Всероссийская олимпиада школьников «Миссия выполнима. Твоё призвание – финансист!» Предмет: «Математика»

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ	Проверяющий

ОЧНЫЙ ЭТАП

8-9 класс

Вариант 1

Работа рассчитана на 240 минут, она содержит 8 заданий. Решать и оформлять решения заданий можно в любом порядке. Численные ответы не округлять.

1. (10 баллов) Состоятельный Крот сообщил Дюймовочке, что если разделить ее рост в сантиметрах пополам и найденное число уменьшить на 20%, то получится ее рост в дюймах. Дюймовочка решила, что если ее рост в дюймах умножить на 2 и увеличить найденное число на 20%, то получится ее рост в сантиметрах. Крот указал на ошибку и назвал число, равное количеству процентов, на которые следует увеличить удвоенный рост Дюймовочки в дюймах чтобы получить верный рост в сантиметрах. Какое число назвал Крот? На сколько процентов от верного значения ошиблась Дюймовочка?
2. (10 баллов) Натуральное число n является произведением $2k$ простых чисел $p_1, p_2, \dots, p_{2k}$ в некоторых степенях, больших нуля. Может ли $\frac{n}{p_1} - \frac{n}{p_2} + \dots - \frac{n}{p_{2k}} = 0$?
3. (12 баллов) Четырехугольник $ABCD$ ($AB > BC$) вписан в окружность Ω. Известно, что $AD = CD$. Пусть биссектриса угла ADB пересекает AC в точке M, а AB – в точке N. Докажите, что треугольник MAN равнобедренный.
4. (12 баллов) Дан треугольник ABC с прямым углом C. Докажите, что можно построить три квадрата с центрами в точках A, B и C такие, что какие бы два из них не выбрали, существуют две прямые, на каждой из которых лежит по одной стороне каждого выбранного квадрата.
5. (12 баллов) Докажите, что для любого натурального n существует натуральное число, которое больше своей суммы цифр в $\underbrace{11 \dots 11}_{n}$ раз.
6. (14 баллов) На продолжении биссектрисы CL треугольника ABC за точку L взята точка M, так что $LM = AC$, $CM = BC$. Докажите, что BM меньше периметра треугольника ACL.
7. (14 баллов) Зрители называют фокуснику натуральное число $n > 2$. Затем Фокусник пишет на доске натуральное число $k > n$. После чего зрители пишут следующие n последовательных чисел $k + 1, k + 2, \dots, k + n$. Далее Фокусник стирает с доски одно из чисел так, что все оставшиеся числа являются составными. Как он это делает?

8. (16 баллов) Даны положительные числа $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$ с суммой 1. Положительные числа $b_1, b_2, \ldots, b_{100}$ таковы, что все выражения $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \ldots, \frac{a_{100}}{b_{100}}$ меньше 1000. Докажите, что и сумма $\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \cdots + \frac{a_{100}^2}{b_{100}}$ тоже меньше 1000.