Чистовик

Финансовый университет
при Правительстве
Российской Федерации
ЛИСТ-ВКЛАДЫШ
ШИФР 160926

№1

Решение:

График функции проходит через точки:
$(-1;0)$; $(1;0)$; $(0;2)$. Составим систему:

$$\begin{cases} -a+b-c+d=0 \\ a+b+c+d=0 \\ d=2 \end{cases}$$

Получаем:

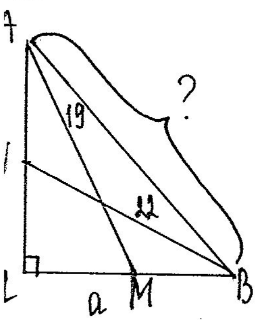
$$\begin{cases} -a+b-c=-2 \\ a+b+c=-2 \end{cases}$$

Сложив эти тождества, приходим к выводу, что $2b=-4$, т.е. $b=-2$.

Ответ: -2.

+

№2



Дано: $\triangle ABC$; $\angle ACB = 90°$; AM и BN – медианы $\triangle ABC$;
$AM = 19$; $BN = 22$.

Найти: AB.

Решение:

1) Обозначим: $AB=c$, $CB=a$, $CA=b$.

2) По формуле медианы треугольника, получаем:

$$\begin{cases} 22^2 = \dfrac{2c^2+2a^2-b^2}{4} \\ 19^2 = \dfrac{2c^2+2b^2-a^2}{4} \end{cases}$$

3) Сложим полученные тождества:

$22^2+19^2 = \dfrac{4c^2+a^2+b^2}{4}$; т.к. $a^2+b^2=c^2$, по Т Пифагора, то:

$\dfrac{5c^2}{4} = 22^2+19^2$; $c^2 = \dfrac{4}{5}(22^2+19^2)$; $c = \dfrac{2\sqrt{845}}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{169} = 2\cdot 13 = 26$.

+

Ответ: 26.

~~Т.к. ... бо он был~~, то

№3

ешение:

опустим, что из поднимавших руку не найдется никого, кто бы сидел сразу с 2 экономистами. Тогда исключим из-за стола всех б. и м. с поднимавших руки, и всех экономистов, не вышевших на поднятые руки, т.е. сидевших между 2 экономистами. Тогда среди оставшихся будут образовываться такие четверки: {э.; б./м.; б./м.; э.}. Каждый бухгалтер и менеджер останется сидеть с экономистом. Он не может сидеть со 2-м экономистом, т.к. ~~по бокам у каждого~~ иначе это будет значить, что у какого-нибудь бухгалтера или менеджера изначально было 2 соседа-экономиста. Значит, количество б./м. должно быть четным, т.к. они сидят парами. Но у нас таких б./м. $45 = 20 + 25$ человек. Противоречие, значит найдется хоть бы один из поднимавших руку, кто сидел рядом с 2 экономистами сразу, ч.т.д.

(+)

№5

① $a \neq 0$

ешение: Необходимо доказать, что D квадратного уравнения больше 0.

Возможны случаи:

1) [redacted] $a < 0$, $c > 0$, тогда $D = b^2 - 4ac$ уравнения больше 0, т.к. b^2 всегда больше 0, а $(-4ac)$ содержит 1 положительный и 2 отрицательных множителя („-1" и „a"), т.е. тоже больше 0. Значит, у уравнения 2 различных корня.

(+).

2) $a > 0$, $c < 0$: аналогично (1).

3) $a \neq 0$, т.к. у нас квадратное уравнение. Если $b = 0$, то мы получаем один из случаев 1–2, т.к. $c \neq 0$, если $b = 0$. Если же $c = 0$, то наш дискриминант принимает вид b^2, что является положительным числом ($b \neq 0$).

4) Если a и c одинакового знака и не равны 0:

$b = \frac{-2c - 5a}{3}$ $\quad D = \frac{4c^2 + 20ac + 25a^2}{9} - 4ac = \frac{4c^2 - 16ac + 25a^2}{9} = \frac{(2c - 5a)^2 + 20ac - 16ac}{9} =$

[redacted] $= \frac{(2c - 5a)^2 + 4ac}{9}$

$9 > 0$

$4ac > 0$ (a и c одинакового знака)

$(2c - 5a)^2 \geq 0$

$\Rightarrow \frac{(2c - 5a)^2 + 4ac}{9} > 0$, т.е. $D > 0$.

Во всех случаях мы получили, что $D > 0$, $\Rightarrow$ уравнение имеет 2 различных корня, ч.т.д.

$$\frac{k(k+1)}{2}+\frac{(n-k+1)(n-k+2)}{2}+k(n-k+1)=$$

$$=\frac{\cancel{k^2}+\cancel{k}+n^2-\cancel{nk}+2n-\cancel{nk}+\cancel{k^2}-\cancel{2k}+n-\cancel{k}+2+\cancel{2kn}-\cancel{2k^2}+\cancel{2k}}{2}=$$

$$=\frac{n^2+3n+2}{2}=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$, что мы и должны были получить:

$$\left.\begin{array}{l} A_1 = И \\ A_n = И \Rightarrow A_{n+1} = И \end{array}\right| \Rightarrow A_k = И \quad \forall k \in N$$, ч.т.д.

$\oplus$

N4

Решение:

$x^2+y^2+1=xy+x+y$

~~Частный случай: (1;1)~~

$x^2-x(y+1)+y^2-y+1=0$

$D=(y+1)^2-4(y^2-y+1)=y^2+2y+1-4y^2+4y-4=-3y^2+6y-3=$

$\cancel{-3y^2+6y-3\geq 0}$

$\cancel{y^2-2y+1\leq 0}$

$=-3(y-1)^2$

$D\geq 0$ только, если $y=1$.

При $y=1$: $x^2+2=2x+1$

$x^2-2x+1=0$

$(x-1)^2=0$

$x=1$.

$\oplus$

Единственная пара: (1;1).

Ответ: (1;1).

(N6)

Решение:

$$A = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \ldots + \frac{1}{2012} + \frac{1}{2013} - \frac{1}{2014} - \frac{1}{2015} + \frac{1}{2016} =$$

$$= \underbrace{\left(1 - \frac{5}{6}\right)}_{>0} + \underbrace{\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} - \frac{1}{7}\right)} + \underbrace{\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} - \frac{1}{11}\right)} + \ldots + \underbrace{\left(\frac{1}{2012} + \frac{1}{2013} - \frac{1}{2014} - \frac{1}{2015}\right)} + \underbrace{\frac{1}{2016}}_{>0}$$

четверки чисел вида

$$\frac{1}{4n} + \frac{1}{4n+1} - \frac{1}{4n+2} - \frac{1}{4n+3}, \text{ где } n \in \mathbb{N} \ (n \le 503)$$

Каждая четверка чисел больше 0, т.к.

$\forall n \in N \ \frac{1}{4n} > \frac{1}{4n+2}$, т.е. $\frac{1}{4n} - \frac{1}{4n+2} > 0$

$\forall n \in N \ \frac{1}{4n+1} > \frac{1}{4n+3}$, т.е. $\frac{1}{4n+1} - \frac{1}{4n+3} > 0$

(ибо $4n < 4n+2$ и $4n+1 < 4n+3$)

$\Rightarrow \frac{1}{4n} + \frac{1}{4n+1} - \frac{1}{4n+2} - \frac{1}{4n+3} > 0.$

Итак, число A состоит из слагаемых, каждое из которых положительно. Значит, $A > 0$.

⊕

Ответ: „+".

(N3)

Решение:

Допустим, что нету такого бухгалтера или менеджера, с которым бы сидело сразу 2 экономиста. Тогда, если мы сложим количество поднятых рук, то получим, что 45 человек сидит рядом с одним экономистом. Исключим из-за стола всех неэкономистов (бухгалтеров, менеджеров), которые не поднимали руку. Каждый бухгалтер или менеджер будет сидеть с одним экономистом и с одним бухгалтером или менеджером, причем будут получаться такие четверки: {Э; Б/М; Б/М; Э}. Помимо таких четверок будут еще экономисты. Других вариантов расположения быть не может. Останутся 20 бухгалтеров и 25 менеджеров, т.е. вместе нечетное количество. Но мы заметим, что их вместе должно быть четное количество, иначе не получится упомянутого расположения (неэкономисты сидят парами). Значит, противоречие; найдется хотя бы один из поднимавших руку, который бы сидел одновременно с 2 экономистами, ч.т.д.

P.S. Когда мы исключим ненужных участников, мы получим четверки: {Э; Б/М; Б/М; Э}. Между 2 Б/М не может быть экономиста,

2) Если $a=0$, то мы получаем систему:

$$\begin{cases} 3b+2c=0 \\ bx+c=0 \end{cases}$$

~~$b=-\frac{2}{3}c$~~

~~$-\frac{2}{3}cx+c=0$~~

~~$c\left(-\frac{2}{3}x+1\right)=0$~~

~~Если $c=0$, то мы получаем $x\in R$, иначе $x=1,5$ — единств. корень~~

Линейное уравнение $bx+c=0$ может иметь 0 корней, бесконечно много корней или ~~[illegible]~~ лишь 1. Вариант "бесконечно много корней" возможен, если $c=0$, $b=0$, но, если, например, $b=1$ и $c=-1,5$, ~~мы~~ получается лишь 1 корень.

Т.е. необходимо условие $a\neq0$.

N7

Решение:

Если принять, что A_0 — изначальный курс акций, то в общем виде по закрытии торгов курс акций будет принимать вид:

$A_n=A_0\left(1+\frac{n}{100}\right)^m\left(1-\frac{n}{100}\right)^k$, где m — количество раз, когда курс повышали на $n\%$, k — понижали. $m,k\in\{0\}\cup N$.

2 раза в течении года курс был равен, т.е.

$\cancel{A_0}\left(1+\frac{n}{100}\right)^m\left(1-\frac{n}{100}\right)^k=\cancel{A_0}\left(1+\frac{n}{100}\right)^p\left(1-\frac{n}{100}\right)^q$ $(A_0\neq0)$

Допустим, $m+k<p+q$. Т.к. $n\in N$, то мы сможем получить равенство только, если $m=p$, $k=q$, что быть не может.

Нет доказательства

$\frac{+}{2}$

Ответ: нет, не существует.

N8

Решение:

Прибыль фирмы ранга m составляет $1+2+\ldots+m$, т.е. $\frac{m(m+1)}{2}$ д.е.

$\frac{m(m+1)}{2}=2016$; $m(m+1)=4032$; $m^2+m-4032=0$; $D=1+16128=16129=127^2$

$m_1=\frac{-1+127}{2}=63$; $m_2<0$.

$(m\in N)$

Фирма ранга 63 будет получать 2016 д.е.

Ответ: да, существует.

P.S.: Докажем, что фирма ранга m будет получать $\frac{m(m+1)}{2}$ д.е., с помощью метода мат. индукции.

1) $A(1)=И$ (фирма ранга 1 получает 1 д.е.).

2) $7\ A(n)=И$, тогда фирма ранга $n+1$ может быть получена только слиянием фирм рангов k и ~~$n+1$~~ $n-k+1$. Такая фирма будет получать прибыль:

$$\frac{k(k+1)}{2} + \frac{(n-k+1)(n-k+2)}{2} + k(n-k+1) =$$

$$= \frac{\cancel{k^2}+\cancel{k}+n^2-\cancel{nk}+2n-\cancel{nk}+\cancel{k^2}-\cancel{2k}+n-\cancel{k}+2+\cancel{2kn}-\cancel{2k^2}+\cancel{2k}}{2} =$$

$$= \frac{n^2+3n+2}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$, что мы и должны были получить:

$$\left.\begin{array}{l} A_1 = И \\ A_n = И \Rightarrow A_{n+1} = И \end{array}\right| \Rightarrow A_k = И \quad \forall k \in \mathbb{N}$$, ч.т.д.

№4

Решение:

$x^2+y^2+1 = xy+x+y$

~~Частный случай: (1;1)~~

$x^2 - x(y+1) + y^2 - y + 1 = 0$

$D = (y+1)^2 - 4(y^2-y+1) = y^2+2y+1-4y^2+4y-4 = -3y^2+6y-3 =$

$\cancel{-3y^2+6y-3 \geq 0}$

$\cancel{y^2-2y+1 \leq 0}$

$= -3(y-1)^2$

$D \geq 0$ только, если $y=1$.

При $y=1$: $x^2+2 = 2x+1$

$x^2-2x+1=0$

$(x-1)^2=0$

$x=1$.

Единственная пара: $(1;1)$.

Ответ: $(1;1)$.