоступен учащемуся средних способностей, и насильственное вбивание в головы учащихся «доказательств» не приносит никакой пользы и лишь напрасно отнимает время» [3; С.216].

При этом И.А. Сигов, автор исключительно небольших методических работ «Об изготовлении и применении наглядных пособий» (1923), «Практические занятия по геометрии. Теневые силуэты» (1924), «Проекционное черчение в курсе геометрии единой трудовой школы» (1924), выдвигает утверждение, что «нельзя также допустить возможность «догматического сообщения» положений геометрии, как это иногда рекомендуется некоторыми программами. Напротив, учащиеся должны сами делать выводы и производить исследование вопросов геометрии, пользуясь для этого здравым смыслом. Прибегая то к интуиции, то к рассуждениям, естественно возникающим в уме учащегося. Нет надобности «доказывать» положения, истинность которых не вызывает у учащегося никакого сомнения и необходимость доказательства которых им совсем не ощущается, но нужно указать учащимся те пути, идя которыми он может открыть положения, не являющиеся «очевидными». Каждому юноше и каждой девушке представляется вполне понятным, что объемлющая ломаная длиннее объемлемой, если они понимают, о чем идет речь, а доказательство этого положения им кажется совсем ненужным и излишним. А ведь при прохождении «систематического» курса геометрии много времени затрачивается именно на доказательство подобных положений» [3;С.216-217].

Насколько ошибочно представленное утверждение показало время. Выдвигаемые требования к учащимся: уметь делать выводы, руководствоваться здравым смыслом, опираться на интуицию, осуществлять рассуждения, естественно возникающим в уме учащегося можно только при достаточно высокой уровне развития логического мышления, пространственного и плоскостного воображения. С этим не рождаются, это необходимо формировать и развивать именно на учебных предметах, и особенно на уникальной геометрии, со своей стройной структурой, продуманной и обоснованной логикой, красотой рассуждений, умозаключений и выводов.

И последняя цитата указанного автора – «... без всякого ущерба для познаний учащихся можно достигнуть боле коротким, естественным и понятным для учащихся путем той же самой цели, к которой приводит их теперь утомительный путь «доказательств» теорем» [3;С.217]. Этот «короткий, естественный и понятный» путь был выбран: стремление заменить систематический курс геометрии реализовали через введение в курс трудовой школы II ступени учебных пособий «Паровоз на уроках математики», «Самолет на уроках математики» и др.

Занятные книжки удалось обнаружить только в Российской Национальной библиотеке г. Санкт-Петербурга – удивительном месте, с богатейшим книжным довоенным фондом, который, очевидно, благодаря неимоверным усилиям сотрудников библиотеки удалось сохранить в страшные годы блокады.

Итак, что же предлагалось изучать на уроках математики, в том числе и геометрии, в трудовой школе II ступени.

Инженер Владимир Владимирович Добровольский в 1926 году опубликовал два учебных пособия, допущенных для школ II ступени Научно-педагогической секцией Государственного Ученого совета «Паровоз на уроках математики» [1] и «Самолет на уроках математики» [2].

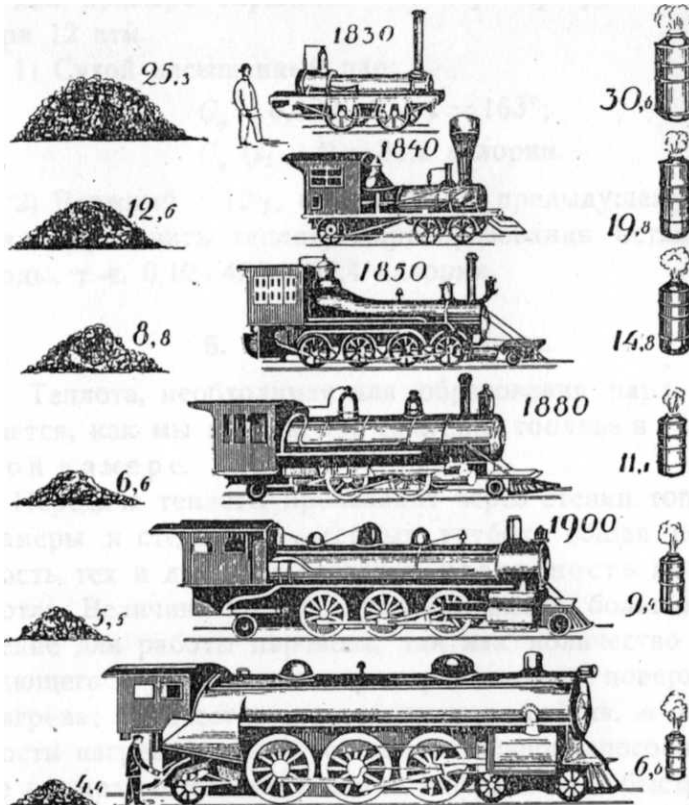
Учебное пособие «Паровоз на уроках математики» рассказывало о работе паровоза в целом: общее описание паровоза, сила тяги и мощность, сопротивление поезда, коэффициент полезного действия, исторические сведения о паровозах; о производстве пара: тепловая производительность, тепловой баланс, прогресс паровозостроения, свойства водяного пара, поверхность нагрева, водяное и паровое пространство; работа пара: индикаторная диаграмма, усилие на поршень, индикаторная мощность и сила тяги, передача силы на колесо, мертвые точки, принцип «компаунд»; движение паровоза: главный механизм, кулисный механизм, качение колес на прямом пути, качение колес на закруглениях.

Приведем примеры изложения материалы и заданий к ним.

Прогресс паровозостроения

Помещенный рисунок показывает прогресс паровозостроения за 90 лет – от 1830 до 1920 г. На этом рисунке слева в виде куч угля показан наглядно расход угля на получение одного кг пара, а справа – расход пара в час на 1 лошадиную силу. По числам, стоящим на рисунке, постройте прямоугольные диаграммы обычного вида, а затем вычертите конуса (для угля) и цилиндры (для пара), объемы которых были бы пропорциональны числам расхода. Которые из диаграмм – обыкновенные или фигурные, дают более верное представление о прогрессе?

Указание. Объем ко-



нуса $V_k = \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi d^2}{4} \cdot h$; если сделать конуса одинаковой формы, т.е. подобными, то $h = kd$, где k -одинаково для всех конусов, а потому $V_k = md^3$, где $m = \frac{\pi k}{12}$, т.е. одинаково для всех. Из этого заключаем, что линейные размеры конусов (например, диаметры) пропорциональны $\sqrt[3]{V_k}$; то же заключение относится и к цилиндру. Воспользуйтесь этим соображением при построении фигурных диаграмм и для суждения об их ценности. Составьте в заключение

диаграмму прогресса теплоиспользования, составляя: 1) к.п.д. котла, 2) к.п.д. машины по отношению к пару, 3) общий к.п.д. машины по отношению к топливу.

Таким образом, начиная с 1924 года началась профессионализация старшей ступени (8-9 классы). Однако профессионализация школы себя не оправдала, так как ее выпускники не обладали ни должной профессиональной квалификацией, ни общеобразовательным уровнем, достаточным для поступления в вуз. В учебных программах ГУСа (1924 г.) геометрические сведения излагались в разделе «Математика» и носили эпизодический и чисто прикладной характер.

В 1925 году в постановлениях Всесоюзного учительского съезда отмечалось, что «у детей нет прочных знаний, умений и навыков по родному языку и математике в связи с проведением комплексной системы». Однако эта система продолжала настойчиво внедряться в практику работы школы. Продолжала иметь место также и недооценка роли русского языка и литературы, математики (и геометрии, как составной части), то есть недооценка основ элементарной грамотности детей.

Впереди отечественную систему образования ждет политехническое обучение и еще более тесная взаимосвязь с производством и трудом, с опорой на богатейший опыт массовой школы.

Зрели новые перемены. С 1926/27 учебного года в городах и поселках организуются фабрично-заводские семилетки (ФЗС и ФЗУ), а в селе - школы крестьянской молодежи (ШКМ). Пленумы ЦК ВКП(б) 1928-1929 гг. неоднократно указывали Наркомпросу на необходимость подвергнуть тщательному рассмотрению учебный план и программы средней школы с целью: разгрузить их от излишнего учебного материала, обеспечить преемственность семилетней школы и школы второй ступени.

Летом 1930 г. состоялся XVI съезд ВКП(б), на котором с отчетом выступил И.В. Сталин. В своем докладе он подчеркнул еще раз, что достижения страны в области просвещения не отвечают насущным задачам дня. Особенно резкой критике был подвергнут старший концентр школы II ступени, который, будучи оторван от производства, не может обеспечить поступление работающих подростков в вузы. Все в большей степени подчеркивалось значение общеобразовательных учебных предметов (особенно предметов естественно-математического цикла) для профессионального обучения молодежи.

В 1933 году Наркомпросом опубликованы программы политехнического обучения в семилетке. И пошла череда учебных пособий, конкретизирующих содержание трудового обучения в школе, связанное с железнодорожным транспортом [5], с электростанцией [7], с текстильным предприятием [6]. Связь с жизнью демонстрировали и связью с другими учебными предметами. Так, например, увязка темы «Скорости резания и подачи» при изучении темы «Металлообработка. Токарный станок и работа на

нем» с математикой – длина окружности и решение уравнений с одним неизвестным; с физикой – равномерно-вращательное движение и формула для окружной скорости [4;С.26].

Скорость резания при токарных работах [4; С.24]

Путь, проходимый в единицу времени резцом по отношению к изделию или, наоборот, изделием по отношению к резцу, называется скоростью резания. Скорость резания обычно измеряется метрами в минуту и обозначается $V \frac{\text{мет.}}{\text{мин.}}$.

В сущности, скорость резания может определиться длиной стружки, снятой с изделия в единицу времени. Так как завившуюся в спираль стружку точно измерить невозможно, то скорость резания вычисляют по формуле. Воспользуемся для определения скорости резания известной нам из курса физики формулой окружной скорости, которая в несколько измененном виде применяется в технике.

Формула окружной скорости $V \frac{\text{мет.}}{\text{сек.}} = \frac{\pi dn}{60}$, так как скорость резания обычно вычисляется в минутах, очевидно эту формулу можно написать в следующем виде: $V \frac{\text{мет.}}{\text{мин.}} = \frac{\pi dn}{60}$, где V равно окружной скорости, выраженной в метрах в минуту.

Приводятся примеры задач, которые сегодня мы называем задачами из блока «Реальная математика». Например. Требуется обточить на токарном станке резцом из быстрорежущей стали бронзовую отливку диаметром 120 мм. Сколько оборотов должен делать шпиндель станка?

$$n = \frac{V \cdot 1000}{\pi \cdot d}$$

Из таблицы выбираем скорость резания бронзы при обточке резцом быстрорежущей стали 20-40 средняя скорость:

$$\frac{20+40}{2} = 30 \frac{\text{м}}{\text{мин}}; \quad n = \frac{30 \cdot 1000}{3,14 \cdot 120} = \frac{250}{3,14} = 80 \text{ обор. в мин. [4; С.26]}$$

В этот период постепенно начинает формироваться целостная система советского школьного образования, в том числе и геометрического, которая в дальнейшем станет признанной, одной из лучших в мире.

Предметное преподавание, систематические учебные курсы, в том числе и систематический курс математики: арифметика, алгебра, геометрия, тригонометрия (практически в дореволюционном виде) возобновились в советской школе с начала 30-х годов, после исторических постановлений ЦК ВКП (б) и Правительства о школе от 5.09.1931 г. и от 25.08.1932 г. «О программе и режиме в начальной и средней школе». В этих постановлениях уже жестко отмечалось, что основной недостаток школы заключается в том, что она не даёт достаточного объёма общеобразовательных знаний, не готовит к получению среднего и высшего профессионального образования.

Особенно важно, что Постановление 1932 года устанавливало урок – основной формой организации учебной работы в школе. С этого времени

начинается усиленная работа по перестройке школьного преподавания на новой основе. Можно по-разному относиться к рассматриваемого временному и событийному этапу истории отечественной системы образования, но плодами труда, грандиозными объектами строительства и производства мы до сих пор гордимся и активно используем.

ЛИТЕРАТУРА

1. Добровольский В.В. Паровоз на уроках математики. – М.-Л., Гос.изд-во, 1926. – 60с.
2. Добровольский В.В. Самолет на уроках математики. – М.-Л., Гос.изд-во, 1926. – 56с.
3. Сигов И. К вопросу о реформе преподавания математики в трудовой школе. //Просвещение. Педагогический сборник. – №3. – Гос.изд-во,, М.-Петроград, 1923. – С.215-217.
4. Трудовое политехническое обучение в средней школе. Поурочные методические разработки по 5-7 гг. обучения. Разработано в Гор. Методическом кабинете по Политехническому обучению. Под. ред. Верховской Е.А., Никонова Н.Д. – Л., Изд.Ленинградского областного Политпросветцентра, 1934. – 39с.
5. Трудовое политехническое обучение в школе, связанной с железнодорожным транспортом. Материалы к стабильным программам. – М.: Наркомпрос РСФСР, Учпедгиз, 1933. – 32с.
6. Трудовое политехническое обучение в школе, связанной с текстильным предприятием. Материалы к стабильным программам. – М.: Наркомпрос РСФСР, Учпедгиз, 1933. – 48с.
7. Трудовое политехническое обучение в школе, связанной с электростанцией. Материалы к стабильным программам. – М.: Наркомпрос РСФСР, Учпедгиз, 1933. – 32с.

АНТРОПНЫЙ ПРИНЦИП КАК НАУЧНАЯ И ФИЛОСОФСКАЯ ПРОБЛЕМА

С.В. Терехов, к.филос.н., доц.,
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет им. И.С. Тургенева»
e-mail: svterehov@mail.ru

Антропный принцип является на сегодняшний день одной из наиболее острых и спорных проблем современной научной картины мира. Его используют прежде всего для того чтобы указать роль и место разумной, а точнее человеческой жизни во Вселенной. Рассматривая обращение к данной проблеме в науке и философии, можно выявить три исторические парадигмы, предлагающие ответ на этот вопрос:

1. Вселенная антропоморфна, т.е. подобна целостному живому организму, уменьшенной копией которого является человек, возникший и развивающийся под воздействием высших законов природы.
2. Вселенная сотворена Богом, который создал человека по своему образу и подобию, наделив частью своих творческих способностей.
3. Возникновение разумной жизни является результатом серии случайных космологических событий и не имеет определённой цели.

Анализ данной проблемы сейчас особенно актуален потому, что современной наукой выявлена очень точная подгонка фундаментальных физических констант Вселенной, которые приняли такие значения, при которых даже мельчайшие отклонения привели бы к глобальному изменению физических свойств мироздания, делающему невозможным сам факт возникновения человека. Эту проблему активно исследовали Г.М. Идельс, Б. Картер, Ф. Хойл, А.М. Зельманов, Н.Л. Розенталь, С. Хокинг, Дж. Уилер, Ф. Типлер и другие ученые. Именно эта удивительная корреляция Вселенной и существующего в ней человека получила название антропного принципа.

В своей слабой модификации, сформулированной Б. Картером в 1973 г, антропный принцип предполагает, что *любые космологические модели, претендующие на право адекватно описать происхождение и развитие Вселенной, должны быть ограничены условиями, допускающими существования человека как разумного наблюдателя.* В сильной модификации антропного принципа Б. Картер утверждает, что *Вселенная обязана иметь такие свойства, которые позволяют развиваться в ней разумной жизни.*

Следует особо отметить, что отечественная философская мысль пришла к идее антропного принципа гораздо раньше его формулирования западными естествоиспытателями. Мировоззренческие идеи, которые являются очевидными теоретическими предпосылками обеих версий антропного принципа Б. Картера, были сформулированы в начале XX века в русском космизме и активно обсуждались в предвоенные годы в работах

представителей его естественнонаучного направления, в рамках развиваемых ими представлений о космической сущности жизни.

При ближайшем рассмотрении становится очевидно, что слабый антропный принцип представляет собой иную формулировку принципа космичности жизни В.И. Вернадского, который утверждал, что «Жизнь может быть извечной, но новой лишь на Земле, где есть условия для её продолжения, но не для её зарождения».² Жизнь является неотъемлемым свойством Вселенной, вечным по своей природе, возникающим и уничтожаемым вместе с ней. Необходимость признания космичности жизни вытекает, по мнению В.И. Вернадского, из того положения, что живое является необходимым звеном в истории всех химических элементов Вселенной.

Предпосылки сильного антропного принципа можно обнаружить уже в философских произведениях К.Э. Циолковского, посвящённых Воле Вселенной, которая проявляет себя в деятельности высших космических цивилизаций. Рассуждая о первопричинах бытия в своих работах «Причина космоса» и «Воля Вселенной», К.Э. Циолковский указывает: «Всё порождено Вселенной, она начало всех вещей, от неё всё и зависит. Человек или другое высшее существо и его воля есть только проявление воли Вселенной».³ А воля Вселенной есть не что иное, как совокупное проявление эгоизма каждого отдельного её атома, который обладает психическими свойствами и способен жить чувственной жизнью, что в полной мере возможно лишь в составе существа, наделённого разумом. Поэтому Вселенная, построенная из панпсихических, наделённых чувствительностью атомов, закономерно и неизбежно трансформируется в направлении возникновения и широчайшего распространения в ней разумной жизни.

Другой более современный отечественный физик Г.В. Гивишвили предложил «сверхсильную» формулировку антропного принципа, согласно которой *Вселенная такова, какова она есть, потому что человек составляет необходимый элемент её бытия*. В своих работах он подчёркивает, что дальнейшая эволюция Вселенной невозможна без управляющего воздействия на неё разумных существ. «Изменение направления движения, – считает Г.В. Гивишвили, – не может произойти иначе, чем благодаря вмешательству некой “неестественной”, т.е. разумно организованной силы. Этой силой может быть только мыслящая субстанция – человек в широком смысле (не обязательно – земной)».⁴ Здесь следует отметить, что, хотя с позиций философии русского космизма данный принцип не является оригинальным, он интересен, прежде всего, своим требованием замены древней мировоззренческой установки «Вселенная для человека» новой идеологией «Человек для Вселенной» как осознанного современной наукой ша-

² Вернадский В.И. Живое вещество. – М.: Наука, 1978. – с. 132.

³ Циолковский К.Э. Воля Вселенной // К.Э. Циолковский. Грёзы о земле и небе: Научно-фантастические произведения. Тула: Приок. кн. изд-во, 1986. – с. 308.

⁴ Гивишвили Г.В. О “сверхсильном” антропном принципе // Вопросы философии, 2000. №2. – с. 52.

га на пути её дальнейшего развития, предсказанного русскими философами.

Впервые подобную активную деятельную позицию человека в структуре мироздания обосновал основоположник религиозного направления русского космизма Николай Фёдорович Фёдоров в «Философии общего дела». Теоретическую основу его философского учения составляют идеи воскрешения предков, достижения индивидуального бессмертия и регуляции природы в космическом масштабе. По мнению Н.Ф. Федорова, причина царящего в мире зла связана со слепыми силами природы, с несовершенством самого мироздания и смертностью человека. Главная проблема человека – ограниченность здоровья и жизни, поэтому вместо борьбы за своё «место под солнцем», люди должны объединиться в борьбе против главного врага - смерти и с помощью науки достичь бессмертия. Противодействие злу обуславливает превращение мира в гармоничный, разумный, целесообразный, то есть управляемый, регулируемый, прогнозируемый мир.

Центральное место в учении Федорова занимает идея «воскрешения отцов», патрофикация. По его мнению, воскресительное дело, а вместе с ним и реальное обретение бессмертия, должно увенчаться успехом, если будет осуществиться совместными усилиями всего человечества. С проектом «общего дела», т.е. объединением людей для воскрешения предков, тесно связан и проект регуляции природы, направленный на превращение нашей планеты в огромный автономный космический корабль, с помощью которого разумная жизнь начнёт активно расселяться во Вселенной.

Особенно ярко активная роль человечества в структуре мироздания проявляется в размышлениях Н.Ф. Фёдорова о прогрессе человеческой цивилизации. «Прогресс, – пишет мыслитель, – как переход от худшего к лучшему, требует, конечно, чтобы недостатки слепой природы были исправлены сознающе эти недостатки природою, т.е. совокупною силою человеческого рода... Сам прогресс требует воскрешения, но такое требование заключается в прогрессе не знания только, а действия ... только вместе с переходом учёного сословия от знания к делу и прогресс перейдёт от знания того, *что есть*, к знанию того, *что должно быть* (курсив автора)».⁵

Актуальность рассмотренных идей русских философов оказывается ещё более очевидной при обращении к иным, не каноническим формулировкам антропного принципа, сформулированным видными современными учёными-естествоиспытателями, но не получившим широкой известности в виду их парадоксальности. Так С. Хокинг, например, утверждает: «Изотропия Вселенной и наше существование являются следствиями одного и

⁵ Фёдоров, Н.Ф. Вопрос о братстве, о причинах небратского, неродственного, т.е. немирного состояния мира и о средствах к восстановлению родства: Записка от неучёных к учёным, духовным и светским, к верующим и неверующим / Н.Ф. Фёдоров. М.: АСТ: АСТ МОСКВА: ХРАНИТЕЛЬ, 2006. – с. 39.

того же факта расширения Вселенной именно с той скоростью, которая близка к критической. И поскольку мы не могли бы наблюдать Вселенную с другими свойствами, раз нас в ней не было бы, то можно сказать, что *изотропия Вселенной есть следствие нашего существования* (курсив мой – С.Т.)».⁶ Ф. Хойл указывал: «Здравая интерпретация фактов дает возможность предположить, что *в физике, а также в химии и биологии экспериментировал "сверхинтеллект"* и что *в природе нет слепых сил*, заслуживающих внимания (курсив мой – С.Т.)».⁷ Дж. Уилер размышлял о том, что: «Порождая на некотором ограниченном этапе своего существования наблюдателей-участников, не приобретает ли в свою очередь Вселенная посредством их наблюдений ту осязаемость, которую мы называли реальностью? Не есть ли это механизм существования?».⁸ По его мнению, воспринимая мир *«наблюдатель здесь и сейчас участвует в образовании ранней Вселенной, хотя это представляет собой обращение обычного хода времени* (курсив мой – С.Т.)».⁹

Ф. Типлер предложил свою версию антропного принципа, получившую название финалистской. Она основана на постулате о вечности жизни, очень похожем на аналогичную идею, высказанную В.И. Вернадским, с той лишь разницей, что Ф. Типлер трактовал жизнь как реализацию программы производства информации. Физическая природа носителей информации при этом не важна, то есть это не обязательно должен быть человек. *Цель этого процесса состоит в управлении крупномасштабной структурой Вселенной*, а завершится он в некоей точке Омега, когда появится единый общечеловеческий Разум, владеющий бесконечно большим объемом информации. Основываясь на своей концепции, Ф. Типлер утверждает, что Вселенная обязана быть закрытой, поскольку она потенциально содержит точку Омега как финал, в котором пересекаются все мировые линии событий. В сущности Ф. Типлер проповедует не что иное, как абсолютную колонизацию Космоса антропоморфным «развертывающимся богом». Современные специалисты в области синергетики заметят, что эта модель ведет в эволюционный тупик.

Значительно более рациональная интерпретация антропного принципа сформулирована в работах Н.Л. Розенталя, который трактует его как принцип целесообразности. Он утверждает, что *все наши базовые физические законы подчиняются гармонии, обеспечивающей существование основных состояний*. На конкретных примерах варьирования величиной фундаментальных физических констант Н.Л. Розенталь смог убедительно показать конструктивную роль антропного принципа.

⁶ Хокинг С. Анизотропия Вселенной на больших временах // Космология: теория и наблюдения. М., 1978. – с. 364.

⁷ цит. по Девис П. Случайная Вселенная. М.: Мир, 1985. – с. 141.

⁸ Уилер Дж. Квант и Вселенная // Астрофизика, кванты и теория относительности / Пер. с итальянского. Под ред. Ф.И. Фёдорова. М.: Мир, 1982. С. 555-556.

⁹ Там же.

Подобную точку зрения разделяют С.П. Курдюмов и Б.Н. Князева. По их мнению, сложное связано с иерархическим принципом строения и должно изучаться в эволюционном аспекте. Исходя из этого, они формируют эволюционный постулат антропного принципа: *сложный спектр структур-аттракторов существует лишь для узкого, уникального класса сценариев с нелинейными зависимостями*. Другими словами для любых систем, какими бы сложными они не были, существует лишь небольшой диапазон возможных изменений структуры, позволяющий им перейти в устойчивое, упорядоченное, стабильное состояние. Данная синергетическая интерпретация антропного принципа позволяет объяснить причину уникального согласования фундаментальных физических констант в нашей Вселенной, но оставляет неразрешённой загадку морфогенеза, т.е. не объясняет причин постоянного усложнения её систем, перехода от простых её структур к более сложным.

Таким образом, мы можем прийти к выводу, что современные учёные весьма плодотворно используют мировоззренческие идеалы русского космизма для обоснования собственных эволюционных представлений. Мы можем также заключить, что антропный принцип, разработанный в рамках доминирующей в современном естествознании концепции глобального эволюционизма, тесно взаимосвязан с основными идейными постулатами русского космизма. При этом, по характеру затрагиваемых проблем и степени их теоретической разработанности, философия русского космизма может с полным основанием рассматриваться как исторически первая теория, основанная на глобальноэволюционном подходе к изучению процессов, происходящих во Вселенной, которая не потеряла актуальности на сегодняшний день. Она демонстрирует не только значительный эвристический потенциал, который ещё долго будет востребован современной наукой, но и наглядно проявляет тесную взаимосвязь современной физики и философии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вернадский В.И. Живое вещество. – М.: Наука, 1978.
2. Гивишвили Г.В. О “сверхсильном” антропном принципе // Вопросы философии, 2000. №2.
3. Уилер Дж. Квант и Вселенная // Астрофизика, кванты и теория относительности / Пер. с итальянского. Под ред. Ф.И. Фёдорова. М.: Мир, 1982.
4. Фёдоров, Н.Ф. Вопрос о братстве, о причинах небратского, неродственного, т.е. немирного состояния мира и о средствах к восстановлению родства: Записка от неучёных к учёным, духовным и светским, к верующим и неверующим / Н.Ф. Фёдоров. М.: АСТ: АСТ МОСКВА: ХРАНИТЕЛЬ, 2006.
5. Хокинг С. Анизотропия Вселенной на больших временах // Космология: теория и наблюдения. М., 1978.

6. Циолковский, К.Э. Монизм Вселенной / К.Э. Циолковский. Грёзы о земле и небе: Научно-фантастические произведения. Тула: Приок. кн. изд-во, 1986.
7. Девис П. Случайная Вселенная. М.: Мир, 1985.

УДК 378.147.227

СПОСОБ АНАЛИЗА ЭФФЕКТИВНОСТИ МЕР ПО АКТУАЛИЗАЦИИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗНАНИЙ У СТУДЕНТОВ, ОБУЧАЮЩИХСЯ НА РАДИОТЕХНИЧЕСКИХ СПЕЦИАЛЬНОСТЯХ

А.А. Тимошенко

ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет им. И.С. Тургенева»
e-mail: *bizzna@yandex.ru*

В статье рассмотрены способы достоверного сравнения успеваемости студентов с использованием актуализации математических знаний при обучении специальным дисциплинам радиотехнического профиля.

В публикации [1] освещена проблема низкого уровня остаточных знаний в области математики, полученных во время обучения на младших курсах вуза, у студентов, которые начинают на старших курсах изучать специальные предметы. Так, автором данной статьи выявлено, что ряд предметов специальностей радиотехнического профиля подразумевает под собой изучение тех или иных физических процессов. Описание этих процессов строится на применении аппарата высшей математики, которую студенты проходят отдельно на младших курсах в рамках предмета «Математический анализ». Для удовлетворительного и высокого уровня усвоения таких предметов технического профиля зачастую бывает недостаточно посещение лекций, а также практических и лабораторных занятий. Это связано с тем, что студенты со временем забывают математический аппарат и теряются при столкновении с необходимостью применять его во время изучения специальных предметов технического профиля.

Для актуализации знаний, полученных на занятиях по высшей математике, автором данной статьи в [1] было предложено введение пятиминутных тестов в начале всех практических занятий по радиотехническим предметам, тесно связанным с математикой. При этом студентам предлагается заранее ознакомиться с тематикой этих тестов, чтобы иметь возможность подготовиться к ним заранее. Сами результаты тестов послужат индикатором степени готовности студентов к восприятию нового материала

по специальным предметам и детектором пробелов в математических знаниях, устранению которых стоит уделить внимание.

С целью определения эффективности мер по актуализации остаточных знаний у студентов технических специальностей, а также определения направления их развития предлагается осуществить ряд мероприятий, а именно:

1. Проведение анализа успеваемости студентов по определенному спецпредмету в разных учебных заведениях. Он может выявить не только особенности оценки знаний, полученных студентами по спецпредмету, но и оценить разброс качества преподавания математики в различных вузах. Сложность реализации данного способа заключается в удаленности субъектов исследования друг от друга, необходимости координации, а также возможный бюрократических явлений, затрудняющих эксперимент. Различия в уровне преподавания математики и специальных предметов, индивидуальные особенности в организации мероприятий по актуализации математических знаний, а также различные субъективные способы оценки знаний учащихся делают необходимым обозначить такой метод анализа эффективности мер по актуализации математических знаний у студентов низкоэффективным, а его результаты – недостоверными. Анализ многолетней успеваемости студентов из нескольких вузов представляется еще более затрудненным процессом. Однако, он может позволить проследить не только влияние актуализации математических знаний на успеваемость студентов по определенному спецпредмету, но и выявить более глубокие процессы, например, зависимости уровня развития электронной промышленности в том или ином регионе от качества преподавания математики на младших курсах вузов в этих регионах.

2. Проведение анализа успеваемости различных групп студентов одного учебного заведения по определенному предмету за несколько лет. Важно, чтобы этот предмет все годы вел один и тот же преподаватель, чтобы сохранить его субъективные предпочтения при выставлении оценки. Результаты данного анализа автор статьи предлагает оценить, сравнивая результаты обучения, в котором не использовалась актуализация знаний по математике, полученных на младших курсах с результатами обучения, во время которого проведены мероприятия по актуализации математических знаний. Такое исследование автором данной статьи считается наиболее простым и достаточно достоверным, так как для его реализации необходима только выписка из деканата об успеваемости предыдущих групп студентов по актуальному для исследования предмету, а также эксперимент с новой группой, который длится один семестр. К недостаткам такого метода автор относит возможные изменения оценки знаний студентов тем или иным преподавателем, которые происходят за несколько лет работы.

3. Проведение анализа успеваемости различных групп студентов по определенному предмету, который изучается ими одновременно. Так как

этот предмет является специальным, то с большой вероятностью во всех группах его ведет один преподаватель (или группа преподавателей, разделенная между лекциями, практическими и лабораторными занятиями), поэтому его субъективные предпочтения при выставлении оценок будут одинаковыми. Результаты такого анализа оценить, как результаты обучения, в котором не использовалась актуализация знаний по математике, полученных на младших курсах. Такой эксперимент автором данной статьи считается наиболее простым и достоверным, так как для его реализации необходима только выписка из деканата об успеваемости предыдущих групп студентов по актуальному для исследования предмету, а также эксперимент с новой группой студентов, который длится один семестр.

Вышеперечисленные меры должны не только позволить определить зависимость успеваемости студентов по спецпредметам от мероприятий по актуализации знаний в области математики. В случае выявления положительной тенденции результаты такого анализа помогут вносить коррективы в актуализационный материал в зависимости от темы, изучаемой на том или ином занятии спецпредмета.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тимошенко А.А. Использование теоретических сведений из курса «Высшая математика» в процессе изучения специальных дисциплин при подготовке инженера (на примере дисциплины «Основы радиосвязи») // Вестник науки. Сборник научных работ аспирантов, магистрантов и студентов физико-математического факультета / под общ. ред. Т.Н. Можаровой. – Выпуск 15. – Орел: Картуш, 2016. – 80 с.

УДК 51(072.2)

ПРОЕКТНАЯ ДЕЯТЕЛЬНОСТЬ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ НА ВНЕУРОЧНЫХ ЗАНЯТИЯХ

И.В. Фарафонова, ст. преп.

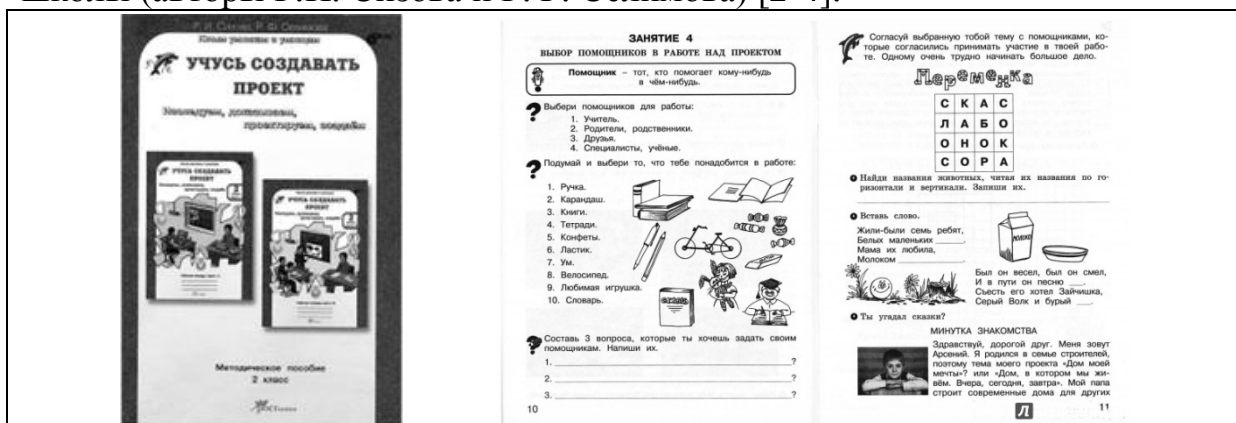
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет им. И.С. Тургенева»

В статье идёт речь о различных курсах внеурочной деятельности, формирующих у младших школьников основы проектной деятельности.

Согласно Федеральному государственному образовательному стандарту начального общего образования для общеобразовательных учреждений Российской Федерации организация занятий по направлениям вне-

урочной деятельности является неотъемлемой частью образовательного процесса в школе. Время, отводимое на внеурочную деятельность, используется по желанию учащихся и в формах, отличных от урочной системы обучения. В базисном учебном плане выделены основные направления внеурочной деятельности: спортивно-оздоровительное, художественно-эстетическое, научно-познавательное, военно-патриотическое, общественно полезная и проектная деятельность [1, С. 7].

Во внеурочной деятельности, предусмотренный ФГОС НОО, есть курсы, формирующие у учащихся начальной школы основы проектной деятельности. Среди них курс "Учусь создавать проект" для начальной школы (авторы Р.И. Сизова и Р.Ф. Селимова) [2-4].



Этот курс представляет собой систему обучающих и развивающих занятий по проектной деятельности для детей 5-10 лет (138 часов). Целью программы является развитие навыков использования разных источников информации для создания проектов и формирование навыков делового общения в процессе работы над проектом. Он представлен рабочими тетрадями и методическими пособиями к ним, которые направлены на решение задач формирования самостоятельности ребёнка, способного к самообразованию и саморазвитию. Они помогут ребёнку научиться видеть мини-проблемы, правильно находить источники информации и формировать навыки делового общения в процессе работы над проектом. Пособие соответствует федеральному государственному образовательному стандарту начального общего образования (ФГОС второго поколения). Предлагаемые рабочие тетради адресованы учащимся 1-4 классов. Педагоги могут использовать их во внеурочной и внеклассной деятельности, а родители-консультанты - во время создания проекта. Так, например, в 1-ом классе дети рассматривают несколько тем проектов («Кто я? Моя семья», «Чем я люблю заниматься. Хобби»), после чего им даются понятия «проект», «тема проекта», «проблема», «гипотеза», «предположение», «цель и задачи проекта», «продукт проекта». В процессе изучения этих понятий они знакомятся со способами выбора нужной информации, помощниками в работе над проектом, вопросами, связанными с представлением проекта (визитка проекта и выступление). А далее младшим школьникам предлагается не-

сколько проектов – исследований с подробным описанием хода работы над ними («Окрашивание цветка в разные цвета», «Мобильные телефоны», «Получение электричества с помощью волос», «Поилка для цветов»). Учащиеся лишь должны сделать выводы и поделиться своими впечатлениями после работы над проектом. К концу первого года обучения по данной программе внеурочной деятельности отдельное занятие посвящено рефлексии и представлено памятка для учащегося – проектанта. В последующих классах общая схема работы сохраняется. Начиная со 2-го класса, идёт изучение компьютерной программы, отвечающей за составление презентаций проекта с последующим усложнением работы с ней. Только в 4-ом классе учащиеся знакомятся с различными видами проектов (исследовательско – творческий, творческий, ролево – игровой, исследовательский, информационно-исследовательский, информационно-ориентированный, монопредметный и межпредметный). В методическом пособии к каждому занятию даны небольшие рекомендации для учителя, и то не по всем вопросам занятия.

Существует иная программа внеурочной деятельности «Всё узнаю, всё смогу» (авторы А.В. Горячев, Н.И. Иглина) [5], которая, по замыслу авторов, направлена на формирование задатков ключевых компетенций младших школьников через проектную деятельность для учащихся 2 – 4-го классов начальной школы. Целью её является создание условий для развития личностного потенциала ребёнка, мотивации к познанию окружающего мира, приобщения к национальным и мировым культурным традициям посредством проектно-исследовательской деятельности. Этот курс является составной частью серии пособий «Как мы учимся» (образовательные технологии), подготовленной авторским коллективом развивающей Образовательной системы «Школа 2100». По мере изучения данного курса проектную деятельность авторы курса предлагают организовывать не только во внеурочное время, но и в учебном процессе. По их мнению, работу с источниками информации следует осуществлять в два этапа: 1) работа над темой (сбор и обобщение сведений) и 2) работа непосредственно над проектом. Пособие построено как журнал интересных иллюстрированных историй из жизни одного класса, что позволяет лучше представить роли учеников, учителя и родителей в процессе работы над проектом, и тем самым правильно организовать эту работу. Первая история называется «Что мы знаем о жизни наших предков?» Учитель ненавязчиво обращает внимание детей на то, какая интересная жизнь и традиции были у наших предков, и тем самым определяет общую тему «Наши предки». Далее детям предлагается выбрать подтему в соответствии со своими интересами (игрушки и игры, одежда, жилище, еда, праздники, ремёсла и т.д.). После выбора темы учитель проводит родительское собрание, на котором просит родителей помочь детям в поиске и отборе информации для проекта, но не в выполнении этой работы за них. После оформления своих сообщений в классе

составляется альбом. Далее даётся информация о видах проектов и продуктах проектной деятельности. Учащиеся, выбрав, каким будет продукт своего проекта, приступают к его воплощению. Другими рассмотренными темами проектной деятельности в данном пособии выступают «Куклы», «Транспорт», «Жилище», «Время», «Школа» и «Море», но они представлены лишь схематически.

Проанализировав наиболее используемые в школьной практике учебно-методические комплекты, реализующие ФГОС НОО, мы пришли к выводу о том, что проектная деятельность в начальной школе недостаточно разработана и систематизированности авторскими коллективами учебников, рекомендованных Министерством образования и науки; в большей их части отсутствует методическая база организации этой деятельности, предметные проекты вообще не представлены. Поэтому для полноценной организации проектной деятельности младших школьников необходимую подготовку должны получить и сами учителя ещё в вузе, например, в рамках дисциплины по выбору или при написании курсовых и выпускных квалификационных работ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Григорьев Д. В. Внеурочная деятельность школьников. методический конструктор пособие для учителя /Д.В. Григорьев, П.В. Степанов. – 4-е изд.. – Москва: Просвещение, 2014. – 223 с.
2. Сизова Р. И., Селимова Р.Ф. Учусь создавать проект [Текст]: Методическое пособие для 1 класса / Р. И. Сизова, Р. Ф. Селимова. – М.: Издательство РОСТ, 2011. – 64 с.
3. Сизова Р.И., Селимова Р.Ф. Учусь создавать проект: Рабочая тетрадь для 1 класса / Р. И. Сизова, Р. Ф. Селимова. – М.: Издательство РОСТ, 2011. – 64 с.
4. Сизова Р. И., Селимова Р.Ф. Учусь создавать проект [Текст]: методическое пособие для 4 класса / Р. И. Сизова, Р. Ф. Селимова. – Москва: Рост, 2013 – 117 с.
5. Горячев А. В., Иглина Н.И. Все узнаю, все смогу. Пособие по проектной деятельности в начальной школе (2-4 классы). – М.: Баласс, 2013. – 64 с.

РОЛЬ ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО ДОВУЗОВСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ В СИСТЕМЕ ПОДГОТОВКИ БУДУЩИХ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

Г.К. Шурко, к.ф.-м.н., доц.

ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»

e-mail: *gennady.shurko@mail.ru*

В статье освещена роль дополнительного довузовского образования в системе подготовки будущих учителей математики и информатики на факультете математики и информатики Донецкого национального университета.

Наблюдаемые тенденции в развитии современного общества порождают новые требования к качеству профессионального педагогического образования, к личностным и профессиональным качествам учителя. Происходящие политические, экономические и социальные изменения закономерно приводят к модернизации системы высшего педагогического образования.

Общеизвестно, что качество профессиональной подготовки будущего учителя математики и информатики в вузе в значительной степени зависит от качества образования абитуриентов, которое определяется многими факторами: уровнем подготовки по предметам, в первую очередь, по математике, информатике, тем, насколько осознанно происходит выбор будущей специальности, мотивированностью этого выбора, знанием современного состояния профессиональной деятельности учителя, перспектив ее развития, наличием навыков самостоятельной работы.

В настоящее время во многих странах приходят к пониманию важности довузовского образования, его органичной связи с университетской системой образования.

Необходимость в максимальной вариативности образования влечет потребность в разработке технологий обучения и создании механизмов, регулирующих основное и дополнительное образование, учебную и внеучебную деятельность, дистанционное обучение. В этой связи становится актуальным формирование такой системы довузовской подготовки будущего учителя математики и информатики, которая сопрягала бы образовательные пространства разного уровня в единое образовательное пространство, которая включала бы в себя различные направления деятельности в системе «школа-классический университет» и способствовала формированию единого ценностно-смыслового фундамента образовательной деятельности, социализации личности будущего педагога.

По мнению В.М.Розина[1,2], образование должно создать условия для развития всех сторон личности, а идеал образованного человека – целостная гуманитарно-техническая личность.

Специфика современной системы довузовского образования состоит в её способности не только вооружать обучающихся первичными знаниями и умениями в избранной профессии, но и формировать у них потребность в непрерывном самостоятельном и творческом подходе к овладению новыми знаниями; создавать возможности для отработки умений и навыков самообразования, предоставляя возможность осуществить профессиональную пробу; готовить к выбору направления дальнейшего образования, будущей профессиональной деятельности с учетом реальных потребностей рынка труда.

Следуя [3], отметим, что на этапе довузовского образования происходит:

- овладение учащимися системой научных знаний;
- развитие познавательных умений и навыков, формирование на этой основе мировоззрения, нравственных качеств личности;
- развитие творческих способностей личности;
- профессиональная ориентация учащихся;
- поиск талантливой и одаренной молодежи;
- формирование у учащихся творческого подхода к образовательному процессу;
- интеграция учащихся в систему непрерывного образования.

Задачи, стоящие перед системой довузовского образования, решаются многими учреждениями высшего профессионального образования по-разному.

Факультет математики и информационных технологий Донецкого национального университета имеет давние, еще с советских времен, традиции дополнительного довузовского образования учащихся. Это:

- ✓ работа филиала заочной физико-математической школы при МГУ им. Ломоносова, который с учетом меняющейся общественно-политической и социально-экономической ситуации на определенных этапах трансформировался в Открытый математический колледж, а затем в Центр математического просвещения. Отметим, что в рамках Центра математического просвещения реализуется очно-заочная система учебной деятельности, групповая и индивидуальная. Контингент учащихся охватывает возрастные группы с 6 по 11 классы;
- ✓ система разновозрастных математических конкурсов («Золотой сундучок», «Золотой ключик», «Кенгуру»), всеукраинского, всероссийского, международного характера;
- ✓ математические олимпиады разного уровня;

✓ работа со школами в рамках консорциума «Университет-школа» (подготовка совместных с учителями средних учебных заведений научно-методических докладов на конференции разного уровня, публикации совместных статей, консультативная помощь в подборе тем учебно-исследовательских работ учащихся в рамках деятельности Малой академии наук, консультации, проводимые преподавателями факультета для учителей школ по тем или иным вопросам школьного основного и дополнительного математического образования);

✓ работа преподавателей, аспирантов факультета в Малой академии наук (участие в работе секций по направлениям, отвечающим направлениям подготовки на факультете, руководство работой секций);

✓ дополнительное образование учащихся 10-11-х классов по математике и информатике в рамках деятельности Отделения информатики факультета математики и информационных технологий;

✓ разноплановая работа преподавателей и аспирантов факультета в профильных классах Республиканского лицея-интерната при ДонНУ (проведение занятий по специальным и элективным дисциплинам математической и информационной направленности, руководство учебно-исследовательскими работами по математике, информатике учащихся 10-11-х профильных классов лицея, подготовка учащихся к олимпиадам по математике, информатике разного уровня, участие в отборе выпускников 9-х классов общеобразовательных школ, поступающих в профильные классы лицея).

Важное место в системе довузовского образования Донецкого национального университета занимает совместная работа с общеобразовательными учреждениями, которая непосредственно связана с организацией:

- единого содержательного образовательного пространства;
- целенаправленной работы по профессиональной ориентации старшеклассников;

- системы, позволяющей развивать общеучебные умения и навыки, которые необходимы для обучения в университете и которые не может сформировать общеобразовательное учреждение.

- Также можно выделить ряд направлений, способствующих решению практических вопросов организации довузовского образования:

- создание системы профориентации, вооружающей школьников необходимыми знаниями для ориентации в мире профессий, умением каждого объективно оценивать свои индивидуальные особенности и возможности в контексте будущей педагогической деятельности;

- использование диагностических методик изучения личности школьников в целях оказания индивидуальной помощи в осознанном выборе будущей профессии учителя математики и информатики;

- использование теоретических и методических основ профессиональных консультаций молодежи;
- формирование общественно и личностно значимых мотивов в выборе будущей профессии учителя математики и информатики;
- формирование элементов духовной культуры в процессе подготовки учащихся к сознательному выбору будущей профессии педагога.
- Создавая условия для формирования у подрастающего поколения активной жизненной позиции, система довузовской подготовки школьников, реализуемая на факультете математики и информационных технологий ДонНУ выполняет важнейшую функцию социализации.
- Таким образом, опыт дополнительного довузовского образования ДонНУ показал, что:
 - уровневый переход «школа – университет» в виде довузовской подготовки школьников это универсальный способ выявить наиболее одаренных абитуриентов, желающих и умеющих учиться, способных самостоятельно творчески мыслить, наиболее подготовленных к получению дальнейшего образования;
 - необходимым условием успешной реализации довузовского образования является наличие классического университета с большими потенциальными возможностями: педагогическими, методическими, организационными, учебными, научными, материально-техническими и др.;
 - наличие учебно-исследовательской деятельности в рамках довузовского образования дает возможность соотнести знания абитуриентов с соответствующими требованиями вступительных испытаний, а также выявить наиболее способных учеников;
 - довузовское образование, реализуемое классическим университетом, позволяет разработать рекомендации по повышению уровня подготовки контингента школьников для поступления на направления подготовки факультета математики и информационных технологий ДонНУ, повысить научно-методическую сопряженность среднего и университетского образования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Розин В.М. Психология и культурное развитие человека: Учеб. пособие. – М.: Рос. открыт. ун-т, 1994. – 143 с.
2. Розин В.М. Специфика и формирование естественных, технических и гуманитарных наук. – Красноярск: Изд-во Красноярского ун-та, 1989. – 197 с.
3. Шульгина Н.А. Качество довузовской подготовки: специфика современного этапа. Ученые записки. Электронный научный журнал Курского государственного университета. – №4(16)/2010.