Федеральное государственное образовательное бюджетное
учреждение высшего образования
«ФИНАНСОВЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПРИ ПРАВИТЕЛЬСТВЕ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ»
Новороссийский филиал
Кафедра «Информатики, математики и общегуманитарные науки»

И.Г. РЗУН

Методические рекомендации

ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Направление подготовки: 38.03.01 Экономика
Направленность(профиль): Корпоративные финансы
Форма обучения: заочная
Квалификация (степень) выпускника: Бакалавр

Новороссийск 2018

Введение

Сложный характер рыночной экономики и современный уровень предъявляемых к ней требований стимулируют использование более серьезных методов анализа ее теоретических и практических проблем. В последние десятилетия значительный вес в экономических исследованиях приобрели математические методы. Математическое моделирование все более и более становится одним из основных и наиболее плодотворных методов изучения экономических процессов и объектов. Математический анализ экономических задач органично превращается в часть экономики. Положительная оценка этого подтверждается и тем, что начиная с 1969 г. Нобелевские премии в области экономики присуждаются, как правило, за экономико-математические исследования.

Одним из важных разделов экономико-математического моделирования является *теория массового обслуживания*, представляющая собой теоретические основы комплекса вопросов эффективности конструирования и эксплуатации систем массового обслуживания. Системы массового обслуживания встречаются во многих областях экономики (производство, техника, военная область, быт и др.) и предназначены для многократного использования при выполнении однотипных задач.

Основоположником теории массового обслуживания считается известный датский ученый А.К. Эрланг. Являясь сотрудником Копенгагенской телефонной компании, он опубликовал в 1909 г. работу "Теория вероятностей и телефонные переговоры", в которой решил ряд задач по теории систем массового обслуживания с отказами.

Значительный вклад в создание и разработку общей теории массового обслуживания внес выдающийся советский математик А.Я. Хинчин. Его первые труды в этой области стали появляться с 1930 г., когда ему, как члену Совета депутатов, была поручена работа в отделе связи. Благодаря результатам А.Я. Хинчина значительно сократилось время проводившейся тогда автоматизации московской городской телефонной сети, существенно снизились стоимости работ и было введено много технических усовершенствований. Последующие работы А.Я. Хинчина в этой области были изданы после его смерти, в 1963 г., в виде монографии. Сам термин *теория массового обслуживания* предложен А.Я. Хинчиным. В зарубежной литературе чаще используется название *теория очередей.*

Предлагаемое учебное пособие посвящено изложению основ теории массового обслуживания и ее применению в моделировании систем массового обслуживания различных областей экономики. При этом рассматриваются простейшие системы, в которых протекает марковский случайный процесс "гибели и размножения".

1 Основные понятия теории массового обслуживания

Системой массового обслуживания (СМО) называется комплекс взаимосвязанных элементов, состоящий из некоторого числа обслуживающих единиц (каналов), в котором происходит удовлетворение массовых запросов (требований), поступающих в систему в случайные моменты времени. Обслуживание каждой заявки длится в течение некоторого случайного времени и зависит от показателей эффективности системы. После того, как заявка обслужена, она покидает канал, и система готова к приему очередной заявки. Примеры СМО - телефонная станция, автостоянка, кассир магазина, служба занятости.

Основные элементы СМО - *источник требований, входящий поток заявок, каналы обслуживания, выходящий поток заявок.*

Предметом теории СМО является построение математических моделей (т. е. образов реального экономического объекта, описанных с помощью уравнений, формул, графиков, схем и т.

д.) для теоретического анализа и практического использования свойств СМО.

Показатели эффективности СМО - характеристики работы системы, описывающие ее способность справляться с потоком заявок. Эффективность функционирования СМО описывается такими показателями:

1) *Эффективность использования СМО* - абсолютная или относительная пропускные способности системы, среднее число занятых каналов (коэффициент использования СМО), средняя продолжительность использования СМО, интенсивность нагрузки канала;

2) *Качество обслуживания заявок* - среднее число заявок, обслуженных СМО в единицу времени, вероятность простоя системы, вероятность отказа в обслуживании, среднёе число заявок в очереди, среднее число заявок в системе и др.

Поток заявок, поступающих в систему, характеризуется *интенсивностью* λ, то есть частотой появления заявок в системе, или средним числом заявок, поступающих в систему в единицу времени.

Интенсивность μ *потока обслуживаний,*- это величина, обратная среднему времени обслуживания, или число заявок, обслуженных системой в единицу времени.

Интенсивность нагрузки канала обслуживания ρ, - это величина, показывающая среднее число заявок, поступающее в систему за среднее время обслуживания одной заявки:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} \tag{1}$$

При этом его экономический смысл заключается в том, что показатель *ρ,* - это среднее число каналов, которое необходимо иметь, чтобы обслуживать в единицу времени все поступающие в систему требования. Условие

$$\frac{\rho}{n} < 1, \tag{2}$$

где *n* - число каналов обслуживания, означает, что необходимое число каналов обслуживания должно быть больше ρ.

Классификация СМО:

По дисциплине обслуживания:

— СМО *с отказами,* когда заявка, поступившая в систему в момент, когда все каналы заняты, остается необслуженной;

— СМО *с ожиданием (очередью),* в которых заявка в случае занятости всех каналов становится в очередь и ожидает обслуживания;

— Системы с ограничением *длины очереди;*

— Системы с ограниченным *временем ожидания;*

По месту нахождения источника требований:

— *Замкнутые* СМО, когда источник требований находится в самой системе;

— *Открытые* СМО, когда источник требований находится вне системы;

По числу обслуживающих каналов:

— *Одноканальные;*

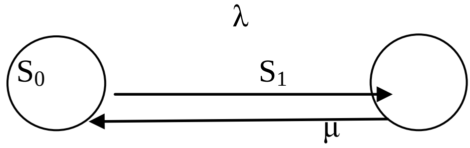
— *Многоканальные.*

2 Одноканальная СМО с отказами

Рассмотрим упорядоченное множество состояний некоторой системы

S : $S_0, S_1, S_2, \ldots, S_k, \ldots$; предположим, что все потоки, переводящие систему из состояния в состояние, - простейшие. Пусть для любого состояния S_k переходы возможны только в соседние состояния: либо в S_{k-1},либо в S_{k+1}. Случайные процессы, происходящие в таких системах, имеют специальное название, традиционно происходящее из биологии: *схема гибели и размножения* (состояние S_k соответствует некоторой популяции численностью *k*, смена состояния происходит при рождении либо гибели одного члена популяции).

Рассмотрим систему с одним каналом обслуживания, в которую поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ. Если в момент поступления очередной заявки канал занят, то заявка покидает систему необслуженной. Такие системы называются *системами без ожидания, или с отказами в обслуживании*. Пусть поток обслуживаний имеет интенсивность μ. Граф состояний такой системы показан на рисунке



Система имеет два состояния:

S_0 – канал свободен и готов к приему очередной заявки;

S_1 – канал занят.

Эти величины можно интерпретировать как *вероятности того, что заявка будет обслужена либо получит отказ*:

$$P_{об} = p_0 = \frac{\mu}{\lambda + \mu},$$

$$P_{отк} = p_1 = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$$

Относительная пропускная способность системы, то есть доля всех обслуженных заявок из числа всех поступивших в систему, равна вероятности обслуживания:

$$Q = P_{об} = \frac{\mu}{\lambda + \mu}$$

Абсолютная пропускная способность системы, то есть число обслуженных заявок в единицу времени, - это произведение интенсивности потока заявок на долю всех обслуженных заявок:

$$A = \lambda \cdot Q = \frac{\lambda \cdot \mu}{\lambda + \mu}$$

Интенсивность μ потока обслуживаний $П_{об}$ есть *производительность канала.* Имеет место равенство

$$\mu = \frac{1}{\overline{T}_{об}}$$

где $T_{об}$ - среднее время обслуживания одной заявки, относящееся только к обслуженным заявкам, т.е. математическое ожидание M [$T_{об}$] случайной величины $T_{об}$. Стационарность потока означает, что его вероятностные характеристики не зависят от времени.

Предельные характеристики эффективности функционирования одноканальной СМО с отказами(таблица)

Пример. Пусть **одноканальная СМО с отказами** представляет собой один пост ежедневного обслуживания (ЕО) для мойки автомобилей. Заявка - автомобиль, прибывший в момент, когда пост занят, - получает отказ в обслуживании. Интенсивность потока автомобилей λ= 1,0 (автомобиль в час). Средняя продолжительность обслуживания - 1,8 часа. Поток автомобилей и поток обслуживании являются простейшими.

Требуется определить в установившемся режиме предельные значения:

– относительной пропускной способности *q*;
– абсолютной пропускной способности *A*;
– вероятности отказа $P_{отк}$;

Сравните фактическую пропускную способность

СМО с номинальной, которая была бы, если бы каждый автомобиль обслуживался точно 1,8 часа и автомобили следовали один за другим без перерыва.

Решение

1. Определим интенсивность потока обслуживания:

$$\mu = \frac{1}{\bar{t}_{об}} = \frac{1}{1{,}8} = 0{,}555.$$

2. Вычислим относительную пропускную способность:

$$q = \frac{\mu}{\mu + \lambda} = \frac{0{,}555}{1 + 0{,}555} = 0{,}356.$$

Величина q означает, что в установившемся режиме система будет обслуживать примерно 35% прибывающих на пост ЕО автомобилей.

3. Абсолютную пропускную способность определим по формуле:

$$A = \lambda \cdot q = 1 \cdot 0{,}356 = 0{,}356.$$

Это означает, что система (пост ЕО) способна осуществить в среднем 0,356 обслуживания автомобилей в час.

4. Вероятность отказа:

$$P_{отк} = 1 - q = 1 - 0{,}356 = 0{,}644.$$

Это означает, что около 65% прибывших

автомобилей на пост ЕО получат отказ в обслуживании.

5. Определим номинальную пропускную способность системы:

$$A_{ном} = \frac{1}{\bar{t}_{обсл}} = \frac{1}{0,8} = 0,555$$ (автомобилей в час).

Оказывается, что $A_{ном}$ в 1,5 раза $\left(\frac{0,555}{0,356} \approx 1,5\right)$ больше, чем фактическая пропускная способность, вычисленная с учетом случайного характера потока заявок и времени обслуживания.

Решение задачи можно осуществить в Mathcad.

Пример:

Обслуживаются автомобили на посту мойки для автомобилей. Автомобиль, прибывший в момент , когда пост занят, получает отказ. Интенсивность потока автомобилей λ=1 (автомобиль в час). Средняя продолжительность обслужив. Тобс=1,8 часа. Найти в установившемся режиме: относит. пропускную способность Q; абсолютную пропускную способность A; вероятность отказа Ротк. сравнить фактическую способность с номинальной, которая была бы , если бы каждый автомобиль обслуживался точно 1,8 часа и автомобили следовали бы один за другим без перерыва.

Фрагмент решения задачи в Mathcad.

1 Интенсивность потока.

$\mu(Тобс) := \dfrac{1}{Тобс}$ $\qquad$ $Тобс := 1.8$

$\mu(Тобс) = 0.556$ -номинальная пропускная способность

$\mu := 0.556$

2 Относительная пропускная способность:

$Q(\lambda, \mu) := \dfrac{\mu}{\lambda + \mu}$ $\qquad$ $\lambda := 1$

$Q(\lambda, \mu) = 0.357$

$Q := 0.357$ -в установившемся режиме система будет обслуживать примерно 35% прибывших автомобилей

3 Абсолютная пропускная способность:

$A(Q) := \lambda \cdot Q$

$A(Q) = 0.357$ -система способна осуществить в среднем 0,357 обслуживания автомобилей в час.

4 Вероятность отказа:

$Ротк\,(Q) := 1 - Q$

$Ротк\,(Q) = 0.643$ -около 64% прибывших автомобилей получат отказ.

5 $\dfrac{0.556}{0.357} = 1.557$

фактическая способность сравнима с номинальной в 1,5 раза.

3 Многоканальная СМО с отказами

Задача исследования таких СМО впервые возникла в области телефонии и была решена в 1909 г. А.К. Эрлангом.

Состояния системы занумеруем по числу занятых каналов. Для СМО с отказами это означает, что мы нумеруем состояния по числу заявок, находящихся в системе, т.е. под обслуживанием, поскольку каждый канал в любой момент времени либо свободен, либо обслуживает только одну заявку. Таким образом, СМО может находиться только в одном из следующих *n* + 1 состояний:

Если СМО находится в состоянии S_k (k=0,1,…,n-1), т. е. когда k каналов заняты обслуживанием заявок, а остальные n-k каналов свободны, то перескок ее в состояние S_{k+1} происходит при поступлении на вход новой заявки. Таким образом, по стрелкам слева направо из любого состояния в соседнее состояние справа систему переводит один и тот же входящий поток заявок $П_{вх}$ с интенсивностью λ. Следовательно, плотность вероятности перехода $\lambda_{k,k+1}$ (k = 0, 1, ..., n-1) из любого k-*го* состояния в (k+1)-е состояние равна λ:

$$\lambda_{01} = \lambda_{12} = \ldots = \lambda_{n-1,n} = \lambda \qquad (15)$$

что и проставлено над стрелками, слева направо.

Т.к. входящий поток $П_{вх}$ простейший, то он является ординарным, т.е. заявки поступают по одной. Поэтому СМО, меняя свои состояния слева направо, не может перескочить через состояние, а переходит только в соседнее справа состояние. По этой причине на графе (рисунок 4) отсутствуют стрелки, перескакивающие через состояния слева направо.

Вероятность того, что одновременно, точно в один и тот же момент, освободятся более одного канала, пренебрежимо мала, т.е. такие события практически невозможны. Поэтому на графе нет стрелок, "перескакивающих" через состояния справа налево.

На переход занятого канала в состояние свободного действует простейший поток обслуживания $П_{об}$ с интенсивностью μ. Но тогда переход СМО в целом из состояния S_k (в котором k каналов заняты, а n-k свободны) в состояние S_{k-1} (в котором по сравнению с предыдущим освободился один из k занятых каналов) происходит под воздействием суммарного потока обслуживаний $П^k_{об,}$ представляющего собой результат наложения k потоков обслуживаний $П_{об}$, действующих на каждый из k занятых каналов. При этом интенсивность суммарного потока равна сумме интенсивностей слагаемых потоков.

p_0,:

$$p_0 = \left(1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda^2}{2!\mu^2} + \ldots + \frac{\rho^n}{n!\mu^n}\right)^{-1}$$

или, с учетом формулы

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

получим *формулы Эрланга:*

$$p_0 = \left(1 + \rho + \frac{\rho^2}{2!} + \ldots + \frac{\rho^n}{n!}\right)^{-1}$$

где ρ - показатель нагрузки канала обслуживания.

Формулы для вероятностей предельных состояний буду иметь вид:

$$p_1 = \rho p_0, \quad p_2 = \frac{\rho^2}{2!} \cdot p_0, \; \ldots\ldots \; , p_k = \frac{\rho^k}{k!} \cdot p_0, \quad p_n = \frac{\rho^n}{n!} \cdot p_0$$

(22)

Приведем формулы для расчета основных показателей эффективности работы системы.

Число каналов, которые *необходимо* иметь, чтобы система справлялась с потоком заявок, определим из условия

$$n > \rho = \frac{\lambda}{\mu}. \qquad (23)$$

В этом случае выполняется соотношение

$$\frac{\lambda}{\mu n} < 1, \qquad (24)$$

которое означает, что число заявок, поступивших в систему за единицу времени, не превосходит числа заявок, обслуженных системой за это же время.

Вероятность отказа в обслуживании заявки определим как вероятность того, что при поступлении заявки в систему все *n* ее каналов будут заняты:

$$P_{отк} = p_n = \frac{\rho^n}{n!} p_0 \qquad (25)$$

Отсюда *вероятность обслуживания* (а также и *относительная пропускная способность* системы) равны вероятности противоположного события:

$$P_{об} = Q = 1 - \frac{\rho^n}{n!} p_0 = 1 - P_{отк} = 1 - p_n \qquad (26)$$

Абсолютная пропускная способность - число заявок, обслуженных системой в единицу времени:

$$A = \lambda \cdot Q = \lambda \left(1 - \frac{\rho^n}{n!} p_0 \right) = (1 - p_n) \qquad (27)$$

Так как каждый канал обслуживает μ заявок в единицу времени, то *среднее число занятых каналов* можно вычислить:

$$\overline{K} = \frac{A}{\mu} = \frac{\lambda}{\mu} \left(1 - \frac{\rho^n}{n!} p_0 \right) = \rho \left(1 - \frac{\rho^n}{n!} P_0 \right) = \overline{N}_{об} = \rho(1 - p_n) \qquad (28)$$

$$T_{об}^{\forall} = \frac{1}{\lambda} \overline{K} = \frac{1}{\lambda} \overline{N}_{об} \qquad (29)$$

или

$$\overline{T}_{сис} = \frac{1}{\lambda}\overline{N}_{сис} \qquad (30)$$

Формула Литтла показывает, что среднее время $T_{сис}$ пребывания заявки в СМО равно среднему числу заявок в системе Nсис, деленному на интенсивность λ входящего потока заявок, или, другими словами, среднее время $T_{сис}$ пребывания заявки в СМО прямо пропорционально среднему числу заявок в системе $T_{сис}$ с коэффициентом прямой пропорциональности, равным обратной величине интенсивности λ входящего потока заявок.

Среднее время обслуживания каналом одной заявки:

$$T_{об} = \frac{1}{\mu} \qquad (31)$$

Поток обслуживания $П_{об}$ каждым каналом будет простейшим с интенсивностью

$$\mu = \frac{1}{\overline{T}_{об}}$$

(32)

Где $\overline{T}_{об}$ - среднее время обслуживания одной заявки.

Многоканальную СМО с отказами можно решить в Mathcad.

Пример:

Заявки на телефонные переговоры в переговорный пункт поступают с интенсивностью 90 заявок в час. Считая среднюю продолжительность разговора равной 3 минутам, определить оптимальное число телефонных номеров, чтобы 90% всех заявок на переговоры были удовлетворены.

Фрагмент решения задачи в Mathcad.

$\lambda := 90 \quad \mu := 20 \quad \rho := 4.5$

Определим Q при n=5

$$p0 := \left(1 + \rho + \frac{\rho^2}{2!} + \frac{\rho^3}{3!} + \frac{\rho^4}{4!} + \frac{\rho^5}{5!}\right)^{-1}$$

$$Q := 1 - \frac{\rho^5}{5!} \cdot p0 \qquad Q = 0.757 \qquad p0 = 0.016$$

Для заданного оптимального уровня обслуживания недостаточно пяти кана
n=6,7,8,...

При $n := 6$ $\quad p0 := \left(1 + \rho + \frac{\rho^2}{2!} + \frac{\rho^3}{3!} + \frac{\rho^4}{4!} + \frac{\rho^5}{5!} + \frac{\rho^6}{6!}\right)^{-1} \qquad p0 = 0.013$

$$Q := 1 - \frac{\rho^6}{6!} \cdot p0 \qquad Q = 0.846$$

$n := 7$ $\quad p0 := \left(1 + \rho + \frac{\rho^2}{2!} + \frac{\rho^3}{3!} + \frac{\rho^4}{4!} + \frac{\rho^5}{5!} + \frac{\rho^6}{6!} + \frac{\rho^7}{7!}\right)^{-1} \qquad p0 = 0.012$

$$Q := 1 - \frac{\rho^7}{7!} \cdot p0 \qquad Q = 0.91$$

Следовательно необходимо иметь семи телефонных номеров.
При этом в час будут обслуживаться:

$$A := \lambda \cdot Q \qquad A = 81.885$$

A=90*0,91=82 заявки, а среднее число занятых номеров будет равно:

$$K := \frac{A}{\mu} \qquad K = 4.094$$

4 Одноканальная СМО с ожиданием

Рассмотрим функционирование одноканальной системы S, в которую поступает простейший поток требований интенсивностью λ. Интенсивность потока обслуживания равна μ.

По числу заявок, находящихся в системе, обозначим состояния системы: $S_0, S_1, S_2, \ldots, S_k, \ldots S_n$, где S_k – состояние системы, когда в ней находится k заявок (одна обслуживается, остальные k-1 стоят в очереди). Никаких ограничений на длину очереди нет. Примерами таких систем может служить телефон-автомат, кассир в магазине, железнодорожная касса и т.д. Так как поток заявок и обслуживания ординарен, и число состояний системы бесконечно.

Интенсивность μ, потока обслуживаний не меняется при переходе из состояния S_k в состояние S_{k-1} и обратна по величине среднему времени обслуживания заявки:

$$\mu = \frac{1}{T_{об}} \qquad (33)$$

Финальные вероятности состояний такой системы существуют только в случае, если выполнено условие ρ < 1 , так как в этом случае очередь не будет расти до бесконечности.

Уравнение для нахождения p_0 получим аналогично тому как это было сделано для одноканальной системы с отказами:

$$p_0 = \left(1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda^2}{\mu^2} + \ldots + \frac{\lambda^n}{\mu^n} + \ldots\right)^{-1} \tag{34}$$

С учетом формулы

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \tag{35}$$

получим

$$p_0 = \left(1 + \rho + \rho^2 + \ldots + \rho^n + \ldots\right)^{-1} \tag{36}$$

где ρ – показатель нагрузки канала обслуживания.

Так как при ρ < 1 предельные вероятности существуют, то выражении ев скобках представляет собой сумму бесконечного числа членов убывающей геометрической прогрессии, предел которого равен:

$$\lim_{n\to\infty}(1 + \rho + \rho^2 + \ldots + \rho^n + \ldots) = \frac{1}{1-\rho} \tag{37}$$

откуда

$$p_0 = 1 - p \tag{38}$$

Фрмула для вероятностей предельных состояний будут иметь вид:

$$p_1 = \rho p_0, \qquad p_2 = \rho^2 \cdot p_0,\ \ldots\ldots ,\ p_k = \rho^k \cdot p_0,$$

$$p_n = \rho^n \cdot p_0 \ldots \qquad (39)$$

Предельные вероятности состояний S_k также образуют убывающщуб геометрическую прогрессию, поэтому наиболее высокой будет вероятность p_0, то есть вероятность простоя системы и готовности принять заявку к обслуживанию.

Формулы для расчета основных показателей эффективности работы системы.

Вероятность отказа в обслуживании заявки при условии неограниченности очереди равна нулю, так как все заявки в конце концов будут обслужены. Отсюда *вероятность обслуживания* (а также и *относительная пропускная способность* системы) равна единице:

$$Q = P_{об} = 1. \qquad (40)$$

Абсолютная пропускная способность равна интенсивности входящего потока, так как обслуживаются все заявки:

$$A = \lambda Q = \lambda \qquad (41)$$

Среднее время обслуживания каналом одной заявки:

$$T_{об} = \frac{1}{\mu} \qquad (42)$$

Так как вероятность того, что в системе находится k заявок, равна p_k, *среднее число заявок в системе* определим как математическое ожидание числа заявок в системе (под обслуживанием и в очереди):

$$L_{сист} = 0p_0 + 1p_1 + 2p_2 + ... + np_n + ... = \sum_{k=1}^{\infty} kp_k \qquad (43)$$

Подставив в формулу выражение для p_k , получим:

$$L_{сист} = (1-\rho)\sum_{k=1}^{\infty} kp^k \qquad (44)$$

При $\rho < 1$ такой ряд сходится, что можно проверить, воспользовавшись каким-либо признаком сходимости числовых рядов.

Заметим, что $k\rho^k$ - это производная по ρ функции ρ^k

.

Применив правило вычисления производной суммы, поменяем местами знак суммы и знаки дифференцирования:

$$L_{сист} = (1-\rho)\sum_{k=1}^{\infty} \frac{d(\rho^k)}{dk} = (1-\rho)\frac{d}{dk}\sum_{k=1}^{\infty} \rho^k \qquad (45)$$

Но теперь под знаком суммы находится убывающая геометрическая прогрессия со знаменателем, меньшим единицы. Поэтому

$$L_{сист} = (1-\rho)\frac{d}{d\rho}\left(\frac{\rho}{1-\rho}\right) = (1-\rho)\frac{1}{(1-\rho)^2} = \frac{1}{1-\rho} \qquad (46)$$

Среднее число заявок под обслуживанием $L_{об}$ найдем как математическое ожидание числа обслуживаемых заявок. Это либо 0 заявок, когда канал свободен, либо 1 заявка, когда канал занят:

$$L_{об} = 0p_0 + 1(1-p_0) = 1-p_0 \qquad (47)$$

Отсюда видно, что *среднее число заявок под обслуживанием* равно вероятности того, что канал занят:

$$L_{об} = P_{зан} = 1-p_0 = 1-(1-\rho) = \rho \qquad (48)$$

Очевидно, *среднее число заявок в очереди* равно разности между числом заявок в системе и числом обслуживаемых заявок:

$$L_{оч} = L_{сист} - L_{об} = \frac{\rho}{1-\rho} - \rho = \frac{\rho^2}{1-\rho} \qquad (49)$$

Среднее время пребывания заявки в системе (или *в очереди)* можно найти по *формулам Литтла,* разделив среднее число заявок в системе (в очереди) на интенсивность потока заявок:

$$T_{сист} = \frac{1}{\lambda}L_{сист} = \frac{\rho}{\lambda(1-\rho)} \qquad (50)$$

$$T_{оч} = \frac{1}{\lambda} L_{оч} = \frac{\rho^2}{\lambda(1-\rho)} \qquad (51)$$

Формулы Литтла основаны на том, что если система справляется с потоком заявок, то интенсивности входящего и выходящего потока заявок равны, то есть обслуживаются все заявки, поступающие в систему.

Одноканальную СМО с ожиданием можно рассмотреть в Mathcad.

Пример:

Железнодорожная касса обслуживает по одному человеку. Интенсивность потока пассажиров 0,45. Среднее время обслуживания одной заявки 2 минуты. Найти все предельные характеристики

эффективности функционирования одноканальной СМО с ожиданиями.

Фрагмент решения задачи в Mathcad.

$n := 1$

$\lambda := 0.45$

$Тоб := 2$

$\mu := \frac{1}{Тоб} \qquad \mu = 0.5$

$\rho := \frac{\lambda}{\mu} \qquad \rho = 0.9$

Среднее число заявок в очереди

$Nоч := \frac{\rho^{2}}{(1-\rho)} \qquad Nоч = 8.1$

Среднее число заявок под обслуживанием

$Nоб := \rho \qquad Nоб = 0.9$

Среднее число заявок в системе

$Nсис := Nоч + Nоб \qquad Nсис = 9$

Среднее время ожидания заявки в очереди

$Точ := \frac{Nоч}{\lambda} \qquad Точ = 18$

Среднее время пребывания заявки в системе (как в очереди, так и под обсл

$Тсис := Точ + Тоб \qquad Тсис = 20$

5 Одноканальная СМО с ограниченной очередью

В систему поступает пуассоновский поток требований интенсивностью λ, поток обслуживания имеет интенсивность μ, максимальное число мест в очереди – m . Если заявка поступает в систему, когда все места в очереди заняты, она покидает систему необслуженной.

Финальные вероятности состояний такой системы всегда существуют, так как число состояний конечно:

S_0 – система свободна и находится в состоянии простоя;

S_1 – обслуживается одна заявка, канал занят, очереди нет;

S_2 – одна заявка обслуживается, одна в очереди;

...

S_{m+1}- одна заявка обслуживается, m в очереди.

В формуле для p_0 найдем сумму конечного числа членов геометрической прогрессии:

$$p_0 = \left(1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda^2}{\mu^2} + \ldots + \frac{\lambda^{m+1}}{\mu^{m+1}}\right)^{-1} \qquad (52)$$

С учетом формулы для ρ получим выражение:

$$p_0 = (1 + \rho + \rho^2 + \ldots + \rho^{m+1})^{-1} \qquad (53)$$

В скобках находится (m+2) элементов геометрической прогрессии с первым членом 1 и знаменателем ρ. По формуле суммы (m+2) членов прогрессии:

$$1+\rho+\rho^{2}+...+\rho^{m+1}=\frac{1-\rho^{m+2}}{1-\rho} \qquad (54)$$

Отсюда

$$p_{0}=\frac{1-\rho}{1-\rho^{m+2}} \qquad (55)$$

Формулы для вероятностей предельных состояний будут иметь вид:

$$p_{1}=\frac{\rho(1-\rho)}{1-\rho^{m+2}},\, p_{2}=\frac{\rho^{2}(1-\rho)}{1-\rho^{m+2}},...,\, p_{k}=\frac{\rho^{k}(1-\rho)}{1-\rho^{m+2}},...,\, p_{m+1}=\frac{\rho m+1(1-\rho)}{1-\rho^{m+2}}$$

(56)

Вероятность отказа в обслуживании заявки определим как вероятность того, что при поступлении заявки в систему ее канал будет занят и все места в очереди также заняты:

$$P_{отк}=p_{m+1}=\frac{\rho^{m+1}(1-\rho)}{1-\rho^{m+2}} \qquad (57)$$

Отсюда вероятность обслуживания (а также и от*носительная пропускная способность*) равны вероятности противоположного события:

$$P_{об}=Q=1-p_{m+1}=1-\frac{\rho^{m+1}(1-\rho)}{1-\rho^{m+2}}=\frac{1-\rho^{m+1}}{1-\rho^{m+2}} \qquad (58)$$

Абсолютная пропускная способность – число заявок, обслуженных системой в единицу времени:

$$A = \lambda Q = \lambda\left(\frac{1-\rho^{m+1}}{1-\rho^{m+2}}\right) \qquad (59)$$

Среднее число заявок под обслуживанием:

$$L_{об} = 1 - p_0 = 1 - \frac{1-\rho}{1-\rho^{m+2}} = \frac{\rho(1-\rho^{m+1})}{1-\rho^{m+2}} \qquad (60)$$

Среднее число заявок в очереди:

$$L_{оч} = \rho^2 \frac{[1-\rho^m(m+1-mp)]}{(1-\rho^{m+2})(1-\rho)} \qquad (61)$$

Среднее число заявок в системе:

$$L_{сист} = L_{об} + L_{оч} \qquad (62)$$

Одноканальную СМО с ограниченной очередью можно рассмотреть в Mathcad.

Пример:

На стоянке обслуживается 3 машины с интенсивностью потока 0,5 и средним временем обслуживания 2,5 минуты. Определить все показатели системы.

Фрагмент решения задачи в Mathcad.

$m := 3$
$\lambda := 0.5$
$Тоб := 2.5$

$\mu := \frac{1}{Тоб}$ $\qquad \mu = 0.4$

$\rho := \frac{\lambda}{\mu}$ $\qquad \rho = 1.25$

$Ротк := \frac{\rho^{m+1}(1-\rho)}{1-\rho^{m+2}}$ $\qquad Ротк = 0.297$

$Q := 1 - Ротк$ $\qquad Q = 0.703$

$A := \lambda \cdot Q$ $\qquad A = 0.351$

$Nоч := \frac{\rho^2\left[1-\rho^m(m+1-m\cdot\rho)\right]}{\left(1-\rho^{m+2}\right)(1-\rho)}$ $\qquad Nоч = 1.559$

$Nоб := \frac{\rho\cdot\left(1-\rho^{m+1}\right)}{1-\rho^{m+2}}$ $\qquad Nоб = 0.878$

$Точ := \frac{1}{\lambda}\cdot Nоч$ $\qquad Точ = 3.118$

$Nсис := Nоч + Nоб$ $\qquad Nсис = 2.437$

$Тсис := \frac{1}{\lambda}\cdot Nсис$ $\qquad Тсис = 4.874$

$Тоб := \frac{1}{\lambda}\cdot Nоб$ $\qquad Тоб = 1.756$

6 Многоканальная СМО с неограниченной очередью

Пусть дана система S, имеющая n каналов обслуживания, на которые поступает простейший поток требований интенсивностью λ. Пусть поток обслуживания также простейший и имеет интенсивность μ. Очередь на обслуживание не ограничена.

По числу заявок, находящихся в системе, обозначим состояния системы: $S_0, S_1, S_2, \ldots, S_k, \ldots S_n$, где S_k – состояние системы, когда в ней находится k заявок (максимальное число заявок под обслуживанием - n).

Интенсивность потока обслуживаний меняется в зависимости от состояния системы: $k\mu$ при переходе из состояния S_k в состояние S_{k-1} так как может освободиться любой из k каналов; после того, как все каналы заняты обслуживанием, интенсивность потока обслуживаний остается равной $n\mu$, при поступлении в систему следующих заявок.

Для нахождения финальных вероятностей состояний получим формулы аналогично тому, как это было сделано для одноканальной системы.

$$\begin{cases} \lambda p_0 = \mu p_1 \\ \lambda p_1 = 2\mu p_2 \\ \ldots\ldots\ldots \\ \lambda p_{n-1} = n\mu p_n \\ \lambda p_n = n\mu p_{n+1} \\ \ldots\ldots\ldots \\ p_0 + p_1 + p_2 + \ldots + p_n + \ldots = 1 \end{cases} \qquad (63)$$

Отсюда формулы для финальных вероятностей выражаются через

$$p_0 : p_1 = \rho p_0, p_2 = \frac{\rho^2}{2!} p_0, \ldots, p_n = \frac{\rho^n}{n!} p_0, p_{n+1} = \frac{\rho^{n+1}}{nn!} p0, \ldots, p_{n+m} = \frac{\rho^{n+m}}{n^m n!} p0, \ldots \qquad (64)$$

Для нахождения p_0 получим уравнение:

$$p_0 = \left(1 + \rho + \frac{\rho^2}{2!} + \ldots + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^{n+1}}{nn!} + \frac{\rho^{n+2}}{n^2 n!} + \frac{\rho^{n+m}}{n^m n!} + \ldots\right)^{-1} \qquad (65)$$

Для слагаемых в скобках, начиная с (n + 2)-го, можно применить формулу нахождения суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии с первым членом $\frac{\rho^{n+1}}{nn!}$ и знаменателем ρ/n:

$$S = \frac{\rho^{n+1}}{nn!} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\rho}{n}} = \frac{\rho^{n+1}}{n!} \cdot \frac{1}{n - \rho} = \frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)} \qquad (66)$$

Окончательно получим формулу Эрланга для нахождения вероятности простоя системы:

$$p_0 = \left(1 + \rho + \frac{\rho^2}{2!} + ... + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^{n+1}}{n!(n+\rho)}\right)^{-1} \qquad (67)$$

Приведем формулы для расчета основных яоказателей эффективности работы системы.

Система будет справляться с потоком заявок, если
выполнено условие

$$\frac{\rho}{n} < 1, \qquad (68)$$

которое означает, что число заявок, поступивших в систему за единицу времени, не превосходит числа заявок, обслуженных системой за это же время. При этом *вероятность отказа в обслуживании* равна нулю.

Отсюда *вероятность обслуживания* (а также и *относительная пропускная способность* системы) равны вероятности противоположного события, то есть единице:

$$P_{об} = Q = 1 \qquad (69)$$

Абсолютная пропускная способность - число заявок, обслуженных системой в единицу времени:

$$A = \lambda \cdot Q = \lambda \qquad (70)$$

Если система справляется с потоком заявок, то в стационарном режиме *интенсивность выходящего потока* равна интенсивности потока поступающих в систему заявок, так как обслуживаются все заявки:

$$v=\lambda. \qquad (71)$$

Так как каждый канал обслуживает μ заявок в единицу времени, то *среднее число занятых каналов* можно вычислить:

$$K=\frac{A}{\mu}=\frac{\lambda}{\mu}=\rho \qquad (72)$$

Среднее время обслуживания каналом одной заявки**;**

$$T_{об}=\frac{1}{\mu}. \qquad (73)$$

Вероятность того, что при поступлении в систему заявка окажется в очереди, равна вероятности того, что в системе находится более чем *n* заявок:

$$P_{оч}=p_{n+1}+p_{n+2}+\ldots+p_{n+m}+\ldots=\frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)} \qquad (74)$$

Число заявок, находящихся под обслуживанием, равно числу занятых каналов:

$$L_{об}=K=\rho \qquad (75)$$

Среднее число заявок в очереди:

$$L_{оч}=\frac{\rho^{n+1}p_0}{nn!\left(1-\frac{\rho}{n}\right)^2} \qquad (76)$$

Тогда *среднее число заявок в системе:*

$$L_{сист} = L_{оч} + L_{об} = \frac{\rho^{n+1} p_0}{nn!\left(1 - \frac{\rho}{n}\right)^2} + \rho \qquad (77)$$

Среднее время пребывания заявки в системе (в очереди):

$$T_{сист} = \frac{1}{\lambda} L_{сист} \qquad (78)$$

$$T_{оч} = \frac{1}{\lambda} L_{оч} \qquad (79)$$

Многоканальную СМО с неограниченной очередью можно рассмотреть в системе Mathcad.

Пример 1:

Салон-парикмахерская имеет 5 мастеров. В час пик интенсивность потока клиентов равна 6 человек. В час. Обслуживание одного клиента длится в среднем 40 минут. Определить среднюю длину очереди, считая ее неограниченной.

Фрагмент решения задачи в Mathcad.

$n := 5 \qquad \lambda := 6 \qquad \mu := 1.5$

$$\rho := \frac{\lambda}{\mu} \qquad \rho = 4$$

Очередь не будет возрастать до бесконечности, так как

$\frac{\rho}{n} = 0.8$ меньше1

Найдем вероятность простоя:

$$p0 := \left[1 + \rho + \frac{\rho^2}{2!} + \frac{\rho^3}{3!} + \frac{\rho^4}{4!} + \frac{\rho^5}{5!} + \frac{\rho^6}{5!(n - \rho)}\right]^{-1} \qquad p0 = 0.013$$

Найдем среднюю длину очереди:

$$L\text{оч} := \frac{\rho^{n+1} \cdot p0}{n \cdot n! \cdot \left(1 - \frac{\rho}{n}\right)^2} \qquad L\text{оч} = 2.216$$

Пример 2:

В железнодорожной кассе имеются 2 окна. Время на обслуживания одного пассажира 0,5 минут. Пассажиры подходят к кассе по 3 человека. Определить все характеристики системы.

Фрагмент решения задачи в Mathcad.

$n := 2$

$m := 3$

$\lambda := 0.5$

$\mu := 0.4$

$\rho := \dfrac{\lambda}{\mu} \qquad \rho = 1.25$

Коэффициент нагрузки

$\psi := \dfrac{\rho}{n} \qquad \psi = 0.625$

Вероятность того, что все каналы свободны (вероятнос простаивания всей системы)

$$P(\psi) := \left[\sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} \cdot \psi^k + \frac{n^n}{n!} \cdot \frac{\psi^{n+1}\left(1-\psi^m\right)}{1-\psi}\right]^{-1} \qquad P(\psi) = 0.249$$

Вероятность состояний

$k := 1$

$$p(k) := \left(\frac{n^k}{k!}\right) \cdot \psi^k \cdot P(\psi) \qquad p(k) = 0.311$$

$k := 2$

$$p(k) := \left(\frac{n^k}{k!}\right) \cdot \psi^k \cdot P(\psi) \qquad p(k) = 0.195$$

Вероятность отказа заявке

$$Ротк := \frac{n^n}{n!} \cdot \psi^{n+m} \cdot P(\psi) \qquad Ротк = 0.048$$

Вероятность того, что заявка будет принята и СМО

$Рсис := 1 - Ротк \qquad Рсис = 0.952$

Относительная пропускная способность СМО

$Q := Рсис \qquad Q = 0.952$

Продолжение решения задачи в Mathcad.

Абсолютная пропускная способность СМО

$A := \lambda \cdot Q \qquad A = 0.476$

Среднее число занятых каналов

$Nоб := \frac{A}{m} \qquad Nоб = 0.159$

Среднее число заявок, находящихся в очереди

$$Nоч := \frac{n^n}{n!} \cdot \psi^{n+1} \cdot \frac{1 - (m+1) \cdot \psi^m + m \cdot \psi^{m+1}}{(1-\psi)^2} \cdot P(\psi)$$

$Nоч = 0.416$

Среднее число заявок,находящихся в СМО

$Nсис := Nоб + Nоч \qquad Nсис = 0.575$

Среднее время ожидания заявки в очереди

$Tоч := \frac{1}{\lambda} \cdot Nоч \qquad Tоч = 0.832$

Среднее время пребывания заявки в системе

$Tсис := \frac{1}{\lambda} \cdot Nсис \qquad Tсис = 1.15$

Среднее время обслуживания одной заявки, относящееся к заявкам - как обслуженным, так и получившим отказ

$Tоб := \frac{Q}{\mu} \qquad Tоб = 2.381$

7 Многоканальная СМО с ограниченной очередью

Расчеты основных показателей функционирования системы, имеющей n каналов обслуживания, с ограничением мест в очереди, проводятся аналогично тем, которые были сделаны для системы с неограниченной очередью. Особенностью функционирования систем с ограничением длины очереди является конечное число состояний системы.

Пусть на каналы обслуживания поступает простейший поток требований интенсивностью λ. Поток обслуживания, поступающий с одного канала, также простейший и имеет интенсивность μ. Число мест в очереди ограничено и равно m.

По числу заявок, находящихся в системе, обозначим состояния системы:

S_0 - состояние простоя;

……….

S_n - состояние системы, когда все каналы заняты обслуживанием;

S_{n+1} - все каналы заняты, одна заявка находится в очереди;

S_{n+m} - в очереди m заявок.

Так как потоки заявок и обслуживания ординарны, граф состояний изображается в виде схемы гибели и размножения. Отличие от подобной схемы для неограниченной очереди состоит только в том, что число состояний конечно.

Составим систему алгебраических уравнений для нахождения финальных вероятностей состояний:

$$\begin{cases} \lambda p_0 = \mu p_1 \\ \lambda p_1 = 2\mu p_2 \\ \ldots\ldots\ldots \\ \lambda p_{n-1} = n\mu p_n \\ \lambda p_n = n\mu p_{n+1} \\ \ldots\ldots\ldots \\ \lambda p_{n+m-1} = n\mu p_{n+m} = 1 \\ p_0 + p_1 + p_2 + \ldots + p_{n+m} = 1 \end{cases} \qquad (80)$$

Откуда получим *формулы Эрланга* для многоканальной системы с ограниченной очередью:

$$p_0 = \left(1 + \rho + \frac{\rho^2}{2!} + \ldots + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^{n+1}}{n!n} + \ldots + \frac{\rho^{n+m}}{n^m n!}\right)^{-1} \qquad (81)$$

Последние m слагаемых в скобках представляют собой сумму m первых членов геометрической прогрессии со знаменателем ρ/n которая равна :

$$\frac{\rho^{n+1}}{nn!}\left(1+\frac{\rho}{n}+\frac{\rho^2}{n^2}+\ldots+\frac{\rho^{m+1}}{n^{m-1}}\right)=\frac{\rho^{n+1}\left(1-\left(\frac{\rho}{n}\right)^m\right)}{(n-\rho)n!} \quad (82)$$

Таким образом, для вычисления p_0 получим формулу:

$$p_0=\left(1+\rho+\frac{\rho^2}{2!}+\ldots+\frac{\rho^n}{n!}+\frac{\rho^{n+1}\left(1-\left(\frac{\rho}{n}\right)^m\right)}{(n-\rho)n!}\right)^{-1} \quad (83)$$

Формулы для вероятностей предельных состояний будут иметь вид:

$$p_1=\rho\cdot p_0,\, p_2=\frac{\rho^2}{2!}p_0,\ldots,\, p_n=\frac{\rho^n}{n!}p_0,\, p_{n+1}=\frac{\rho^{n+1}}{nn!}p_0,\ldots,\, p_{n+m}=\frac{\rho^{n+m}}{n^m n!}p_0 \quad (84)$$

Приведем формулы для расчета основных показателей эффективности работы системы.

Число каналов, которые *необходимо* иметь, чтобы система справлялась с потоком заявок, определим из условия

$$n<\rho=\frac{\lambda}{\mu} \quad (85)$$

В этом случае выполняется соотношение $\rho < 1$.

Вероятность отказа в обслуживании заявки определим как вероятность того, что при поступлении заявки в систему все n ее каналов будут заняты, и в очереди заняты все m мест:

$$P_{отк} = p_{n+m} = \frac{\rho^{n+m}}{n^m n!} p_0 \qquad (86)$$

Отсюда *вероятность обслуживания* (а также и *относительная пропускная способность* системы) равны вероятности противоположного события:

$$P_{об} = Q = 1 - P_{отк} = 1 - \frac{\rho}{n^m n!} p_0 \qquad (87)$$

Абсолютная пропускная способность - число заявок, обслуженных системой в единицу времени:

$$A = \lambda Q = \lambda \left(1 - \frac{\rho}{n^m n!} p_0 \right) \qquad (88)$$

Так как каждый канал обслуживает μ заявок в единицу времени, то *среднее число занятых каналов* можно вычислить:

$$K = \frac{A}{\mu} = \rho \left(1 - \frac{\rho}{n^m n!} p_0 \right) \qquad (89)$$

Среднее время обслуживания каналом одной заявки**:**

$$T_{об} = \frac{1}{\mu} \qquad (90)$$

Среднее число заявок в очереди:

$$L_{оч} = \frac{\rho^{m+1} p_0 \left[1 - \left(m + 1 - m\frac{\rho}{n}\right)\left(\frac{\rho}{n}\right)^n\right]}{nn!\left(1 - \frac{\rho}{n}\right)^2} \qquad (91)$$

Среднее число заявок под обслуживанием равно среднему числу занятых каналов:

$$L_{об} = K = \rho\left(1 - \frac{\rho^{n+m}}{n^m n!} p_0\right) \qquad (92)$$

Среднее число заявок в системе (под обслуживанием и в очереди) равно:

$$L_{сист} = L_{об} + L_{оч} \qquad (93)$$

Многоканальную СМО с ограниченной очередью можно рассмотреть в Mathcad.

Пример:

Площадка АЗС вмещает не более 3-х машин одновременно, и если она занята, то очередная машина, прибывшая к станции, в очередь не становится. Интенсивность потока обслуживания λ=0,5 машин в минуту. Интенсивность потока обслуживания μ=0,4 машины в минуту. Определить все характеристики СМО.

Фрагмент решения задачи в Mathcad.

$n := 2$

$m := 3$

$\lambda := 0.5$

$\mu := 0.4$

$\rho := \dfrac{\lambda}{\mu} \qquad \rho = 1.25$

Коэффициент нагрузки

$\psi := \dfrac{\rho}{n} \quad \psi = 0.625$

Вероятность того, что все каналы свободны (вероятнос простаивания всей системы)

$$P(\psi) := \left[\sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} \cdot \psi^k + \frac{n^n}{n!} \cdot \frac{\psi^{n+1}\left(1 - \psi^m\right)}{1 - \psi} \right]^{-1} \quad P(\psi) = 0.249$$

Вероятность состояний

$k := 1$

$$p(k) := \left(\frac{n^k}{k!} \right) \cdot \psi^k \cdot P(\psi) \qquad p(k) = 0.311$$

$k := 2$

$$p(k) := \left(\frac{n^k}{k!} \right) \cdot \psi^k \cdot P(\psi) \qquad p(k) = 0.195$$

Вероятность отказа заявке

$$Ротк := \frac{n^n}{n!} \cdot \psi^{n+m} \cdot P(\psi) \qquad Ротк = 0.048$$

Вероятность того, что заявка будет принята и СМО

$Рсис := 1 - Ротк \qquad Рсис = 0.952$

Относительная пропускная способность СМО

$Q := Рсис \qquad Q = 0.952$

Продолжение задачи в Mathcad.

Абсолютная пропускная способность СМО

$A := \lambda \cdot Q \qquad A = 0.476$

Среднее число занятых каналов

$$Nоб := \frac{A}{m} \qquad Nоб = 0.159$$

Среднее число заявок, находящихся в очереди

$$Nоч := \frac{n^n}{n!} \cdot \psi^{n+1} \cdot \frac{1-(m+1)\cdot\psi^m + m\cdot\psi^{m+1}}{(1-\psi)^2} \cdot P(\psi)$$

$Nоч = 0.416$

Среднее число заявок,находящихся в СМО

$Nсис := Nоб + Nоч \qquad Nсис = 0.575$

Среднее время ожидания заявки в очереди

$$Tоч := \frac{1}{\lambda} \cdot Nоч \qquad Tоч = 0.832$$

Среднее время пребывания заявки в системе

$$Tсис := \frac{1}{\lambda} \cdot Nсис \qquad Tсис = 1.15$$

Среднее время обслуживания одной заявки, относящееся ко вс
заявкам - как обслуженным, так и получившим отказ

$$Tоб := \frac{Q}{\mu} \qquad Tоб = 2.381$$

Заключение

Многие экономические задачи связаны с *системами массового обслуживания* (СМО), т. е. такими системами, в которых, с одной стороны, возникают массовые запросы (требования) на выполнение каких-либо услуг, с другой — происходит удовлетворение этих запросов. СМО включает в себя следующие элементы: источник требований, входящий поток требований, очередь, обслуживающие устройства (каналы обслуживания), выходящий поток требований. Исследованием таких систем занимается *теория массового обслуживания.*

Методами теории массового обслуживания могут быть решены многие задачи исследования процессов, происходящих в экономике. Так, в организации торговли эти методы позволяют определить оптимальное количество торговых точек данного профиля, численность продавцов, частоту завоза товаров и другие параметры. Другим характерным примером систем массового обслуживания могут служить склады или базы снабженческо-сбытовых организаций, и задача теории массового обслуживания в данном случае сводится к тому, чтобы установить оптимальное соотношение между числом поступающих на базу требований на обслуживание и числом обслуживающих устройств, при котором суммарные расходы на обслуживание и убытки от простоя транспорта были бы минимальными. Теория массового обслуживания может найти применение и при расчете площади складских помещений, при этом складская площадь рассматривается как обслуживающее устройство, а прибытие транспортных средств под выгрузку — как требование. Модели теории массового обслуживания применяются также при решении ряда задач организации и нормирования труда, других социально-экономических проблем.

В работе рассматривались такие СМО, как:

- Одноканальная СМО с отказами;
- Многоканальная СМО с отказами;
- Одноканальная СМО с ожиданием;
- Одноканальная СМО с ограниченной очередью;
- Многоканальная СМО с неограниченной очередью;
- Многоканальная СМО с ограниченной очередью.

Предметом теории СМО является построение математических моделей (т. е. образов реального экономического объекта, описанных с помощью уравнений, формул, графиков, схем и т. д.) для теоретического анализа и практического использования свойств СМО.

Эффективность функционирования СМО описывается такими показателями:

1) *Эффективность использования СМО*;

2) *Качество обслуживания*.

По дисциплине обслуживания:

— СМО *с отказами*;

— СМО *с ожиданием (очередью)*;

— Системы с ограничением *длины очереди;*

— Системы с ограниченным *временем ожидания;*

По месту нахождения источника требований:

— *Замкнутые* СМО;

— *Открытые* СМО;

По числу обслуживающих каналов:

— *Одноканальные;*

— *Многоканальные.*

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1

Одноканальная СМО с отказами представляет собой одну телефонную линию. Заявка (вызов), пришедшая в момент, когда линия занята, получает отказ. Все потоки событий простейшие. Интенсивность потока λ = 0,95 вызова в минуту. Средняя продолжительность разговора $\bar{t}$ =1 мин. Определите вероятностные характеристики СМО в установившемся режиме работы.

Задача 2

В одноканальную СМО с отказами поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ = 0,5 заявки в минуту. Время обслуживания заявки имеет показательное распределение с $\bar{t}$ =1,5 мин. Определите вероятностные характеристики СМО в установившемся режиме работы.

Задача 3

В вычислительном центре работает 5 персональных компьютеров (ПК). Простейший поток задач, поступающих на ВЦ, имеет интенсивность λ = 10 задач в час. Среднее время решения задачи равно 12 мин. Заявка получает отказ, если все ПК заняты. Найдите вероятностные характеристики системы обслуживания (ВЦ).

Задача 4

В аудиторскую фирму поступает простейший поток заявок на обслуживание с интенсивностью λ = 1,5 заявки в день. Время обслуживания распределено по показательному закону и равно в среднем трем дням. Аудиторская фирма располагает пятью независимыми бухгалтерами, выполняющими аудиторские проверки (обслуживание заявок). Очередь заявок не ограничена. Дисциплина очереди не регламентирована. Определите вероятностные характеристики аудиторской фирмы как системы массового обслуживания, работающей в стационарном режиме.

Задача 5

На пункт техосмотра поступает простейший поток заявок (автомобилей) интенсивности λ = 4 машины в час. Время осмотра распределено по показательному закону и равно в среднем 17 мин., в очереди может находиться не более 5 автомобилей. Определите вероятностные характеристики пункта техосмотра в установившемся режиме.

Задача 6

На промышленном предприятии решается вопрос о том, сколько потребуется механиков для работы в ремонтном цехе. Пусть предприятие имеет 10 машин, требующих ремонта с учетом числа ремонтирующихся. Отказы машин происходят с частотой λ = 10 отк/час. Для устранения неисправности механику требуется в среднем $\bar{t}$ = 3 мин. Распределение моментов возникновения отказов является пуассоновским, а продолжительность выполнения ремонтных работ распределена экспоненциально. Возможно организовать 4 или 6 рабочих мест в цехе для механиков предприятия. Необходимо выбрать наиболее эффективный вариант обеспечения ремонтного цеха рабочими местами для механиков.

Задача 7

В бухгалтерии предприятия имеются два кассира, каждый из которых может обслужить в среднем 30 сотрудников в час. Поток сотрудников, получающих заработную плату, - простейший, с интенсивностью, равной 40 сотрудников в час. Очередь в кассе не ограничена. Дисциплина очереди не регламентирована. Время обслуживания подчинено экспоненциальному закону распределения. Вычислите вероятностные характеристики СМО в стационарном режиме и определите целесообразность приема третьего кассира на предприятие, работающего с такой же производительностью, как и первые два.

Задача 8

В инструментальном отделении сборочного цеха работают три кладовщика. В среднем за 1 мин. за инструментом приходят 0,8 рабочего (λ= 0,8). Обслуживание одного рабочего занимает у кладовщика $\bar{t}$ = 1,0 мин. Очередь не имеет ограничения. Известно, что поток рабочих за инструментом - пуассоновский, а время обслуживания подчинено экспоненциальному закону распределения. Стоимость 1 мин. работы рабочего равна 30 д. е., а кладовщика - 15 д. е. Найдите средние потери цеха при данной организации обслуживания в инструментальном отделении (стоимость простоя) при стационарном режиме работы.

Задача 9

Билетная касса работает без перерыва. Билеты продает один кассир. Среднее время обслуживания - 2 мин. на каждого человека. Среднее число пассажиров, желающих приобрести билеты в кассе в течение одного часа, равно λ = 20 пасс/час. Все потоки в системе простейшие. Определите среднюю длину очереди, вероятность простоя кассира, среднее время нахождения пассажира в билетной кассе (в очереди и на обслуживании), среднее время ожидания в очереди в условиях стационарного режима работы кассы.

Задача 10

Пост диагностики автомобилей представляет собой одноканальную СМО с отказами. Заявка на диагностику, поступившая в момент, когда пост занят, получает отказ. Интенсивность потока заявок на диагностику λ = 0,5 автомобиля в час. Средняя продолжительность диагностики $\bar{t}$ = 1,2 часа. Все потоки событий в системе простейшие. Определите в установившемся режиме вероятностные характеристики системы.

Задача 11

Автозаправочная станция представляет собой СМО с одним каналом обслуживания и одной колонкой. Площадка при АЗС допускает пребывание в очереди на заправку не более трех автомобилей одновременно. Если в очереди уже находится три автомобиля, очередной автомобиль, прибывший к станции, в очередь не становится, а проезжает мимо. Поток автомобилей, прибывающих для заправки, имеет интенсивность λ = 0,7 автомобиля в минуту. Процесс заправки продолжается в среднем 1,25 мин. Все потоки простейшие. Определите вероятностные характеристики СМО в стационарном режиме.

Задача 12

На железнодорожную сортировочную горку прибывают составы с интенсивностью λ = 2 состава в час. Среднее время, в течение которого горка обслуживает состав, равно 0,4 час. Составы, прибывающие в момент, когда горка занята, становятся в очередь и ожидают в парке прибытия, где имеется три запасных пути, на каждом из которых может ожидать один состав. Состав, прибывший в момент, когда все три запасных пути в парке прибытия заняты, становится в очередь на внешний путь.

Все потоки событий простейшие.

При установившемся режиме найдите:

- среднее число составов, ожидающих в очереди (как в парке прибытия, так и вне его);
- среднее время ожидания в парке прибытия и на внешних путях;
- среднее время ожидания состава в системе обслуживания;
- вероятность того, что прибывший состав займет место на внешних путях.

Задача 13

Рассматривается работа АЗС, на которой имеется три заправочные колонки. Заправка одной машины длится в среднем 3 мин. В среднем на АЗС каждую минуту прибывает машина, нуждающаяся в заправке бензином. Число мест в очереди не ограничено. Все машины, вставшие в очередь на заправку, дожидаются своей очереди. Все потоки в системе простейшие. Определите вероятностные характеристики работы АЗС в стационарном режиме.

Задача 14

На станцию технического обслуживания (СТО) автомобилей каждые два часа подъезжает в среднем одна машина. Станция имеет 6 постов обслуживания. Очередь автомобилей, ожидающих обслуживания, не ограниченна. Среднее время обслуживания одной машины - 2 часа. Все потоки в системе простейшие. Определите вероятностные характеристики станции технического обслуживания автомобилей.

Задача 15

В вычислительном центре работает 9 персональных компьютеров (ПК). Простейший поток неисправностей имеет интенсивность 0,3 отказа в день. Среднее время устранения одной неисправности одним инженером равно 1,5 час. Компьютеры обслуживают три инженера с одинаковой производительностью. Все потоки событий простейшие. Возможны следующие варианты организации обслуживания ПК:

- три инженера обслуживают все 9 компьютеров, так, что при отказе ПК его обслуживает один из свободных инженеров, в этом случае $R = 3$; $N = 9$;
- каждый из трех инженеров обслуживает по три закрепленных за ним ПК. В этом случае $R = 1$; $N = 3$.

Необходимо выбрать наилучший вариант организации обслуживания ПК.

Задача 16

Малое транспортное предприятие эксплуатирует десять моделей автомобилей одной марки. Простейший поток отказов автомобилей имеет интенсивность λ = 0,25 отказа в день. Среднее время устранения одного отказа автомобиля одним механиком равно 2 час. Все потоки событий простейшие. Возможны два варианта обслуживания:

- все автомобили обслуживают два механика с одинаковой производительностью;
- все автомобили предприятия обслуживают три механика с одинаковой производительностью.

Необходимо выбрать наилучший вариант организации обслуживания автомобилей.

Задача 17

В магазине работает один продавец, который может обслужить в среднем 30 покупателей в час. Поток покупателей простейший с интенсивностью, равной 60 покупателей в час. Все покупатели «нетерпеливые» и уходят, если в очереди стоит 5 человек (помимо обслуживаемых). Все потоки событий простейшие. Определите следующие вероятностные характеристики магазина для стационарного режима работы:

- вероятность обслуживания покупателя;
- абсолютную пропускную способность магазина;
- среднюю длину очереди;
- среднее время ожидания в очереди;
- среднее время всего обслуживания;
- вероятность простоя продавца.

Задача 18

Имеется двухканальная простейшая СМО с отказами. На ее вход поступает поток заявок с интенсивностью λ = 3 заявки в час. Среднее время обслуживания одной заявки $\bar{t}$ = 0,5 час. Каждая обслуженная заявка приносит доход 5 д. е. Содержание канала обходится 3 д.е./час. Решите, выгодно ли в экономическом отношении увеличить число каналов СМО до трех.

Задача 19

Подсчитайте вероятностные характеристики для простейшей одноканальной СМО с тремя местами в очереди при условиях λ = 4 заявки/час; $\bar{t}$ = 0,5 час. Выясните, как эти характеристики изменятся, если увеличить число мест в очереди до четырех.

Задача 20

Система массового обслуживания - билетная касса с тремя окошками (с тремя кассирами) и неограниченной очередью.

Пассажиров, желающих купить билет, приходит в среднем 5 человек за 20 мин. Поток пассажиров можно считать простейшим. Кассир в среднем обслуживает трех пассажиров за 10 мин. Время обслуживания подчинено показательному закону распределения. Определите вероятностные характеристики СМО в стационарном режиме.

Задача 21

Технические устройства (ТУ) могут время от времени выходить из строя (отказывать). Поток отказов ТУ простейший с интенсивностью λ = 1,6 отказа в сутки. Время восстановления ТУ имеет экспоненциальное распределение. Математическое ожидание времени обслуживания $\bar{t}$ = 0,5 суток. Количество каналов, выполняющих обслуживание ТУ, равно 5 ед. Количество заявок в очереди не ограничено. Определите вероятностные характеристики СМО, выполняющие обслуживание ТУ в установившемся режиме.