Федеральное государственное образовательное бюджетное учреждение
высшего образования
«ФИНАНСОВЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПРИ ПРАВИТЕЛЬСТВЕ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ»
(Финансовый университет)
Челябинский филиал Финуниверситета
Кафедра «Математика и информатика»

О.Г. Завьялов

МАТЕМАТИКА

Линейная алгебра, векторная алгебра и аналитическая геометрия

Методические указания и индивидуальные задания

Контрольная работа №1

Для студентов-бакалавров, для всех направлений

Челябинск

2016

ББК 65в6 я75+22.1
М54

Завьялов О.Г. Математика. Линейная алгебра, векторная алгебра и аналитическая геометрия». Методические указания и индивидуальные задания для выполнения контрольной работы. Контрольная работа (Семестровое задание) №1, 2016. 54 с.

Содержание

Общие указания

В курсе “Математика” студенты I курса изучают основы линейной алгебры, векторной алгебры и аналитической геометрии. Изучение этих разделов математики занимает важное место в формировании экономистов высокой квалификации.

В случае возникновения затруднений студент может обратиться на кафедру математики и информатики за консультацией.

Необходимо строго придерживаться следующих правил:

1. Студент обязан делать семестровое задание №1 только своего варианта, предусмотренные графиком.

2. Контрольную семестровое задание №1 следует выполнять от руки на листах формата А4, отсканировать и отослать файл по указанному адресу.

3. На титульном листе студент должен указать свою фамилию, имя, отчество, также **номер работы, ее название, номер зачетной книжки, номер варианта, номера решаемых задач, форму обучения, специальность, курс, номер группы (образец оформления обложки приводится ниже !!!).**

В конце работы необходимо привести список использованной литературы.

4. Перед решением задачи нужно полностью выписать ее условие. Если несколько задач имеют общую формулировку, переписывать следует только условие задачи нужного варианта. Решение каждой задачи студент должен сопровождать подробными объяснениями и ссылками на соответствующие формулы, теоремы и правила. Вычисления должны быть доведены до конечного **числового результата**. Ответы и выводы, полученные при решении задач, следует подчеркнуть.

Номера задач семестрового задания №1 определяются преподавателем на практическом занятии

Образец оформления титульного листа

Финансовый университет

При Правительстве РФ Челябинский филиал

Кафедра математики и информатики

Контрольная работа (Семестровое задание) №1

по математике

№ зачетной книжки:	87128
№ варианта:	28
Форма обучения:	очная
Специальность:	Экономика
Курс:	1
Группа:	ОЭ-112
Выполнил:	***Петров Сергей Павлович***

Номера заданий	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Зачтено										

Челябинск

2016

Линейная алгебра, векторная алгебра и аналитическая геометрия.

Программа

Основы линейной алгебры

1 Матрицы

2 Алгебра матриц

3 Определители порядка n

4 Обратная матрица

5 Линейные уравнения

6 Система линейных уравнений (основные понятия)

6.1 Методы решения неоднородных систем линейных уравнений, когда число уравнений совпадает с числом неизвестных

6.2 Ранг матрицы и его вычисление

6.3 Неоднородная система линейных уравнений. Теорема Кронекера - Капелли

6.4 Метод Гаусса решения совместных систем линейных уравнений

6.5 Однородные системы линейных уравнений

6.6 Общая схема решения систем линейных уравнений

7 Матричные уравнения

8 Матрицы в экономических приложениях

8.1 Модель Леонтьева многоотраслевой экономики (балансовый анализ)

8.2 Национальный доход

Основы векторной алгебры

10 Свободные вектора

11 Линейные операции над векторами

12 Линейная зависимость и независимость векторов

13 Система координат

14 Линейные операции над векторами в координатной форме

15 Радиус- вектор точки М

16 Две задачи на декартовы координаты

17 Скалярное произведение векторов

18 Векторное произведение векторов

19 Смешанное произведение векторов

20 n - мерный вектор и векторное пространство

21 Линейные операторы

21.1 Собственные вектора, собственные числа линейного оператора

21.2 Линейная модель обмена

22 Квадратичные формы и классификация кривых второго порядка

Основы аналитической геометрии

24 Введение. Понятия об уравнениях линии и поверхности.

25 Прямая на плоскости

26 Взаимное расположение прямых на плоскости

27 Прямая в пространстве

28 Взаимное расположение прямых в пространстве

29 Плоскость

30 Взаимное расположение плоскостей

31 Взаимное расположение прямой и плоскости

32 Определение расстояний

33 Преобразование координат плоскости

34 Кривые второго порядка на плоскости

35 Пересечение линий на плоскости

36 Графическое решение неравенств с двумя переменными

37 Полярная система координат

38 Цилиндрические поверхности

39 Поверхности вращения

1. Действия над матрицами

Задача 1.

Выполнить действия с матрицами: 2A·B-3C·D, где

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1 & 4 & 4\\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 4 & 1 & -4 & 1\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & -2\\ -2 & 0\\ 1 & 1\\ -2 & 1\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}1 & -2 & 1 & 4\\ -2 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 3 & -1\end{bmatrix}, D=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & -2\\ -1 & 3\\ 2 & -1\end{bmatrix}$$

Решение.

Устанавливаем возможность выполнения указанных действий. Матрица A имеет порядок 3×5, матрица B - 5×2. Умножение возможно, поскольку число столбцов первой матрицы равно числу строк второй; в результате умножения получится матрица порядка 3×2. У второго произведения матрица C имеет порядок 3×4, матрица D- 4×2, умножение возможно, итоговая матрица будет иметь порядок 3×2. Сложение первого произведения со вторым также возможно, ибо оба произведения есть матрицы порядка 3×2.

Следовательно

1) $A\cdot B = \begin{bmatrix}1 & 2 & -1 & 4 & 4\\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 4 & 1 & -4 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & -2\\ -2 & 0\\ 1 & 1\\ -2 & 1\end{bmatrix} = M_{3\times 2} = \begin{bmatrix}m_{11} & m_{12}\\ m_{21} & m_{22}\\ m_{31} & m_{32}\end{bmatrix}$, где

m_{11}=1·0+2·1+(-1)·(-2)+3·1+4·(-2)= -1, m_{12}=1·(-1)+2·(-2)+(-1)·0+3·1+4·1= 2,

m_{21}=(-2)·0+(-1)·1+0·(-2)+1·1+2·(-2)= -4, m_{22}=(-2)·(-1)+(-1)·(-2)+0·0+1·1+2·1= 7,

m_{31}=0·0+4·1+1·(-2)+(-4)·1+1·(-2)= -4, m_{32}=0·(-1)+4·(-2)+1·0+(-4)·1+1·(-2)= -11.

Итак,

$A\cdot B=M=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ -4 & 7\\ -4 & -11\end{bmatrix}$;

2) $C\cdot D = \begin{bmatrix}1 & -2 & 1 & 4\\ -2 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 3 & -1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & -2\\ -1 & 3\\ 2 & -1\end{bmatrix} = N_{3\times 2} = \begin{bmatrix}n_{11} & n_{12}\\ n_{21} & n_{22}\\ n_{31} & n_{32}\end{bmatrix}$, где

n_{11}=1·1+(-2)·0+1·(-1)+4·2= 8, n_{12}=1·(-1)+(-2)·(-2)+1·3+4·(-1)=2 ,

n_{21}=(-2)·1+1·0+0·(-1)+1·2= 0, n_{22}=(-2)·(-1)+1·(-2)+0·3+1·(-1)= -1 ,

n_{31}=0·1+2·0+3·(-1)+(-1)·2= -5, n_{32}=0·(-1)+2·(-2)+3·3+(-1)·(-1)=6.

Итак,

$$C \cdot D = N = \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 0 & -1 \\ -5 & 6 \end{bmatrix}$$

Тогда,

2A·B-3C·D=2M+(-3)N=

$$= \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -8 & 14 \\ -8 & -22 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -24 & -6 \\ 0 & 3 \\ 15 & -18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2-24 & 4-6 \\ -8+0 & 14+3 \\ -8+15 & -22-18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -26 & -2 \\ -8 & 17 \\ 7 & -40 \end{bmatrix}.$$

Ответ: $\begin{bmatrix} -26 & -2 \\ -8 & 17 \\ 7 & -40 \end{bmatrix}$ ▸

Замечание.

Перед решением задачи №1 **повторите**: матрицы, алгебра матриц.

2. Матричный метод решения системы линейных уравнений (m=n=3)

◂ **Задача 2.**

Решить систему линейных уравнений матричным методом

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 8 \\ -4x_1 + x_2 + 2x_3 = 15 \\ -x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 24 \end{cases}$$

Решение.

В матричной форме систему из n линейных уравнений с n неизвестными можно записать так: AX=B, где A – основная матрица коэффициентов системы; X – матрица-столбец неизвестных; B – матрица-столбец свободных членов. Умножив слева обе части равенства AX=B на A^{-1} (A^{-1} существует, если detA=Δ≠0), получим $A^{-1}AX= A^{-1}B$; $EX= A^{-1}B$, здесь E – единичная матрица.

Следовательно, $X= A^{-1}B$,

т.е. чтобы найти решение системы n линейных уравнений с n неизвестными матричным методом, нужно матрицу, обратную матрице из коэффициентов системы, умножить на матрицу – столбец свободных членов. В результате получаем матрицу-столбец, которая и будет решением данной системы.

Найдем определитель матрицы A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 5 \end{bmatrix}; \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 9 & 14 \\ 0 & 0 & 8 \end{vmatrix} = 1 \cdot 9 \cdot 8 = 72 \neq 0$$

Следовательно, матрица A имеет обратную матрицу.

Обратная матрица A^{-1} определяется по формуле

$$A^{-1}=\frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$$

где A_{ij} – алгебраические дополнения элементов a_{ij} данной матрицы А.

Найдем алгебраические дополнения для элементов матрицы:

$A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}=5+4=9;\ A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}=2(10-1)=18;$

$A_{13}=(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} -4 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}=8+1=9;\ A_{21}=(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}=-(10+6)=-16;$

$A_{22}=(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}=5+3=8;\quad A_{23}=(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}=-(-2+2)=0;$

$A_{31}=(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=4-3=1;\ A_{32}=(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 2 \end{vmatrix}=-(2+12)=-14$

$A_{33}=(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 1 \end{vmatrix}=1+8=9.$

Обратная матрица имеет вид

$$A^{-1}=\frac{1}{72}\begin{bmatrix} 9 & -16 & 1 \\ 18 & 8 & -14 \\ 9 & 0 & 9 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{8} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{72} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{9} & -\frac{7}{36} \\ \frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{8} \end{bmatrix}$$

Необходимо сделать проверку: $A^{-1}A=E$.

$A^{-1}A=\frac{1}{72}\begin{bmatrix} 9 & -16 & 1 \\ 18 & 8 & -14 \\ 9 & 0 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 5 \end{bmatrix}=\frac{1}{72}\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}$, где

$c_{11}=9\cdot1+(-16)\cdot(-4)+1\cdot(-1)=72$; $c_{12}=9\cdot2+(-16)\cdot1+1\cdot(-2)=0$; $c_{13}=9\cdot3+(-16)\cdot2+1\cdot5=0$;

$c_{21}=18\cdot1+8\cdot(-4)+(-14)\cdot(-1)=0$;$c_{22}=18\cdot2+8\cdot1+(-14)\cdot(-2)=72$; $c_{23}=18\cdot3+8\cdot2+(-14)\cdot5=0$;

$c_{31}=9\cdot1+0\cdot(-4)+9\cdot(-1)=0$; $c_{32}=9\cdot2+0\cdot1+9\cdot(-2)=0$; $c_{33}=9\cdot3+0\cdot2+9\cdot5=72$.

Т.е. $A^{-1}A=\frac{1}{72}\begin{bmatrix} 72 & 0 & 0 \\ 0 & 72 & 0 \\ 0 & 0 & 72 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=E$.

Найдем теперь решение системы $X=A^{-1}B$

$$X=\frac{1}{72}\begin{bmatrix} 9 & -16 & 1 \\ 18 & 8 & -14 \\ 9 & 0 & 9 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 8 \\ 15 \\ 24 \end{bmatrix}=\frac{1}{72}\begin{bmatrix} 9\cdot8+(-16)\cdot15+1\cdot24 \\ 18\cdot8+8\cdot15+(-14)\cdot24 \\ 9\cdot8+0\cdot15+9\cdot24 \end{bmatrix}_{3\times1}=\frac{1}{72}\begin{bmatrix} -144 \\ -72 \\ 288 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

(Необходимо сделать проверку по исходной системе уравнений).

Ответ: x_1= -2, x_2= -1, x_3= 4 ▸

Замечание.

Перед решением задачи №2 **повторите**: определители, матрицы и действия над ними, обратная матрица, решение линейных систем матричным методом.

3. Решение систем линейных уравнений по формулам Крамера (m=n=4)

◂ **Задача 3.**

Решить систему по формулам Крамера, выполнить проверку:

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 6x_4 = -1 \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_4 = 3 \end{cases}$$

Решение.

Имеем линейную неоднородную систему из 4 уравнений с 4 неизвестными (m=n=4)

Составим из коэффициентов при неизвестных основной определитель системы Δ. Если $\Delta \neq 0$, то согласно теореме Крамера система совместна и ее единственное решение находится по формулам

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta},\ i=1,2,3,4,$$

где Δ_i-всмогательный определитель для нахождения неизвестного x_i, который получается из основного определителя системы Δ путем замены в нем i-го столбца столбцом свободных членов. Определители будем вычислять, образуя нули в каком - либо столбце (или строке), используя свойство 8.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 6 \\ -1 & 3 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & -5 & 0 & 4 \\ -3 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} -1 & -5 & 4 \\ -3 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -3 & 3 \\ -3 & 7 & -6 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 1\cdot(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix} -3 & 3 \\ 7 & -6 \end{vmatrix} = 18 - 21 = -3$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 6 \\ 1 & 3 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -3 & -5 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 3 & 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} -3 & -5 & 4 \\ 0 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 3(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix} -3 & 3 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 3(9-3) = 18$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 6 \\ -1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & 0 & 4 \\ -3 & 0 & 0 & -3 \\ 1 & 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{1+3}\cdot \begin{vmatrix} -1 & -3 & 4 \\ -3 & 0 & -3 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 \\ -3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= -3(-1)^{2+1}\cdot \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 3(6-15) = -27$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 6 \\ -1 & 3 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 0 & 7 \\ -3 & 1 & 0 & -3 \\ -5 & -4 & 0 & -4 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{1+3}\cdot \begin{vmatrix} 5 & 1 & 7 \\ -3 & 1 & -3 \\ -5 & -4 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 7 \\ -8 & 0 & -10 \\ 15 & 0 & 24 \end{vmatrix} =$$

$$= 1\cdot(-1)^{1+2}\cdot \begin{vmatrix} -8 & -10 \\ 15 & 24 \end{vmatrix} = -(-192+150) = 42$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & -5 & 0 & -3 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{1+3}\cdot \begin{vmatrix} -1 & -5 & -3 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -3 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 3\cdot(-1)^{3+3}\cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 3(0-9) = -27$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{18}{-3} = -6; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-27}{-3} = 9; \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{42}{-3} = -14; \quad x_4 = \frac{\Delta_4}{\Delta} = \frac{-27}{-3} = 9.$$

Проверка.

Подставим найденное решение в исходную систему, то есть во все четыре уравнения. Получим

$$\begin{cases} 2(-6)+18-14+9=1, \\ 3(-6)-9+2(-14)+54=-1, \\ -1(-6)+27+1(-14)-18=1, \\ 1(-6)+18-9=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1\equiv 1, \\ -1\equiv -1, \\ 1\equiv 1, \\ 3\equiv 3 \end{cases}$$

Отсюда следует: решение найдено верно.

Ответ: $x_1=-6$, $x_2=9$, $x_3=-14$, $x_4=9$ ▸

Замечание.

Перед решением задачи №3 **повторите**: определители второго и третьего порядков, способы вычисления, свойства. Миноры и алгебраические дополнения. Разложение определителя по элементам строки и столбца. Определители n-го порядка. Формулы Крамера решения системы линейных уравнений.

4. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса

Задача №4.

Исследовать систему уравнений и решить ее методом Гаусса, если она совместна:

- найти ее общее решение;
- базисное решение;
- частное решение;

Сделать проверку.

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 3 \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 - x_4 = -2 \\ 3x_1 - 6x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 5 \\ 4x_1 - 8x_2 - 3x_3 - 4x_4 = -3 \end{cases} \qquad (*)$$

Решение.

Дана неоднородная линейная система из 4-х уравнений с 4-мя неизвестными (m=n=4).

1) Определим, совместна или нет система (*). Вычисляем для этого ранги расширенной и основной матриц системы: Rg(A,B) и RgA.

$$(A,B) = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 3 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & -2 & -1 & -2 \\ 3 & -6 & 5 & -3 & 5 \\ 4 & -8 & -3 & -4 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 & -1 & -2 \\ 2 & -4 & 3 & -2 & 3 \\ 3 & -6 & 5 & -3 & 5 \\ 4 & -8 & -3 & -4 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 7 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 11 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 5 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 7 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = (A', B')$$

(привели матрицу (A,B) к матрице (A', B'), имеющую ступенчатую форму).

Итак, $\mathrm{Rg}(A, B) = \mathrm{Rg}(A', B') = 2$, $\mathrm{Rg}A = \mathrm{Rg}A' = 2 \Rightarrow \mathrm{Rg}A = \mathrm{Rg}(A,B) = 2$.

Следовательно система (*) совместна. Т.к. Rg A< n (n = 4) $\Rightarrow$ система имеет бесчисленное множество решений.

2) Найдем все решения системы (*). Для этого перейдем к следующей эквивалентной системе

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 2x_3 - x_4 = -2 \\ 7x_3 = 7 \end{cases}, \quad (**)$$

где x_1 и x_3- базисные неизвестные,

x_2 и x_4- свободные неизвестные.

От системы (**) перейдем к другой эквивалентной системе

$$\begin{cases} x_1 - 2x_3 = -2 + 2x_2 + x_4 \\ \quad\quad 7x_3 = 7 \end{cases} \qquad (***)$$

Решая систему (***) , как систему из 2-х уравнений с 2-мя неизвестными x_1 и x_3, найдем их. Из последнего уравнения имеем

$$x_3 = 1$$

Тогда из первого уравнения найдем

$$x_1 = 2x_3 - 2 + 2x_2 + x_4 = 2x_2 + x_4$$

Т.к. x_2 и x_4 - свободные неизвестные, то можно считать $x_2 = a$, $x_4 = b$.

Тогда общее решение системы (***), а значит и (*) имеет вид

$$x_1 = 2a + b;\ x_2 = a,\ x_3 = 1;\ x_4 = b$$

или

$$X = \begin{bmatrix} 2a+b \\ a \\ 1 \\ b \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} a + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} b}_{\text{общее решение однородной системы}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\text{частное решение системы (*)}}$$

3) Найдем частное решение системы (*), полагая например, $a=1$, $b = 1$, тогда имеем

$$x_1 = 3,\ x_2 = 1,\ x_3 = 1,\ x_4 = 1.$$

Проверка (по исходной системе).

$$\begin{cases} 4a + 2b - 4a + 3 - 2b = 3, \\ 2a + b - 2a - 2 - b = -2, \\ 6a + 3b - 6a + 5 - 3b = 5, \\ 8a + 4b - 8a - 3 - 4b = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 \equiv 3, \\ -2 \equiv -2, \\ 5 \equiv 5, \\ -3 \equiv -3 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ общее решение найдено верно.

Частное решение, в котором все **свободные переменные равны нулю**, называют **базисным** решением: $x_1=0$, $x_2=0$, $x_3=1$ $x_4=0$.

Ответ:

- $x_1 = 2a + b;\ x_2 = a,\ x_3 = 1;\ x_4 = b$
- $x_1=0$, , $x_2=0$, $x_3=1$ $x_4=0$
- $x_1 = 3,\ x_2 = 1,\ x_3 = 1,\ x_4 = 1.$ ▸

◂ **Еще пример**.

Исследовать систему и решить ее методом Гаусса, если она совместна

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 + x_4 = 3 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = -3 \\ x_1 + 2x_2 - 4x_4 = -3 \\ x_1 - x_2 - 4x_3 + 9x_4 = 22 \end{cases} \qquad (*)$$

Решение.

Дана неоднородная линейная система из 4-х уравнений с 4-мя неизвестными (m=n=4)..

1) Определим, совместна или нет система (*). Вычисляем для этого ранги расширенной и основной матриц системы: Rg(A,B) и RgA.

$$(A,B) = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -5 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & 1 & 5 & -3 \\ 1 & 2 & 0 & -4 & -3 \\ 1 & -1 & -4 & 9 & 22 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & -4 & 9 & 22 \\ 2 & -3 & 1 & 5 & -3 \\ 1 & 2 & 0 & -4 & -3 \\ 3 & -2 & -5 & 1 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & -4 & 9 & 22 \\ 0 & -1 & 9 & -13 & -47 \\ 0 & 3 & 4 & -13 & -25 \\ 0 & 1 & 7 & -26 & -63 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 & 9 & 22 \\ 0 & -1 & 9 & -13 & -47 \\ 0 & 0 & 31 & -52 & -166 \\ 0 & 0 & 16 & -39 & -110 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 & 9 & 22 \\ 0 & -1 & 9 & -13 & -47 \\ 0 & 0 & -1 & 26 & 54 \\ 0 & 0 & 16 & -39 & -110 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 & 9 & 22 \\ 0 & -1 & 9 & -13 & -47 \\ 0 & 0 & -1 & 26 & 54 \\ 0 & 0 & 0 & 377 & 754 \end{bmatrix} = (A', B')$$

(привели матрицу (A,B) к матрице (A',B'), имеющую ступенчатую форму).

Итак, Rg(A, B) = Rg(A', B') = 4, RgA= RgA' =4 $\Rightarrow$ RgA= Rg(A,B)=4. Следовательно система (*) совместна. Т.к. Rg A= n (n = 4) $\Rightarrow$ система имеет единственное решение.

2) Найдем все решения системы (*). Для этого перейдем к следующей эквивалентной системе.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 4x_3 + 9x_4 = 22, \\ -x_2 + 9x_3 - 13x_4 = -47, \\ -x_3 + 26x_4 = 54, \\ 377x_4 = 754, \end{cases} \qquad (**),$$

где все неизвестные - базисные.

Решая систему (**), как систему из 4-х уравнений с 4-мя неизвестными, найдем x_1, x_2, x_3, x_4. Из последнего уравнения имеем

$$x_4 = 2$$

Тогда из третьего уравнения найдем

$$x_3 = 26x_4 - 54 = 52 - 54 = -2.$$

Из второго уравнения найдем

$$x_2 = 9x_3 - 13x_4 + 47 = -18 - 26 + 47 = -44 + 47 = 3.$$

Из первого уравнения находим $x_1 = x_2 + 4x_3 - 9x_4 + 22 = 3 - 8 - 18 + 22 = -1$.

Проверка.

Подставим найденные значения неизвестных во все уравнения системы (*).

$$\begin{cases} 3(-1)-2\cdot 3-5\cdot(-2)+2=3, \\ -2-9-2+10=-3, \\ -1+6-8=-3, \\ -1-3+8+18=22 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3\equiv 3, \\ -3\equiv -3, \\ -3\equiv -3, \\ 22\equiv 22 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ решение найдено верно.

Ответ: $x_1=-1$, $x_2=3$, $x_3=-2$, $x_4=2$ ▸

Замечание.

Перед решением задачи №4 **повторите**: общую теорию систем линейных неоднородных уравнений и решение их методом Гаусса. Теорему Кронекера-Капелли. Элементарные преобразования матриц.

5. Решение однородной системы линейных уравнений

◂ **Задача 5.**

Решить однородную систему линейных уравнений и найти ее фундаментальную систему решений.

$$\begin{cases} x_1-2x_2+x_3-x_4+3x_5=0, \\ 2x_1+4x_2-2x_3+x_4-5x_5=0, \\ 3x_1+10x_2-5x_3+3x_4-13x_5=0 \end{cases} \quad (*)$$

Решение.

Дана однородная линейная система из 3-х уравнений с 5-ю неизвестными (m=3, n=5).

1) Однородная система (*) всегда совместна. Определим теперь ранг основной матрицы системы: RgA.

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & -2 & 1 & -5 \\ 3 & 10 & -5 & 3 & -13 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 8 & -4 & 3 & -11 \\ 0 & 16 & -8 & 6 & -22 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 8 & -4 & 3 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = A'.$$

(привели матрицу A к матрице A', имеющую ступенчатую форму).

$\Rightarrow$ RgA =Rg A'=2 $\Rightarrow$ Rg A < n (n=5) $\Rightarrow$ система (*) имеет бесчисленное множество решений.

2) Найдем все решения системы (*). Перейдем к следующей эквивалентной системе уравнений.

$$\begin{cases} x_1-2x_2+x_3-x_4+3x_5=0 \\ \quad 8x_2-4x_3+3x_4-11x_5=0 \end{cases} \quad (**),$$

где x_1, x_2 - базисные неизвестные;

x_3, x_4, x_5- свободные неизвестные.

От системы (**) переходим к следующей эквивалентной системе

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = -x_3 + x_4 - 3x_5 \\ 8x_2 = 4x_3 - 3x_4 + 11x_5 \end{cases} \quad (***)$$

Решая систему (***) относительно x_1 и x_2 найдем

$$x_2 = \frac{1}{2}x_3 - \frac{3}{8}x_4 + \frac{11}{8}x_5$$

$$x_1 = -x_3 + x_4 - 3x_5 + 2x_2 = -x_3 + x_4 - 3x_5 + x_3 - \frac{3}{4}x_4 + \frac{11}{4}x_5 = \frac{1}{4}x_4 - \frac{1}{4}x_5$$

Т.к. x_3, x_4, x_5- свободные неизвестные, то можно считать $x_3 = a$, $x_4 = b$, $x_5 = c$.

Тогда общее решение системы (***), а значит и (*) есть

$$x_1 = \frac{1}{4}b - \frac{1}{4}c,\ x_2 = \frac{1}{2}a - \frac{3}{8}b + \frac{11}{8}c,\ x_3 = a,\ x_4 = b,\ x_5 = c \text{ или}$$

$$X = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}b - \frac{1}{4}c \\ \frac{1}{2}a - \frac{3}{8}b + \frac{11}{8}c \\ a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

3) Найдем частное решение системы (*), полагая, что $a = 8$, $b = 8$, $c = 8$

$$x_1 = 0,\ x_2 = 12,\ x_3 = 8,\ x_4 = 8,\ x_5 = 8$$

Проверка (по исходной системе).

$$\begin{cases} 0{,}25b - 0{,}25c - a + 0{,}75b - 2{,}75c + a - b + 3c = 0, \\ 0{,}5b - 0{,}5c + 2a - 1{,}5b + 5{,}5c - 2a + b - 5c = 0, \\ 0{,}75b - 0{,}75c + 5a - 3{,}75b + 13{,}75c - 5a + 3b - 13c = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \equiv 0, \\ 0 \equiv 0, \\ 0 \equiv 0, \end{cases}.$$

$\Rightarrow$ общее решение найдено верно.

Перейдем теперь к поиску фундаментальной системы решений. Из уравнений (***) ,придавая свободным неизвестным значения x_3=1, x_4=0, x_5=0, затем x_3=0, x_4=1, x_5=0, и затем x_3=0, x_4=0, x_5=1, получаем фундаментальную систему решений

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	$\frac{1}{2}$	1	0	0
$\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{8}$	0	1	0
$-\frac{1}{4}$	$\frac{11}{8}$	0	0	1

$\overline{\alpha}_1 = (0;\ \frac{1}{2};\ 1;\ 0;\ 0)$, $\overline{\alpha}_2 = (\frac{1}{4};\ -\frac{3}{8};\ 0;\ 1;\ 0)$, $\overline{\alpha}_3 = (-\frac{1}{4};\ \frac{11}{8};\ 0;\ 0;\ 1)$.

Тогда общее решение системы имеет вид

$$\overline{\alpha} = c_1\overline{\alpha}_1 + c_2\overline{\alpha}_2 + c_3\overline{\alpha}_3 = c_1\,(0;\ \frac{1}{2};1;\ 0;\ 0) + c_2\,(\frac{1}{4};-\frac{3}{8};\ 0;1;\ 0) + c_3\,(-\frac{1}{4};\ \frac{11}{8};\ 0;\ 0;\ 1)$$

или $\overline{\alpha} = (\frac{1}{4}c_2 - \frac{1}{4}c_3;\ \frac{1}{2}c_1 - \frac{3}{8}c_2 + \frac{11}{8}c_3;\ c_1;\ c_2;\ c_3)$ (сравните с предыдущим).

Ответ:

$$x_1 = \frac{1}{4}b - \frac{1}{4}c,\ x_2 = \frac{1}{2}a - \frac{3}{8}b + \frac{11}{8}c.,\ x_3 = a,\ x_4 = b,\ x_5 = c$$

или

$$x = (\frac{1}{4}b - \frac{1}{4}c,\ \frac{1}{2}a - \frac{3}{8}b + \frac{11}{8}c,\ a,\ b,\ c).$$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	$\frac{1}{2}$	1	0	0
$\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{8}$	0	1	0
$-\frac{1}{4}$	$\frac{11}{8}$	0	0	1

▶

Замечание.

Перед решением задачи №5 **повторите**: однородные системы линейных уравнений.

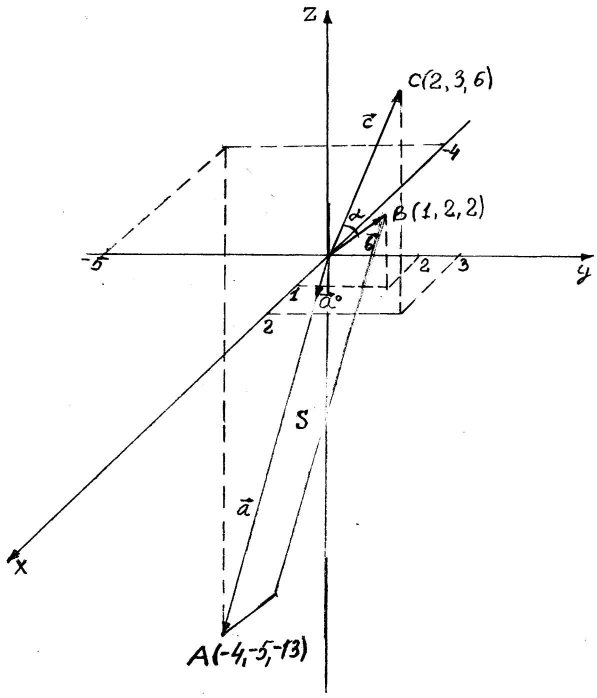
6. Задача на вектора

◀ **Задача 6.**

Даны три вектора $\vec{a}=\{-4;\ -5;\ -13\}$; $\vec{b}=\{1;2;2\}$; $\vec{c}=\{2;\ 3;\ 6\}$. Найти:

- $\vec{a}^0$;
- $пр_{\vec{c}}\vec{b}$, $пр_x\vec{b}$, $пр_y\vec{b}$, $пр_z\vec{b}$;
- $\cos(\vec{b},\vec{a})$;
- линейно зависимы или линейно независимы вектора $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$;
- $2\vec{b}-3\vec{c}$;
- площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$;
- сделать рисунок.

Решение.



$\vec{a}^0 = \frac{1}{|\vec{a}|}\cdot\vec{a} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\cdot\{x;y;z\}$.

Имеем

$|\vec{a}| = \sqrt{(-4)^2+(-5)^2+(-13)^2} = \sqrt{210}$ =14,49.

$\vec{a}^0 = \frac{1}{\sqrt{210}}\cdot\{-4;-5;-13\} = \{-0{,}276;-0{,}345;-0{,}897\}$

- $np_{\vec{c}}\vec{b} = \frac{\vec{b}\cdot\vec{c}}{|\vec{c}|} = \frac{x_1\cdot x_2 + y_1\cdot y_2 + z_1\cdot z_2}{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$.

Имеем $\vec{b}\cdot\vec{c} = 1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 2\cdot 6 = 20$;

$|\vec{c}| = \sqrt{2^2+3^2+6^2} = \sqrt{49} = 7$. Тогда

$np_{\vec{c}}\vec{b} = \frac{20}{7}$ =2,857.

$np_x\vec{b}$=1; $np_y\vec{b}$=2; $np_z\vec{b}$=2.

- $\cos(\vec{b},\vec{a}) = \frac{\vec{b}\cdot\vec{a}}{|\vec{b}|\cdot|\vec{a}|}$.

Имеем, $\cos(\vec{b},\vec{a}) = \frac{1\cdot(-4)+2\cdot(-5)+2\cdot(-13)}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}\cdot\sqrt{210}} = \frac{-40}{3\cdot\sqrt{210}} = -0{,}92$

- Если $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ - компланарны (линейно зависимы) $\Rightarrow$

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = 0 \quad \textit{или} \quad \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0 .$$

Имеем, $\begin{vmatrix} -4 & -5 & -13 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & -5 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -1\cdot(6-5) = -1 \neq 0$.

Следовательно, вектора $\vec{a},\vec{b}$ *и* $\vec{c}$ линейно независимы.

- $2\vec{b}$-3$\vec{c}$=2·{1; 2; 2}-3{2; 3; 6}={2; 4; 4}+{-6; -9; -18}={-4; -5; -14}.
- $S_{nap} = |\vec{a}\times\vec{b}|$

$$\vec{d} = \vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

Найдем,

$$\vec{d}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -4 & -5 & -13\\ 1 & 2 & 2\end{vmatrix}=\vec{i}\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}-5 & -13\\ 2 & 2\end{vmatrix}+\vec{j}\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}-4 & -13\\ 1 & 2\end{vmatrix}+\vec{k}\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}-4 & -5\\ 1 & 2\end{vmatrix}=16\cdot\vec{i}-5\cdot\vec{j}-3\cdot\vec{k}$$

Тогда, $S_{пар.}=\left|\vec{d}\right|=\sqrt{16^2+(-5)^2+(-3)^2}=\sqrt{290}=17{,}029$т (кв. ед.). ▶

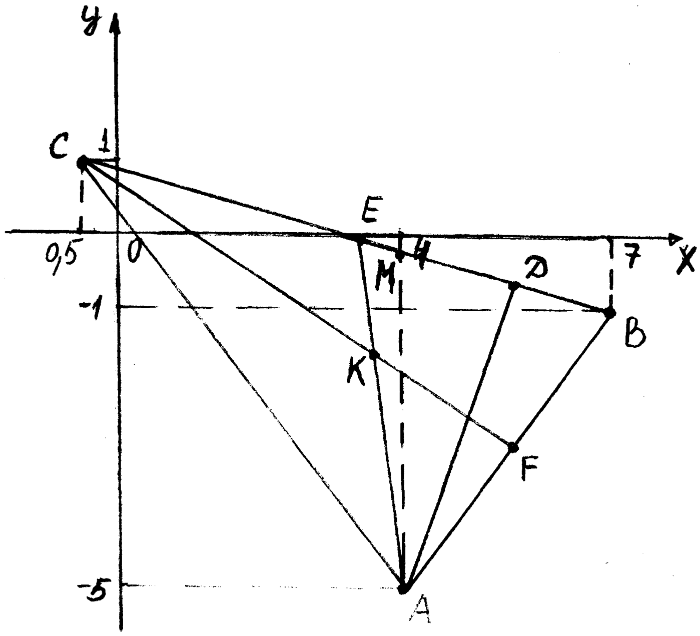
Замечание.

Перед решением задачи №6 **повторите**: основы векторной алгебры.

7. Задача на прямую на плоскости

◀ **Задача 7.**

Даны координаты вершин треугольника ABC: A(4; -5), B(7; -1), C(-0,5; 1).



Найти:

- уравнение высоты AD, опущенной из вершины A на сторону BC;
- уравнение медианы AE;
- уравнение биссектрисы AM внутреннего угла A;
- точку К пересечения медиан треугольника;
- площадь треугольника;
- сделать рисунок.

Решение.

- Высота AD перпендикулярна стороне BC.

Найдем уравнение стороны BC как уравнение прямой, проходящей через две точки B(7; -1) и C(-0,5; 1). Имеем $\vec{p}=\overrightarrow{BC}=\{-7{,}5;2\}$- направляющий вектор прямой. Тогда из

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}\Rightarrow\frac{x-7}{-7{,}5}=\frac{y+1}{2}\Rightarrow 2(x-7)=-7{,}5(y+1)\Rightarrow y+1=-\frac{2}{7{,}5}(x-7)\Rightarrow$$

$$BC\ :y=-\frac{4}{15}x+\frac{13}{15}\Rightarrow k_{BC}=-\frac{4}{15}\Rightarrow k_{AD}=\frac{-1}{k_{BC}}=\frac{15}{4}.$$

Уравнение AD: $y - y_0 = k(x - x_0)\Rightarrow\ y+5=\frac{15}{4}(x-4)\Rightarrow y=\frac{15}{4}x-20.$

Можно найти уравнение высоты AD как уравнение прямой, проходящей через точку A перпендикулярно вектору $\overline{BC}=\{-7{,}5;2\}$. Тогда из

$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0 \Rightarrow -7{,}5(x-4)+2(y+5)=0 \Rightarrow -7{,}5(x-4)=-2(y+5) \Rightarrow y+5=\frac{7{,}5}{2}(x-4) \Rightarrow y+5=\frac{15}{4}(x-4) \Rightarrow y=\frac{15}{4}x-20$

- Чтобы найти уравнение медианы AE, нужно найти координаты точки E - середины отрезка BC:

$$x=\frac{x_1+x_2}{2};\quad y=\frac{y_1+y_2}{2} \Rightarrow x=\frac{7-0{,}5}{2}=\frac{6{,}5}{2}=\frac{13}{4}=3{,}25$$

$$y=\frac{-1+1}{2}=0 \Rightarrow E(3{,}25;0)$$

Имеем $\vec{p}=\overrightarrow{AE}=\{3{,}25-4;0+5\}=\{-0{,}75;5\}$- направляющий вектор прямой. Тогда из

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m} \Rightarrow \frac{x-4}{-0{,}75}=\frac{y+5}{5} \Rightarrow y+5=-\frac{20}{3}(x-4) \Rightarrow AE\ :\ \ y=-\frac{20}{3}x+\frac{65}{3}.$$

- Чтобы найти уравнение биссектрисы AM, нужно знать координаты точки M. Биссектриса внутреннего угла треугольника делит противоположную сторону треугольника на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам, т.е. $\lambda=\frac{CM}{MB}=\frac{AC}{AB}$.

Т.к. $AC=\sqrt{(4+0{,}5)^2+(-5-1)^2}=\sqrt{(4{,}5)^2+(-6)^2}=\sqrt{20{,}25+36}=7{,}5,$

AB = $\sqrt{(4-7)^2+(-5+1)^2}=\sqrt{3^2+(-4)^2}=5,$ то $\lambda=\frac{7{,}5}{5}=1{,}5.$

Следовательно, координаты точки M равны:

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}=\frac{-0{,}5+1{,}5\cdot 7}{1+1{,}5}=\frac{-0{,}5+10{,}5}{2{,}5}=\frac{10}{2{,}5}=4$$

$$y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}=\frac{1+1{,}5\cdot(-1)}{1+1{,}5}=\frac{-0{,}5}{2{,}5}=-0{,}2$$

$M(4;-0{,}2)$

Имеем $\vec{p}=\overrightarrow{AM}=\{4-4;-0{,}2+5\}=\{0;4{,}8\}$- направляющий вектор прямой. Тогда из

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m} \Rightarrow \frac{x-4}{0}=\frac{y+5}{4{,}8} \Rightarrow (x-4)4{,}8=(y+5)\cdot 0 \Rightarrow x-4=0 \Rightarrow AM:\quad x=4.$$

- а) Чтобы найти точку пересечения медиан треугольника, нужно иметь уравнения двух медиан этого треугольника. Найдем уравнение медианы CF, где F – середина отрезка AB. Имеем F(5,5;-3), $\vec{p}=\overrightarrow{CF}=\{5{,}5+0{,}5;-3-1\}=\{6;-4\}$- направляющий вектор прямой. Тогда из

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m} \Rightarrow \frac{x+0{,}5}{6}=\frac{y-1}{-4} \Rightarrow y-1=-\frac{4}{6}(x+0{,}5) \Rightarrow y-1=-\frac{2}{3}x-\frac{1}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow CF: y=-\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}$$

Точка К – точка пересечения медиан, следовательно, решаем систему уравнений

$$\begin{cases} y=-\dfrac{20}{3}x+\dfrac{65}{3} \\ y=-\dfrac{2}{3}x+\dfrac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\dfrac{20}{3}x+\dfrac{65}{3}=-\dfrac{2}{3}x+\dfrac{2}{3} \\ y=-\dfrac{2}{3}x+\dfrac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\dfrac{20}{3}x+\dfrac{2}{3}x=\dfrac{2}{3}-\dfrac{65}{3} \\ y=-\dfrac{2}{3}x+\dfrac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3{,}5 \\ y=-\dfrac{5}{3} \end{cases} \Rightarrow k\left(3{,}5;-\dfrac{5}{3}\right)$$

б) Точку К можно найти, если вспомнить, что она отсекает от медианы одну треть, считая от основания, т.е. $\lambda=\dfrac{AK}{KE}=\dfrac{\frac{2}{3}AE}{\frac{1}{3}AE}=2$.

Итак, $x=\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}=\dfrac{4+2\cdot 3{,}25}{1+2}=\dfrac{4+6{,}5}{3}=3{,}5,\quad y=\dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}=\dfrac{-5+2\cdot 0}{3}=-\dfrac{5}{3}$.

Итак, К$\left(3{,}5;-\dfrac{5}{3}\right)$.

- Площадь треугольника

$$S_\Delta=\frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$$

Имеем $\overrightarrow{AB}=\{3;4;0\}$, $\overrightarrow{AC}=\{-4{,}5;6;0\}$. Тогда

$$\vec{q}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 4 & 0 \\ -4{,}5 & 6 & 0 \end{vmatrix}=\vec{k}\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -4{,}5 & 6 \end{vmatrix}=(18+18)\vec{k}=36\vec{k}.$$

Следовательно,

$$S_\Delta=\frac{1}{2}\cdot\left|36\vec{k}\right|=\frac{1}{2}\cdot 36\cdot\left|\vec{k}\right|=18.\quad (\textit{кв. ед.})$$

Ответ:

- уравнение высоты AD: $y=\dfrac{15}{4}x-20.$
- уравнение медианы AE: $y=\dfrac{20}{3}x+\dfrac{65}{3}$
- уравнение биссектрисы AM: x = 4
- точка пересечения медиан: К$\left(3{,}5;-\dfrac{5}{3}\right)$.
- площадь треугольника: $S_\Delta=18$ (кв. ед.). ▸

Замечание.

Перед решением задачи №7 **повторите**: прямая на плоскости, взаимное расположение прямых на плоскости.

8. Решение систем линейных неравенств

Задача 8.

Построить множество решений системы линейных неравенств

$$\begin{cases} 2x+11y-22 \ge 0, \\ x-5y+25 \ge 0, \\ x+y-11 \le 0, \\ x \le 7, \\ x \ge 0. \end{cases}$$

Найти координаты угловых точек и проверить, принадлежит ли точка $M_0(6;5)$ данному множеству.

Решение.

Для построения множества решений системы линейных неравенств необходимо последовательно построить области решений каждого неравенства этой системы.

• Т.к. областью решений линейного неравенства является одна из двух полуплоскостей, то чтобы найти полуплоскость, задаваемую данным неравенством, сначала строят соответствующую прямую по двум точкам.

1) $2x + 11y – 22 \ge 0$

L_1: $2x + 11y – 22 = 0$

x	0	11
y	2	0

Строим прямую L_1 через точки (0; 2) и (11; 0). Для определения полуплоскости решений неравенства возьмем **произвольную точку плоскости, не лежащую на прямой L_1: $2x + 11y – 22 = 0$**, например O(0; 0) и подставим ее координаты в неравенство $2x + 11y – 22 \ge 0$: $2\cdot0 + 11\cdot0 – 22 \ge 0$, получим **неверное неравенство $–22 \ge 0$**, а это означает, что O(0; 0) **не лежит в полуплоскости решений нашего неравенства и решением неравенства служат точки другой полуплоскости, лежащей выше прямой L_1**, поэтому поставим на чертеже около прямой L_1 маленькие стрелочки вверх.

x	0	5
y	5	6

2) $x - 5y + 25 \geq 0$

L_2: $x - 5y + 25 = 0$

Строим прямую L_2 через точки (0;5) и (5;6). Для определения полуплоскости решений неравенства возьмем произвольную точку плоскости, не лежащую на прямой L_2: $x - 5y + 25 = 0$, например O(0; 0) и подставим ее координаты в неравенство $x - 5y + 25 \geq 0$: $0 - 5\cdot 0 + 25 \geq 0$, получим верное неравенство $22 \geq 0$, а это означает, что O(0; 0) лежит в полуплоскости решений нашего неравенства и решением неравенства служат точки полуплоскости, лежащей ниже прямой L_2, поэтому поставим на чертеже около прямой L_2 маленькие стрелочки вниз.

x	0	11
y	11	0

3) $x + y - 11 \leq 0$

L_3: $x + y - 11 = 0$

Строим прямую L_3 через точки (0;11) и (11;0). Для определения полуплоскости решений неравенства возьмем произвольную точку плоскости, не лежащую на прямой L_3: $x + y - 11 = 0$, например O(0; 0) и подставим ее координаты в неравенство $x + y - 11 \leq 0$: $0 + 0 - 11 \leq 0$, получим верное неравенство $-11 \leq 0$, а это означает, что O(0; 0) лежит в полуплоскости решений нашего неравенства и решением неравенства служат точки полуплоскости, лежащей ниже прямой L_3, поэтому поставим на чертеже около прямой L_3 маленькие стрелочки вниз.

4) $x \leq 7$

L_4: $x = 7$ – прямая, проходящая через точку (7; 0) и параллельная оси Oy.

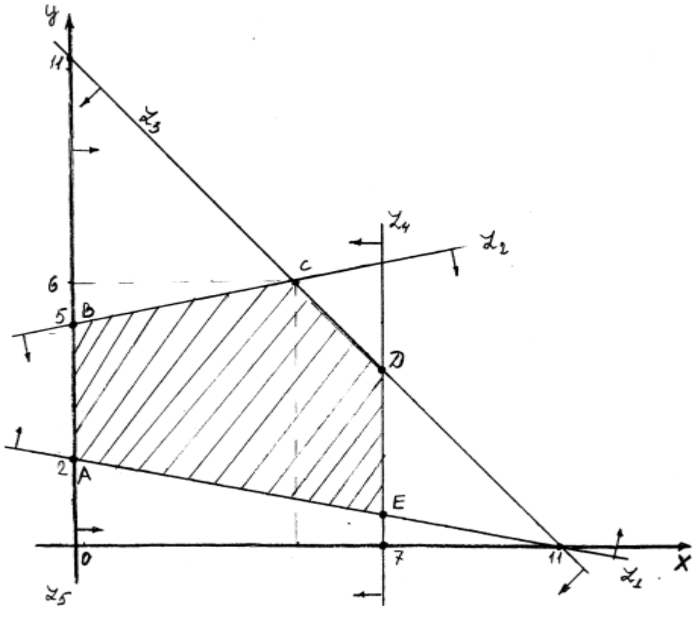
Т.к. координаты т.O(0; 0) удовлетворяют неравенству: $0 < 7$, то это означает, что O(0; 0) лежит в полуплоскости решений нашего неравенства и решением неравенства служат точки полуплоскости, лежащей левее прямой L_4, поэтому поставим на чертеже около прямой L_4 маленькие стрелочки влево.

5) $x \geq 0$

L_5: $x = 0$ – ось Oy.

Т.к. координаты т.(1; 0) удовлетворяют неравенству: $1 \geq 0$, то это означает, что (1;0) лежит в полуплоскости решений нашего неравенства и решением неравенства служат точки полуплоскости, лежащей правее прямой L_5, поэтому поставим на чертеже около прямой L_5 маленькие стрелочки вправо.

Многоугольник ABCDE (**пересечение всех множеств решений**) и является множеством решений данной системы линейных неравенств.Найдем координаты угловых точек A, B, C, D, E.



а) Точка A – точка пересечения прямых L_1 и L_5; следовательно, ее координаты найдем, решив систему уравнений

$$\begin{cases} 2x+11y-22=0 \\ x=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 11y-22=0 \\ x=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=2 \\ x=0 \end{cases} \Rightarrow A(0;\,2)$$

б) Точка B – точка пересечения прямых L_2 и L_5:

$$\begin{cases} x-5y+25=0 \\ x=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=5 \\ x=0 \end{cases} \Rightarrow B(0;\,5)$$

в) Точка C – точка пересечения прямых L_2 и L_3:

$$\begin{cases} x-5y+25=0 \\ x+y-11=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-5y+25=0 \\ y=-x+11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-5(-x+11)+25=0 \\ y=-x+11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=6 \end{cases} \Rightarrow C(5;\,6)$$

г) Точка D – точка пересечения прямых L_3 и L_4:

$$\begin{cases} x+y-11=0 \\ x=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=4 \\ x=7 \end{cases} \Rightarrow D(7;\,4)$$

д) Точка E – точка пересечения прямых L_1 и L_4:

$$\begin{cases} 2x+11y-22=0 \\ x=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 11y=8 \\ x=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=\dfrac{8}{11} \\ x=7 \end{cases} \Rightarrow E\left(7;\,\dfrac{8}{11}\right)$$

- Чтобы проверить, принадлежит ли точка $M_0(6;\,5)$ данному множеству, подставим ее координаты в каждое неравенство данной системы линейных неравенств, получим

$$\begin{cases} 2\cdot 6+11\cdot 5-22\ge 0 \\ 6-5\cdot 5+25\ge 0 \\ 6+5-11\le 0 \\ 6\le 7 \\ 6\ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 45\ge 0 \\ 6\ge 0 \\ 0\le 0 \\ 6\le 7 \\ 6\ge 0 \end{cases}$$

Получили, что каждое неравенство – верное числовое неравенство, $\Rightarrow$ точка $M_0(6;\,5)$ принадлежит данному множеству. ▸

Замечание.

Перед решением задачи №8 **повторите**: графическое решение неравенств с двумя переменными.

9. Линейная модель межотраслевого баланса

◂ **Задача 9.**

В таблице приведены данные об исполнении баланса за отчетный период (усл. ден. ед.).

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">Отрасль</td><td colspan="2">Потребление</td><td>Конечный продукт</td><td>Валовой выпуск</td></tr>
<tr><td>энергетика</td><td>машино-строение</td><td>Y</td><td>X</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Производство</td><td>Энергетика</td><td>7</td><td>21</td><td>72</td><td>100</td></tr>
<tr><td>Машино-строение</td><td>12</td><td>15</td><td>173</td><td>200</td></tr>
</table>

Вычислить необходимый объем валового выпуска каждой отрасли, если конечное непроизводственное потребление энергетической отрасли увеличится вдвое, а машиностроения сохранится на прежнем уровне.

Решение.

Имеем

$x_1 = 100, x_2 = 200, x_{11} = 7, x_{12} = 21, x_{21} = 12, x_{22} = 15; y_1 = 72, y_2 = 173.$

По соответствующей формуле $a_{ij} = \dfrac{x_{ij}}{x_j}, \quad i, j = 1,2$ находим коэффициенты прямых затрат:

$a_{11} = 0{,}07;\ a_{12} = 0{,}105;\ a_{21} = 0{,}12;\ a_{22} = 0{,}075,$ т.е. матрица прямых затрат

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}07 & 0{,}105 \\ 0{,}12 & 0{,}075 \end{pmatrix}$$

имеет неотрицательные элементы и удовлетворяет критерию продуктивности:

$$\max\{0{,}07 + 0{,}12; 0{,}105 + 0{,}075\} = \max\{0{,}19; 0{,}18\} = 0{,}19 < 1.$$

Так как систему соотношений баланса можно записать в матричном виде:

X=AX+Y или (E-A)X=Y

Поэтому для любого вектора конечного продукта Y можно найти необходимый объем валового выпуска X по формуле

$$X = (E - A)^{-1} Y.$$

Найдем матрицу полных затрат $S = (E - A)^{-1}$:

$$E - A = \begin{pmatrix} 0{,}93 & -0{,}105 \\ -0{,}12 & 0{,}925 \end{pmatrix}.$$

Так как $|E - A| = 0{,}848 \neq 0,$ то получим

$$S = (E - A)^{-1} = \frac{1}{0{,}848} \begin{pmatrix} 0{,}925 & 0{,}105 \\ 0{,}12 & 0{,}93 \end{pmatrix}.$$

По условию вектор конечного продукта $Y=\begin{pmatrix}144\\173\end{pmatrix}$. Тогда вектор валового выпуска будет равен:

$$X=\frac{1}{0{,}848}\begin{pmatrix}0{,}925 & 0{,}105\\ 0{,}12 & 0{,}93\end{pmatrix}\begin{pmatrix}144\\173\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}178{,}57\\210{,}193\end{pmatrix},$$

т.е. валовой выпуск в энергетической отрасли надо увеличить до 178,57 усл. ед., а в машиностроительной - до 210,193 усл.ед.

Проверка. $(E-A)X=\begin{pmatrix}0{,}93 & -0{,}105\\ -0{,}12 & 0{,}925\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}178{,}57\\210{,}193\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}144\\173\end{pmatrix}$

Следовательно, решение найдено верно.

Ответ: $X=\begin{pmatrix}178{,}57\\210{,}193\end{pmatrix}$ ►

Замечание.

- В данной задаче можно также перейти к неоднородной системе линейных уравнений

$$\begin{cases}0{,}93x_1-0{,}105x_2=144;\\ -0{,}12x_1+0{,}925x_2=173\end{cases}\quad \textit{или}\quad \begin{cases}930x_1-105x_2=144000;\\ -120x_1+925x_2=173000\end{cases}$$

которую можно также решить по формулам Крамера или **методом Гаусса**, что более предпочтительно, если порядок матрицы Е-А более двух.

- Перед решением задачи №9 **повторите**: модель Леонтьева многоотраслевой экономики (балансовый анализ).

10.Линейная модель международной торговли

◄ **Задача 10.**

Структурная матрица торговли трех стран S_1,S_2,S_3 имеет вид:

$$A=\begin{pmatrix}1/3 & 1/4 & 1/2\\ 1/3 & 1/2 & 1/2\\ 1/3 & 1/4 & 0\end{pmatrix}.$$

(сумма элементов любого столбца равна 1)

Найти национальные доходы стран для сбалансированной торговли.

Решение.

Находим вектор национальных доходов X, решив матричное уравнение AX=X или (A-E)X=O, где

$$A-E=\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & -1 \end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},\quad O=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

или систему уравнений

$$\begin{cases} -\frac{2}{3}x_1+\frac{1}{4}x_2+\frac{1}{2}x_3=0, \\ \frac{1}{3}x_1-\frac{1}{2}x_2+\frac{1}{2}x_3=0, \quad (*) \\ \frac{1}{3}x_1+\frac{1}{4}x_2-x_3=0 \end{cases}$$

методом Гаусса.

2) Однородная система (m=n=3) (*) всегда совместна. Определим теперь ранг основной матрицы системы RgB, где B=A-E.

$$B=\begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & -1 \end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & -1 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & -1 \\ 0 & \frac{3}{4} & -\frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{3}{4} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & -1 \\ 0 & \frac{3}{4} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}=B'.$$

(привели матрицу B к матрице B′, имеющую ступенчатую форму).

$\Rightarrow$ RgB = RgB′ = 2 $\Rightarrow$ Rg B < n (n=3 – число неизвестных) $\Rightarrow$ система (*) имеет бесчисленное множество решений.

3) Найдем все решения системы (*). Перейдем к следующей эквивалентной системе уравнений.

$$\begin{cases} \frac{1}{3}x_1+\frac{1}{4}x_2-x_3=0 \\ \frac{3}{4}x_2-\frac{3}{2}x_3=0 \end{cases} \quad (**),$$

где x_1, x_2 - базисные неизвестные;

x_3- свободное неизвестное.

От системы (**) переходим к следующей эквивалентной системе

$$\begin{cases} \frac{1}{3}x_1+\frac{1}{4}x_2=x_3 \\ \frac{3}{4}x_2=\frac{3}{2}x_3 \end{cases} \quad (***)$$

Решая систему (***) относительно x_1 и x_2 найдем $x_2=2x_3$

$$x_1=3x_3-\frac{3}{4}x_2=3x_3-\frac{3}{2}x_3=\frac{3}{2}x_3$$

Т.к. x_3 - свободное неизвестное, то можно считать x_3 =c.

Тогда общее решение системы (***), а значит и (*) есть

$$x_1 = 3/2\ c;\ x_2 = 2c;\ x_3 = c.$$

Проверка. (по исходной системе)

$$\begin{cases} -\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}c+\frac{1}{4}\cdot 2c+\frac{1}{2}c \equiv 0, \\ \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}c-\frac{1}{2}\cdot 2c+\frac{1}{2}c \equiv 0, \\ \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}c+\frac{1}{4}\cdot 2c-c \equiv 0, \end{cases}$$

Следовательно, решение найдено верно.

Полученный результат означает, что сбалансированность торговли трех стран достигается при векторе национальных доходов X = (3/2c; 2c; c) т.е. при соотношении национальных доходов стран $3/2:2:1$ или $3:4:2$.

Ответ: X = (3/2 c; 2c; c). ▶

Замечание.

Перед решением задачи №10 **повторите**: линейная модель обмена.

Задачи Семестрового задания №1 (Контрольной работы №1)

1. Задание 1.

Выполнить действия над матрицами.

1. $3\begin{bmatrix}1 & 0 & 3\\ -2 & 1 & 1\\ 7 & -4 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-5 & 1 & 3 & 4\\ 1 & 0 & -1 & 0\\ 3 & 1 & 4 & -2\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}3 & 2\\ 0 & 5\\ -1 & 2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 3 & 4 & 5\\ -1 & -2 & 0 & 1\end{bmatrix}$

2. $4\begin{bmatrix}3 & 1\\ 0 & 5\\ 1 & -4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & 4\\ 0 & 1 & 3 & 1\end{bmatrix}-3\begin{bmatrix}3 & 4 & 1\\ 1 & 2 & 5\\ 6 & 4 & 12\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 3 & 5 & 4\\ 2 & -1 & 0 & 1\\ 2 & 0 & 1 & 3\end{bmatrix}$

3. $5\begin{bmatrix}2 & 4 & -1 & 3\\ 6 & 3 & 5 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}5 & 3 & 8\\ 2 & 4 & 0\\ 6 & 7 & 2\\ 4 & 2 & 1\end{bmatrix}-4\begin{bmatrix}6 & 0 & 5\\ 4 & 2 & 7\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}3 & 1 & 2\\ 4 & 6 & 3\\ 1 & 3 & 4\end{bmatrix}$

4. $2\begin{bmatrix}1 & 2 & 0 & 1 & 3\\ 3 & 0 & 1 & 4 & 2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}3 & 1 & 4\\ 2 & 1 & 0\\ 5 & 1 & -4\\ -1 & 0 & 2\\ 2 & 1 & 3\end{bmatrix}-5\begin{bmatrix}1 & 4 & 1\\ 2 & 1 & 3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}3 & 0 & 1\\ 2 & 3 & 1\\ 2 & 1 & 5\end{bmatrix}$

5. $6\begin{bmatrix}3 & 1 & 4\\ 1 & 5 & 4\\ 1 & 3 & 4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & -3 & 4 & 1\\ 2 & 1 & 0 & 2\\ 3 & 1 & 5 & 7\end{bmatrix}-4\begin{bmatrix}5 & 2\\ 1 & -5\\ 0 & 2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}7 & 2 & 1 & 3\\ 1 & 0 & 2 & 11\end{bmatrix}$

6. $3\begin{bmatrix}1 & -3 & 4 & 5\\ 0 & 1 & 3 & -2\\ 1 & 1 & 2 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2 & 7\\ 0 & 1\\ 4 & 3\\ 2 & 4\end{bmatrix}-6\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 3 & -2 & 1\\ 5 & -4 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 0\\ 3 & 2\end{bmatrix}$

7. $4\begin{bmatrix}5 & 2 & 4\\ 1 & 3 & 3\\ 6 & 7 & 1\\ 7 & 5 & 3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 4 & 3 & 5\\ 4 & 0 & -1 & 2\\ 6 & 0 & 7 & 3\end{bmatrix}-3\begin{bmatrix}1 & 3\\ 1 & -4\\ 5 & 0\\ 1 & 4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 2 & 4 & 5\\ 0 & 1 & 6 & 4\end{bmatrix}$

8. $7\begin{bmatrix}3 & 2 & 1\\ 4 & 6 & 1\\ 6 & 4 & 2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2 & 1 & 5 & 4\\ 2 & 0 & -1 & 2\\ 3 & 0 & 4 & 1\end{bmatrix}-5\begin{bmatrix}3 & 1\\ 2 & 6\\ 1 & 4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0 & 1 & 3 & 0\\ 2 & 1 & 6 & 3\end{bmatrix}$

9. $6\begin{bmatrix}1 & 2 & 0 & 4 & 3\\ 1 & 2 & 3 & 2 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}3 & 2 & 4\\ 1 & 0 & 1\\ 5 & -1 & 1\\ 2 & 3 & -1\\ 1 & 2 & 3\end{bmatrix}-3\begin{bmatrix}4 & 1 & 2\\ 3 & 2 & 3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0 & 1 & 3\\ 3 & 2 & 1\\ 5 & 2 & 3\end{bmatrix}$

10. $7\begin{bmatrix} -4 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 7 \\ 6 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 6 \\ -3 & 4 & 2 & 3 \end{bmatrix} - 6\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 5 & 7 \end{bmatrix}$

11. $2\begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 5 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ -7 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} - 8\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & -3 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

12. $8\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 1 \\ -5 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} - 5\begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 5 & 4 \\ 3 & 4 & 0 & -1 \\ 6 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

13. $2\begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 5 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ -1 & 4 & -1 \end{bmatrix} - 4\begin{bmatrix} 4 & 1 & 6 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

14. $6\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \end{bmatrix} - 7\begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

15. $4\begin{bmatrix} 6 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & -2 \\ 3 & 0 & -3 \\ 4 & 2 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 7 & -1 \\ 1 & -5 \\ -2 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$

16. $5\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 3 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -4 & 3 \\ 1 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 & -5 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

17. $5\begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \\ -1 & 5 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 5 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

18. $6\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 1 & -5 & 4 \end{bmatrix} - 9\begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

19. $9\begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 5 \\ -1 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} - 7\begin{bmatrix} 0 & 4 & -2 & 1 & 3 \\ 9 & 7 & -5 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 3 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

20. $4\begin{bmatrix} 5 & 1 & -4 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -4 & 5 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & -4 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} - 9\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \\ -5 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 6 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & -2 \end{bmatrix}$

21. $4\begin{bmatrix} 1 & 5 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 6 & -1 & -3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 5 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 3 \\ 0 & 4 \\ -1 & 6 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} - 5\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & -2 \\ -4 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 7 \\ -1 & 1 \\ 3 & -8 \end{bmatrix}$

22. $5\begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & -3 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} - 7\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -5 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & -2 \end{bmatrix}$

23. $6\begin{bmatrix} 3 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & -4 \\ -5 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 4 & 1 \\ -5 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

24. $5\begin{bmatrix} -1 & 3 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 3 & 5 \\ 6 & 4 & 2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \end{bmatrix} - 8\begin{bmatrix} 7 & 1 \\ -1 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

25. $3\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -3 \\ 5 & 4 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} - 5\begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ -3 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$

26. $6\begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 & 4 \\ -1 & 0 & -2 & 5 \\ 4 & 6 & 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & 6 \\ 3 & 0 & 5 \\ -3 & 1 & 4 \end{bmatrix} - 9\begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 1 & -2 \\ -6 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$

27. $3\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ -4 & 1 & 3 & 2 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \\ 2 & 1 \\ -5 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} - 4\begin{bmatrix} -7 & 0 & -3 & 2 \\ 3 & -1 & 4 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 6 & 2 \\ -4 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

28. $3\begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 & 4 \\ -1 & 0 & -2 & 5 \\ 4 & 6 & 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & 6 \\ 3 & 0 & 5 \\ -3 & 1 & 4 \end{bmatrix} - 6\begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 1 & -2 \\ -6 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$

29. $2\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 4 & 1 & 3 & 2 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \\ 2 & 1 \\ -5 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} - 5\begin{bmatrix} 7 & 0 & -3 & 2 \\ 3 & -1 & 4 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 6 & 2 \\ 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

30. $4\begin{bmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 2 & 3 & -4 \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -7 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 1 & -1 \\ -1 & 0 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

2. Задание 2.

Решить систему:

- матричным способом,
- по формулам Крамера,
- методом Гаусса.

Сделать проверку.

1. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 4. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x_1 + 5x_2 + x_3 = -7, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 2. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 2, \\ 5x_1 - 6x_2 + 4x_3 = 3, \\ 4x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 1. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 20, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 3, \\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 = -8. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ 2x_1 - x_2 - 6x_3 = -1, \\ 3x_1 - 2x_2 = 8. \end{cases}$

6. $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 8, \\ 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 11. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3=6, \\ 2x_1+3x_2-4x_3=16, \\ 3x_1-2x_2-5x_3=12. \end{cases}$

8. $\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3=7, \\ x_1+3x_2-2x_3=0, \\ 2x_2-x_3=2. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x_1-x_2=4, \\ 2x_1+3x_2+x_3=1, \\ 2x_1+x_2+3x_3=11. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x_1+5x_2-x_3=7, \\ 2x_1-x_2-x_3=4, \\ 3x_1-2x_2+4x_3=11. \end{cases}$

11. $\begin{cases} 7x_1+5x_2+2x_3=18, \\ x_1-x_2-x_3=3, \\ x_1+x_2+2x_3=-2. \end{cases}$

12. $\begin{cases} 11x_1+3x_2-x_3=2, \\ 2x_1+5x_2-5x_3=0, \\ x_1+x_2+x_3=2. \end{cases}$

13. $\begin{cases} 2x_1+3x_2+x_3=2, \\ x_2+x_3=0, \\ x_1-x_2-x_3=2. \end{cases}$

14. $\begin{cases} x_1-2x_2-2x_3=3, \\ x_1+x_2-2x_3=0, \\ x_1-x_2-x_3=1. \end{cases}$

15. $\begin{cases} 3x_1+x_2-5x_3=-6, \\ 2x_1-3x_2+4x_3=-4, \\ 5x_1-x_2+3x_3=-4. \end{cases}$

16. $\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3=-4, \\ x_1+3x_2-x_3=2, \\ 5x_1+2x_2+x_3=5. \end{cases}$

17. $\begin{cases} 2x_1+3x_2+4x_3=7, \\ 3x_1+4x_2-x_3=-4, \\ 4x_1+5x_2-2x_3=-7. \end{cases}$

18. $\begin{cases} 2x_1-4x_2+9x_3=28, \\ 7x_1+3x_2-6x_3=-1, \\ 7x_1+9x_2-9x_3=5. \end{cases}$

19. $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=4, \\ 3x_1-5x_2+3x_3=1, \\ 2x_1+7x_2-x_3=8. \end{cases}$

20. $\begin{cases} 3x_1+2x_2+x_3=5, \\ 2x_1+3x_2+x_3=1, \\ 2x_1+x_2+3x_3=11. \end{cases}$

21. $\begin{cases} x_1+x_2+2x_3=-1, \\ 2x_1-x_2+2x_3=-4, \\ 4x_1+x_2+4x_3=-2. \end{cases}$

22. $\begin{cases} x_1+2x_2+4x_3=31, \\ 5x_1+x_2+2x_3=29, \\ 3x_1-x_2+x_3=10. \end{cases}$

23. $\begin{cases} 4x_1-3x_2+2x_3=9, \\ 2x_1+5x_2-3x_3=4, \\ 5x_1+6x_2-5x_3=3. \end{cases}$

24. $\begin{cases} 2x_1-x_2-x_3=4, \\ 3x_1+4x_2-2x_3=11, \\ 3x_1-2x_2+4x_3=11. \end{cases}$

25. $\begin{cases} 3x_1-x_2=5, \\ -2x_1+x_2+x_3=0, \\ 2x_1-x_2+4x_3=15. \end{cases}$

26. $\begin{cases} 5x_1+8x_2-x_3=7, \\ x_1+2x_2+3x_3=1, \\ 2x_1-3x_2+2x_3=9. \end{cases}$

27. $\begin{cases} 4x_1-3x_2+2x_3=9, \\ 2x_1+5x_2-3x_3=4, \\ 5x_1+6x_2-2x_3=18. \end{cases}$

28. $\begin{cases} 5x_1-2x_2+x_3=4, \\ 3x_1-5x_2+3x_3=1, \\ 2x_1+7x_2-x_3=8. \end{cases}$

29. $\begin{cases} 3x_1+2x_2+3x_3=11, \\ 2x_1+3x_2+x_3=1, \\ 2x_1+x_2+3x_3=11. \end{cases}$

30. $\begin{cases} 2x_1+2x_2+4x_3=34, \\ 5x_1+x_2+2x_3=29, \\ 3x_1-x_2+x_3=10. \end{cases}$

3. Задание 3.

Исследовать систему и в случае совместности решить ее:

- матричным способом,
- по формулам Крамера,
- методом Гаусса.

Сделать проверку.

I. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 8, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = -1, \\ x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 10. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 12, \\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 + x_4 = 0, \\ 5x_1 + 7x_2 + x_3 + 3x_4 = 4, \\ 7x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 16. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 2, \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 4, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 7. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 16, \\ x_1 - 3x_2 - 6x_4 = -15, \\ 2x_1 - x_3 + 2x_4 = 9, \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = 32. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -5, \\ x_1 - 2x_3 + 3x_4 = -4. \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_4 = 12, \\ 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 5. \end{cases}$

6. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 1, \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -5. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 20, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 9, \\ 5x_1 - 7x_2 + 10x_4 = -9, \\ 3x_2 - 5x_3 = 1. \end{cases}$

8. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 + x_4 = 3, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = -3, \\ x_1 + 2x_2 - 4x_4 = -3, \\ x_1 - x_2 - 4x_3 + 9x_4 = 22. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = -4, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = -6, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = -4. \end{cases}$

10. $\begin{cases} 5x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = -4, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 8, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4. \end{cases}$

11. $\begin{cases} x_1 - 4x_2 - x_4 = -6, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 3, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 = -2. \end{cases}$

12. $\begin{cases} x_1 + 5x_2 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 6, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 6. \end{cases}$

13. $\begin{cases} 2x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 12, \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 12, \\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 + x_4 = 0, \\ 5x_1 + 7x_2 + x_3 + 3x_4 = 4. \end{cases}$

14. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - x_4 = 2, \\ x_1 - x_2 - x_4 = -1, \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$

15. $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+4x_4=7,\\ x_1+2x_3+2x_4=5,\\ 4x_1+x_2-x_3=3,\\ x_1+x_2-x_3+3x_4=6.\end{cases}$

16. $\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3-x_4=2,\\ 2x_1+x_2-3x_4=8,\\ 3x_1-x_3+x_4=7,\\ 2x_1+2x_2-2x_3+5x_4=5.\end{cases}$

17. $\begin{cases} 4x_1+x_2-x_4=-9,\\ x_1-3x_2+4x_3=-7.\\ 3x_2-2x_3+4x_4=12,\\ x_1+2x_2-x_3-3x_4=0.\end{cases}$

18. $\begin{cases} 2x_1+x_3+7x_4=9,\\ x_1+2x_2-x_3+x_4=8,\\ 2x_1+x_2+x_3+x_4=5,\\ x_1-x_2+2x_3+x_4=-1.\end{cases}$

19. $\begin{cases} 5x_1-x_2+x_3+3x_4=-4,\\ x_1+2x_2+3x_3-2x_4=6.\\ 2x_1-x_2-2x_3-3x_4=8,\\ 3x_1+2x_2-3x_3+2x_4=6.\end{cases}$

20. $\begin{cases} 2x_1+3x_2+5x_3+x_4=6,\\ 3x_1+x_2-x_3+5x_4=0,\\ 2x_1-x_2+3x_4=-5,\\ 2x_1+2x_2-x_3+7x_4=-3.\end{cases}$

21. $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+4x_4=7,\\ x_1+2x_3+2x_4=5,\\ 4x_1+x_2-x_3=3,\\ 2x_1+x_2+x_3=1.\end{cases}$

22. $\begin{cases} 2x_1+x_2+5x_3-x_4=1,\\ 3x_1+3x_2-2x_3-5x_4=2,\\ x_1-x_2+2x_3+3x_4=10,\\ 3x_1+2x_2+7x_3-2x_4=1.\end{cases}$

23. $\begin{cases} 3x_1+2x_2+5x_3-x_4=3,\\ 2x_1-3x_2-3x_3+4x_4=1,\\ 4x_1+x_2+3x_3+2x_4=3,\\ 5x_1-2x_2+x_3+3x_4=5.\end{cases}$

24. $\begin{cases} 4x_1-2x_2+x_3-4x_4=1,\\ 2x_1-x_2+x_3-x_4=0,\\ 3x_1-x_3+x_4=-2,\\ 2x_1+2x_2-2x_3+5x_4=-3.\end{cases}$

25. $\begin{cases} 2x_1-x_3-2x_4=-1,\\ x_2+2x_3-x_4=2,\\ x_1-x_2-x_4=-1,\\ -x_1+3x_2-2x_3=0.\end{cases}$

26. $\begin{cases} x_1-x_2+4x_3+x_4=10,\\ 2x_1+3x_2+2x_3+3x_4=16,\\ -x_1+3x_2-5x_3+x_4=-4,\\ x_2+3x_3-x_4=4.\end{cases}$

27. $\begin{cases} 2x_1+3x_2+11x_3+5x_4=7,\\ x_1+x_2+5x_3+2x_4=4,\\ 3x_1+2x_2+8x_3+4x_4=5,\\ 3x_1-x_2+x_3+9x_4=20.\end{cases}$

28. $\begin{cases} 2x_1-5x_2+3x_3-x_4=0,\\ 3x_1-7x_2+3x_3-x_4=2,\\ x_1-9x_2+6x_3+7x_4=3,\\ 4x_1-6x_2+3x_3+x_4=6.\end{cases}$

29. $\begin{cases} 2x_1+3x_2+x_3+5x_4=-8,\\ 3x_1+4x_2+6x_3+7x_4=-16,\\ x_1-x_2-3x_3-x_4=6,\\ 2x_1+3x_2+9x_3+2x_4=-4.\end{cases}$

30. $\begin{cases} x_1-5x_2+3x_3-x_4=-16,\\ 3x_1-x_2+3x_3-x_4=-10,\\ x_1-2x_2+6x_4=7,\\ x_2+x_3-3x_4=-5.\end{cases}$

4. Задание 4.

Исследовать систему уравнений и решить ее, если она совместна, методом Гаусса. Найти:

- ее общее решение,
- базисное решение,
- частное решение.

Сделать проверку.

1. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 6x_3 - 4x_4 = 6, \\ 3x_1 - x_2 - 6x_3 - 4x_4 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + 9x_3 + 2x_4 = 6, \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 12. \end{cases}$

2. $\begin{cases} 5x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 2, \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 1, \\ x_1 - 3x_2 - 6x_3 + 5x_4 = 0. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 1, \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 2, \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 3. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 2, \\ 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 2x_4 = 4, \\ 7x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 5x_4 = 7. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 3, \\ 3x_1 + 5x_2 + 9x_3 - 4x_4 = -8, \\ 4x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 14. \end{cases}$

6. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 5, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 6, \\ 6x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 6x_4 = 12. \end{cases}$

7. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 1, \\ 2x_2 + 6x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 2, \\ 4x_1 + 2x_2 + 13x_3 + 10x_4 = 0, \\ 5x_1 + 21x_3 + 13x_4 = -1. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_4 - 4x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases}$

9. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 3. \end{cases}$

10. $\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 - 3x_3 - x_4 = 4, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1, \\ 7x_1 + 2x_2 - 3x_4 = 5, \\ 5x_1 + 4x_2 - 2x_3 + x_4 = 3. \end{cases}$

11. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 = -1, \\ x_1 - x_2 - x_3 = -2, \\ 4x_1 + 5x_2 - 13x_3 = 1. \end{cases}$

12. $\begin{cases} x_1 - x_3 + x_4 = 3, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = 2, \\ 4x_1 + 4x_2 - x_3 + x_4 = 7, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2. \end{cases}$

13. $\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 4x_3 + x_4 = 20, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_2 + x_4 = 11, \\ 2x_1 + 10x_2 + 9x_3 + 7x_4 = 40, \\ x_1 + 7x_2 + 7x_3 + 6x_4 = 29. \end{cases}$

14. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_3 - x_4 = 1, \\ 7x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 5x_4 = 10, \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 3. \end{cases}$

15. $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 4, \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 = 6, \\ 8x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 12, \\ 4x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 6x_4 = 6. \end{cases}$

16. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 20, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 11, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 31, \\ 3x_1 + 8x_2 + 9x_3 + 2x_4 = 37. \end{cases}$

17. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 2, \\ 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 3. \end{cases}$

18. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ -3x_1 + x_2 + x_3 = -1, \\ -2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 2, \\ -3x_1 + 2x_2 + x_4 = 1. \end{cases}$

19. $\begin{cases} x_1 - 5x_2 - x_3 + 3x_4 = -5, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 4, \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -1, \\ 5x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 3. \end{cases}$

20. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 7, \\ x_1 - x_2 + x_3 = -2, \\ -3x_1 + 3x_2 + 12x_4 = 21, \\ -x_1 + x_2 + 4x_4 = 7. \end{cases}$

21. $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 2 \\ 5x_1 - 5x_2 + 6x_3 - 9x_4 = 6 \end{cases}$

22. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = -1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -2 \\ -2x_1 - 3x_2 + x_3 = -1 \\ 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 = -4 \end{cases}$

23. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 2 \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 3 \end{cases}$

24. $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 5 \\ 3x_1 + 8x_2 + 5x_3 = 11 \\ x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$

25. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 9 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 12 \\ -x_1 - x_2 - x_3 = -3 \end{cases}$

26. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 7 \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 - x_4 = 2 \\ 5x_1 + 10x_2 + 7x_3 + 2x_4 = 11 \end{cases}$

27. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ 4x_1 - x_2 + 3x_3 = 6 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6 \end{cases}$

28. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 - 5x_2 + x_3 = 12 \\ 2x_1 + 4x_2 = -6 \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 = 18 \\ x_1 - 5x_2 + x_3 = 12 \end{cases}$

29. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 3 \\ 4x_1 + 7x_2 + x_3 + 5x_4 + 3x_5 = 6 \\ 5x_1 + 9x_2 + 4x_3 + 7x_4 + 5x_5 = 9 \end{cases}$

30. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 5 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 2 \\ 4x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 4 \\ 5x_1 - 2x_2 + x_3 = 7 \end{cases}$

5. Задание 5.

Решить однородную систему линейных уравнений и найти ее фундаментальную систему решений.

1. $\begin{cases} 3x_1+x_2-8x_3+2x_4+x_5=0, \\ 2x_1-2x_2-3x_3-7x_4+2x_5=0, \\ x_1+11x_2-12x_3+34x_4-5x_5=0. \end{cases}$

2. $\begin{cases} 7x_1+2x_2-x_3-2x_4+2x_5=0, \\ x_1-3x_2+x_3-x_4-x_5=0, \\ 2x_1+5x_2+2x_3+x_4+5x_5=0. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x_1+x_2+10x_3+x_4-x_5=0, \\ 5x_1-x_2+8x_3-2x_4+2x_5=0, \\ 3x_1-3x_2-12x_3-4x_4+4x_5=0. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 6x_1-9x_2+21x_3-3x_4-12x_5=0, \\ -4x_1+6x_2-14x_3+2x_4+8x_5=0, \\ 2x_1-3x_2+7x_3-x_4-4x_5=0. \end{cases}$

5. $\begin{cases} 2x_1-x_2+2x_3-x_4+x_5=0, \\ x_1+10x_2-3x_3-2x_4-x_5=0, \\ 4x_1+19x_2-4x_3-5x_4-x_5=0. \end{cases}$

6. $\begin{cases} 5x_1-2x_2+3x_3-4x_4-x_5=0, \\ x_1+4x_2-3x_3+2x_4-5x_5=0, \\ 6x_1+2x_2-2x_4-6x_5=0. \end{cases}$

7. $\begin{cases} 12x_1-x_2+7x_3+11x_4-x_5=0, \\ 24x_1-2x_2+14x_3+22x_4-2x_5=0, \\ x_1+x_2+x_3-x_4+x_5=0. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3+4x_4+x_5=0, \\ 2x_1-x_2+3x_3+x_4-5x_5=0, \\ x_1+3x_2-x_3-6x_4-x_5=0. \end{cases}$

9. $\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3-x_4-x_5=0, \\ x_1+5x_2-x_3+x_4+2x_5=0, \\ x_1+16x_2-6x_3+4x_4+7x_5=0. \end{cases}$

10. $\begin{cases} 3x_1+5x_2+5x_3+x_4-2x_5=0, \\ 3x_1+x_2+2x_3+2x_4+x_5=0, \\ x_1+x_2+2x_3+2x_4-x_5=0. \end{cases}$

11. $\begin{cases} 8x_1+x_2+x_3-x_4+2x_5=0, \\ 3x_1-3x_2-2x_3+x_4-3x_5=0, \\ 5x_1+4x_2+3x_3-2x_4+5x_5=0. \end{cases}$

12. $\begin{cases} x_1+3x_2-x_3+12x_4-x_5=0, \\ 2x_1-2x_2+x_3-10x_4+x_5=0, \\ 3x_1+2x_2+2x_4=0. \end{cases}$

13. $\begin{cases} 7x_1-14x_2+3x_3-x_4+x_5=0, \\ x_1-2x_2+x_3-3x_4+7x_5=0, \\ 5x_1-10x_2+x_3+5x_4-13x_5=0. \end{cases}$

14. $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+x_4-x_5=0, \\ 2x_1-2x_2-5x_3-3x_4+x_5=0, \\ 3x_1-2x_2+3x_3+2x_4-x_5=0. \end{cases}$

15. $\begin{cases} x_1+x_2+x_3-x_4-x_5=0, \\ 2x_1+x_2-2x_3-x_4-2x_5=0, \\ x_1+2x_2+5x_3-2x_4-5x_5=0. \end{cases}$

16. $\begin{cases} 2x_1+x_2-3x_3+x_4-x_5=0, \\ 3x_1-x_2+2x_3-x_4+2x_5=0, \\ x_1-2x_2+5x_3-2x_4+3x_5=0. \end{cases}$

17. $\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3+10x_4-x_5=0, \\ x_1-2x_2+3x_3-10x_4+x_5=0, \\ x_1+6x_2-9x_3+30x_4-3x_5=0. \end{cases}$

18. $\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3+7x_4+5x_5=0, \\ x_1-2x_2+3x_3-5x_4-7x_5=0, \\ 3x_1-x_2+2x_3+2x_4-2x_5=0. \end{cases}$

19. $\begin{cases} 2x_1-2x_2-3x_3-7x_4+2x_5=0, \\ x_1+11x_2-12x_3+34x_4-5x_5=0, \\ x_1-5x_2+2x_3-16x_4+3x_5=0. \end{cases}$

20. $\begin{cases} 3x_1+x_2-8x_3+2x_4+x_5=0, \\ x_1+11x_2-12x_3+34x_4-5x_5=0, \\ x_1-5x_2+2x_3-16x_4+3x_5=0. \end{cases}$

21. $\begin{cases} x_1+3x_2-5x_3+9x_4-x_5=0, \\ 2x_1-2x_2-3x_3-7x_4+2x_5=0, \\ x_1-5x_2+2x_3-16x_4+3x_5=0. \end{cases}$

22. $\begin{cases} 5x_1+2x_2-x_3+3x_4+4x_5=0, \\ 3x_1+x_2-2x_3+3x_4+5x_5=0, \\ 6x_1+3x_2-2x_3+4x_4+7x_5=0. \end{cases}$

23. $\begin{cases} 3x_1+2x_2-2x_3-x_4+4x_5=0, \\ 7x_1+5x_2-3x_3-2x_4+x_5=0, \\ x_1+x_2+x_3-7x_5=0. \end{cases}$

24. $\begin{cases} 6x_1+3x_2-2x_3+4x_4+7x_5=0, \\ 7x_1+4x_2-3x_3+2x_4+4x_5=0, \\ x_1+x_2-x_3+2x_4-3x_5=0. \end{cases}$

25. $\begin{cases} 3x_1-5x_2+2x_3+4x_4=0, \\ 7x_1-4x_2+x_3+3x_4=0, \\ 5x_1+7x_2-4x_3-6x_4=0. \end{cases}$

26. $\begin{cases} x_1+x_2+3x_3-2x_4+3x_5=0, \\ 2x_1+2x_2+4x_3-x_4+3x_5=0, \\ x_1+x_2+5x_3-5x_4+6x_5=0. \end{cases}$

27. $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3-2x_4+x_5=0, \\ x_1+2x_2+7x_3-4x_4+x_5=0, \\ x_1+2x_2+11x_3-6x_4+x_5=0. \end{cases}$

28. $\begin{cases} 6x_1+3x_2+2x_3+3x_4+4x_5=0, \\ 4x_1+2x_2+x_3+2x_4+3x_5=0, \\ 2x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=0. \end{cases}$

29. $\begin{cases} 3x_1+2x_2+4x_3+x_4+2x_5=0, \\ 3x_1+2x_2-2x_3+x_4=0, \\ 3x_1+2x_2+16x_3+x_4+6x_5=0. \end{cases}$

30. $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+2x_4+x_5=0, \\ x_1-2x_2-3x_3+x_4-x_5=0, \\ 2x_1-x_2-2x_3+3x_4=0. \end{cases}$

6. Задание 6.

Даны три вектора $\vec{a}=\{x_1;y_1;z_1\}$, $\vec{b}=\{x_2;y_2;z_2\}$, $\vec{c}=\{x_3;y_3;z_3\}$.

Найти:

- $\vec{b}^{\,0}$;
- $пр_{\vec{b}}\vec{c}$, $пр_x\vec{c}$, $пр_y\vec{c}$, $пр_z\vec{c}$;
- $\cos(\vec{b},\vec{c})$;
- линейно зависимы или линейно независимы вектора $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$;
- площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{b}$ и $\vec{c}$;
- $2\vec{a}-3\vec{b}$.

Сделать рисунок.

№	$\vec{a}$	$\vec{b}$	$\vec{c}$	№	$\vec{a}$	$\vec{b}$	$\vec{c}$
1	{-2;1;4}	{1;2;2}	{-7;-4;2}	16	{3;-2;1}	{3;2;-1}	{-3;-10;5}
2	{-2;3;1}	{2;1;2}	{-10;3;-4}	17	{1;3;-2}	{-1;2;3}	{5;0;-13}
3	{1;-2;3}	{2;2;1}	{-4;-10;3}	18	{4;-2;1}	{3;2;-1}	{-1;-10;5}
4	{4;1;-2}	{1;2;3}	{5;-4;-13}	19	{-2;4;1}	{3;-1;2}	{-13;11;-4}
5	{1;-2;4}	{3;2;-1}	{-7;-10;11}	20	{2;4;-2}	{2;-2;3}	{-2;14;-13}
6	{3;-2;1}	{3;-1;2}	{-3;-1;-4}	21	{-2;2;4}	{2;3;2}	{-10;-5;2}
7	{1;3;-2}	{2;3;-1}	{-4;-3;-1}	22	{-2;3;2}	{2;2;3}	{-10;0;-5}
8	{4;-2;1}	{2;-1;3}	{2;-1;-7}	23	{2;-2;3}	{3;2;1}	{-5;-10;3}
9	{-2;4;1}	{-1;2;3}	{-1;2;-7}	24	{4;2;-2}	{3;2;3}	{-1;-2;-13}
10	{1;4;-2}	{-1;3;-2}	{5;-1;2}	25	{2;-2;4}	{3;2;-2}	{-5;-10;14}
11	{-2;1;4}	{2;1;2}	{-10;-1;2}	26	{3;-2;2}	{3;-3;2}	{-3;5;-2}
12	{-2;3;1}	{2;2;1}	{-10;0;-1}	27	{2;3;-2}	{2;3;-3}	{-2;-3;5}
13	{1;-2;3}	{2;1;2}	{-4;-7;0}	28	{4;-2;2}	{2;-3;3}	{2;5;-5}
14	{4;1;-2}	{2;1;3}	{2;-1;-13}	29	{-2;4;2}	{-3;2;3}	{5;2;-5}
15	{1;-2;4}	{3;-1;2}	{-7;-1;2}	30	{2;4;-2}	{-3;3;-2}	{13;-1;2}

7. Задание 7.

Даны координаты вершин треугольника ABC. Найти:

- уравнение высоты AD,опущенной из вершины A на сторону BC;
- уравнение медианы AE;
- уравнение биссектрисы AM внутреннего угла A;
- точку пересечения медиан треугольника;
- площадь треугольника.

Сделать рисунок

№	A	B	C
1.	(4; -2)	(7; 2)	(10; -10)
2.	(0; 0)	(4; 3)	(8; -6)
3.	(0; 1)	(3; 5)	(-6; 9)
4.	(-2; 2)	(1; 6)	(7; -10)
5.	(1; -1)	(9; 5)	(5; -4)
6.	(0; 0)	(-3; 4)	(6; 8)
7.	(2; -1)	(5; 3)	(-7; 11)
8.	(3; -1)	(11; 5)	(-1; 2)
9.	(0; 2)	(3; 6)	(-6; 10)
10.	(1; -1)	(4; 3)	(2,5;-3)
11.	(2; 1)	(-10; -8)	(-2; 4)
12.	(-1; 2)	(2; 6)	(8; -10)
13.	(3; -2)	(6; 2)	(-3; 6)
14.	(-2; 3)	(1; 7)	(4; -5)
15.	(-1; 2)	(-9; -4)	(2; -2)

№	A	B	C
16.	(1; 0)	(4; 4)	(-8; 12)
17.	(-2; 4)	(1; 8)	(4; -4)
18.	(-2; 2)	(10;- 7)	(1; 6)
19.	(-3; 4)	(0; 8)	(6; -8)
20.	(2; 0)	(5; 4)	(-4; 8)
21.	(0; 2)	(8; 8)	(4; -1)
22.	(3; -1)	(6; 3)	(-3; 7)
23.	(-3; 5)	(0; 9)	(6; -7)
24.	(-3; 4)	(5; -2)	(1; 7)
25.	(-1; 0)	(2; 4)	(5; -8)
26.	(2; -2)	(5; 2)	(14; -11)
27.	(4; 0)	(-4; 6)	(8; 3)
28.	(1; 1)	(4; 5)	(-7; 7)
29.	(-1; 3)	(2; 7)	(0,5; 1)
30.	(0; 3)	(-8; 9)	(4; 6)

8. Задание 8.

Построить множества решений систем линейных неравенств и найти координаты их угловых точек. Проверить, принадлежит ли точка M_0 данному множеству.

1. $\begin{cases} 3x - y + 3 \geq 0 \\ x + y - 5 \geq 0 \\ x - 3 \leq 0 \\ y - 7 \leq 0 \\ x \geq 0, \quad y \geq 0 \end{cases}$ $M_0(2; 5)$

2. $\begin{cases} x - y + 3 \geq 0 \\ 7x + 9y - 63 \leq 0 \\ x - 5 \leq 0 \\ y - 4 \leq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$ $M_0(1; 2)$

3. $\begin{cases} x - y + 2 \geq 0 \\ x - y - 1 \leq 0 \\ 2x + y - 4 \geq 0 \\ x \leq 4 \end{cases}$ $M_0(1; 1)$

4. $\begin{cases} x - 2y - 2 \geq 0 \\ x + y - 3 \geq 0 \\ x - 5 \geq 0 \\ 9x - 10y - 90 \leq 0 \end{cases}$ $M_0(8; 1)$

5. $\begin{cases} 6x + 5y - 30 \geq 0 \\ x - y - 2 \geq 0 \\ x \geq 2 \\ y \leq 5 \end{cases}$ $M_0(4; 4)$

6. $\begin{cases} 4x + y - 4 \geq 0 \\ x - 2y - 2 \leq 0 \\ x \leq 5 \\ y \geq 1 \\ x - y + 2 \geq 0 \end{cases}$ $M_0(4; 6)$

7. $\begin{cases} 4x + 5y - 20 \leq 0 \\ x - 3y - 3 \leq 0 \\ x - 2y + 2 \geq 0 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$ $M_0(3; 1)$

8. $\begin{cases} x + y - 2 \geq 0 \\ x + y - 4 \leq 0 \\ 2x - y \geq 0 \\ x \leq 3 \\ y \geq 0 \end{cases}$ $M_0(2; 1)$

9. $\begin{cases} x + y - 3 \geq 0 \\ x - 2y - 4 \leq 0 \\ x \geq 1 \\ y \geq 0 \end{cases}$ $M_0(7; 1)$

10. $\begin{cases} 2x - y + 2 \geq 0 \\ 2x + 3y - 6 \geq 0 \\ 3x + y - 18 \leq 0 \\ x \geq 1 \\ y \geq 0 \end{cases}$ $M_0(4; 2)$

11. $\begin{cases} x + y - 5 \geq 0 \\ x - 4y + 4 \leq 0 \\ 3x - 2y + 6 \geq 0 \\ y \leq 6 \end{cases}$ $M_0(2; 5)$

12. $\begin{cases} 3x + y - 3 \geq 0 \\ x - y \geq 0 \\ x - 2y - 4 \leq 0 \\ y \geq 0 \\ x \leq 5 \end{cases}$ $M_0(2; 3)$

13. $\begin{cases} 5x - 2y + 10 \geq 0 \\ x - 5y \leq 0 \\ 3x + 2y - 6 \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$ $M_0(1; 2)$

14. $\begin{cases} 3x - y + 3 \geq 0 \\ 3x + y - 3 \geq 0 \\ 5x - 2y - 15 \leq 0 \\ y \leq 5 \\ y \geq 0 \end{cases}$ $M_0(4; 4)$

15. $\begin{cases} 3x - 5y + 15 \geq 0 \\ 2x + 3y - 6 \geq 0 \\ 4x + 3y - 12 \leq 0 \\ y \geq 1, y \leq 4 \end{cases}$ $M_0(7; 3)$

16. $\begin{cases} 4x - 7y + 28 \geq 0 \\ 5x + 6y - 30 \geq 0 \\ 3x - y - 13 \leq 0 \\ y \geq 2 \end{cases}$ $M_0(3; 4)$

17. $\begin{cases} x-y+3\ge 0 \\ x+y-1\le 0 \\ x-4y\le 0 \\ y\ge 1 \\ x\ge 0 \end{cases}$ $M_0(2; 4)$

18. $\begin{cases} x-2y-2\le 0 \\ 2x+3y-6\ge 0 \\ x\le 6 \\ y\le 4 \\ x\ge 0 \end{cases}$ $M_0(5; 1)$

19. $\begin{cases} 4x+9y-36\le 0 \\ x-y-6\le 0 \\ x+2y-2\ge 0 \\ x-y+1\ge 0 \\ y\ge 0 \end{cases}$ $M_0(6; 1)$

20. $\begin{cases} 3x-y\ge 0 \\ x+2y-10\ge 0 \\ 3\le x\le 8 \\ x+4y-40\le 0 \end{cases}$ $M_0(7; 8)$

21. $\begin{cases} 3x-4y+12\ge 0 \\ 5x+4y-40\le 0 \\ x+5y-5\ge 0 \\ x\ge 2 \\ y\ge 0 \end{cases}$ $M_0(6; 4)$

22. $\begin{cases} 2x-7y+21\ge 0 \\ 2x+7y-14\ge 0 \\ 2x-3y-8\le 0 \\ x\ge 0, x\le 7 \end{cases}$ $M_0(1; 2)$

23. $\begin{cases} 4x+y-4\ge 0 \\ 2x-y+2\ge 0 \\ 6x+y-36\le 0 \\ y\ge 0, y\le 6 \end{cases}$ $M_0(5; 2)$

24. $\begin{cases} x+2y-6\ge 0 \\ x-2y+6\ge 0 \\ 4x-y-23\le 0 \\ y\ge 1 \\ y\le 5 \end{cases}$ $M_0(5; 6)$

25. $\begin{cases} 2x-5y+20\ge 0 \\ 3x+8y-24\ge 0 \\ 3x+2y-30\le 0 \\ x\ge 1 \\ y\ge 0 \end{cases}$ $M_0(8; 1)$

26. $\begin{cases} x-y-2\ge 0 \\ x+y-7\ge 0 \\ 3x-y-27\le 0 \\ y\ge 0 \\ x\le 10 \end{cases}$ $M_0(8; 5)$

27. $\begin{cases} x-3y-6\le 0 \\ x-4y+12\ge 0 \\ 3x-y-24\le 0 \\ y\ge 0 \\ x\ge 4 \end{cases}$ $M_0(5; 5)$

28. $\begin{cases} 5x-y+5\ge 0 \\ x-y+1\le 0 \\ x+4y-28\le 0 \\ x\ge 0 \\ x\le 4 \end{cases}$ $M_0(2; 6)$

29. $\begin{cases} 6x+y-6\ge 0 \\ 4x+3y-42\le 0 \\ 2x-5y-8\le 0 \\ x\ge 0 \\ y\ge 0 \\ y\le 7 \end{cases}$ $M_0(7; 3)$

30. $\begin{cases} x-2y-4\le 0 \\ x-2y+4\ge 0 \\ 8x+5y-40\le 0 \\ x\ge 0 \\ y\ge 0 \end{cases}$ $M_0(4; 3)$

9. Задание 9.

В таблице приведены данные об исполнении баланса за отчетный период (усл. ден. ед.).

Вычислить необходимый объем валового выпуска каждой отрасли, если конечный продукт первой отрасли увеличится вдвое, второй отрасли - на 20%, а третьей отрасли сохранится на прежнем уровне.

№	Отрасль	Потребление				Конечный продукт	Валовой выпуск
			1	2	3	Y	X
1	Производство	1	10	5	15	70	100
		2	15	15	10	160	200
		3	5	10	20	265	300
2	Производство	1	20	15	10	55	100
		2	15	10	15	160	200
		3	20	10	5	265	300
3	Производство	1	5	5	20	70	100
		2	15	15	10	160	200
		3	5	5	15	275	300
4	Производство	1	5	15	10	70	100
		2	15	10	15	160	200
		3	20	10	5	265	300
5	Производство	1	5	10	15	70	100
		2	15	15	10	160	200
		3	5	15	15	265	300
6	Производство	1	10	5	15	70	100
		2	15	15	10	160	200
		3	5	10	20	265	300
7	Производство	1	20	15	10	55	100
		2	15	10	15	160	200
		3	20	10	5	265	300
8	Производство	1	5	5	20	70	100
		2	10	15	10	165	200
		3	10	10	5	275	300
9	Производство	1	5	15	10	70	100
		2	10	10	20	160	200
		3	20	10	5	265	300
10	Производство	1	5	10	15	70	100
		2	15	15	10	160	200
		3	10	10	15	265	300
11	Производство	1	10	5	15	70	100
		2	15	15	10	160	200
		3	5	10	20	265	300
12	Производство	1	20	15	10	55	100
		2	15	10	15	160	200
		3	10	20	5	265	300
13	Производство	1	10	10	10	70	100
		2	15	15	10	160	200
		3	10	10	5	275	300

14	Производство	1	15	15	15	55	100
		2	15	10	15	160	200
		3	5	20	10	265	300
15	Производство	1	10	10	10	70	100
		2	15	15	10	160	200
		3	10	15	5	265	300
16	Производство	1	5	15	10	70	100
		2	15	10	15	160	200
		3	10	20	5	265	300
17	Производство	1	10	10	10	70	100
		2	15	15	10	160	200
		3	5	15	15	265	300
18	Производство	1	5	5	15	75	100
		2	15	15	10	160	200
		3	10	10	15	265	300
19	Производство	1	5	15	10	55	100
		2	15	10	15	160	200
		3	20	10	5	265	300
20	Производство	1	5	10	15	70	100
		2	10	15	10	160	200
		3	5	20	15	275	300
21	Производство	1	15	5	15	70	100
		2	15	15	10	160	200
		3	5	10	20	265	300
22	Производство	1	20	15	10	70	100
		2	15	10	15	165	200
		3	20	10	5	260	300
23	Производство	1	5	5	20	65	100
		2	15	15	10	160	200
		3	15	5	15	265	300
24	Производство	1	5	15	10	55	100
		2	15	10	15	160	200
		3	20	10	5	265	300
25	Производство	1	15	10	20	70	100
		2	15	15	10	160	200
		3	15	5	15	265	300
26	Производство	1	5	15	10	70	100
		2	15	10	15	160	200
		3	20	10	5	265	300
27	Производство	1	10	15	10	55	100
		2	20	10	15	160	200
		3	20	10	5	265	300
28	Производство	1	10	5	20	65	100
		2	15	15	10	155	200
		3	25	5	15	265	300
29	Производство	1	15	15	10	65	100
		2	5	10	15	160	200
		3	20	10	5	255	300
30	Производство	1	15	10	20	60	100
		2	5	15	10	170	200
		3	10	10	15	265	300

10. Задание 10.

Найти национальные доходы стран S_1, S_2, S_3 для сбалансированной торговли, если структурная матрица A торговли этих стран имеет вид:

1. $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

5. $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

6. $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

7. $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$

8. $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$

9. $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$

10. $\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

11. $\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

12. $\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$

13. $\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

14. $\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

15. $\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

16. $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$

17. $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

18. $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

19. $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ 20. $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$ 21. $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

22. $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ 23. $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ 24. $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

25. $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{5} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{5} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{3}{5} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ 26. $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{5} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{5} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{5} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ 27. $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{3}{5} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{5} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{5} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

28. $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{5} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{5} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{3}{5} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ 29. $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{5} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{1} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{5} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$ 30. $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{3}{5} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{5} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{5} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

11. Задание 11. Задачи № 1- 30 (дополнительная задача)

Выполнить действия над матрицами.

1. 2(A+B)(2B-A),

где A=$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$

2. 3A-(A+2B)B,

где A=$\begin{pmatrix} 4 & 5 & -2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 5 & 7 & 3 \end{pmatrix}$.

3. 2(A-B)(A^2+B),

где A=$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 7 \\ -10 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 7 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

4. (A^2-B^2)(A+B),

где A=$\begin{pmatrix} 7 & 2 & 0 \\ -7 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

5. $(A-B^2)(2A+B)$,

где $A=\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 10 & 4 & 1 \\ 7 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 6 & -1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

6. $(A-B)A+2B$,

где $A=\begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 7 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

7. $2(A-0{,}5B)AB$,

где $A=\begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 5 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 16 \\ -3 & -2 & 0 \\ 5 & 7 & 2 \end{pmatrix}$.

8. $(A-B)A+3B$,

где $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.

9. $(A^2+B)B$,

где $A=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & 6 & -2 \\ 4 & 10 & 1 \\ 2 & 4 & -5 \end{pmatrix}$.

10. $3(A^2-B^2)-2AB$,

где $A=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 5 & -7 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

11. $(2A-B)(3A+B)-2AB$,

где $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 7 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

12. $A(A^2-B^2)-2AB$,

где $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 7 & 13 \\ -1 & 0 & 5 \\ 5 & 13 & 21 \end{pmatrix}$.

13. $(A+B)A-B(2AB+3B)$,

где $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & 11 & 3 \\ 1 & 6 & 1 \\ 2 & 2 & 16 \end{pmatrix}$.

14. $A(2A+B)-B(A-B)$,

где $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 2 & 7 & 3 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

15. $3(A+B)(AB-2A)$,

где $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 22 & -14 & 3 \\ 6 & -7 & 0 \\ 11 & 3 & 15 \end{pmatrix}$.

16. $2AB-(A+B)(A-B)$,

где $A=\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & -2 & 6 \\ 2 & 4 & 3 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.

17. $2A+3B(AB-2A)$,

где $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

18. $(A-B)(A+B)-2AB$,

где $A=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ -1 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

19. $2A-AB(B-A)+B$,

где $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 5 & 7 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

20. $A^2-(A+B)(A-3B)$,

где $A=\begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ -1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

21. B(A+2B)-3AB,

где A=$\begin{pmatrix} 7 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

22. 3(A+B)-(A-B)A,

где A=$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

23. A(A-B)+2B(A+B),

где A=$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

24. (2A+B)B-0,5A,

где A=$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

25. AB-2(A+B)A,

где A=$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

26. (A+2B)(3A-B),

где A=$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

27. 2AB+A(B-A),

где A=$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

28. (3A+0,5B)(2B-A),

где A=$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

29. 2A(A+B)-3AB,

где A=$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

30. 3AB+(A-B)(A+2B),

где A=$\begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Основная литература

1. Кремер Н.Ш. Линейная алгебра: учебник и практикум / Н.Ш. Кремер, М.Н. Фридман; под ред. Н. Ш. Кремера. – М.: Юрайт, 2014. – 307 с.
2. Кремер Н.Ш. Математический анализ: учебник и практикум / Н.Ш. Кремер, Б.А. Путко, И.М. Тришин / под ред. Г.Ш. Кремера. – М.: Юрайт, 2014. – 620 с.
3. Высшая математика для экономического бакалавриата: учебник и практикум / под ред. Н.Ш. Кремера. – М.: Юрайт, 2012. – 909 с.
4. Орел О.Е. Математический анализ: учеб.пособие. Ч.1. Введение в анализ: учеб.пособие / под ред. В.Б. Гисина, Е.Н. Орла. – М.: Фин. ун-т, 2013.
5. Гончаренко В.М. Ряды. Дифференциальные уравнения: учеб.пособие для бакалавров. Ч. 5-6/под ред. В.Б. Гисина, Е.Н. Орла. - М.:Фин. ун-т, 2013. – 116 с.
6. Ягодовский П.В. Функции нескольких переменных: учеб.пособие для бакалавров. Ч. 4 /под ред. В.Б. Гисина, Е.Н. Орла. - М.:Фин. ун-т, 2013. – 116 с.

Дополнительная литература

7. Кремер Н.Ш. Математика для экономистов: от Арифметики до Эконометрики: учеб.-справ. пособие для бакалавров /под ред. Н.Ш. Кремера. - 3-е изд., перераб. и доп.– М.: Юрайт, 2012.с.
8. Калачев Н.В. Линейные и евклидовы пространства: учеб.пособие для бакалавров. Ч. 1/под ред. В.Б. Гисина, С.В. Пчелинцева. - М.:Фин. ун-т, 2013. - 124 с.
9. Тищенко А.В. Элементы аналитической геометрии: учеб. пособие для бакалавров.Ч. 3 / под ред. В.Б. Гисина, С.В. Пчелинцева. - М.:Фин. ун-т, 2013. - 100 с. - (Линейная алгебра).