Оценочный бланк олимпиадных заданий по математике

Код участника: 440100

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8
Полученные баллы	10	10	12	12	12	14	14.	8
Сумма баллов (оценка)	92.							

Члены жюри:

Подпись

Решкин В.Г.

Фамилия И.О.

Подпись

Гребенщиков Ю.Б.

Фамилия И.О.

Подпись

Фамилия И.О.

Всероссийская олимпиада школьников «Миссия выполнима. Твое призвание-финансист!»

ПО МАТЕМАТИКЕ 8-9 классы

Заключительный (очный) этап 2016/2017 учебный год

440100

Код участника

Вариант I

Задание 1. (10 баллов)

Каждый из 2017 учащихся средней школы изучает английский или немецкий язык. Английский язык изучают от 70% до 85% от общего числа учащихся, а оба языка изучают от 5% до 8%. Какое наибольшее число школьников может изучать немецкий язык.

Задание 2. (10 баллов)

Иван-царевич сражается с Змеем Горынычем на Калиновом мосту. У Змея 198 голов. Одним взмахом меча Иван-царевич может отрубить пять голов, но после этого у Змея моментально отрастают новые головы в количестве, равном остатку при делении на 9 от числа оставшихся после удара Ивана-царевича голов. Если число оставшихся голов делится на 9, то новые головы не вырастают. Если голов перед взмахом у Змея Горыныча было пять или меньшее, то Иван царевич одним взмахом убивает поганого Змея. Сколько взмахов мечом должен сделать Иван-царевич, чтобы победить Змея Горыныча?

Задание 3. (12 баллов)

Найдите все пары (a, b) действительных чисел a и b таких, что уравнения $x^2 + ax + b^2 = 0$ и $x^2 + bx + a^2 = 0$ имеют хотя бы один общих корень.

Задание 4. (12 баллов)

Найдите наименьшее положительное целое число, в котором произведение цифр равно 5120.

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМАЮ, ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ-ФИНАНСИСТ!»

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ 440100

№1 Немецкий язык изучает наибольшее кол-во школьников, когда английский изучает наименьшее кол-во и наиб. возможное кол-во изучает оба языка т.к. при увеличении изуч. англ. ум. кол-во из. немецкий т.к. общее кол-во постоянно, а при ум. кол-ва людей изучающих 2 языка уменьшается кол-во англичан изучающий немецкий.

подставим

найдем кол-во изуч. англ. яз =

2017·0,7 с окр. в большую ст. т.к. меньше невозможно

по условию 2017·0,7 ≈ 1412

наиб. кол-во изучающих 2 языка = 2017·0,08 с окр. в меньшую сторону т.к. меньше нельзя.

20,17·8 = 161,36

наиб кол-во из. не немецкий =

2017 − (1412 − 161) = 2017 − 1412 + 161 = 605 + 161 = 766

Ответ: 766

№2 Раз во сколько-то отрубаний у нас будут повторяться остатки от деления на 9

найдем сколько надо отрубаний

будем выписывать ~~числа~~ ~~пока~~ t обозн. кол-во голов пока не повторится остаток от дел. на 9

Запрещается делать пометки, раскрывающие авторство работы

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ 440100

$a^2 \geq 4b^2 \quad b^2 \geq 4a^2$

$\Downarrow$

$a^2 \geq 16a^2 \quad b^2 \geq 16b^2$

$a^2 = 0 \qquad b^2 = 0$

иначе

$a^2 < 16a^2$ и $b^2 < 16b^2$

из этого следует $a=0$ и $b=0$

единственная пара

⊕

проверяем $x^2=0 \quad x^2=0$

$x=0 \quad x=0$

корни совпадают!

т.к. при $a=b$

уравнения одинаковые.

Ответ: $a=0, b=0$

N4 разложим 5120 на множители

5120	2
2560	2
1280	2
640	2
320	8
40	8
5	5
1	

1) Кол-во ~~чисел~~ цифр не меньше 5

иначе такое невозможно

т.к. $5120 = 2^{10} \cdot 5$

если $2 \cdot 5$ пол. >9 это не цифра

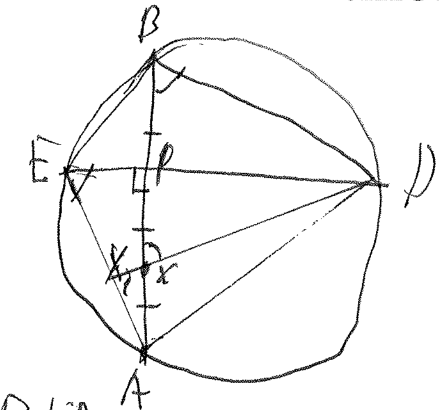
у нас точно есть 5

2^{10} искл. минимум на 4 цифры $5 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 2$

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

440100

№6



т.к. BEAD вписан в ~~окр~~ окружность

по св-ву $\angle ABD = \angle DEA$

проведём через (·)X середину [PA] [DX_1]

расм. $\triangle BDX$ DP высота и медиана

$\triangle BDX$ равноб. $\Rightarrow BD = DX$

$\angle DBP = \angle DXP$

⊕ $\angle PXX_1 = 180 - \angle DXP = 180 - \angle DBP = 180 - \angle PEX_1$

$\angle PEX_1 + \angle PXX_1 = 180°$

~~по признак~~ по сумме ∠ в четырёхуг.

$\angle EPX + \angle XX_1E = 180° = 360° - 180°$

$\angle EX_1X = 180° - 90° = 90°$

DX_1 – высота $\triangle EDA$ и AP высота $\triangle EDA$

(·)X – ~~середина~~ точка перес. высот.

Доказано.

Задание 5. (12 баллов)

Ася учиться писать и умеет писать три буквы А, С и Я. Мама предложила ей написать семь букв подряд. В полученном «слове» три подряд идущих буквы образовали имя «АСЯ». Сколько существует таких различных семибуквенных «слов»?

Задание 6. (14 баллов)

На хорде AB окружности отмечена точка P так, что $AP=2PB$. Хорда DE перпендикулярна AB и проходит через точку P. Докажите, что середина отрезка AP является точкой пересечения высот треугольника AED.

Задание 7. (14 баллов)

В некоторой компании ни у каких двух сотрудников нет работы одинаковой сложности, и никакие двое не получают одинаковую зарплату. 1 апреля каждый сотрудник сделал два утверждения:

(а) Не найдется 12 сотрудников с более сложной работой.

(б) По меньшей мере 30 сотрудников имеют большую зарплату.

Сколько сотрудников в компании, если часть сотрудников дважды сказали правду, а остальные дважды солгали.

Задание 8. (16 баллов)

В классе 14 девочек. Каждая из них узнала, скольких девочек в классе зовут также как ее, и у скольких такая же фамилия, и выписала два числа на доску. Оказалось, что среди чисел на доске встречаются все числа от 0 до 6. Докажите, что найдутся две девочки в классе, у которых совпадают и имя, и фамилия.

N7 в пункте (а) не более 12 сказали правду ~~правду~~.

~~если сотрудники есть~~ рассм. варианты кол-ва работников пусть кол-во работников $= k$

в.1 $31 > k \geq 1$

в пункте (б) все соврали, а в пункте (а) как минимум 1 сказал правду.

в 2. $k \geq 31$

в пункте (а) 12 сказали правду а в пункте (б) $k-30$

$k-30=12$

$k=42$

⊕

Ответ: 42 в компании ~~42~~ сотрудника.

N8 II кол-во фамилий ~~или~~ имён = нечет. число ≠ 1

предположим что есть 7 одинак. имён и 6 одинак. имён, есть девочка у которой нет. имя.

у нас есть 3 имени и точно есть 4 одинак. фамилий $\Rightarrow$ будет 2 девочки с совп. именем и фамилией

теперь предположим что есть 7 совп. фамилий и 6 совп. фамилий аналогично прошлому.

предположим что 7 совп. имён и 6 сов. фамилий и нет девочки с таким именем и такой фамилией

т.к. если есть то не надо док.

~~которая цифра k встр. $k+1$ раз. т.к. предположим что это не так $\Rightarrow$ сумма всех написанных~~

нет полного перебора возможн.

если дальше не совп. один. имя и фамилия

иначе где-то совпадает. т.к. нез. ост. 2 имя 1 для имени и фамилии

нету цифры 3

где-то совпадает имя и фамилия

$\frac{+}{2}$

при 7 совп. фамилий и 6 совп. имён док. как в прошлом пункте $\Rightarrow$ Всегда будет 2 дев с совп. именем и фамилией

наименьшее число ~~ко~~ когда
самая первая (левая) цифра мин.
это минимум 2
2ая цифра не 2 и не 4 т.к. тогда
цифра ≥ 5
⇓
это 5
остальные могут быть только восьмерки

число = 25888

$2\cdot8\cdot8\cdot8\cdot5 = 2^{10}\cdot5 = 1024\cdot5 = 5120$ ⊕

Ответ: число = 25888

№5 для каждого распол. слова имя в слове
есть 3^4 расположений других букв.
(для каждого места по 3 вар.) этих мест 5 (сам слово либо начала от I до V поз. иначе не уп. все имя)
некоторые варианты ~~ны~~ мы ~~со~~ посчитали 2 раза
(те где АСЯ 2 раза не 5 т.к. 2 имени не включают
части друг друга ⇒ имён $\leq \frac{7}{3}$
расп. их возможные расп. за Х обозн. другую букву
(любую из А, С, Я)

АСЯАСЯх АСЯхАСЯ ⊕
хАСЯАСЯ

т.к. одна буква х и 2 имени она либо до
либо после либо между
⇓
3 расстановка для каждой 3 варианта х
⇓
посчитано 2 раза 9 ~~вa~~ расстановок.

⇓
от всего 3^4 $5\cdot3^4-9 = 5\cdot81-9 = 405-9 = \cancel{390}\,396$

I II III IV V VI VII

198 (193+4) (192+3) (190+1) (186+6) (187+7) 189+0

остаток повторяется у I и VII чисел.

повторяется каждые 6 отрубаний

и уменьшается ровно на 9

хотя и кол-во голов не всегда уменьшается

нам это не нужно т.к. максимальное уменьшение

в этой группе (первое-наше число) у последнего

~~и до увел. будем рассматривать только в том~~

~~случае если уйдём в минус.~~

~~на $198 : 9 =$~~

~~кол-во отрубаний $= 198:9\cdot6=22\cdot6=132$~~

~~Ответ: надо 132 взмах~~

т.к. добавление голов меньше 9

можно рассмотреть только последние 9 голов

а на них надо $189 : 9 \cdot 6 = \cancel{120}$ 126 взмахов

⊕

I II III IV V

9 8 6 2 убит.

надо ещё 4 удара всего надо $126+4=130$

Ответ: всего надо 130 взмахов.

№3 рассмотрим дискриминанты

у $x^2+ax+b^2=0$ $\quad d=a^2-4b^2$

а у $x^2+bx+a^2=0$ $\quad d=b^2-4a^2$

$a^2\geq0$ и $b^2\geq0$

Из первого следует что если корни есть то $a^2\geq4b^2$ а из второго если корни есть что $b^2\geq4a^2$

Оценочный бланк олимпиадных заданий по математике

Код участника: 860664

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8
Полученные баллы	10	10	12	12	12	14	14	14
Сумма баллов (оценка)	100.							

Члены жюри:

Подпись	Фамилия И.О.
[подпись]	Фешин В.Т.
[подпись]	Малвакин Е.В.
[подпись]	Кочерова А.С.

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМАЮ, ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ-ФИНАНСИСТ!»

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ Хаз 8 60 6 6 4

Задание №1

Английский язык изучают от 75% до 85% от 2017 чел => Английский язык изучают от 1513 до 1714 учеников. Оба языка изучают от 202 до 302 чел.
Пусть английский язык изучают a чел, французский f, оба b, тогда
$2017 = a + f - b \Rightarrow f = 2017 - a + b \leq 2017 - 1513 + 302 = 2017 - 1513 + 302 = 806$ чел.
$f \leq 806$ чел => французский язык изучают не более 806 чел
Ответ: 806 чел
Пример:
$a = 1513$
$b = 302$
$f = 806$

+

Задание №2
Рассмотрим первые 10 ударов Ивана-царевича.
0. 187
I. $187 - 6 + 5 = 186$
II. $186 - 6 + 4 = 184$
III. $184 - 6 + 2 = 180$
IV. $180 - 6 + 9 = 183$
V. $183 - 6 + 1 = 178$
VI. $178 - 6 + 7 = 179$
VII. $179 - 6 + 8 = 181$
VIII. $181 - 6 + 10 = 185$
IX. $185 - 6 + 3 = 182$
X. $182 - 6 + 0 = 176$

+

$187 \equiv 176 \pmod{11}$ => когда мы будем отнимать 6 остатки при делении на 11 никак не будут => уменьшаться каждый раз будет на одно и то же число (к примеру в XI и I) ил XV и Г)
еще через 10 ударов кол-во голов уменьшиться на 11 и т.д. => через 16.. ударов у Змея Горыныча

Запрещается делать пометки, раскрывающие авторство работы

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМАЮ, ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ-ФИНАНСИСТ!»

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ Х860664

Останеться 4 головы => 184 ударом Иван-царевич победит Змея

Ответ: 184 взмах.

Задание №3.

$x^2+ax+b^2=0$ и $x^2+bx+a^2=0$

Если у них есть хотя бы 1 общий корень то дискриминант обоих ур-й неотр. =>

$$\begin{cases} x^2+ax+b^2=0 \\ D\geq 0 \Rightarrow a^2-4b^2\geq 0 \Rightarrow a^2\geq 4b^2 \\ x^2+bx+a^2=0 \\ D\geq 0 \Rightarrow b^2-4a^2\geq 0 \Rightarrow b^2\geq 4a^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2\geq 4b^2 \\ b^2\geq 4a^2 \end{cases} +$$

$$\begin{cases} a^2+b^2\geq 4a^2+4b^2 \\ 0\geq 3a^2+3b^2 \end{cases} \quad 3a^2\geq 0;\ 3b^2\geq 0 \Rightarrow \begin{cases} 3a^2=0 \\ 3b^2=0 \end{cases} \Rightarrow a=b=0$$

Ответ:
$a=b=0$

(+)

Проверка:

$\begin{cases} x^2=0 \\ x^2=0 \end{cases}$ $x_1=0$ - общий корень

Задание №4

Ответ: 26999 $(2\cdot 6\cdot 9\cdot 9\cdot 9=8748)$

~~Сумма~~ Решение: $8748=9^3\cdot 12$ => среди чисел искомого числа нет 0, 5, 7, 8 => оно состоит из 1, 2, 3, 4, 6, 9

Предположим, что искомое число 4-х значное => имеет не меньше 4-х цифр => произведение его цифр не более $9^4=6561$, но $8748>6561$ => искомое число имеет не меньше 5 цифр. Пусть есть число меньшее 26999 произведение цифр которого равно 8748 => предположим что оно начин. с 1 => произведение его цифр не более $9^4=6561<8748$. противоречие => оно начинается с 2, иначе оно больше 26999

Запрещается делать пометки, раскрывающие авторство работы

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМАЮ, ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ-ФИНАНСИСТ!»

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ Хал 860664

Задание №4 (продолжение)

Значит произведение его последних 4-х цифр $4374 = 6\cdot9\cdot9\cdot9$. Если среди них есть 1, то произведение этих 4-х цифр не более $729 < 4374$. Если среди них есть число 2, то произведение этих 4-х цифр не более $1458 < 4374$. Если среди них есть число 3, то произведение не более $2187 < 4374$. Если есть 4, то произведение всех цифр 4, но $4374 \vdots 4$ ⇒ последние 4 цифры могут быть 6 или 9. Если все 9, то произведение $6561 > 4374$. Если все 6, то произведение $1296 < 4374$. Если 2 — „6" и 2 — „9", то произведение $2916 < 4374$. Если 3 — „6" и 1 — „9", то произведение $1944 < 4374$ ⇒ может быть только 1 — „6" и 3 — „9" ⇒ наименьшее 4-х знач. число, начин. с 2, состоящее из 2, 6, 9, 9, 9 — 26999

Задание №5

Обозначим слово „ВАНЯ" за X, т.е. в слове будет участвовать 6 букв, одна из которых X, а другие В, А, Н и Я.

Тогда X можно поставить на 6 мест, а на других местах можно поставить 4 буквы ⇒ число вариантов $6\cdot4^5$, но мы посчитали слова, в которых слово ВАНЯ встречается 2-ды, дважды, т.к. слово XВВАНЯ и ВАНЯВX — одно и тоже. Значит, нужно посчитать кол-во способов составить слово из 9 букв с двумя ВАНЯ. Эти слова бывают 3-х видов.

_ ВАНЯ ВАНЯ — из 4 слова

ВАНЯ _ ВАНЯ — 4 слова (т.к. на место пропуска буквы можно поставить одну из 4 букв)

ВАНЯ ВАНЯ _ — 4 слова

Значит, всего таких способов $6\cdot4^5 - 12 = 6(4^5 - 2) = 6(1024 - 2) = 6\cdot1022 = 6132$

Ответ: 6132

~~Примечание: ...~~

Запрещается делать пометки, раскрывающие авторство работы

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМАЮ, ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ-ФИНАНСИСТ!»

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ 860664

Задание №6

~~Дано~~
Дано.

ω_1

AB – хорда

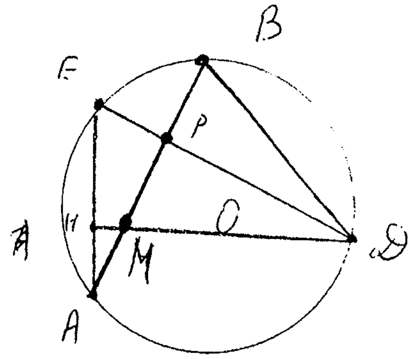
$P \in AB$, $AP = 2PB$

$ED \perp AB$

$ED \cap AB = P$

M – сер. AP

Док-ть:



M – точка пересечения высот $\triangle AED$

Док-во.

Мы знаем, что 3 высоты треугольника пересек в 1 точке => если мы докажем, что через M проходит высота, опущ из A и из D, мы докажем, что M – точка пересеч. высот.

$AP \perp ED$ => AB – высота.

$BP = \frac{1}{2} AP = PM$, $PD \perp MB$ => DP – высота и медиана => $\triangle MDB$ – равнобедр. => DP – биссектр, т.к DP – медиана => ($\angle PBD = 90° - \angle PDB$). $\angle PDM = \angle BDP$ => $\angle PBD = 90° - \angle PDM$. $\angle AED = \angle ABD$, т.к это впис. углы, опирающиеся на дугу AD => Пусть $DM \cap AE = H$ $\angle AED = 90° - \angle PDM$ => $\angle EHD = 180°$. $\angle HED - \angle EDH = 90°$ => DH – высота => т.к $M \in AP$, DH и AP и HD – высоты => M – точка пересечения высот.

Задание №7.

Пусть ~~p~~ p работников сказали правду, а l – солгали. Во-первых, докажем, что p и $l \geq 1$. Пусть это не так, тогда рассмотрим ~~сотрудника~~ сотрудника с самой низкой работой, он скажет правду (~~10~~ 3 утв) => $p \geq 1$. Теперь рассмотрим сотрудника с самой большой зарплатой, он солгал (~~1~~ 3 утв.) => $l \geq 1$.

Запрещается делать пометки, раскрывающие авторство работы

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМАЮ, ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ-ФИНАНСИСТ!»

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

хсаиз 860664

Задача №7 (продолжение)

1) Рассмотрим сотрудника, сказавшего правду, с самой легкой работой. Из утв. а следует, что $p \leq$ ~~13 (следовательно)~~ его колег, сказавших правду не более 12 => $p \leq 13$

Теперь рассмотрим сотрудника, сказавшего ложь, с самой трудной работой. По утв а ложь, что есть не менее 13 сотрудников с более трудной работой. Среди людей, сказавших ~~ложь~~, нет с более трудной работой => все с более трудной работой сказали правду => $p \geq 13$ (и $p \leq 13$) => $p = 13$

2) Рассмотрим сотрудника, сказавшего правду, с наибольшей зарплатой. Из утв б следует, что $L \geq 20$, т.к среди сказавших правду нет с большей зарплатой.

Рассмотрим сотрудника, солгавшего с наименьшей зарплатой, из утв б следует, что $L \leq 19+1$, т.к меньше 20 сотрудников с большей зарплатой, а у него наим. зарплата, среди солгавших, то все солгавшие больше зарабатывают => всего $L \leq 20$ $(L \geq 20)$ => $L = 20$

Значит, всего людей в фирме $L + p = 33$

Ответ:
33

Запрещается делать пометки, раскрывающие авторство работы

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМА. ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ-ФИНАНСИСТ!»

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ Хамз 860664

Задание №8

Рассмотрим граф, где девочки - вершины, а ребра совпадения по имени или фамилии. Раскрасим в 1-й цвет ребра, если совпадение по имени, 2-й совпадение по фамилии. Рядом с каждой вершиной поставим 2 ~~цифры~~ числа, первое - кол-во совпадений по имени, 2-ое - кол-во совпадений по фамилии.

Докажем, что между какими-нибудь 2-мя вершинами будут ребра обоих цветов.

Предположим, что это не так.

Ясно, что если есть 3 вершины, из между которыми есть 2 ребра (1-го цвета), то обязательно будет и третье, т.к. у них одно и то же имя (или фамилия).

Значит, если есть вершина, у которой одно из чисел n, то будет образ. ⊕

полный граф на $n+1$ вершинах с ребрами одного цвета, т.к. эта вершина соединена с n ребрами одного цвета => у них одно имя (или фамилия) => у каждой из этих $n+1$ вершин 1 число будет n.

Теперь ~~докажем, что~~

Число 0 встречается не менее 1 раза, 1 не менее 2, 2 не менее 3 и т.д. 7 не менее 8 => всего чисел не менее 36, а всего их $2\cdot18=36$ (у каждой вершины по 2 числа) => число 0 встречается 1 раз, 1 - 2 раза, 2 - 3 раза . 7 - 8 раз. и больше чисел нет.

~~Рассмотрим~~ т.е. будет образ только 8 полных графов с ребрами 1 цвета с 0, 1, 2 .. 7 вершинами. Значит, если первое число 1 вершины равно первому числу 2-й вершины, то они имеют одинак. ~~фам~~ имя. Если второе число, то фамилию.

Рассмотрим 8 вершин, у которых 1 число - 7. По предположению между ними не должны быть ~~ребер~~ ребер еще 1 цвета => все вершины имеют разные ~~вторые~~ 2-е числа. Но осталось только 7 чисел => 3 96 вершины будут по парам. Среди 2 полных графа с ребрами и 1 и 2 цвета, но в 1 графе все ребра 1 цвета => между ними будут (один из них с 8 вершин) ребра 2 цветов => они будут иметь одно имя и фамилию. Противоречие => всегда найдутся 2 девочки с одним именем и фамилией. Значит найдутся таки.

Запрещается делать пометки, раскрывающие авторство работы

Если нет ребер 2-х цветов, то все ребра одного цвета => совпадений по имени (или фамилии) ... 7, что есть только числа от 0 до 7