**10 класс. Вариант 1**

**Задание 1 (10 баллов)**

В очереди стояло $n$ людей, каждый из них получил талон со своим номером в очереди (от 1 до $n$). Гриша влез внутрь очереди без талона. Он сразу заметил несколько фактов:

1. Человек с талоном номер 100 стоял сзади.
2. Спереди от Гриши количество людей на 23 больше, чем сзади.
3. Общее количество цифр на талонах у людей спереди на 25% больше, чем общее количество цифр на талонах у людей сзади Гриши.

После этого Гришу заметили и отправили в самый конец очереди. За это время кроме Гриши в очереди люди не уходили и никак не менялись. Сколько людей было в очереди перед приходом Гриши?

**Ответ: 111.**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Содержание критерия | Оценка | Баллы |
| Задача решена полностью | **+** | 10 |
| Получен верный ответ, но обоснование неполное (например, составлено верное уравнение, но не указано, на основе чего это сделано) | **±** | 6-9 |
| При верном ходе решения допущены арифметические ошибки, верный ответ не найден | $$\mp $$ | 3-6 |
| Имеется продвижение в решении задачи | $$⨪$$ | 1-2 |
| Решение отсутствует или содержит существенные ошибки | **–** | 0 |

**Задание 2 (10 баллов)**

Найдите все такие пары натуральных чисел (*a*; *b*), для которых

4 НОК(*a*, *b*) + НОД(*a*, *b*) = (*a* + *b*)2 + 1.

**Ответ. (1; 1).**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Содержание критерия | Оценка | Баллы |
| Задача решена полностью | **+** | 10 |
| Получен верный ответ, но доказательство отсутствия пар, отличных от (1,1), не приведено или содержит существенные пробелы | **±** | 3 |
| Решение отсутствует или содержит существенные ошибки | **–** | 0 |

**Задание 3 (12 баллов)**

Дана квадратная таблица 50×50. В каждой её клетке стоит либо единица, либо ноль, причём сумма всех чисел в таблице равна 1250. Докажите, что или в каких-то двух строках, или в каких-то двух столбцах одинаковая сумма чисел.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Содержание критерия | Оценка | Баллы |
| Задача решена полностью | **+** | 10 |
| Доказательство содержит пробелы (например, доказано, что имеется строка и/или столбец из нулей, но противоречие не найден)  | **±** | 6 |
| Доказательство отсутствует или содержит существенные ошибки | **–** | 0 |

**Задание 4 (12 баллов)**

В треугольнике *ABC* проведены биссектриса *AA*1 и высота *BB*1. Доказать, что если ∠*AA*1*B* = 45◦, то окружность, описанная около треугольника *A*1*B*1*C*, касается прямой *AA*1.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Содержание критерия | Оценка | Баллы |
| Задача решена полностью | **+** | 12 |
| Доказательство содержит пробелы | **±** | 6 |
| Доказательство отсутствует или содержит существенные ошибки | **–** | 0 |

**Задание 5 (12 баллов)**

Функция, принимающая только неотрицательные значения, удовлетворяет равенству: $f\left(x+y\right)=\sqrt{f^{2}\left(x\right)+f^{2}(y)}$,

при этом $f\left(1\right)+f\left(4\right)=9$. Найдите $f(2^{2023})$*.*

**Ответ:** $(\sqrt{2}) ^{2023}∙3$.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Содержание критерия | Оценка | Баллы |
| Задача решена полностью, получен верный ответ | **+** | 12 |
| Найдено значение $f(1)$, получено соотношение $f (2n) = \sqrt{2}f(n)$, но при вычислении ответа допущены ошибки | **±** | 8 |
| Найдено значение $f(1)$ или получено соотношение $f (2n) = \sqrt{2}f(n)$, но ответ не найден | $$\mp $$ | 2 |
| Решение отсутствует или содержит существенные ошибки | **–** | 0 |

**Задание 6 (14 баллов)**

Найдите *a, b, c*, удовлетворяющие системе уравнений

$$\left\{\begin{array}{c}a^{3}+b^{3}+3abc=c^{3},\\\left(3a+3b\right)^{2}=c^{3},\\a^{2}-ab+b^{2}=c^{2}.\end{array}\right.$$

**Ответ:** $(0;0;0)$, $(9;0;9)$, $(0;9;9)$, $(-36;-36;36)$

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Содержание критерия | Оценка | Баллы |
| Задача решена полностью, получен верный ответ | **+** | 14 |
| Ход решения верный, но одно из решений потеряно | **±** | 8 |
| Найдено лишь одно из возможных решений  | $$\mp $$ | 2 |
| Решение отсутствует или содержит существенные ошибки | **–** | 0 |

**Задание 7 (14 баллов)**

Дано 10 различных натуральных чисел. На доску выписали все эти числа и все возможные произведения, составленные из этих чисел (все произведения 2 чисел, все произведения 3 чисел, ..., произведение 10 чисел). Какое наименьшее количество различных значений могло оказаться на доске?

**Ответ: 46.**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Содержание критерия | Оценка | Баллы |
| Задача решена полностью, получен верный ответ | **+** | 14 |
| Ответ найден, приведен пример (степени 2), соответствующий числу 46, но не доказано, что число 46 является наименьшим, удовлетворяющим условиям задачи | **±** | 6 |
| Имеется продвижение в решении задачи  | $$\mp $$ | 2 |
| Решение отсутствует или содержит существенные ошибки | **–** | 0 |

**Задача 8 (16 баллов)**

Заяц и Волк играют в игру на клетчатой доске 10×10. Сначала Волк ставит фишку на одну из клеток. Далее, начиная с Зайца, игроки по очереди передвигают фишку. Заяц всегда передвигает фишку на 1 клетку по диагонали, а Волк на одну клетку по горизонтали или вертикали, причём нельзя ставить фишку на клетку, на которой фишка уже была. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?

**Ответ:** Заяц.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Содержание критерия | Оценка | Баллы |
| Указана и обоснована выигрышная стратегия для Зайца | **+** | 16 |
| Приведен пример верной стратегии при том, что фиксирован конкретный ход Волка | **±** | 8 |
| Решение отсутствует или содержит существенные ошибки | **–** | 0 |