Оценочный бланк олимпиадных заданий по математике

Код участника: 612138

Номер задания		1	2	3	4	5	6	7	8
Полученные баллы	Первый проверяющий	10	2	6	12	0	7	7	0
	Второй проверяющий	10	2	6	12	0	14	7	0
	Итого	10	2	6	12	0	14	7	0
Сумма баллов (оценка)		51							

Члены жюри:

Подпись	Фамилия И.О.
	[illegible]
	Александрова И.А.

Всероссийская олимпиада школьников «Миссия выполнима. Твое призвание -финансист!»

ПО МАТЕМАТИКЕ 10 класс

Заключительный (очный) этап 2017/2018 учебный год

612138

Код участника

Вариант II

Задание 1. (10 баллов)

Пять различных гирь, каждая из которых весит целое число килограмм, были взвешены всевозможными группами по три гири. В результате получили следующие веса (в килограммах) десяти взвешенных групп: 11, 14, 15, 16, 17, 17, 19, 20, 22, 23. Найдите веса этих пяти гирь.

Задание 2. (10 баллов)

Даны 2030 чисел $x_1, x_2, \ldots, x_{2030}$, каждое из которых равно либо $\sqrt{2}-1$ либо $\sqrt{2}+1$. Найдите наибольшее возможное значение суммы $x_1x_2 + x_3x_4 + x_5x_6 + \ldots + x_{2029}x_{2030}$, если известно, что она является целым числом.

Задание 3. (12 баллов)

Найдите наименьшее значение функции $f(x)=|x|+|x+1|+\ldots+|x+2018|$.

Задача 4. (12 баллов)

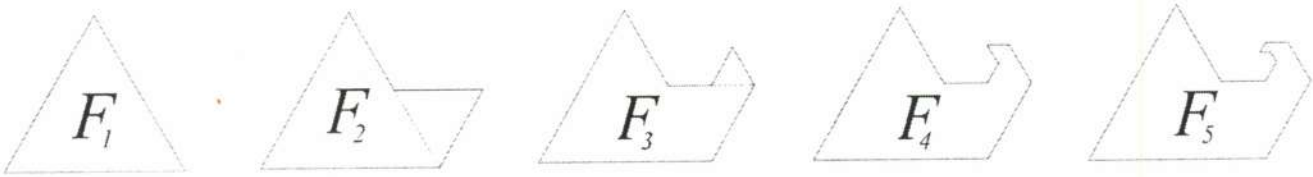
Биссектрисы углов A, B и C треугольника ABC пересекаются с описанной около этого треугольника окружностью в точках A_1, B_1 и C_1, соответственно. Найдите расстояния между точкой A_1 и центром вписанной в треугольник ABC окружности, если известно, что $\angle A_1B_1C_1 = 55^\circ$, $\angle A_1C_1B_1 = 65^\circ$, $B_1C_1 = \sqrt{6}$.

Задание 5. (12 баллов)

Докажите, что для любых действительных чисел a, b, c таких, что $0 < a, b, c < 1$, выполнено следующее неравенство $\sqrt{abc} + \sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)} < 1$.

Задание 6. (14 баллов)

Дана бесконечная последовательность многоугольников $F_1, F_2, F_3, F_4 \ldots$ Фигура F_1 – это равносторонний треугольник со стороной 1. Пятиугольник F_2 получается из треугольника F_1 построением на его стороне равностороннего треугольника со стороной $\frac{1}{3}$, как показано на рисунке. Семиугольник F_3 получается из пятиугольника F_2 построением на его стороне длины $\frac{1}{3}$ равностороннего треугольника со стороной $\frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$ и так далее. На каждом шаге строится треугольник, сторона которого в три раза меньше стороны треугольника, построенного на предыдущем шаге.



Докажите, что периметр каждой из рассматриваемых фигур не превышает 3,5.

Задание 7. (14 баллов)

Иван и Петр играют в следующую игру. Из кучки, которая содержит 2020 камней, они по очереди берут некоторое количество камней. Если перед ходом в кучке имеется N камней, то игрок может взять k камней, только если k является делителем числа N. Проигрывает тот игрок, который возьмет последний камень. Кто из игроков имеет выигрышную стратегию, если первым берет камни Иван?

Задача 8. (16 баллов)

Сколько решений в целых числах имеет уравнение $x_1^4 + x_2^4 + \cdots + x_{14}^4 = 2047$.

Черновик

$a+b+c \quad a+b+d \quad a+b+e \quad a+c+d \quad a+c+e$

$a+d+e \quad b+c+d \quad b+c+e \quad b+d+e \quad c+d+e$

$a \ b \ c \ d \ e$

~~1 2 3 4 5~~

~~6 6 6 6 6~~ $\quad c=d$

$$\overbrace{11+14+15}^{40}+\overbrace{16+17+17}^{50}+\overbrace{19+20+22+23}^{84}=174 \qquad 174:6=29$$

$a+b+c+d+e = \cancel{28}\ 29$ $\quad$ ~~$a+b+c=23$ $\quad d+e=8$~~

$a+b+c = \cancel{11}\ 23$ $\quad \cancel{1}\ 2\ 3\ 4\ \cancel{5}\ 6\ 7\ 8$

$d+e = \cancel{18}\ 6$ $\quad$ ~~$a+b+c+a+d+e-d-c=2a+b+c$~~

$15 \quad 24$ $\quad d=1$

$e=5$

~~$a+b+c=17$~~ $\quad$ №2 ✓

т.к. $(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)=2-1=1$ – целое, а $(\sqrt{2}-1)^2$ и $(\sqrt{2}+1)^2$ не целые

$1-2\sqrt{2} \quad 1+2\sqrt{2}$

$2-1-2\sqrt{2} \quad 2-1+2\sqrt{2}$

~~Каждое~~ произведение соседних чисел $=1$.

$x<-1 \quad -1<x<0$

$-2x-1 \quad 1 \quad 2x+1$ $\quad$ №3. ✓

$f(x)=|x|+|x+1|+\ldots+|x+2018|$

2019 модулей $\quad 1009. \quad |x+1009|$ $\quad -1-2-3\ldots-1008+0+1010+101$

$|x|+|x+1|+|x+2|+|x+3|+|x+4|$

$$\begin{array}{r} 1008 \\ \times\ 1009 \\ \hline 9072 \\ 1008 \\ \hline 1017072 \\ 2018 \\ \hline 1019090 \end{array}$$

$-\cancel{x}-\cancel{x}-1+0+\cancel{x}+3+\cancel{x}+4$

$-1+3+4.$

$(4-2c-2b+bc$

№4 ~~5~~ $\quad$ 101

$\sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2}$

$0<a,b,c<1.$

$\sqrt{abc} \le \frac{a+b}{2}\cdot\sqrt{c}$

$\sqrt{abc}+\sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)}<1$

$\sqrt{\frac{a^2+2ab+b^2}{4}\cdot\sqrt{c}} \le \frac{\frac{a^2+2ab+b^2}{4}+\ldots}{2}$

$(1-a)(1-b)(1-c)=(1-b-a+ab)(1-c)=$

$=1-c-b+bc-a+ac+ab-abc=$

$\frac{a^2+2ab+b^2+4\sqrt{c}}{8}$

$=\sqrt{1-a-b-c+ab+ac+bc-abc}$ $\quad \sqrt{\cancel{(1-b)}\cancel{(a+ab)}} \le \frac{2-b-a+ab}{2}\cdot\sqrt{(1-c)}$

$a^2+2ab+b^2+4\sqrt{c}+$

$\frac{2-c}{2}$

N6. V

$b_1 \cdot \frac{(q^n-1)}{\cancel{1-q}}$ $q-1$

$3 \cdot \frac{8/9}{2/3}$ $\frac{8/3}{2/3}$ 4

$3 \cdot \frac{(+8/9)}{+\frac{2}{3}} =$

$F_1 + F_2 + F_3 + F_4$

$3 \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{9} \quad \frac{1}{3}$

$2\frac{2}{3} - \frac{1}{9} + \frac{2}{9}$

$2\frac{2}{3} + \frac{1}{9} \quad 2\frac{7}{9}$

$S_F =$

$F_1 + F_2 + F_3$

$2\frac{2}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + 2\frac{2}{4}$

$3\frac{1}{3}\ 2\frac{2}{3}$

$3\frac{1}{3} \quad 3\frac{4}{9} \quad 3\frac{13}{27} \quad 3\frac{40}{81} \quad 2\frac{7}{9} + \frac{1}{27} \quad 2\frac{22}{27}$

$2\frac{22}{27} + \frac{1}{81}$

$\frac{1}{3} \quad \frac{4}{9} \quad \frac{13}{27} \quad \frac{40}{81}$

$\frac{1}{3} \quad \frac{1}{9} \quad \frac{1}{27} \quad \frac{1}{81}$

$\frac{1}{3} \cdot \frac{+1}{+\frac{2}{3}} \quad \frac{9}{2} \quad 3,5 \quad \frac{1}{2} = 0,5 \ V.$

$a^2b^2 + 2a^2bc + a^2c^2 + 2ab^2c + 2abc^2 + b^2c^2$

$abc - a^2bc - ab^2c - abc^2 + a^2b^2c + a^2bc^2 + ab^2c^2 - a^2b^2c^2 < a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2 - 2a^2b - 2a^2c - 2abc - 2a \ldots - 2abc - 2b^2c - 2abc - 2ac^2 - 2bc^2 + a^2b^2 + 2a^2bc + a^2c^2 + 2ab^2c + 2abc^2 + b^2c^2$

$4abc + a^2b^2c + a^2bc^2 + ab^2c^2$

$2a^2b + 2a^2c + 2ab^2 + 2b \ldots + 2ac^2 + 2bc^2 < 3a^2bc + 3ab^2c + 3abc^2 + a^2b^2c^2$

N 4.

4

2026

V V S P

2020

2019

V HM

P 4.M.

$(abc - a^2bc - ab^2c - abc^2 + a^2b^2c + a^2bc^2 + ab^2c^2 - a^2b^2c^2) < (a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2 - 2(a^2b + a^2c + abc + ab^2 + abc + b^2c + abc + ac^2 + bc^2) + (ab + ac + bc)^2$

N 5.

$< (a+b+c)^2 - 2(a+b+c)(+ab+ac+bc) + (ab+ac+b\ldots$

$abc(1-a)(1-b)(1-c) \quad + 2\sqrt{abc}\sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)} < 1.$

$\cancel{abc} + 1 - c - b + bc + ab + ac - a - \cancel{abc}$

$ab + ac + bc - a - b - c + 2\sqrt{abc(1-a)(1-b)(1-c)} < 0$

$2\sqrt{abc(1-a)(1-b)(1-c)} < (a+b+c) - (ab+ac+bc) 2\sqrt{\cancel{(a+b+c)(-ab-ac-bc)}}$

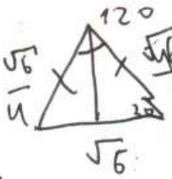
$\cancel{abc + (1-a)(1-b)(1-c)} \quad \cancel{a(1-b) + b(1-ba)} + c(1-b)$

$\cancel{abc + 1 - a - b - c + ab + bc + ac - abc} < \cancel{a + b + c} - ab - ac - bc$

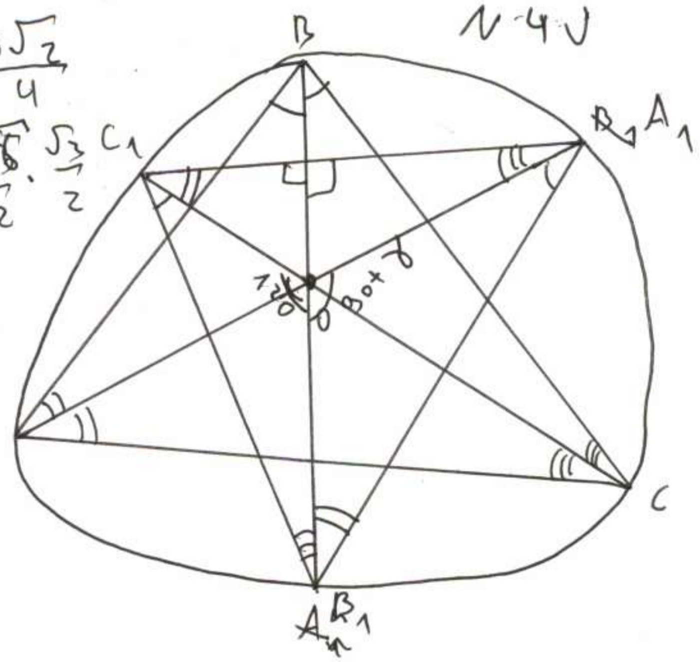
$abc(\cancel{1 - a - b - c + ab + ac + bc \cdot abc) < (a+b+c)}$

N 4 J

$\frac{3\sqrt{2}}{4}$



$\frac{\sqrt{6}}{4} \cdot \frac{\sqrt{6}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$

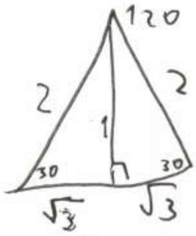


$\angle A_1 B_1 C_1 = 55^\circ$

$\angle C_1 B_1 A_1 = 65^\circ$

$\angle C_1 A_1 B_1 = 60^\circ$

$B_1 C_1 = \sqrt{6}$



$\frac{2\sqrt{3}}{\sin 120} = \frac{2}{\frac{1}{2}}$

$\frac{2\sqrt{3}}{\sin 120} = 4$

$\sin 120 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\frac{\frac{3\sqrt{2}}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \qquad \frac{3\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$$

$) = \alpha$

$)) = \beta$

$))) = \gamma$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathrm{rang} A = 3.$$

$$\begin{cases} 55 = \beta + \gamma \\ 65 = \alpha + \beta \\ 60 = \alpha + \gamma \end{cases}$$

$180 = 2\alpha + 2\beta + 2\gamma$

$90 = \alpha + \beta + \gamma$

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 55 \\ 1 & 1 & 0 & 65 \\ 1 & 0 & 1 & 60 \end{array}\right) \sim$$

$$\begin{cases} \beta = 55 - \gamma \\ 65 = \alpha + 55 - \gamma \\ 60 = \alpha + \gamma \end{cases}$$

$$\begin{cases} 125 = 2\alpha + 55 \\ \beta = 55 - \gamma \\ 60 = \alpha + \gamma \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = 35 \\ \gamma = 25 \\ \beta = 30 \end{cases}$$

$$\frac{OB_1}{\sin\alpha} = \frac{B_1 C_1}{\sin 120}$$

$$OB_1 = \frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{3}} \cdot \sin\alpha = 2\sqrt{2} \cdot \sin\alpha.$$

$$\frac{OA_1}{\sin\beta} = \frac{OB_1}{\sin\alpha} \qquad OA_1 = \frac{OB_1}{\sin\alpha} \cdot \sin\beta =$$

$$= 2\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} = \sqrt{2}$$

черновик. 612130

$(a+b+c)+(a+b+d)+(a+c+d)+(b+c+d)=4a+4b+4c+4d$

$a+b+c=23$

$= 23\cdot 4+4d$

$\begin{array}{r} \times 23 \\ 6 \\ \hline 138 \end{array}$

$(a+b+e)+(a+c+e)+(a+d+e)+(b+c+e)+(b+d+e)+(c+d+e)=$

$=2a+2b+2c+2d+6e=23\cdot 2+6e.$

$$\begin{cases} 23\cdot 6+6e+\overset{6}{\cancel{4}}d=174 \\ d+e=6 \end{cases}$$

$36=6e+6d.$

$a+d+e$

$+b+d+e$

$+c+d+e$

$a+b+c+3d+3e=23+18=41.$

3 камб. 41.

$d=2$ $e4.$

11 14 16.

$\Downarrow$

$a=5$ $b=8$ $c=\overset{10}{\cancel{9}}.$ $d+e=6.$

$a+b+c=23$

15 17 17 19 20 22 23.

$a+b+d=13+d.$) 2

$a+c+d=15+d.$) 3

$b+c+d=18+d.$

$a+b+e=13+e$) 2

$a+c+e=15+e$) 3.

$b+c+e=18+e.$

$$\sqrt{abc} + \sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)} < 1.$$

$$1 - \sqrt{abc} > \sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)}$$

$$1 + abc - 2\sqrt{abc} > 1 - a - b - c + ab + ac + bc - abc.$$

$$2abc + a + b + c > 2\sqrt{abc} + ab + ac + bc, \text{ т.к. } 0 < a, b, c < 1$$

$$a + b + c > ab + ac + bc.$$

$$2\sqrt{abc}\left(\sqrt{abc} - 1\right) + a(1-b) + b(1-c) + c(1-a) > 0$$

$$a(1-b) + b(1-c) + c(1-a) > 2\sqrt{abc}\left(1 - \sqrt{abc}\right)$$

$$3abc$$

$$\geq$$

$$2\sqrt{abc}$$

$$\geq$$

$$\cancel{abc}, \cancel{ab+c} \cdot abc + 1.$$

$$2abc - abc - 1$$

$$abc - 1.$$

$x_1^4 + x_2^4 + \dots x_{14}^4 = 2044.$

$\cancel{8 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} \cdot \cancel{9} \cdot \cancel{10} \cdot 11 \cdot \cancel{12} \cdot 13 \cdot \cancel{14}$

$6^4 = 1296$ и
$5^4 = 625$ и
$4^4 = 256$ и
$3^4 = 81$ и
$2^4 = 16$ и
$1^4 = 1$ и.

2.

$2^{11} \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13.$

$3^{10}.$ $14!$ $\cancel{11! \cdot 5! \cdot 2!}$

$3! \cdot 14 \cdot 10!$

5 5 5 3 4 1 1 1 1 1 1 1 1 1.

~~3 2 2 2~~

14.

5 1 . 10 3 555 1×3 10×1

3×5 3×1

5355
5535
5553.

$3 \cdot 5^4 + 3^4 + 10 \cdot 1^4$

$3^4 = 5 \cdot 2^4 + 1^4$

637
275

~~$3 \cdot 5^4$~~

259 4

$49 \times 49 = 2401$

$36 \times 36 = 1296$

1296 + 625 = 1921 + 81 = 2002 2

2018 4

2034 5.

1296 + 625 = 1921 + 81 = 2002 ... 1 2 3 4

1956 + 81 = 1937

2048.

243.

$25 \cdot 11 = 275$
$49 \cdot 13 = 637.$

$49 \times 13 = 147 + 49 = 637$

ит.

1898.

$2020. = 505 \cdot 4 = 101 \cdot 5 \cdot 2^2.$

$1919 = 101 \cdot 19.$

V 11515. $= 15 \cdot 101.$

1900. $100 \cdot 19 = 19 \cdot 2^2 \cdot 5^2.$

P 2 $1514^4 = 2 \cdot 707.$

$1881 : 11 = 171.$

1840.

V 707

P 706.

№5. 612138

$\sqrt{abc} + \sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)} < 1$

$1 - \sqrt{abc} > \sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)} \quad |\wedge 2.$

$1 + abc - 2\sqrt{abc} > 1 - a - b - c + ab + ac + bc - abc$

$2abc + a + b + c > ab + ac + bc + 2\sqrt{abc}$

$a >$.

$2\sqrt{abc}(\sqrt{abc} - 1) + a(1-b) + b(1-c) + c(1-a) > 0$

$\wedge$ 0 ! $\quad \vee$ 0 $b<1 \quad \vee$ 0 $c<1 \quad \vee$ $a<1$.

−

и сумма этих трех положительных произведений будет больше чем $2abc - 2\sqrt{abc}$. ответ: доказано.

№8.

Методом подбора находим единственное решение.

$3(\pm 5)^4 + (\pm 3)^4 + 10(\pm 1)^4$ Кол-во комбинаций $= 14! \cdot 2 =$

$= 2^{11} \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13$

−

ответ: $2^{11} \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13$.

№7.

выигрывает всегда Иван, поскольку 2020-четное число. Иван должен всегда оставлять Петру нечетное число $\Rightarrow$ Петр не сможет брать четные кол-во камней $\Rightarrow$ у Ивана всегда четное кол-во $\Rightarrow$ 1 -нечетное, его Петр и заберет.

$\frac{+}{2}$

ответ: Иван.

Нет обоснования выи-ть такой стратегии

№1. 612138

~~до~~ Обозначим a, b, c, d, e массы гирь, напишем все комбинации.

$a+b+c$ $a+b+d$ $a+b+e$ $a+c+d$ $a+c+e$

$a+d+e$ $b+c+d$ $b+c+e$ $b+d+e$ $c+d+e$

заметим, что каждую гирю взвешивали 6 раз и

$6a+6b+6c+6d+6e=174$ (сумма масс)

$\Downarrow$

$a+b+c+d+e=29$

пусть $a+b+c=23$, тогда $d+e=6$.

возьмем и сложим три группы, где есть $d+e$: $(a+d+e)+(b+d+e)+(c+d+e) = \underbrace{(a+b+c)}_{23}+\underbrace{3e+3d}_{3\cdot 6}=41$,

поняли, что единственная комб. трех групп $=41$ это $11+14+16 \Rightarrow a=11-6=5$, $b=14-6=8$, $c=16-6=10$, возьмем еще 6 групп.

$a+b+d=13+d$ $)+2$

$a+c+d=15+d$ $)+3$

$b+c+d=18+d$

$a+b+e=13+e$ $)+2$

$a+c+e=15+e$ $)+3$

$b+c+e=18+e$

заметим, что d и e взаимозаменяемые, сопоставив с оставшимися весами находим, что $d=2$, $e=4$

Ответ: веса гирь: 2, 4, 5, 8, 10

+

Черновик Романов Роман. 612138

№2.

Заметим, что $(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)=1$, $(\sqrt{2}-1)^2=1-2\sqrt{2}$ и $(\sqrt{2}+1)^2=1+\sqrt{2}$. Чтобы получить целое число мы должны взять либо $(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)$ два раза, либо $(\sqrt{2}+1)^2+(\sqrt{2}-1)^2=6$, в обоих случаях получим одну и ту же сумму, а именно 2. => имея $\frac{2030}{2}=$ =1015 пар сумма = 1015 (делаем 1015 раз $(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)=1$)

Ответ: 1015

(+)

№3.

Минимальное значение $f(x)$ будет иметь в том случае, когда все x сократятся, ~~так как~~ то есть при $x=-1009$. У нас 1009 модулей раскрываются с + и 1009 с −, а средний модуль $|x+1009|$ будет равен 0, получаем $f(-1009)=-1-2-3-4\ldots-1008+0+1010+1011\ldots+2018$, взяв по парам $(1010-1)+(1011-2)\ldots$ получим сумму $=(1010-1)\cdot\frac{1008+2018}{}=1019090$

Ответ: 1019090

(+/2) нет строгого обос-я!

№6.

Д-ть $PF_n \leq 3{,}5$

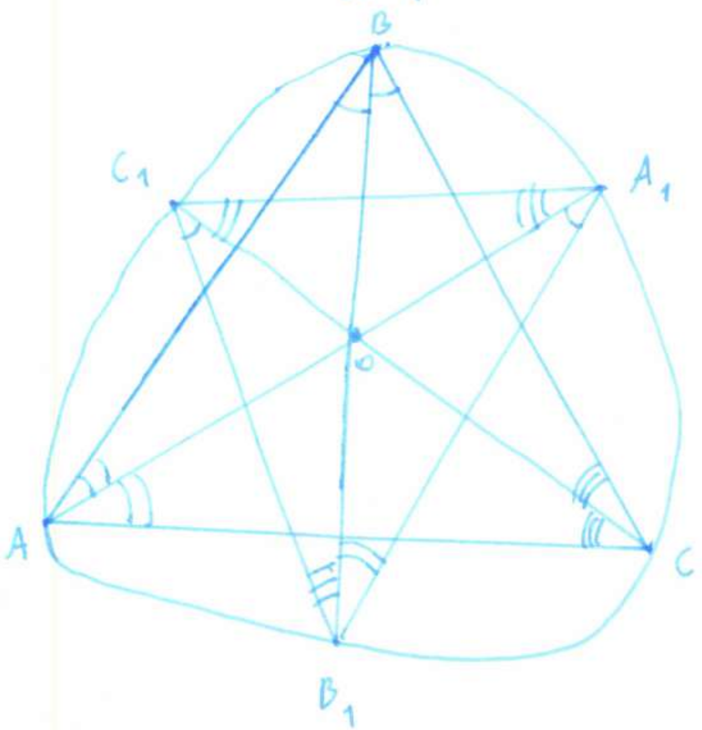
Заметим, что $P_1=3$, $P_2=3-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=3\frac{1}{3}$, $P_3=3\frac{1}{3}-\frac{1}{9}+\frac{2}{9}=3\frac{4}{9}$ и каждый раз к фигуре прибавляется $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}$ и т.д. Видно, что шаг периметра это геом. прогрессия с $b_1=\frac{1}{3}$ и $q=\frac{1}{3}$ => $S_{\text{всех шагов}}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2/3}=\frac{1}{2}=0{,}5$ => прибавив P_1 получим 3,5 => никакая фигура не превышает 3,5.

Ответ: доказано

(+) (+/2) нет строгого обос-я.

612138

№4



$\angle A_1B_1C_1 = 55^\circ$

$\angle A_1C_1B_1 = 65^\circ$

$\angle C_1A_1B_1 = 180-65-55 = 60^\circ$

$B_1C_1 = \sqrt{6}$.

A_1O - ?

Пусть $\angle BAA_1 = \beta$, $\angle ABB_1 = \alpha$ и $\angle BCC_1 = \gamma$, тогда найдя пары вписанных углов опирающихся на одну дугу, найдем равные углы, получаем

$$\begin{cases} 55 = \beta + \gamma \\ 65 = \alpha + \beta \\ 60 = \alpha + \gamma \end{cases} \begin{cases} \beta = 55 - \gamma \\ 65 = \alpha + 55 - \gamma \\ 60 = \alpha + \gamma \end{cases} \begin{cases} \beta = 55 - \gamma \\ 125 = 2\alpha + 55 \\ 60 = \alpha + \gamma \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = 35 \\ \gamma = 25 \\ \beta = 30 \end{cases}$$; заметим, что $\alpha + \beta + \gamma = 90^\circ$.

в $\triangle B_1OC_1$ $\angle B_1OC_1 = 180 - \gamma - \alpha = 120^\circ \Rightarrow \frac{OB_1}{\sin\alpha} = \frac{B_1C_1}{\sin 120} \Rightarrow$

$OB_1 = \frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{3}} \cdot \sin\alpha = 2\sqrt{2} \cdot \sin\alpha$.

в $\triangle B_1OA_1$ $\angle B_1OA_1 = 120 - \alpha - \beta = 115 \Rightarrow \frac{OA_1}{\sin\beta} = \frac{OB_1}{\sin\alpha} \Rightarrow$ +

$\Rightarrow OA_1 = \frac{OB_1}{\sin\alpha} \cdot \sin\beta = \frac{2\sqrt{2} \cdot \cancel{\sin\alpha} \cdot \sin\beta}{\cancel{\sin\alpha}} = 2\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} = \sqrt{2}$

ответ: $A_1O = \sqrt{2}$.

Оценочный бланк олимпиадных заданий по математике

Код участника: 58010007

Номер задания		1	2	3	4	5	6	7	8
Полученные баллы	Первый проверяющий	10	5	6	12.	0	14	0	0
	Второй проверяющий	10	5	6	12	0	14	0	0
	Итого	10	5	6	12	0	14	0	0
Сумма баллов (оценка)		47							

Члены жюри:

Подпись	Фамилия И.О.
	Александрова О.А.
	Волкова Е.С.
	Фенин В.Г.

Всероссийская олимпиада школьников «Миссия выполнима. Твое призвание -финансист!»

ПО МАТЕМАТИКЕ 10 класс

Заключительный (очный) этап 2017/2018 учебный год

58010007

Код участника

Вариант I

Задание 1. (10 баллов)

Пять различных гирь, каждая из которых весит целое число килограмм, были взвешены всевозможными группами по три гири. В результате получили следующие веса (в килограммах) десяти взвешенных групп: 10, 14, 15, 16, 17, 17, 18, 21, 22, 24. Найдите веса этих пяти гирь.

Задание 2. (10 баллов)

Даны 2018 чисел $x_1, x_2, \ldots, x_{2018}$, каждое из которых равно либо $2-\sqrt{3}$ либо $2+\sqrt{3}$. Найдите наибольшее возможное значение суммы $x_1x_2 + x_3x_4 + x_5x_6 + \ldots + x_{2017}x_{2018}$, если известно, что она является целым числом.

Задание 3. (12 баллов)

Найдите наименьшее значение функции $f(x) = |x| + |x+1| + \ldots + |x+2022|$.

Задача 4. (12 баллов)

Биссектрисы углов A, B и C треугольника ABC пересекаются с описанной около этого треугольника окружностью в точках A_1, B_1 и C_1, соответственно. Найдите расстояния между точкой A_1 и центром вписанной в треугольник ABC окружности, если известно, что $\angle A_1B_1C_1 = 50^\circ$, $\angle A_1C_1B_1 = 70^\circ$, $B_1C_1 = \sqrt{3}$.

58010007

Задание 5. (12 баллов)

Докажите, что для любых действительных чисел a, b, c таких, что $0 < a, b, c < 1$, выполнено следующее неравенство $\sqrt{abc} + \sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)} < 1$.

Задание 6. (14 баллов)

Дана бесконечная последовательность многоугольников $F_1, F_2, F_3, F_4 \dots$ Фигура F_1 – это равносторонний треугольник со стороной 1. Пятиугольник F_2 получается из треугольника F_1 построением на его стороне равностороннего треугольника со стороной $\frac{1}{2}$, как показано на рисунке. Семиугольник F_3 получается из пятиугольника F_2 построением на его стороне длины $\frac{1}{2}$ равностороннего треугольника со стороной $\frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$ и так далее. На каждом шаге строится треугольник, сторона которого в два раза меньше стороны треугольника, построенного на предыдущем шаге.

F_1 F_2 F_3 F_4 F_5

Докажите, что периметр каждой из рассматриваемых фигур не превышает 4.

Задание 7. (14 баллов)

Иван и Петр играют в следующую игру. Из кучки, которая содержит 2018 камней, они по очереди берут некоторое количество камней. Если перед ходом в кучке имеется N камней, то игрок может взять k камней, только если k является делителем числа N. Проигрывает тот игрок, который возьмет последний камень. Кто из игроков имеет выигрышную стратегию, если первым берет камни Иван?

Задача 8. (16 баллов)

Сколько решений в целых числах имеет уравнение $x_1^4 + x_2^4 + \dots + x_{14}^4 = 2031$.

58010007

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМА, ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ-ФИНАНСИСТ!»

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

Чистовик страница 1

Задание 1.
Обозначим вес гирь в порядке убывания: x, y, z, m, n

$z+m+n=10$ (1) Из известных нам значений, составляем дополнительные
$x+y+z=24$ (2) уравнения: $x+y+m=22$ (3)
$m+n+y=14$ (4)
$x+y+n=21$ (5)

Решаем систему из следующих уравнений:
(2) − (3) ⇒ $z=2+m$ (6) Выражаем m через m (8) и (6)
(4) − (1) ⇒ $y=4+z$ (7)
$2+m=n+3$ ⇒ $m=n+1$
(2) − (5) ⇒ $z=n+3$ (8) Подставляем в 1
$2+n+1+n+1+n=10$
$3n=6$ ⇒ $n=2$ ⇒ $m=2+1=3$ ⇒ $z=2+3=5$ ⇒
⇒ $y=4+5=9$
$x+9+5=24$ (2 уравнение) ⇒ $x=10$
Ответ: 2, 3, 5, 9 и 10 веса этих пяти гирь +

Задание 2.
Т.к возможно всего 2 значения x_i, то $x_i x_{i+1} = (2-\sqrt{3})^2$, $(2+\sqrt{3})^2$, $(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})$
По условию сумма $x_1x_2 + x_3x_4 + \ldots + x_{2017}x_{2018} \in \mathbb{Z}$
1) Если одно из произведений $= (2-\sqrt{3})^2$, то второе должно быть равным $(2+\sqrt{3})^2$. В данном случае $\Sigma = (4-4\sqrt{3}+3+4+4\sqrt{3}+3)\cdot\frac{2018}{4} = \frac{14\cdot2018}{4} = 7\cdot1009 = 7063$ — не целое число!
Две комбинации $x_ix_{i+1}=14$
2) Если произведение $=(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})$, то $\Sigma x_ix_{i+1} = (4-3)\cdot1009 = 1009$.
Две комбинации $x_ix_{i+1}=2$
3) Если мы будем чередовать значения x_ix_{i+1}, то сумма будет уменьшаться на $12\cdot l$, где l - количество пар, в которых мы изменили квадрат на ~~разн~~ разность квадратов
Из 3 случаев получаем, что $\Sigma_{max} = 7063$
Ответ: $\Sigma_{max} = 7063$

$\frac{+}{2}$

Задание 3
$f(x) = |x| + |x+1| + \ldots + |x+2021|$
Модуль - всегда положительное число ⇒ $f(x) > 0$ (т.к. в скобках присутствует для числовое значение)

Запрещается делать пометки, раскрывающие авторство работы

58 01 0007

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМА, ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ-ФИНАНСИСТ!»

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

Чистовик страница 2

Задание 3 (продолжение)

$x<0$, т.к при $x \geq 0$ Σ будет больше, чем при $x \in [-2022; 0)$ (при -2022 $f(x) = +f(-x)$)

Значение $f(x)$ будет наименьшим в том случае, если $x \in$ середине данного промежутка. Такой $x = -1011$

$f(-1011) = \left(\frac{2+1010}{2} \cdot 1011\right) + 2 = 1023132$

Ответ: $f(-1011) = f(min) = 1023132$

$\frac{+}{2}$ нет док-ва

Задание 4

Дано:

$\angle A_1B_1C_1 = 50^\circ$ AA_1, BB_1, CC_1 - биссектрисы

$\angle A_1C_1B_1 = 70^\circ$

$B_1C_1 = \sqrt{3}$

т. O - цент вписанной окружности

Найти OA_1

Решение.

Т.к. в треугольнике 3 биссектрисы обозначим части углов за x, y и z

$\angle C_1A_1B_1 = 180^\circ - \angle A_1B_1C_1 - \angle A_1C_1B_1 = 60^\circ$

$$\begin{cases} 2y+2x = 120^\circ \\ 2x+2z = 140^\circ \\ 2y+2z = 100^\circ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y+x = 60^\circ \\ x+z = 70^\circ \\ y+z = 50^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x = 40^\circ \\ y = 20^\circ \\ z = 30^\circ \end{matrix}$$

+

$\angle BOC = 4z = 120^\circ$

$\angle BOA_1 = 60^\circ \Rightarrow \triangle BOA_1$ - равносторонний (стороны и углы) $OB = OA_1$

Рассматривая различные треугольники, получаем, что $OA_1 = \frac{2}{3} BH$, а

$BH = \sqrt{\frac{3B_1C_1}{4}} \Rightarrow OA_1 = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = 1$

Ответ: $OA_1 = 1$

Задание 5.

Т.к. $\sqrt{abc} < 1$ (перемножение дробных чисел - дробное число), то и $\sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)} < 1$

Чем больше $\sqrt{abc}$, тем меньше второй корень. Так как при большем n (a, b или c) будет меньший $1-n$

5801 0007

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМАЮ, ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ-ФИНАНСИСТ!»

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

Чистовик страница 3

Задание 5 (продолжение)
При равных значениях мы получим корни, не превышающие 0,5 => 1 и более быть не может

При различных же значениях, сумма корней так же не равна $1-\sqrt{abc}$ и $\sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)}$ не могут строго ровняться, например 0,8 и 0,2 Одно обязательно будет меньше, в результате чего при сложении образуется число, приблизительно равное 1, однако имеющее с целым числом нехватающие десятые/сотые/.

−

Задание 6

$P_{F_1} = 3 \cdot 1 = 3$ у.е

Второй периметр $P_{F_2} = P_{F_1} + a$, где a - сторона равностороннего треугольника, т.к при его построении одна сторона стирается

Периметр последнего равен $P_{F_n} > P_{F_{n-1}} + n$, где n - сторона последнего треугольника,
или же $P_{F_n} = P_{F_1} + a + b + \ldots + n$, где a, b, c - стороны треугольников
Стороны треугольников $= \frac{1}{2^k}$, где l - номер треугольника.
$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^l} = \cancel{2^l}$ ~~1 - нулевой~~ ~~нулевой~~ $= \frac{2^l-1}{2^l}$ Треугольник со стороной 1 - нулевой $\frac{2^l-1}{2^l}$ всегда меньше, чем 1 =>

=> P_{F_n} будет всегда меньше, чем 4

+

Задание 7
Выигрышную стратегию будет иметь Иван
Во время игры Иван всегда может взять число камней, после взятия которых получается простое количество оставшихся камней. Пете придется либо брать их все, либо брать всего меньше один
Будет n-ое количество ходов, Иван возьмет либо 1 камень, а один камень останется для Пети - именно его возьмет второй, в результате чего проиграет. Иван же, следовательно, выиграет
Ответ: выигрышную стратегию имеет Иван

5801 0007

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМА, ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ-ФИНАНСИСТ!»

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

Чистовик страница 4

Задание 8

Число x_i^4 всегда положительно или равно $0 \Rightarrow x_i^4$ не превышает 2031.
К данному условию подходят 0, 1, 2, 3, 4, 5 и 6
Перебирая все возможные суммы, мы получаем, что в уравнении должно быть 3 и 5^4, 1 и 3^4, 4 и 2^4, 5 и 0^4 и 1 и 1^4
Значения x_i могут меняться местами $\Rightarrow$ вариантов становится 5996761385 (учитывая определённое количество каждой цифры-числа)

Ответ. 5996761385

Запрещается делать пометки, раскрывающие авторство работы

5801 0007

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМА. ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ-ФИНАНСИСТ!»

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

Черновик

№1

x, y, z, m, n - веса гирь

Сумма max $= x+y+z = 24$

Сумма min $= m+n+z = 10$ минимальная среди максимальных

максимальная среди самых малых

$\begin{cases} x+y+m = 22 \\ x+y+z = 24 \end{cases} \Rightarrow z-m=2$, $z=2+m$

$\boxed{\cancel{2m+n=4}}$ $2m+n=8$

$\begin{cases} m+n+y=14 \\ m+n+z=10 \end{cases} \Leftrightarrow y-z=4$, $y=4+z$

$\boxed{x+2z=20}$

$\begin{cases} x+y+z=24 \\ x+y+n=21 \end{cases} \Leftrightarrow z-n=3$

$2+m-n=3$

$m-n=1$

$\begin{cases} 2m+n=8 \\ m-n=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3m=9 \end{cases}$

$\boxed{m=3}$

$\boxed{n=2}$

$\boxed{z=2+3=5}$

$\boxed{y=9}$

$x+y+z=24$

$x+9+5=24$

$\boxed{x=10}$

Ответ: 2; 3; 5; 9; 10

№2

$2-\sqrt{3}$ / $2+\sqrt{3}$

$x_1x_2+x_3\cdot x_4+\ldots+x_{2017}x_{2018}$

Всего 1014 пар умножений

$x_1x_2 = (2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})$ (1) или $x_1x_2=(2-\sqrt{3})^2$ (2) или $x_1x_2=(2+\sqrt{3})^2$ (3)

Если есть $(2-\sqrt{3})^2$ то другая пара должна быть равной $(2-\sqrt{3})^2$, сумма - целое число

При 1 варианте $x_1x_2=4-3=1$, а $\Sigma=1014$

При 2+3 варианте $x_1x_2+x_3x_4=4-4\sqrt{3}+3+4+4\sqrt{3}+3=$
$=8+6=14\cdot507$ (количество комбинаций) $=7098$ - максимальная (если мы заменим две пары, то будет меньше) $\Rightarrow \Sigma_{max}=7098$

Запрещается делать пометки, раскрывающие авторство работы

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМА, ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ-ФИНАНСИСТ!»

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

Черновик

№ 3

$f(x) = |x| + |x+1| + \dots |x + 2022|$

Наименьшая сумма будет тогда, когда x является центральным значением в промежутке от 0 до 2022. Таким значением э- - -1011 или -1012

При $x = -1011$ $\Sigma = 2 \cdot$

$S_{ap_{1011}} = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n = \frac{2 \cdot 1 + 1010}{2} \cdot 1011 = 511566$

При $x = -1012$

$S_{ap_{1012}} = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot 1012 = (2 + 1011) \cdot 506 = 512578$

$511566 < 512578 \Rightarrow$ Ответ: $f(x)_{min} = 511566$

№ 4

$\angle A_1B_1C_1 = 50^\circ$

$\angle A_1C_1B_1 = 70^\circ$

$B_1C_1 = \sqrt{3}$

Найти A_1O, где O - центр вписанной окружности

$\angle C_1A_1B_1 = 180 - 70 - 50 = 180 - 120 = 60^\circ$

$\angle C_1B_1 = 120^\circ$

$B_1C_1 = \sqrt{3}$

$\begin{cases} x + z = 60 \\ x + y = 50 \\ y + z = 70 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z - y = 10 \\ y + z = 70 \end{cases} \Rightarrow 2z = 80$

$z = 40^\circ$

$y = 30^\circ$

$x = 20^\circ$

$\angle A = 2y = 60^\circ$ $z - y = 10^\circ$

$\angle B = 2z = 80^\circ$ $y + z = 50^\circ \Rightarrow$

$\angle C = 2x = 40^\circ$ $\Rightarrow y = 20^\circ$

$B_1C_1 = BC = \sqrt{3}$

$BC_1 = AC_1$ $OA_1 = \frac{2}{3} BH$

$OB = OA_1$ $BH = \sqrt{\left(\frac{AC}{2}\right)^2 + BC^2} = \sqrt{\frac{3BC^2}{4}}$

$OA_1 = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{\frac{3BC^2}{4}} =$

$= OA_1 = \frac{\sqrt{3BC^2}}{3} = 1$

Запрещается делать пометки, раскрывающие авторство работы

5801 0007

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМА, ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ-ФИНАНСИСТ!»

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

Черновик

№5

$a, b, c = R$ $\quad 0 \leq a, b, c < 1$

$\sqrt{abc} + \sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)} < 1$ $\quad 0 < abc < 1$

$0 < a+b+c < 3$

$(1-b-a+ab)(1-c)$

$1-b-a-ab-c+bc+ac-abc$

$1-\underset{0<\ <3}{(a+b+c)}-ab+\underbrace{bc+ac}-abc$

Произведение не больше 1
Корень не больше 0,5 $\Rightarrow$ равенство верно

№8

$x_1^4+x_2^4+x_3^4+\ldots+x_{14}^4$

Число x_i^4 - положительное число $\Rightarrow$ числа могут чередоваться ($\pm$)

$1^4=1$

$2^4=16$

$3^4=81$

$4^4=256$

$5^4=625$

$6^4=1296$

$7^4=2401 > 2031 \Rightarrow 7$ быть не может

$8^4=$

$x \in [0; 6]$, где $x \in Z$

Число x_i может быть равным либо 0 (когда остальные = 2031), либо меньше 2031

Всего $14_u x^4$. Найдём возможные варианты. Из всех вариантов в рамках чередуем x и получаем все возможные варианты.

$\boxed{3\cdot625+81+16+16+16+16+1+5\cdot0^4}$

$1296+625+81+16+13\cdot_u 1$ - не подходит

$1296+625+16\cdot6+14\cdot_u 1^4$ - не подходит.

$1296+256\cdot2+2\cdot81+\frac{8}{3}\cdot16$ - не подходит

6 не подходит (не может быть)

$625\cdot2\cdot256+81\cdot3+16+10\cdot_u1^4$ - не подходит.

$625+256\cdot5+81+2\cdot_u16^4$

$625+256\cdot5+16\cdot_u2^4$

$256\cdot7+6+81\cdot7+16\cdot4$

$256\cdot7+81+16\cdot7$

} не подходит.

3

5 3 2 0 1

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}$

Единственное получение 2031

Возможные числа: $\left\{ \begin{array}{ll} 3_u 5^4 & 1_u 1^4 \\ 1_u 3^4 & \\ 4_u 2^4 & \\ 5_u 0^4 & \end{array} \right\}$

Страница 3

Запрещается делать пометки, раскрывающие авторство работы

580/00

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМАЮ, ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ-ФИНАНСИСТ!»

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

Черновик

№ 6

$P = \sum$ длин всех сторон

$P_{F_1} = 3 \cdot 3a$

$P_{F_2} = \cancel{3 + \frac{2}{2}} = 3 + \frac{2}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 - \frac{1}{2} = 3,5 = \frac{6}{2}$

$\cancel{P_{F_3} = 4 + \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2}}$ $P_{F_3} = \frac{6}{2} + \frac{2}{4} - \frac{1}{4} = \frac{6}{2} + \frac{1}{4} = \frac{13}{4}$

$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{8+4+2+1}{16} = \frac{15}{16}$

$\frac{15}{16} + \frac{1}{32} = \frac{31}{32}$

$\frac{31}{32} + \frac{1}{64} = \frac{63}{64}$

$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n} = \frac{2^n - 1}{2^n}$

№ 7

Всего 2018 камней

2018 | 2
1009 | 1009 ⇒ Иван может взять либо 2, либо 1009, либо 1 камень

2 ⇒ 2016

1009 ⇒ 1009 | 0 – Петя проиграл
1008

1 ⇒ 2017 1 | 2016
2017 – Петя проиграл

После первого хода либо в 2016, либо в 1008

2016 | 2 ⇒ 2014 Ваня | 1007 | 1007 Петя | 0 1006 Ваня

2016 | 2
1008 | 2
504 | 2
252 | 2
126 | 2
63 | 63
1 |

2016 | 1953 ⇒ 1950 1947

Выигрышную стратегию имеет Ваня (Иван)

$\boxed{\text{Ваня}}$

№ 5 (продолжение)

1953 | 3
651 | 3
217 | 217
1 |

$\sqrt{abc} + \sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)} < 1 \qquad 0 < a, b, c < 1$

Чем больше a·b·c, тем меньше $\sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)}$

Если $a = b = c = 0,5$, то выражение $\approx 0,707$

Произведение никогда не будет больше 1 (т.к. дробные части лишь уменьшают значение)

Страница 4

Запрещается делать пометки, раскрывающие авторство работы

5801 0007

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМАЮ, ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ-ФИНАНСИСТ!»

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

Черновик
№ 8

5 3 2 1 0

5 3 2 1 0 5 2 0 1 5 2 0 1 3 5 3 0 2 5 2 0 1 3

5 3 2 0 1

201

Возможны комбинации?

5553222210000 0

555222210000 3

x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7 x_8 x_9 x_{10} x_{11} x_{12} x_{13} x_{14}

5 вариантов

$5^{14} - (1 \cdot 1 \cdot 4^{12}) \cdot 2 \cdot 13 - 4^{12} \cdot 2 \cdot 12 - 4^{12} \cdot 2 \cdot 11 \ldots - 4^{12} \cdot 2 \cdot - \ldots$

$= 5^{14} - 4^{12} \cdot 2(13+12+11+\ldots+1) - 4^{9} \cdot (9+8+7+6+5 \ldots +2) - 4^{8} (8+7+\ldots+3) - 4^{7}(7+6+\ldots+4) = 5^{14} - 4^{7}(4^{5} \cdot 2(13+12+11+\ldots+1) + 4^{2}(9+8+\ldots+2) + 4(8+7+\ldots+3) + (7+6+5+\ldots 4))$

$5^{14} - 4^{7} \cdot (1024 \cdot 182 + 704 + 276 + 22) = 5^{14} - 4^{7} \cdot 187350 = 78125$

$982 + 1024 \cdot 182 = 186368$

$6103515625 - 306754240 =$

78125×78125:
390625
156250
78125

$\Rightarrow$
390625
156250
78125
625000
546875
6103515625

$187350 \times 16384 =$
1124940
149880
56205
112410
18735
306754240

$6103515625 - 306754240$
$\boxed{5796761385}$

Ответ

Граница 5

Запрещается делать пометки, раскрывающие авторство работы

5801 0007

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМАЮ, ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ-ФИНАНСИСТ!»

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

Черновик

№ 6

$P = \sum$ длин всех сторон

$P_{F_1} = 3 = 3a$

$P_{F_2} = \cancel{3 + \frac{2}{2}} = 3 + \frac{2}{2}\frac{1}{2} \cdot 4 - \frac{1}{2} = 3,5 = \frac{6}{2}$

$\cancel{P_{F_3} = 4 + \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2}}$ $P_{F_3} = \frac{6}{2} + \frac{2}{4} - \frac{1}{4} = \frac{6}{2} + \frac{1}{4} = \frac{13}{4}$

$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{8+4+2+1}{16} = \frac{15}{16}$

$\frac{15}{16} + \frac{1}{32} = \frac{31}{32}$

$\frac{31}{32} + \frac{1}{64} = \frac{63}{64}$

$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n} = \frac{2^n - 1}{2^n}$

№ 7

Всего 2018 камней

2018 | 2
1009 | 1009 ⟹ Иван может взять либо 2, либо 1009, либо 1 камень
1

2 ⟹ 2016

1009 ⟹ 1009 | 0 - Петя проиграл
1008

1 ⟹ 2017 1 | 2016
2017 - Петя проиграл

После первого хода либо в 2016, либо в 1009

2016 | 2 ⟹ 2014 | 1007 | 1007 | 1006
0
Ваня Петя Ваня

2016 | 2
1008 | 2
504 | 2
252 | 2
126 | 2
63 | 63
1

2016 | 1953 ⟹ 1950
1947

Выигрышную стратегию имеет Ваня (Иван)

$\boxed{\text{Ваня}}$

№ 5 (продолжение)

1953 | 3
651 | 3
217 | 217
1

$\sqrt{abc} + \sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)} < 1 \quad 0 < a, b, c < 1$

Чем больше a b c тем меньше $\sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)}$

Если $a = b = c = 0,5$, то уравнение $\approx 0,707$

Произведение никогда не будет больше 1 (т.к. дробные части лишь уменьшают значение)

Страница 4

Запрещается делать пометки, раскрывающие авторство работы

5801000

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМАЮ, ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ-ФИНАНСИСТ!»

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

Черновик
л 18

5 3 2 1 0

5 3 2 1 0 5 2 0 1 5 2 0 1 3 5 3 0 2 5 2 0 1 3

5 3 2 0 1

Возможны комбинации?

1201

5553222210000 0

555222210000 3

x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7 x_8 x_9 x_{10} x_{11} x_{12} x_{13} x_{14}

5 вариантов

$5^{14} - (1 \cdot 1 \cdot 4^{12}) \cdot 2 \cdot 13 - 4^{12} \cdot 2 \cdot 12 - 4^{12} \cdot 2 \cdot 11 \ldots - 4^{12} \cdot 2 \cdot - \ldots$

-1)

$= 5^{14} - 4^{12} \cdot 2(13+12+11+\ldots+1) - 4^9 \cdot (9+8+7+6+5 \ldots +2) \cancel{+4^9} - 4^8(8+7+\ldots+3) -$
$- 4^7(7+6+\ldots+4) = 5^{14} - 4^7\big(4^5 \cdot 2(13+12+11+\ldots+1) + 4^2(9+8+\ldots+2) + 4(8+7+\ldots+3) +$
$+ (7+6+5+\ldots 4)\big)$

$5^{14} - 4^7 \cdot (1024 \cdot 182 + 704 + 276 + 22) = 5^{14} - 4^7 \cdot 187350 = 78125$

$982 + 1024 \cdot 182 = 186368$

$6103515625 - 306754240 =$

$$\begin{array}{r} 78125 \\ \times\ 78125 \\ \hline 390625 \\ 156250 \\ 78125 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} 187350 \\ \hline 390625 \\ +\ 156250 \\ 78125 \\ 625000 \\ 546875 \\ \hline 6103515625 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 187350 \\ \times\ 16384 \\ \hline 1274940 \\ +\ 149580 \\ 56205 \\ 12410 \\ 18735 \\ \hline 306754240 \end{array} = \begin{array}{r} 6103515625 \\ -\ 306754240 \\ \hline \boxed{5996761385} \end{array}$$

Ответ

Граница 5

Запрещается делать пометки, раскрывающие авторство работы

Оценочный бланк олимпиадных заданий по математике

Код участника: 611151

	Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8
Полученные баллы	Первый проверяющий	~~2~~ 10	5	6	0	12	10	0	0
	Второй проверяющий	10	5	6	0	12	10	0	0
	Итого	10	5	6	0	12	10	0	0
Сумма баллов (оценка)		43							

Члены жюри:

Подпись — Фенин Д.Б.

Фамилия И.О.

Подпись — Александрова И.А.

Фамилия И.О.

Подпись

Фамилия И.О.

Всероссийская олимпиада школьников «Миссия выполнима. Твое призвание -финансист!»

ПО МАТЕМАТИКЕ 10 класс

Заключительный (очный) этап 2017/2018 учебный год

611151

Код участника

Вариант II

Задание 1. (10 баллов)

Пять различных гирь, каждая из которых весит целое число килограмм, были взвешены всевозможными группами по три гири. В результате получили следующие веса (в килограммах) десяти взвешенных групп: 11, 14, 15, 16, 17, 17, 19, 20, 22, 23. Найдите веса этих пяти гирь.

Задание 2. (10 баллов)

Даны 2030 чисел $x_1, x_2, \ldots, x_{2030}$, каждое из которых равно либо $\sqrt{2}-1$ либо $\sqrt{2}+1$. Найдите наибольшее возможное значение суммы $x_1x_2 + x_3x_4 + x_5x_6 + \ldots + x_{2029}x_{2030}$, если известно, что она является целым числом.

Задание 3. (12 баллов)

Найдите наименьшее значение функции $f(x)=|x|+|x+1|+\ldots+|x+2018|$.

Задача 4. (12 баллов)

Биссектрисы углов A, B и C треугольника ABC пересекаются с описанной около этого треугольника окружностью в точках A_1, B_1 и C_1, соответственно. Найдите расстояния между точкой A_1 и центром вписанной в треугольник ABC окружности, если известно, что $\angle A_1B_1C_1 = 55^\circ$, $\angle A_1C_1B_1 = 65^\circ$, $B_1C_1 = \sqrt{6}$.

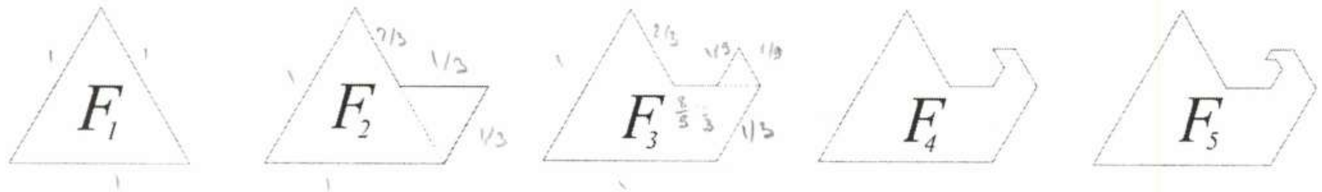
611151

Задание 5. (12 баллов)

Докажите, что для любых действительных чисел a, b, c таких, что $0 < a, b, c < 1$, выполнено следующее неравенство $\sqrt{abc} + \sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)} < 1$.

Задание 6. (14 баллов)

Дана бесконечная последовательность многоугольников $F_1, F_2, F_3, F_4 \ldots$ Фигура F_1 – это равносторонний треугольник со стороной 1. Пятиугольник F_2 получается из треугольника F_1 построением на его стороне равностороннего треугольника со стороной $\frac{1}{3}$, как показано на рисунке. Семиугольник F_3 получается из пятиугольника F_2 построением на его стороне длины $\frac{1}{3}$ равностороннего треугольника со стороной $\frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$ и так далее. На каждом шаге строится треугольник, сторона которого в три раза меньше стороны треугольника, построенного на предыдущем шаге.



Докажите, что периметр каждой из рассматриваемых фигур не превышает 3,5.

Задание 7. (14 баллов)

Иван и Петр играют в следующую игру. Из кучки, которая содержит 2020 камней, они по очереди берут некоторое количество камней. Если перед ходом в кучке имеется N камней, то игрок может взять k камней, только если k является делителем числа N. Проигрывает тот игрок, который возьмет последний камень. Кто из игроков имеет выигрышную стратегию, если первым берет камни Иван?

Задача 8. (16 баллов)

Сколько решений в целых числах имеет уравнение $x_1^4 + x_2^4 + \cdots + x_{14}^4 = 2047$.

611151 чистовик

№2

2030 чисел: $x_1; x_2; \ldots; x_{2030}$ $(\sqrt{2}-1)$ или $(\sqrt{2}+1)$

$A: (x_1x_2+x_3x_4+x_5x_6+\ldots+x_{2029}\cdot x_{2030})$ - макс? $(A\in \mathbb{Z})$

1) При условии, что все числа равны $(\sqrt{2}+1)$:

$(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}+1)=(\sqrt{2}+1)^2=2+1+2\sqrt{2}=3+2\sqrt{2}$ - не явл. целым числом

2) При условии, что все числа равны $(\sqrt{2}-1)$:

$(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}-1)^2=(\sqrt{2}-1)^2=2+1-2\sqrt{2}=3-2\sqrt{2}$ - не явл. целым числом

3) При условии чередования чисел:

$(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)=2-1=1$ - целое значение, но не максимально возможное

Заметим из (1) и (2), что в этих случаях а, не целая часть единиц у произведений двух множителей одинакова по модулю и противоположная по знаку, а целая часть больше, чем если мы войдём на разность квадратов. Если взять чередование значений, то а неуделная часть уничтожится, при этом целая будет max возможной.

Рассмотрено всего 3 варианта для произведения пары чисел т.к. это все возможные представления (всего их 4 варианта, но перестановка не представляет интереса, т.к. на результат не влияет):

$\frac{+}{2}$

$x_1x_2+x_3x_4+\ldots+x_{2029}x_{2030}=(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}+1)+\ldots$

$\ldots+(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}+1)=(2+1-\cancel{2\sqrt{2}})+(2+1+\cancel{2\sqrt{2}})+\ldots+(2+1+\cancel{2\sqrt{2}})=$

$=3\cdot(2030:2)=3\cdot 1015=3045$

Ответ: 3045

Может быть не более $\left[\frac{2030}{4}\right]$ одноименных пар! $6\cdot 508+1=$ $=3043$

№3

$f(x)=|x|+|x+1|+\ldots+|x+2018|$ - мин.?

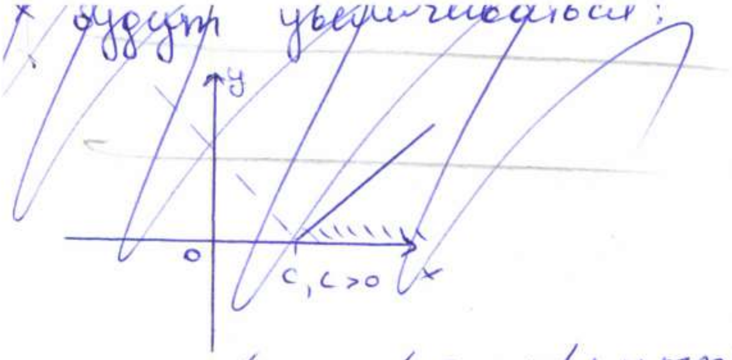
$f(x)=0+1+2+\ldots+2018$ - Арифм. прогр. с $d=1$

$S_n=\frac{2018+0}{2}\cdot 2019=2019\cdot 1009=2037171$ - минимальное значение функции.

$$\begin{array}{r} \times\begin{array}{r}2019\\1009\end{array}\\ \hline 18171\\ 20190\\ \hline 2037171\end{array}$$

Если вместо $x=0$ брать другие константы, то результат будет лишь увеличиваться; при $x>0$ график модуля будет смещаться параллельным переносом вправо, при этом значения положительн

~~будут увеличиваться;~~



~~и при отрицательном значении x произойдет смещение графика парал. переносом влево, при этом значение функции не будет минимальным~~

~~Обоснование 1:~~

~~При выборе любого отрицательного x значения модулей до и после обнуления будут уменьшаться и увеличиваться на одно и то же число и выражения такого ситуацию не даёт.~~ Например:

$f(x) = |x| + |x+1| + \dots + |x+2018|$ – мин. зн.

Для того, чтобы достигнуть минимального значения функции, центральный модуль (т.е. модуль с номером 1010 в нашей ситуации), должен равняться нулю, т.е.:

↑ нет обоснования!

$|x+1009| = 0$

$x = -1009$

Таким образом, всю функцию можно разбить на 2 арифм. прогрессии с $d_1 = 1$ и $d_2 = -1$ в зависимости от расположения модулей относительно модуля с номером 1010:

$f(x) = 1009 + 1008 + \dots + 0 + 1 + 2 + \dots + 1009$

$$S_1 = \frac{1009+0}{2} \cdot 1010 = \frac{1009 \cdot 1010}{2} = 505 \cdot 1009$$

$$S_2 = \frac{1009+1}{2} \cdot 1009 = 505 \cdot 1009$$

$$\begin{array}{r} 1009 \\ \times\ 1010 \\ \hline 1009 \\ 1009 \\ \hline 1019090 \end{array}$$

$S_1 + S_2 = 2S_1 = 2 \cdot 505 \cdot 1009 = 1010 \cdot 1009 = 1019090$

+/2

Ответ: 1019090

№6

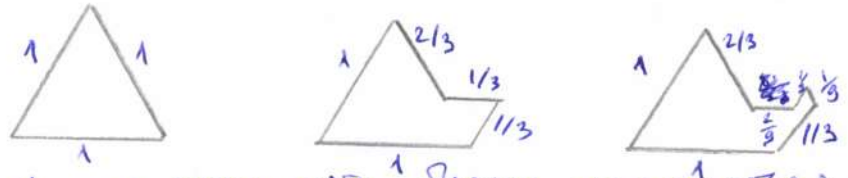
Рассмотрим периметры получившихся фигур

$P_1: 1+1+1=3$

$P_2: 1+1+\frac{2}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3} = 3+\frac{1}{3}$

$P_3: \underbrace{1+1+\frac{2}{3}+\frac{1}{3}}+\frac{2}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9} = 3+\frac{4}{9}$

$P_4: 3+\frac{4}{9}+\frac{1}{27} = 3+\frac{13}{27}$; $P_5: 3+\frac{13}{27}+\frac{1}{81} = 3+\frac{40}{81}$ и т.д.



Ан-но периметр будет изменяться и для последующих фигур. Одна сторона заменяется на ее длину, уменьшенную на длину новой стороны + 2 новые, т.е.

$\cancel{a_1 = \left(a_0 - \frac{1}{3^n}\right) + \frac{2}{3^n}}$, $\cancel{n \in N}$ $\cancel{1 \Rightarrow 1-\frac{1}{3} = \frac{2}{3}}$, $\cancel{\frac{2}{3} \Rightarrow \frac{2}{3}-\frac{1}{9} = \frac{6}{9}-\frac{1}{9} = \frac{5}{9}}$

$\cancel{a_1 = a_0 + \frac{21}{3^n}}$, $\cancel{n \in N}$

При увеличении сторон многоугольника сумма
длина сторон будет увеличиваться на $\frac{1}{3^n}$, т.е.

$P_2 = P_1 + \frac{1}{3^1}$; $\boxed{P_n = P_{n-1} + \frac{1}{3^{n-1}}}$

Таким образом, увеличение изначального периода будет происходить на:

$\frac{1}{3^1}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+\dots+\frac{1}{3^{n-1}} = \frac{27+9+3+1}{81}+\dots+\frac{1}{3^{n-1}} =$

$= \left(\frac{40}{81}+\dots+\frac{1}{3^{n-1}}\right)^{<0,5} \Rightarrow$ Периметр новой фигуры будет

меньше $3,5$ ($<0,5$), ч.т.д.

$\frac{1}{3^1}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\dots+\frac{1}{3^{n-1}} = \frac{3^{n-2}+3^{n-3}+3^{n-4}+\dots+1}{3^{n-1}} < 0,5$

±

не доказано!

N5

$0 < a, b, c < 1$

$\sqrt{abc} + \sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)} < 1$ - ?

$\sqrt{abc} \leq \frac{a+b+c}{3}$

$\sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)} \leq \frac{1-a+1-b+1-c}{3}$

$\sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)} \leq 1 - \frac{a+b+c}{3}$

Т.к. неравенства одного знака можем их сложить:

$\sqrt{abc} + \sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)} \leq 1 - \frac{a+b+c}{3} + \frac{a+b+c}{3}$

$\sqrt{abc} + \sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)} \leq 1 \Rightarrow \sqrt{abc} + \sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)} < 1$ ч.т.д.

$0 < a, b, c < 1$

т.к. корень из произведения любых чисел, меньше 1 и больше 0 меньше, чем их арифметическая сумма, ~~...~~ чисел

N1

$$\begin{cases} a+b+c=17 \quad (1) \\ a+c+d=17 \\ a+c+d=11 \\ c+d+e=14 \\ a+c+e=15 \\ b+c+d=16 \\ a+b+d=19 \quad (2) \\ b+c+e=20 \\ b+d+e=22 \\ a+b+e=23 \quad (3) \\ a,b,c,d,e \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1) $2a+b+c+d+e=28$

2) $2b+a+d+c+e=34$

3) $2e+a+b+c+d=38$

4) $2d+a+b+c+e=38$

5) $2c+a+d+b+e=36$

Из (1-5) $\Rightarrow 6(a+b+c+d+e)=174$

$a+b+c+d+e=29 \quad (6)$

$$\begin{cases} a+b+c+d+e=29 \text{ (из 1, 2, 3 и 6)} \\ a+b+c=17 \\ a+b+d=19 \\ a+b+e=23 \end{cases}$$

$$\begin{cases} d+e=12 \\ c+e=10 \\ c+d=6 \\ a+b+c+d+e=29 \end{cases} \qquad \begin{cases} e=12-d \\ c+12-d=10 \\ c+d=6 \\ a+b+c+d+e=29 \end{cases} \qquad \begin{cases} e=12-d \\ d=c+2 \\ c+c+2=6 \\ a+b+c+d+e=29 \end{cases}$$

611151

$$\begin{cases} [illegible] \\ d = c+2 \\ \cancel{\ldots}\ c = 2 \\ a+b+c+d+e = 29 \end{cases} \quad \begin{cases} d = 4 \\ e = 8 \\ a+b+c+d+e = 29 \end{cases}$$

$$\cancel{\ldots}\ \begin{cases} b+d+e = 22 \\ d = 4 \\ e = 8 \end{cases} \quad \begin{cases} b = 10 \\ d = 4 \\ e = 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+b+c = 17 \\ b = 10 \\ c = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} a = 5 \\ b = 10 \\ c = 2 \end{cases}$$

Получим, что: $\begin{cases} a = 5 \\ b = 10 \\ c = 2 \\ d = 4 \\ e = 8 \end{cases}$

+

Ответ: 2; 4; 5; 8; 10

N7

Всего 2020 камней, первым берет Иван.

$$\begin{array}{r|l} 2020 & 2 \\ 1010 & 2 \\ 505 & 5 \\ 101 & 101 \\ 1 & \end{array}$$

Для того, чтобы стратегия сработала, игроку (противнику) нужно оставить простое число камней. Тогда он берет или 1 или все

В конечном итоге на поле должно остаться 2 камня, чтобы игрок, который делает следующий, не проиграл.

−

[redacted] Черновик

$\frac{174}{-12} \Big| \frac{6}{29}$, 54, -54

011151

5 разл. чис: a, b, c, d, e

$$\begin{cases} a+b+c=11 & (1) \\ a+b+d=14 & (2) \\ a+b+e=15 & \\ a+c+d=16 & (3) \\ a+c+e=17 & (4) \\ a+d+e=17 & (9) \\ b+c+d=19 & 5 \\ b+c+e=20 & 2 \\ b+d+e=22 & (5)\ 4 \\ c+d+e=23 & (6)\ 3 \end{cases}$$

из (1) и (2): (1) − (2): $c-d=-3$, $c=d-3$

(4) − (3): $e-d=1$, $e=d-1$

(6) − (5): $c-b=1$, $c=b+1$, $b=c-1$

$c=d-3$ (7)

$e=d-1$ (8)

$c=b+1$

$b=c-1$

$c=e-2$

(3): $a+d-3+d=16$

$a+2d=19$

(9): $a+d+e=17$

$e=d-1$

$a+d+d-1=17$

$a+2d=18$

1) $a+b+c=11$, $a+b+d=14$ ⟹ $c-d=-3$, $c=d-3$

2) $a+c+d=16$

$a+d-3+d=16$

$a+2d=19$

$a=19-2d$

3) $\begin{cases} a+d+e=17 \\ a+c+e=17 \end{cases}$ ⟹ $d=c$

$28+34=62$, $62+38=100$; $100+38=138$, $138+36=174$

1) $2a+b+c+d+e=11+17=28$

2) $2b+a+d+c+e=2014=34$

3) $2c+a+b+c+d=23+15=38$

3) $2e+a+d+b+e=16+22=38$

4) $2d+a+c+b+e=17+19=36$

5) $2c+a+d+b+e=174$

$6(a+b+c+d+e)=174$

$a+b+c+d+e=29$

$f(x)=|x|+|x+1|+\ldots+|x+2018|$ – min знач. функц.

минимальное значение модуля достигается при его обнулении, т.е. при $x=$ ~~2018~~ 0

Если мы возьмем вместо x какую-то переменную, то каждый последующий модуль будет увеличиваться на 1 (при услов. x – целое натур. ч)

возьмем $x:=-5$, $|x|=5$; $|x+1|=4$

тогда сначала модуль будет уменьшаться, дойдет до 0, а потом начнет увеличиваться

~~[illegible]~~

$$\begin{cases} a+b+c=11 & 2 \\ a+b+d=14 & \\ a+b+e=15 & 6 \\ a+c+d=16 & 3 \\ a+c+e=17 & 4 \\ a+d+e=17 & \\ b+c+d=19 & \\ b+c+e=20 & \\ b+d+e=22 & 1 \\ c+d+e=23 & \end{cases}$$

1) $b+d+e=22$ − $c+d+e=23$ ⟹ $b-c=-1$, $c-b=1$, $c=b+1$

2) $a+b+c=11$

$a+b+b+1=11$

$a+2b=10$

$a=10-2b$

3) $a+c+d=16$, $a+c+e=17$ ⟹ $d-e=-1$, $d=e-1$

4) $a+c+e=17$, $a+d+e=17$ ⟹ $c=d$

5) 1 и 4 ⟹ $\begin{cases} c=b+1 \\ d=e-1 \\ c=d \end{cases}$ $b+1=e-1$, $b=e-2$, $e=b+2$

из (5) ⟹ $a+b+e=15$

$10-2b+b+b+2=15$

$12=15$ (!)

$\cancel{a+b+c=11}$ ①
$\cancel{a+b+d=14}$ ②
$\cancel{a+b+f=15}$ ③
$\cancel{a+c+d=16}$
$\cancel{b+c+d=17}$
$\cancel{a+c+f=17}$ ④
$\cancel{a+d+f=19}$
$\cancel{b+c+f=20}$
$\cancel{b+d+f=22}$
$\cancel{c+d+f=23}$

1) $\Rightarrow \cancel{a}\ a+c+f = b+d+c$
$a+f = b+d$

2) $a+b+f=15$
$b+d+b=15$
$2b+d=15$

1) $a+b+c=11$
$a = 11-b-c$

2) $a+b+d=14$
$11-b-c+b+d=14$
$11-c+d=14$
$d=3+c$

3) $a+b+f=15$
$11-b-c+f=15$
$-b-c+f=4$
$f-(b+c)=4$
$f=4+b+c$

4) $a+c+f=17$
$11-\cancel{b}-\cancel{c}+\cancel{c}+4+\cancel{b}+c=17$
$15+c=17$
$c=2$

$$\begin{cases} a+b+2=11 \\ a+b+d=14 \\ a+b+f=15 \\ a+2+d=16 \\ b+2+d=17 \\ a+2+f=17 \\ a+d+f=19 \\ b+2+f=20 \\ b+d+f=22 \\ 2+d+f=23 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+b=9 \\ a+b+d=14 \\ a+b+f=15 \\ a+d=14 \\ b+d=15 \\ a+f=15 \\ a+d+f=19 \\ b+f=18 \\ b+d+f=22 \\ d+f=21 \end{cases}$$

5) $9+d=14$
$d=5$

6) $\begin{cases} a+b=9 \\ a+b+f=15 \end{cases}$
$9+f=15$
$f=6$

7) $a+d=14$
$d=5$
$a=9$

8) $a+b=9$
$a=9$
$b=0$

$2030:2=1015$

$x_1, x_2, x_3 \dots x_{2030}$ $\sqrt{2}-1$ или $\sqrt{2}+1$
$x_1x_2 + x_3x_4 + x_5x_6 + \dots + x_{2029}x_{2020}$ - може, 2 - ?

$(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1) = 2-1=1$

$(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}-1) = (\sqrt{2}-1)^2 = 2+1-2\sqrt{2} = \underbrace{3-2\sqrt{2}}_{<1}$

$(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}+1) = (\sqrt{2}+1)^2 = 2+1+2\sqrt{2} = 3+2\sqrt{2}$

$(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}-1) = 3-2\sqrt{2} + 3+2\sqrt{2} = 6$

x_1x_2 и x

$\frac{8}{93} = \frac{8}{27} + \frac{2}{9} = \frac{612}{27} = \frac{1}{27}$

$27+9+3+1$ $\frac{40}{81}$

$\frac{1}{3^1} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^{n-1}} = \frac{3^{n-2}+3^{n-3}+3^{n-4}}{3^{n-1}} = \frac{3(1+3+3^2+\dots 3^{n-3})}{3}$

$\frac{1}{3} = \frac{8}{9 \cdot 3}$ $\frac{1}{3} - \frac{1}{9} = \frac{3-1}{9} = \frac{2}{9}$

$\frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{4}{9} + \frac{1}{27} + \dots$

$\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} = \frac{3^2+3+1}{3^3} =$
3^2+3+1

$= \frac{3^n+3^{n-1}+3^0}{3^{n+1}} < 0,5$

611191

$\sqrt{abc} + \sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)} < 1 \quad ; \; a>0;\ b,c<1$

$\sqrt{abc} + \sqrt{(1-b-a+ab)(1-c)}$

$\sqrt{abc} + \sqrt{1-c-b+bc-a+ac+ab+abc}$

$\sqrt{acb} + \sqrt{bc+ab+ac-c-b-a+1}$

$bc+ab+ac-c-b-a = a(b+c-1)+c(c-b+1) =$

$= a(b+c-1) - c($

$\sqrt{abc} + \sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)} - 1 < 0$

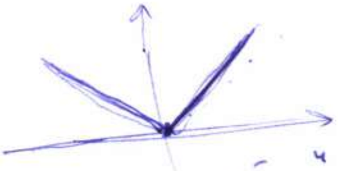
$\sqrt{abc} + \underbrace{\sqrt{1-c-b+bc-a+ac+ab+abc}}_{<1} - 1 < 0$

$1-c-b+bc-a(1-c-b-bc)$

$2018:2 = 1009$

1010

центр.



$f(x) = |x| + |x+1| + \ldots + |x+2018|$

$f(x) = |x| + |x+1| \qquad + |x+2018|$

для того, чтобы достигнуть миним. результата, и центральный модуль, т.е. модуль с номером 1010, должен равняться 0

$$\begin{array}{r} 1009 \\ \times 1010 \\ \hline 1009 \\ 10090 \\ \hline 1019090 \\ \times 2 \\ \hline 2038180 \end{array}$$

тогда: $|x+1009| = 0$

$x = -1009$

$f(x) = |-1009| + |1-1009| + \ldots + |2018-1009|$

$f(x) = |-1009| + |1-1009| + \ldots + 0+1+2+\ldots+1009 =$

$1009+1008+1007+\ldots+0+1+2+\ldots+1009 =$

Арифм. прогр. с $d = -1$

Арифм. прогр. с $d = 1$

$S = \frac{a_1+a_n}{2} \cdot n = \frac{1009+1}{2} \cdot 1009 = \frac{2}{2020} 1010 \cdot 1009$

$0+1+2+\ldots+2018$

$S = \frac{0+2018}{2} \cdot 2019 = 1009 \cdot 2019 =$

$|x| + |x|+1 + |x|+2 + |x|+3$

$2018|x| + 1+2+3+4\ldots$

$\begin{cases} d+e=12 \\ e+c=10 \\ c+d=6 \end{cases}$

$\frac{1010 \cdot 9}{2}$

$\begin{cases} e = 12-d \\ c+12-d = 10 \\ c+d = 6 \end{cases}$

$\begin{cases} e = 12-d \\ d = c+2 \\ c+c+2 = 6 \end{cases}$

$2c = 14$

$c = 2$

$a+b+c+d+e = 29$

$a+b+c = 17$

$a+b+d = 19$

$a+b+e = 23$

$1+0+1$

$c = 11-d$

$0+1+2+3 = 15$

$11-d+e+1$

$|2|+|1|+0+1$

$e = 15+d = 14$

$= e-d+1$

$2d+1 = 18$

15

$4+5+6 = 15$

$a+$

$4+5+6$

$a+9$

$b+d+e = 22$

$b = 10$

$a+b+c = 17$

$a = 5$

$c = 2$

$d = 4$

$e = 8$

$5+6 = 11$

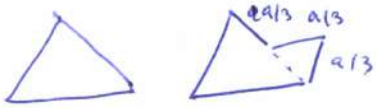
$a, b, c, d, f \in \mathbb{N}$

$$\begin{cases} a+b+c=11 \\ a+b+d=14 \\ a+b+f=15 \\ b+d+f=16 \\ b+c+f=17 \\ c+d+f=17 \\ a+c+d=19 \\ a+c+f=20 \\ a+d+f=22 \\ b+c+d=23 \end{cases}$$

$b+c+f=17$
$c+d+f=17 \Rightarrow b=d$

$a+b+c=11$
$a+b+b=14$
$a+b+f=15$
$b+b+f=16$
$b+c+f=17$
$c+b+f=17$
$a+c+b=19$
$a+c+f=20$

в равных весах:



2020 камней

Иван; k - делители

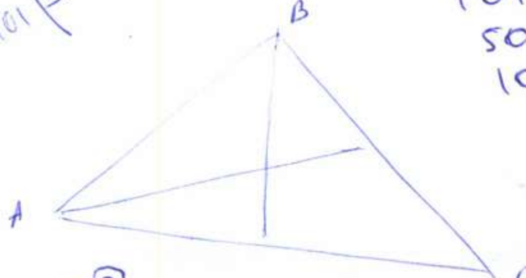
1

оставить 1 камень при y камней можно только если $y \vdots (y-1)$, что не возможно (кроме 2 и 1)

2020	2
1010	2
505	5
101	101
1	

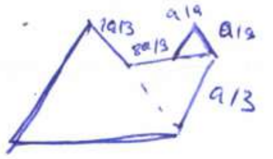
101 | 13

101 | 17 7



$S = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

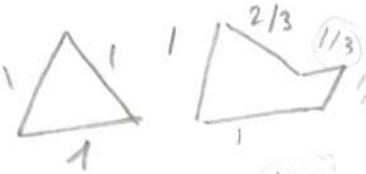
2



3,5: Периметр

$P_1: a+a+a$
$P_2: a+a+\frac{a}{2}+a$

$P_1: a+a+a$
$P_2: a+a+\frac{a}{3}+\frac{a}{3}+\frac{a}{3}$
$P_3: a+a+\cancel{\frac{a}{3}}+\frac{a}{3}+\frac{a}{3}+\frac{a}{3}$
$P_4: a+a+\frac{a}{3}+\frac{a}{3}+\cancel{a}+\frac{a}{3}$



$\frac{8}{27}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}=\frac{8+6}{27}=\frac{14}{27}+3 > 3,5$

$\frac{2a}{3}+\frac{a}{3}+\frac{a}{3}=\frac{4a}{3}=a+\frac{a}{3}$

$P_1: a+a+a$
$P_2: a+a+\frac{2a}{3}+\frac{a}{3}+\frac{a}{3}$
$P_3: a+a+\frac{2a}{3}+\frac{a}{3}+\frac{8a}{9}+\frac{a}{9}+\frac{a}{9}$: $3a+\frac{a}{3}+a+\frac{a}{9}=$

$\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}=\frac{9+3+1}{27}=\frac{13}{27}$

$\frac{8+3+3}{1}$

$\frac{1}{27}$

3^+

$a = a - \frac{1}{a^2}$

$1 = (1-\frac{1}{3}) + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$

$\frac{a^{n+1} - a^{n}}{a^n}$

$a = a - \frac{1}{3^n}$

$1 = 1 - \frac{1}{3}$

$1+1+\frac{2}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{8}{27}$

$3+\frac{14}{27}$

$a = a - \frac{1}{a^2}$

(3)

071157

12

$\sqrt{abc} + \sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)} < 1$

$\sqrt{abc} < \frac{a+b+c}{3}$

$\sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)} < \frac{3-a-b-c}{3} < 1 - \frac{a+b+c}{3}$

$\sqrt{abc} + \sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)} < 1 + \frac{a+b+c}{3} - \frac{a+b+c}{3}$

$\sqrt{abc} + \sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)} < 1$, ч.т.д.

$\sqrt{abc} + \sqrt{(1-b-a+ab)(1-c)}$

$\sqrt{1-c-b+bc-a+ac+ab-abc}$

$(1-c-b+bc)$ $\qquad \sqrt{(1-c-b+bc)(1-a)}$

$-a(1-c-b+bc)$

$a=b=c=0{,}5 \;:\; \frac{0{,}5+0{,}5+0{,}5}{3} = 0{,}5$

$\sqrt{0{,}5 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5} = 0{,}5\sqrt{0{,}5}$

какие-то две равны

~~[illegible]~~
$d+c+f=17$
~~[illegible]~~
$a+b+f=14$
$b+c+d=15$
~~$b+c+f=16$~~
~~$a+c+d=19$~~
~~$a+c+f=20$~~
~~$a+d+f=22$~~
~~[illegible]~~

a, b, c, d, f

1) $a+b+d=11$
$a+b+f=14$
$f-d=3$
$f=d+3$

2) $b+c+d=15$
$b+c+\cancel{d}f=16$

$a+b+c=14$
$a+d+f=19$
$2a+b+c+d+f=33$
$b+d+f=16$
$b+a+c=17$
$2b+d+f+a+c=37$

$a+b+c=17$
$a+b+d=19$
$a+b+e=23$
$a+d+e=22$
$b+d+e=17$
$a+c+d=16$
$b+c+d=15$
$a+c+e=11$
$a+c+d=11$
$c+d+e=14$
$b+c+e=20$

1) $b+c+f=17$
$d+c+f=23$ $\Rightarrow b=d-6$

2) $a+c+f=15$
$a+d+f=19$ $\Rightarrow d=c+4$

$c=d-4$

3) $b+c+d=22$
$d-5+c+d=22$
$d-6+d-4+d=22$
$3d=32$

$c+a+d=17$
$c+f+b=17$
$2c+a+d+b+f=34$

$2a+b+c+d+f = 11+17 = 28$
$a+b+d+c+e = 14+20 = 34$
$2c+a+d$

2020 камней; берут по k (k делитель N)
последний камень - проигрыш.

~~Если останется простое число~~ Если в итоге останется 2 камня, то игрок проиграет

2020 | 2
1010 | 2
505 | 5
101 | 101
0

65 + 55 = 120

Иван: начнем сокращ. кол-во камней
2020 - ~~110~~ 1010

672 | 2
336 | 2

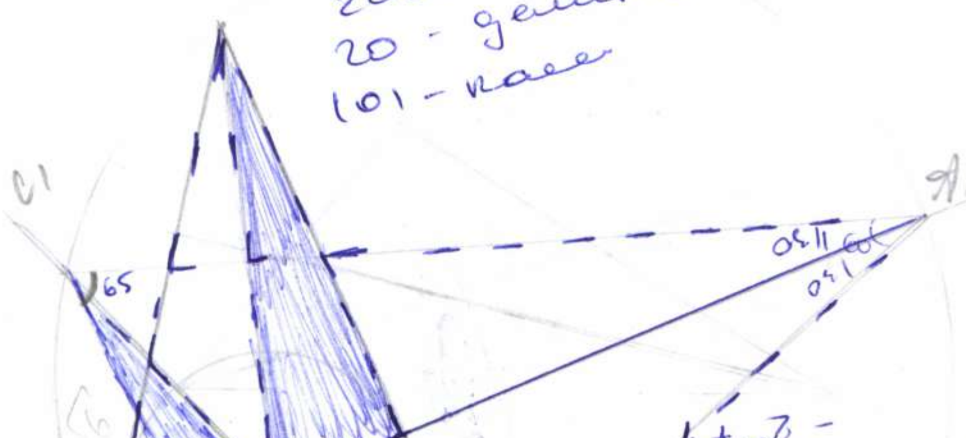
1) взял 1010 : ост. 1010 - 4

2020 камней
20 - делится
101 - нет

$\angle C_1A_1B_1 = 60^\circ$
в $\triangle A_1C_1B_1$: $\frac{C_1B_1}{\sin 60^\circ} = \frac{C_1A_1}{\sin 55}$
$\frac{C_1B_1}{\sin 60^\circ} = \frac{B_1A_1}{\sin 65}$

2019 - ?

2019 | 3 = 673



1к взял И
ост. 2019 к.
$2019 = 3 \cdot 672 =$

Оценочный бланк олимпиадных заданий по математике

Код участника: 58010016

Номер задания		1	2	3	4	5	6	7	8
Полученные баллы	Первый проверяющий	10	10	0	0	0	14	0	8
	Второй проверяющий	10	10	0	0	0	14	0	8
	Итого	10	10	0	0	0	14	0	8
Сумма баллов (оценка)		42							

Члены жюри:

Подпись	Александрова И.А. Фамилия И.О.
Подпись	Волкова Е.С. Фамилия И.О.
Подпись	Фенин ВА Фамилия И.О.

Всероссийская олимпиада школьников «Миссия выполнима. Твое призвание -финансист!»

ПО МАТЕМАТИКЕ 10 класс

Заключительный (очный) этап 2017/2018 учебный год

58010015

Код участника

Вариант I

Задание 1. (10 баллов)

Пять различных гирь, каждая из которых весит целое число килограмм, были взвешены всевозможными группами по три гири. В результате получили следующие веса (в килограммах) десяти взвешенных групп: 10, 14, 15, 16, 17, 17, 18, 21, 22, 24. Найдите веса этих пяти гирь.

Задание 2. (10 баллов)

Даны 2018 чисел $x_1, x_2, \ldots, x_{2018}$, каждое из которых равно либо $2-\sqrt{3}$ либо $2+\sqrt{3}$. Найдите наибольшее возможное значение суммы $x_1x_2 + x_3x_4 + x_5x_6 + \ldots + x_{2017}x_{2018}$, если известно, что она является целым числом.

Задание 3. (12 баллов)

Найдите наименьшее значение функции $f(x)=|x|+|x+1|+\ldots+|x+2022|$.

Задача 4. (12 баллов)

Биссектрисы углов A, B и C треугольника ABC пересекаются с описанной около этого треугольника окружностью в точках A_1, B_1 и C_1, соответственно. Найдите расстояния между точкой A_1 и центром вписанной в треугольник ABC окружности, если известно, что $\angle A_1B_1C_1 = 50^\circ$, $\angle A_1C_1B_1 = 70^\circ$, $B_1C_1 = \sqrt{3}$.

58010015

Задание 5. (12 баллов)

Докажите, что для любых действительных чисел a, b, c таких, что $0 < a, b, c < 1$, выполнено следующее неравенство $\sqrt{abc} + \sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)} < 1$.

Задание 6. (14 баллов)

Дана бесконечная последовательность многоугольников $F_1, F_2, F_3, F_4 \ldots$ Фигура F_1 – это равносторонний треугольник со стороной 1. Пятиугольник F_2 получается из треугольника F_1 построением на его стороне равностороннего треугольника со стороной $\frac{1}{2}$, как показано на рисунке. Семиугольник F_3 получается из пятиугольника F_2 построением на его стороне длины $\frac{1}{2}$ равностороннего треугольника со стороной $\frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$ и так далее. На каждом шаге строится треугольник, сторона которого в два раза меньше стороны треугольника, построенного на предыдущем шаге.

F_1 F_2 F_3 F_4 F_5

Докажите, что периметр каждой из рассматриваемых фигур не превышает 4.

Задание 7. (14 баллов)

Иван и Петр играют в следующую игру. Из кучки, которая содержит 2018 камней, они по очереди берут некоторое количество камней. Если перед ходом в кучке имеется N камней, то игрок может взять k камней, только если k является делителем числа N. Проигрывает тот игрок, который возьмет последний камень. Кто из игроков имеет выигрышную стратегию, если первым берет камни Иван?

Задача 8. (16 баллов)

Сколько решений в целых числах имеет уравнение $x_1^4 + x_2^4 + \cdots + x_{14}^4 = 2031$.

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМАЮ, ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ-ФИНАНСИСТ!»

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ чистовик.

1

допустим $a<b<c<d<e$ $\quad a,b,c,d,e \in N$.
тогда $a+b+c=10$
$c+d+e=24$

1) пусть $c=9$, тогда $b=1$ и $a=0 \Rightarrow$ не м.б.
2) пусть $c=8$, тогда $b=a=1 \Rightarrow$ не м.б.
3) пусть $c=7$, тогда $b=2$, $a=1$ $\quad a+b+d=14$. (усл.)
$d+e=17$. $\quad \overset{\Downarrow}{d}=11$
$e=6$ $\quad e<d \Rightarrow$ не м.б.
4) пусть $c=6$, тогда $a=1$, $b=3$. $\quad a+b+d=14 \Rightarrow d=10$
$d+e=14 \Rightarrow e=4$ $\quad e<d \Rightarrow$ не м.б.
5) пусть $c=5$, тогда:
а) $a=2$, $b=3$
$d=9$, $e=10$
$2, 3, 5, 9, 10$.
подходит.

б) $a=1$, $b=4$.
$d=9$, $e=10$.
$1, 4, 5, 9, 10$
$a+d+e=20$, а такой ε нет $\Rightarrow$ не м.б.

6) пусть $c=4$, тогда $a+b=6$
$a=1$, $b=5$ $\quad b>c$ не м.б.
$a=2$, $b=4$ $\quad b=c$ не м.б.
$a=3$, $b=3$ $\quad a=b$ не м.б.
$a=4$, $b=2$ $\quad a>b$ не м.б.
$a=5$, $b=1$ $\quad a>b$ не м.б. $\Rightarrow$ при $c=3,2,1$ тоже не м.б.

+

Ответ: $2, 3, 5, 9, 10$.

Запрещается делать пометки, раскрывающие авторство работы

58010015

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМА, ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ-ФИНАНСИСТ!»

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

черновик

2

Рассмотрим все возможные произведения $x_n \cdot x_{n+1}$, $n \in N$.

$x_n x_{n+1} = (2-\sqrt{3})^2 = 7-4\sqrt{3}$

$x_n x_{n+1} = (2+\sqrt{3})^2 = 7+4\sqrt{3}$

$x_n x_{n+1} = (2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3}) = 1$.

Заметим, что у нас нечетное кол-во пар (1009) и что $\max(x_n x_{n+1} + x_{n+2} x_{n+3}) = 7-4\sqrt{3} + 7+4\sqrt{3} = 14 \Rightarrow$

+.

$\underbrace{x_1 x_2 + x_3 x_4}_{14} + \ldots + \underbrace{x_{2013} x_{2014} + x_{2015} x_{2016}}_{14} + \underbrace{x_{2017} x_{2018}}_{1} =$

если $x_{2017} x_{2018} \neq 1$, то вся сумма $\notin Z$.

$= 14 \cdot 504 + 1 =$
$= 7057$

Ответ: 7057.

3.

$f(x) = |x| + |x+1| + \ldots + |x+2022|$

критические точки: $x = 0; -1; \ldots; -2022$.

пусть x_n — критическая точка, тогда $f(x) = x_a, x_a+1, \ldots, 2, 1, 0, 1, 2, \ldots, 2021+x_n, 2022+x_n$, причем $x_a = |x_n|$,

т.к. $x_a = -x_n$, то $f(x) = x_a, x_a-1, x_a-2, \ldots, 0, 1, \ldots 2022-x_a =$
$= x_a-1, x_a-2, \ldots, 0, 1, 2, \ldots, 2022$

чтобы $f(x) = \min$, $x_a = \min \Rightarrow x_a = 0$

т.к. $x_a-1, x_a-2, \ldots, 1 > 0$, то при увеличении x_a увеличивается $f(x)$

$f(x) = 1 + \ldots + 2022 = \frac{1+2022}{2} \cdot 2022 = 2045253$

Ответ: $\min(f(x)) = 2045253$

неверно!

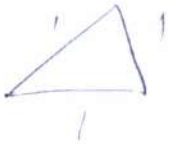
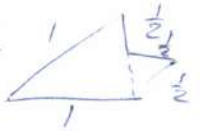
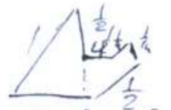
−

58010015

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМАЮ, ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ-ФИНАНСИСТ!»

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ чистовик.

6.

1) $P_1 = 3$  $P_2 = 3 + \frac{1}{2}$  $P_3 = 3 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ 

получается, что у фигур периметры возрастают по прогрессии $3 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{n}$ где n – степень двойки.

нужно док-ть, что $3 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} \leq 4$

$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} \leq 1$

это геометрическ. прогр., где $b_1 = \frac{1}{2}$, $q = \frac{1}{2}$ $\Rightarrow$

$S = \frac{b_1}{1-q} = 1 \Rightarrow$ периметр каждой из рассматриваемых фигур не превышает $4 \Rightarrow$ утверждение доказано. (+)

8.

$x_1^4 + x_2^4 + \ldots + x_{14}^4 = 2031$

$x \in [-6; 6]$, $x \in Z$.

$|x| \leq 6$, т.к. при $|x| = 7$ $|x| > 2031$

значения $x_1^4, x_2^4, \ldots, x_{14}^4$, которые м.б.:

0
1
16
81
256
625
1296

a) $x_{14} = \pm 6 \Rightarrow x_1^4 + x_2^4 + \ldots + x_{13}^4 = 735$.

1) $x_{13} = \pm 5 \Rightarrow x_1^4 + \ldots + x_{12}^4 = 110 = 16 \cdot 6 + 14 = \underbrace{1+1+\ldots+1}_{14}$

$= 81 + 16 + \underline{13} = \underbrace{1+1+\ldots+1}_{13}$

во всех случаях не получается равенство $\Rightarrow$ не м-о.

$14 = \underbrace{1+1+\ldots+1}_{14}$, $\Rightarrow$ нужно, чтобы $x_1^4 + \ldots + x_{14}^4 = 14$, а у нас нет такого кол-ва x.

2) $x_{13} = \pm 4 \Rightarrow x_1^4 + \ldots + x_{12}^4 = 479 = 81 \cdot 5 + 16 \cdot 4 + \underline{10} = 256 + 81 \cdot 2 + 16 \cdot 3$

3) $x_{13} = \pm 3 \Rightarrow x_1^4 + \ldots + x_{12}^4 = 8 \cdot 81 + \underline{6} = 81 \cdot 7 + 16 \cdot 5 + \underline{7} + \underline{13} \Rightarrow$ не м.б.

не м.б.

4) $x_{13} = \pm 2$, тогда $x_1, \ldots x_{12} = 0, 1$ или 16. max знач. $= 16 \cdot 12 < 735$ $\Rightarrow$ не м.б.

продолжение на стр. 4

Запрещается делать пометки, раскрывающие авторство работы

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМАЮ, ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ-ФИНАНСИСТ!»

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ чистовик

продолжение задачи № 8.

б) $x_{14} = \pm 5 \Rightarrow x_1^4 + \ldots + x_{13}^4 = 1406 = 625 \cdot 2 + 156$, где $156 =$

$= 81 + 16 \cdot 4 + \underline{11} = 16 \cdot 9 + \underline{12} \Rightarrow$ не м.б.

$1406 = 625 + 781$, где $781 = 256 \cdot 3 + \underline{13} = 256 \cdot 2 + 81 + 16 \cdot 11 + \underline{12} =$

$= 81 \cdot 2 + 16 \cdot 6 + \underline{11} = 81 \cdot 3 + 16 + \underline{10} \Rightarrow$ не м.б., поскольку всего 13 x-ов.

$\Rightarrow x_{14} \neq \pm 5.$

в) $x_{14} = \pm 4$, тогда $x_1^4 + \ldots + x_{13}^4 = 1775 = 256 \cdot 6 + 81 \cdot 2 + 16 \cdot 4 + \underline{13} =$

$= 81 \cdot 1 + 16 \cdot 9 + \underline{14} + 256 \cdot 6 = 256 \cdot 5 + 495 = 256 \cdot 4 +$

$495 = 81 \cdot 6 + 9$

$+ 751 = 256 \cdot \underline{3} + 81 \cdot \underline{12} + \ldots + \Rightarrow$ не м.б.

$81 \cdot 5 + 16 \cdot 5 + 10$

$81 \cdot 4 + 16 \cdot 10 + 11$

$81 \cdot 3 + 16 \cdot \underline{15} + \ldots$ не м.б.

$751 = 81 \cdot 9 + 16 + 6.$

$81 \cdot 8 + 16 \cdot 6 + 7.$

$81 \cdot 7 + 16 \cdot 11 + 8$

$81 \cdot 6 + 16 \cdot 16 + 9$

$81 \cdot 5 + 16 \cdot \underline{21} + \ldots$ не м.б.

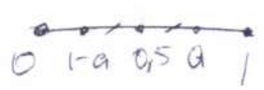
$\frac{+}{2}$ не все случаи р-но!

г) $x_{14} = \pm 3$, тогда $\max(x_1^4 + \ldots + x_{14}^4 = 1134) \Rightarrow$ не м.б.

Ответ: 0 решений.

5

$0 < a, b, c < 1$



0

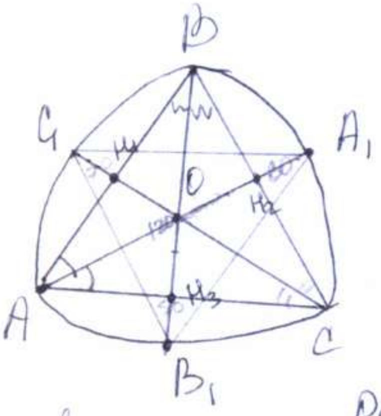
5801/0015

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМА, ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ-ФИНАНСИСТ!»

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

чистовик

4.



Дано: $\triangle ABC$

опис. окр. $(O_1; r)$

$\angle A_1B_1C_1 = 50°$

$\angle A_1C_1B_1 = 70°$

$B_1C_1 = \sqrt{3}$

Найти: A_1O

Решение:

центр впис. окр. = т. ∩ биссектрис ⇒ нужно найти A_1O

$\angle C_1A_1B_1 = 60° \Rightarrow 3 = A_1C_1^2 + A_1B_1^2 - 2A_1C_1 \cdot A_1B_1 \cdot \frac{1}{2}$

~~$OH_1 = OH_2 = OH_3$~~, $\angle H_1OH_3 = \angle H_3OH_2 = \angle H_2OH_1 = 120°$

0

Запрещается делать пометки, раскрывающие авторство работы с. 5.

5801001S

10, 14, 15, 16, 17, 17, 18, 21, 22, 24

1 2 3 4

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМА, ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ-ФИНАНСИСТ!»

1, 2, 3, 8.

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

черновик

1.

a b c d e
1 2 3 4 5

допустим $a<b<c<d<e$. $\in Z$.

$10-a-b=24-d-e$
$-a-b+d+e=14$

$$\begin{cases} a+b+c=10 \\ c+d+e=24 \end{cases}$$

1) ~~a = b = 1~~, c = 8.
1, 1, 8, d, e
$d+e=16$.
$a+b+d=14$
$b+c+d=$
$2+d=14 \Rightarrow d=12$
$9+d=$
$\underbrace{d+e}_{16}-\underbrace{a-b}_{2}=14$

2) 1, 2, 7.
$d+e=17$.
$3+d=14$.
$d=11$
$e=6$. $e>d$
$\Rightarrow$ не м. б.

3) 1, 3, 6
$d+e=18$.
$4+d=14$
$d=10$
$e=8$
не м.б.

4) ~~2, 2, 6~~
~~$d+e=18$~~

5) 2, 3, 5
$d+e=19$.
$5+d=14$
$d=9$
$e=10$.
2, 3, 5, 9, 10.

10, 14, 15, 16, 17, 21,

6) 1, 4, 5.
$d+e=19$
$5+d=14$
$d=9$
$e=10$.
1, 4, 5, 9, 10
10, 14, 15, 20
не м.б.

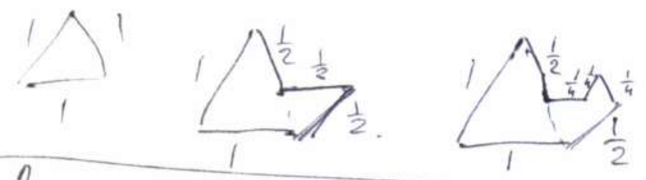
7) _, _, 4.
не м.б.
2+4

a

2+3   2 3 9
2+5   2 3 5
2+9   2 3 10
2+10

Отв.: 2, 3, 5, 9, 10.

$2018=2\cdot 1009$
$D(2018)=1, 2, 1009, 2018$.



3    $3\frac{1}{2}$. $3\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$.

т.е. последовательность.
$3,\ 3+\frac{1}{2},\ 3\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots$ и т.д.
док-ть, что $3+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}<4$

$b_1=\frac{1}{2}$
$q=\frac{1}{2}$. $S=\frac{b_1}{1-q}=2$.

0   a   0,5   1-a   1

сдвинем на 0,5

$\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

тогда $|a|=|1-a|$

a   b   1-a

$|a-0,5|=|0,5-a|$

$\sqrt{abc}=\sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)}<0,5$

Запрещается делать пометки, раскрывающие авторство работы

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМА, ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ-ФИНАНСИСТ!»

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

$2018 \,|\, \frac{2}{1009}$

Черновик.

1) $x_1 x_2 = (2-\sqrt{3})^2 = 4+3-4\sqrt{3} = 7-4\sqrt{3}$

2) или $(2+\sqrt{3})^2 = 4+3+4\sqrt{3} = 7+4\sqrt{3}$

3) или $(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3}) = 4-3 = 1$.

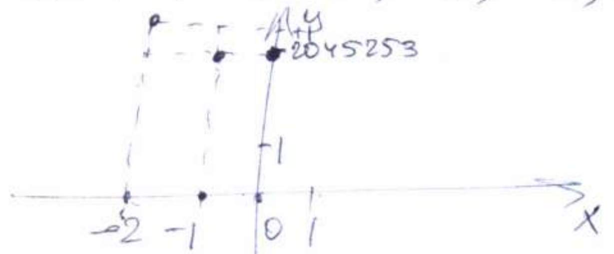
$(2)+(3) = 14 \Rightarrow Max = (7-4\sqrt{3})^{1009} + (7+4\sqrt{3})^{1009} = \cancel{7 \cdot 2018}$

3.

$f(x) = |x| + |x+1| + \ldots + |x+2022|$

$x+2$

крит. т. $x = 0; -1; -2; \ldots; -2022$.



$x=0 \quad y = 1+\ldots+2022 = \frac{1+2022}{2} \cdot 2022 = 1011 \cdot 2023 = 2045253$.

$x=-1 \quad y = 1+1+2+\ldots+2021 = 1+2+\ldots+2022$.

$x=-3 \quad y = 3+2+1+0+1+2+\ldots+2019 = 2+1+1+2+\ldots+2022$

$x=-2 \quad y = 2+1+0+1+2+\ldots+2020 = 1+2+\ldots+2022+1$

x_1 - крит. т., тогда.

$y = x_1, x_1+1, x_1+2, \ldots, 1, 0, 1, 2, \ldots, 4+2022-x_1$

$x_1 -$

Дано: $\triangle ABC \quad \angle A, B$

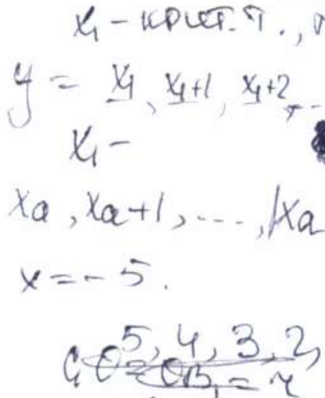
$x_a, x_a+1, \ldots, |x_a+x_n-1|, |x_a+x_n|, |x_a+x_n+1|$

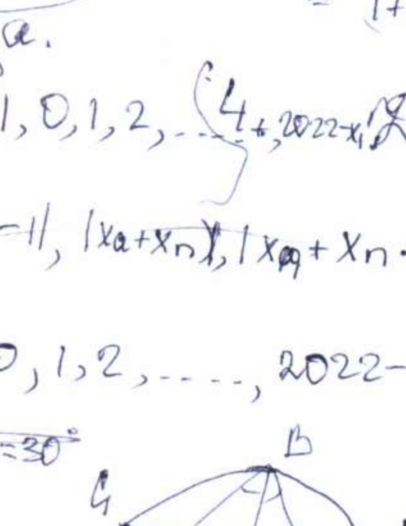
$x=-5$.

$5, 4, 3, 2, 1, 0, 1, 2, \ldots, 2022-5$.

~~$C_1O = OB_1 = 4$~~

~~$\angle OC_1B_1 = \angle OB_1C_1 = 30°$~~





центр впис окр = т. Пересе. O

$\angle A_1B_1C_1 = 80°$

$\angle A_1C_1B_1 = 70$

$B_1C_1 = \sqrt{3}$.

Найти: A_1O.

Запрещается делать пометки, раскрывающие авторство работы

5801 0015

$\cancel{1}\cancel{2}\cancel{3}45\cancel{6}7\cancel{8}$ $269=81+$ $256\cdot 6+239$ $=81\cdot 2+64+13$ $81\cdot 1+16\cdot 9+14$.

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМА, ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ-ФИНАНСИСТ!»

черновик

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

$x_1^4+x_2^4+\ldots+x_{14}^4=2031$ $\in \mathbb{Z}$.

$158.$ $2031=3\cdot 677$.

$x\in[-6;6]$, $\in\mathbb{Z}$.

$5\sqrt{1007}$

1) $x=\pm 6$ ~~2016~~ $x_1^4+\ldots+x_{13}^4=735$.

~~как получить 5ку в конце числа~~:

a) $x=\pm 5$. $x_1^4+\ldots+x_{12}^4=110.=81+16+13=\underbrace{1+1+\ldots+1}_{13}$

$16+16+\ldots$ не м. б.

не м. б. 90 171

б) $x=\pm 4$ $x_1^4+\ldots+x_{12}^4=479.=256+81+81+16+16+16+13$ не м. б.

$16\cdot 12<479\Rightarrow$ есть 81 и/или 256.

① $256\Rightarrow x_1^4+\ldots+x_{11}^4=223=81+81+16+16+16+\underbrace{1+\ldots+1}_{13}\Rightarrow$ не м. б.

② $81\Rightarrow x_1^4+\ldots+x_{11}^4=398=81\cdot 4+\underbrace{74}_{=64+10}=$ не м. б.

в) $x=\pm 3$. $x_1^4+\ldots+x_4^4=654=8\cdot 81+6=81\cdot 7+$

1296
625
256 103.
81 96.
16
1
0

$495=81\cdot 6+9$
$81\cdot 5+16\cdot 5+10$.
$81\cdot 4+16\cdot 10+11$
$81\cdot 3$

$252=$
$184=176+8$.
$265=$

$x=\pm 5$ $x_1^4+\ldots+x_{13}^4=1406=625\cdot 2+156$
$81+16\cdot 4+11$
$87=$

$781=256\cdot 3+13$.
$256\cdot 2+269$

$81+188=16\cdot 11+12$.
$81\cdot 2+107=96+11$ $479=405+74=256+223$.
$81\cdot 3+26=16+10$

$81\cdot 5$ $64+10$ не м. б. $81\cdot 2+16\cdot 3+13$.

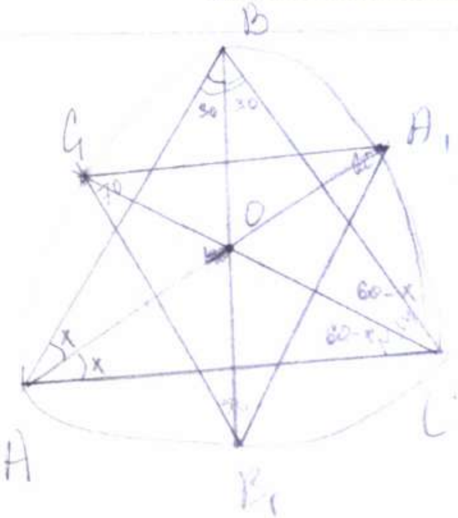
Запрещается делать пометки, раскрывающие авторство работы

5 Д01/0015

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМА, ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ-ФИНАНСИСТ!»

черновик

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

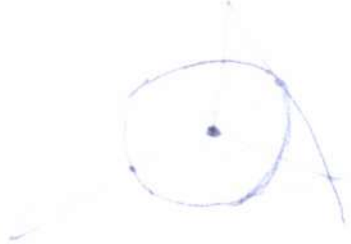


$S = \frac{abc}{4R} = \frac{a+b+c}{2} \cdot r$

$3 = B^2 + B^2 - 2B^2 \cos 120$

$3 = 2B^2 - \sqrt{3}B^2$

$180 - 2x - 120 + 2x = 60$



$3 = A_1C_1^2 + A_1B_1^2 - 2 \cdot A_1C_1 \cdot A_1B_1 \cos 60$

58010015

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМА, ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ-ФИНАНСИСТ!»

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ черновик.

5.

$a, b, c - \forall$

$0 < a, b, c < 1$

$\sqrt{abc} + \sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)} < 1.$

т.к. $0 < a < 1$, то $0 < \sqrt{a} < 1$, $0 < \sqrt{b} < 1$, $0 < \sqrt{c} < 1$, $0 < \sqrt{abc} < 1$

$-1 < -a < 0$

$0 < 1-a < 1$

$0 < 1-b < 1$

$0 < 1-c < 1$

$\Downarrow$

$0 < \sqrt{1-a} < 1$

$0 < \sqrt{1-b} < 1$

$0 < \sqrt{1-c} < 1$

$0 < \sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)} < 1$

$+$

$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

$2\sqrt{ab} \leq a+b < 2$

$1 > \frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$

$\frac{a+b+c}{3} < \frac{3}{3}$

$\frac{1}{2} : \frac{1}{2} = 1$

$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{16}$

a $1-a$

0 a $1-a$

$\frac{1-a+1-b}{2} \geq \sqrt{(1-a)(1-b)}$

$\sqrt{(1-a)(1-b)} \leq -\sqrt{ab}+1$

$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

$2-a-b \leq -2\sqrt{ab}$

$= -\sqrt{ab}+1$

$\frac{1-c}{2} \geq \sqrt{c}$

$1-c \geq -2\sqrt{c}$

$1-b \geq -2\sqrt{b}$

$1-a \geq -2\sqrt{a}$

Запрещается делать пометки, раскрывающие авторство работы

$(1-a)(1-b)(1-c) \geq -8\sqrt{abc}$

Оценочный бланк олимпиадных заданий по математике

Код участника: 612113

Номер задания		1	2	3	4	5	6	7	8
Полученные баллы	Первый проверяющий	0	7	6	12	0	0	14	0
	Второй проверяющий	0	7	6	12	0	0	14	0
	Итого	0	7	6	12	0	0	14	0
Сумма баллов (оценка)		39							

Члены жюри:

[signature] — Фомин В.Г.
Подпись — Фамилия И.О.

[signature] — Александрова О.Н.
Подпись — Фамилия И.О.

Подпись — Фамилия И.О.

ФГОБУ ВО «Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации»

ФИНАНСОВЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

МИССИЯ:ВЫПОЛНИМА

Всероссийская олимпиада школьников «Миссия выполнима. Твое призвание -финансист!»

ПО МАТЕМАТИКЕ 10 класс

Заключительный (очный) этап
2017/2018 учебный год

612 113

Код участника

Вариант I

Задание 1. (10 баллов)

Пять различных гирь, каждая из которых весит целое число килограмм, были взвешены всевозможными группами по три гири. В результате получили следующие веса (в килограммах) десяти взвешенных групп: 10, 14, 15, 16, 17, 17, 18, 21, 22, 24. Найдите веса этих пяти гирь.

Задание 2. (10 баллов)

Даны 2018 чисел $x_1, x_2, \ldots, x_{2018}$, каждое из которых равно либо $2-\sqrt{3}$ либо $2+\sqrt{3}$. Найдите наибольшее возможное значение суммы $x_1x_2 + x_3x_4 + x_5x_6 + \ldots + x_{2017}x_{2018}$, если известно, что она является целым числом.

Задание 3. (12 баллов)

Найдите наименьшее значение функции $f(x) = |x| + |x+1| + \ldots + |x+2022|$.

Задача 4. (12 баллов)

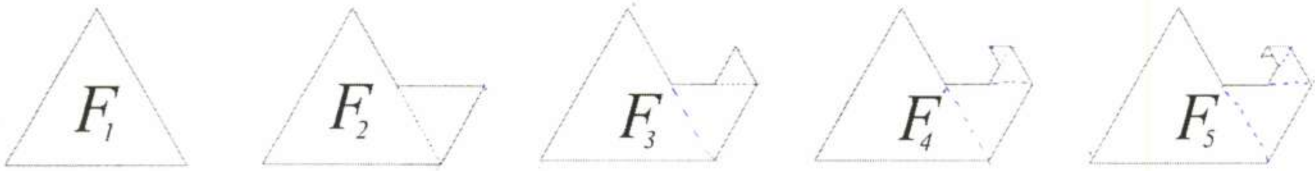
Биссектрисы углов A, B и C треугольника ABC пересекаются с описанной около этого треугольника окружностью в точках A_1, B_1 и C_1, соответственно. Найдите расстояния между точкой A_1 и центром вписанной в треугольник ABC окружности, если известно, что $\angle A_1B_1C_1 = 50^\circ$, $\angle A_1C_1B_1 = 70^\circ$, $B_1C_1 = \sqrt{3}$.

Задание 5. (12 баллов)

Докажите, что для любых действительных чисел a, b, c таких, что $0 < a, b, c < 1$, выполнено следующее неравенство $\sqrt{abc} + \sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)} < 1$.

Задание 6. (14 баллов)

Дана бесконечная последовательность многоугольников $F_1, F_2, F_3, F_4 \ldots$ Фигура F_1 – это равносторонний треугольник со стороной 1. Пятиугольник F_2 получается из треугольника F_1 построением на его стороне равностороннего треугольника со стороной $\frac{1}{2}$, как показано на рисунке. Семиугольник F_3 получается из пятиугольника F_2 построением на его стороне длины $\frac{1}{2}$ равностороннего треугольника со стороной $\frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$ и так далее. На каждом шаге строится треугольник, сторона которого в два раза меньше стороны треугольника, построенного на предыдущем шаге.



Докажите, что периметр каждой из рассматриваемых фигур не превышает 4.

Задание 7. (14 баллов)

Иван и Петр играют в следующую игру. Из кучки, которая содержит 2018 камней, они по очереди берут некоторое количество камней. Если перед ходом в кучке имеется N камней, то игрок может взять k камней, только если k является делителем числа N. Проигрывает тот игрок, который возьмет последний камень. Кто из игроков имеет выигрышную стратегию, если первым берет камни Иван?

Задача 8. (16 баллов)

Сколько решений в целых числах имеет уравнение $x_1^4 + x_2^4 + \cdots + x_{14}^4 = 2031$.

Чистовик

61L115

Задание 7. $2018 = nk + 0$, $N = nk + 0$

Выигрышную стратегию имеет Иван, если он при первом ходе возьмёт 1 камень. Останется 2017 (простое число), значит, Пётр сможет взять или 1 камень или все 2017 оставшихся. Петр не дурак, поэтому он возьмёт 1, и останется 2016. При каждом следующем ходе Иван должен брать такое число камней, чтобы после хода оставалось простое число (это возможно, т.к. любое число по основной теореме арифметики можно представить в виде произведения простых множителей). Тогда останется либо 1 камень, который заберёт Петр либо ему все надоест, и он заберет все оставшиеся камни.

+

Ответ: Иван.

Задание 3.

Рассмотрим функцию $f(x) = |x| + |x+1| + \ldots + |x+2022|$.

~~Рассмотрим функцию $g(x) = |x|$. Т.к. $D(g) = [0;+$~~ R, ~~$E(g) = [0;+\infty)$, то функция сумм модулей будет иметь такую же область значений, значит наименьшее значение~~

$f(x) > 0$

~~Наименьшее значения функция принимает при наименьшем значении аргумента~~

$|x| + |x+1| + \ldots + |x+2022| > 0$

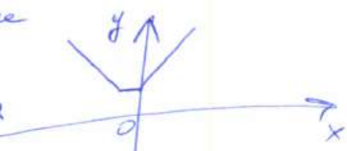
$$\left[\begin{array}{l} x + x + 1 + x + 2 + \ldots + x + 2022 > 0 \\ -x + 1 - x + 2 - x + 3 - x + \ldots + 2022 - x < 0 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} 2023x + 2023 \cdot 1011 + 1011 > 0 \\ -2022x + 2022 \cdot 1011 + 1011 < 0 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x > -1011\frac{1011}{2023} \\ x > 1011{,}5 \end{array}\right.$$

При $x = 1012$ и $x = 1011$ функция принимает наименьшее значение

$g(x) = |x| + |x+1|$



~~$f(x) = 1012 + 1012 + 1 + 1012 + 2 + \ldots + 1012 + 2022$~~

~~$f(x) = 1012 \cdot 2023$~~ $f(x) = 1011 + 1010 + 1009 + \ldots + 0 + 1 + 2 + \ldots + 1011$

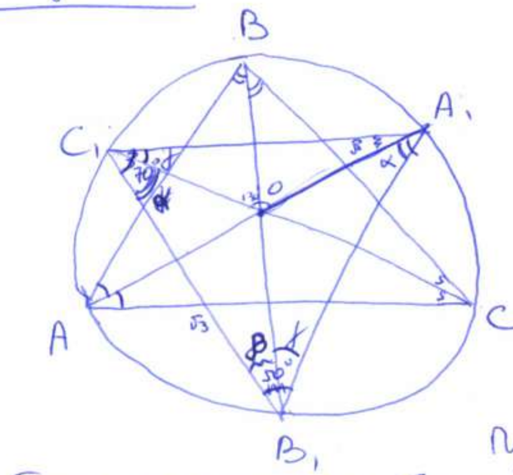
$f(x) = 2 \cdot (1 + 2 + 3 + \ldots + 1011) = 2 \cdot 1011 \cdot 505 = 1010 \cdot 1011 =$
$= 1021110$

Ответ: 1021110

$f(-1012) \neq f(-1011)$ Нет стр-го об-я!

$\frac{+}{2}$

Задание 4



Центр вписанного окр. - т. пересечения биссектрис.

Пусть $AA_1 \cap BB_1 \cap CC_1 = O$

Найдем: A_1O

$\angle C_1A_1B_1 = 180^\circ - (70 + 50) = 60^\circ$

$\angle ABB_1 = \angle AA_1B_1$ т.к. опираются на одну дугу AB_1

Аналогично $\angle C_1A_1A = \angle C_1CA$, $\angle A_1C_1C = \angle A_1AC$, $\angle CC_1B_1 = \angle B_1BC$, $\angle BB_1C = \angle BCC_1$, $\angle BB_1A_1 = \angle BAA_1$

Пусть $\angle AA_1B_1 = \alpha$, $AA_1C_1 = \beta$, $BB_1A_1 = \gamma$

Тогда получим, что
$$\begin{cases} \beta + \gamma = 50^\circ \\ \gamma + \alpha = 70^\circ \\ \beta + \alpha = 60^\circ \end{cases} \quad \begin{cases} \gamma = 50 - \beta \\ 50 - \beta + \alpha = 70^\circ \\ \beta = 60^\circ - \alpha \end{cases} \quad \begin{cases} \gamma = 50 - \beta \\ 50 - 60 + \alpha + \alpha = 70 \\ \beta = 60 - \alpha \end{cases} \quad \begin{cases} \gamma = 30 \\ \alpha = 40^\circ \\ \beta = 20 \end{cases}$$

$\angle A = 2\gamma = 60^\circ$

$\angle B = 2\alpha = 80$

$\angle C = 2\beta = 40$

По теореме синусов:

$$\frac{\sin 60^\circ}{\sqrt{3}} = \frac{\sin 50^\circ}{x} \qquad x = \frac{\sqrt{3} \cdot \sin 50 \cdot 2}{\sqrt{3}} = 2\sin 50^\circ$$

+

$A_1C_1 = 2\sin 50^\circ$

В $\triangle C_1OA_1$ $\angle C_1OA_1 = 180^\circ - \gamma - \beta = 180^\circ - 30 - 20 = 130^\circ$

$\frac{\sin 130}{A_1C_1} = \frac{\sin 30}{A_1O}$

A_1O по теореме синусов: $A_1O = \frac{A_1C_1 \cdot \sin 30^\circ}{\sin 130^\circ} = \frac{2\sin 50^\circ \cdot \sin 30^\circ}{\sin(180 - 130)} = \frac{2 \cdot \sin 50^\circ \cdot \sin 30^\circ}{\sin 50^\circ} = 2\sin 30^\circ = 1$

Ответ: 1

Задание 6.

612113

~~8~~ Периметр равностороннего треугольника равен $3a$, где a – сторона

$P_{F_1} = 3\cdot 1 = 3$ Периметр Фигуры F_2 равен ~~2·a_2~~ $3a + \frac{a}{2}$

~~$P_{F_2} = 3$~~

~~$\frac{a}{2}+\frac{a}{4}$~~

~~$\frac{a}{2}+\frac{a}{4}+\frac{a}{16}$~~

~~$\frac{a+4a+8a}{16} = \frac{13a}{16}$~~

~~$\frac{a}{2}+\frac{a}{4}+\frac{a}{16}+\frac{a}{32} = \frac{a+2a+8a+16a}{32}$~~

$P_{F_3} = 3a + \frac{3a}{4}$

$P_{F_4} = 3a + \frac{13a}{16}$

$P_{F_5} = 3a + \frac{27a}{32}$

Получается, что $P_n = 3a + \frac{k\,a}{2^n}$, где $a = 1$; $n > 3$, $k < 2^n$

Тогда, т.к. дробь $\frac{k}{2^n} < 1$, то сумма

$3 + \frac{k}{2^n} < 4$, что и требовалось доказать.

−

Задание 5

$1 > a > 0$
$0 < b < 1$
$0 < c < 1$

$\sqrt{abc} + \sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)} < 1$.

Выражение $\sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)}$ имеет смысл, т.к.

$1 > 1-a > 0$
$1 > 1-b > 0$
$1 > 1-c > 0$, значит $0 < (1-a)(1-b)(1-c) < 0{,}001$ и $\sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)} < \frac{\sqrt{10}}{100}$

$0 < abc < 0{,}001$, тогда $0 < \sqrt{abc} < \sqrt{0{,}001}$

$0 < \sqrt{abc} < \frac{\sqrt{10}}{100}$

Тогда сумма $\frac{2\sqrt{10}}{100} = \frac{\sqrt{10}}{50} < 1$, следовательно

$\sqrt{abc} + \sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)} < 1$, что и требовалось доказать.

−

Задание 1

Сначала узнаем сколько всего было взвешиваний: $C_3^5 = 10$.

Пусть a, b, c, d, e – вес гирь

$$\begin{cases} a+b+c=10 \\ b+d+a=14 \\ a+b+e=15 \\ a+c+d=16 \\ a+c+e=17 \\ a+d+e=17 \\ b+c+d=18 \\ b+d+e=21 \\ b+c+e=22 \\ c+d+e=24 \end{cases}$$

−

Задание 2

612113

Есть три варианта результата произведений

① $(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})=1$

② $(2-\sqrt{3})^2=7-4\sqrt{3}$

③ $(2+\sqrt{3})^2=7+4\sqrt{3}$

Всего $\frac{2018}{2}=1009$ слагаемых

Наибольшее слагаемое может быть равно $(7+4\sqrt{3})$, но т.к. по условию сумма является целым числом, то кол-во слагаемых $(7+4\sqrt{3})$ должно быть равно кол-ву слагаемых $(7-4\sqrt{3})$, чтобы иррациональные слагаемые ~~вычит~~. вычитались.

Тогда получим $\frac{1009-1}{2}$ $\cancel{504}$ слагаемых $7+4\sqrt{3}$

$\cancel{504}$ слагаемых $7-4\sqrt{3}$

1 слагаемое $(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})=1$

Тогда значение суммы равно $504\cdot(7+4\sqrt{3})+504\cdot(7-4\sqrt{3})+1=504(7+4\sqrt{3}+7-4\sqrt{3})+$
$=504\cdot 14+1=\cancel{7028}\,7056+1=\cancel{7029}\;7057$

Не показано, что 7057 наибольшее!

±

Ответ: ~~7029~~. 7057

Задача 8

$x_1^4+x_2^4+\ldots+x_{14}^4=2031.$

$P_4=x_1^4+x_2^4+\ldots+x_{14}^4-2031=0$

Если уравнение имеет целочисленные корни, то они находятся среди делителей свободного члена

$D(2031)=\{1;3;677;2031\}\cup\{-1;-3;-677;-2031\}$

—

~~При $x=1$~~,

~~$P_4(1)=\underbrace{1+1+1+\ldots+1+1}_{14}-2031=0$ — неверно, значит 1 не явл. корнем~~

~~Ответ: 4.~~ $677^4>2031$, тогда $x\in\{1;-1;-3;3\}$

Ответ: 4

Черновик

2018

$\frac{N = nk + 0}{\cancel{23} \quad \cancel{33}}$ $D(2018) = \{1; 2; \dots 1009; 2018\}$

$\boxed{612113}$

I. Иван берет 1 камень, останется 2017, а 2017 - простое число, значит Петр сможет взять либо 1 камень, либо 2017.
если он берет 1 камень, то останется 2016

1009 1008 504

Иван 1.

2016 $D(2016) = \{1; 2; 4; \dots 1008; 2016\}$

$2016 = 2 \cdot 1008 = 2 \cdot 2 \cdot 504 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 227$

2017 Петр.

1 0

2016

$C_3^5 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 20$

123 234
124 235
125
134
135
145

1 2 3. 4. 5

a b c d e

abc
123 234
134 245
135 235
145 345
124
125

~~a+b+c+d+~~

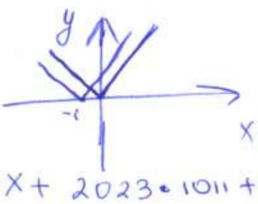
$$\begin{cases} a+b+c=10 \\ a+b+d=14 \\ a+b+e=15 \\ a+c+d=16 \\ a+c+e=17 \\ a+d+e=17 \\ b+c+d=18 \\ b+d+e=21 \\ b+c+e=22 \\ c+d+e=24 \end{cases}$$

$c-d=4$
$c=4+d$
~~$a+b+c+4=14$~~
~~$a+b+c$~~

~~$a+b=10-c$~~
~~$10-c+d=14$~~
~~$10-c+e=15$~~
~~$a+c=16-d$~~
~~$16-d+e=17$~~
~~$16-d+d=16$~~

~~$a+b=10-e$~~
$d-c=4$
$e-c=5$
$d=16-c-a$
$a+c+e=17$
$16-c=a+ \; a+e=17$

$f(x) = |x| + |x+1| + \dots + |x+2022|$
$g(x) = |x|$
$g_1(x) = |x+1|$



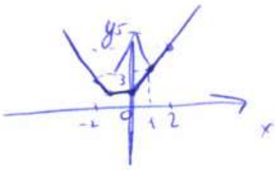
~~2023~~

$2022x + x$

$2022 \cdot 1011 + 1011$

$0 = 2023x + 2023 \cdot 1011 + 1011$
$x + x + 1 + x + 2 + x + 3 + \dots + x + 2022$
$2023x + 2023 \cdot 1010 + 1011 > 0$
$2023x > -2023 \cdot 1010 - 1011$
$x > -1010 - \frac{1011}{2023}$
$x > -1010 \frac{204}{2023}$
$\boxed{x = -1010}$

$f(x) = |x| + |x+1|$ $+2+1$ $3+$ 2



$x+1-x+2-x+3-x+\dots 2022-x$
$-2022x + 2022 \cdot 1011 + 1011 < 0$
$2022x > 2022 \cdot 1011 + 1011$
$x > 1011 + \frac{1}{2}$
$x > 1011{,}5$ $\boxed{x = 1011}$

$2022 \cdot 1011$

$1010 + 1009 + 1008 + 1007 + \dots + 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots + 1022$

$505 + 1010 \cdot 505 + 1022 \cdot 511 + 511$.

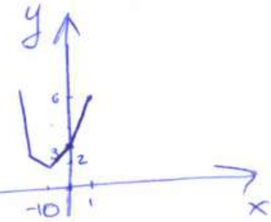
$505(1010+1) + 511(1022+1) =$

$= 505 \cdot 1011 + 511 \cdot 1023 = 510555 + 117645 =$

$= 622900$

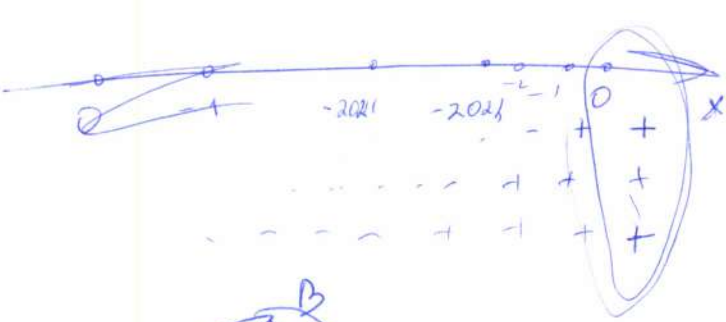
$504 + 507$ $505 + 506 = 511$

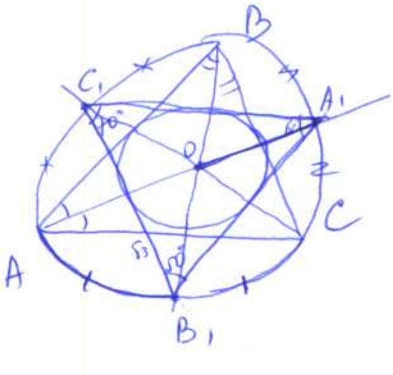
$f(x) = |x| + |x+1| + |x+$



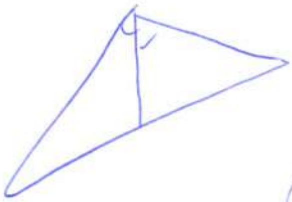
$$\begin{array}{r} \times \, 1011 \\ 505 \\ \hline 5055 \\ +\,5055 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times \, 1023 \\ 511 \\ \hline 5115 \\ +\,1023 \\ 1023 \\ \hline 117645 \end{array}$$





$\angle A_1 = 180 - 120 = 60^\circ$



~~2·n~~

$\boxed{4-3=1}$

$$\begin{array}{r} 504 \\ \times\ 14 \\ \hline 2016 \\ +\ 504 \\ \hline \end{array}$$

7056

2031

3

$n = 3$

$13 + 14 = 27$

$4 - n = 1$

26

39

$13 \cdot 2 = 26$

13

677^4

100

$\frac{1}{10}$

$\frac{10}{100}$

$\frac{1}{100}$

$\frac{1}{1000}$

$\frac{10}{100}$

$\frac{10}{1000}$

2031 | 7 → 22; 23; 51

2031 | 27

2031 | 27 → 54; 181; 108

2031 | 4 → 18; 93; 51

$2k = 80$

$$\begin{array}{r|l} 2031 & 3 \\ -18 & 677 \\ \hline 23 & \\ -21 & \\ \hline 21 & \end{array}$$

1

$$\begin{array}{r} 502 \\ \times \ 14 \\ \hline 2008 \\ +\ 502 \\ \hline 7028 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \cancel{1011} \\ \cancel{\times 10} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1011 \\ \times\ 1010 \\ \hline 1011 \\ +\ 1011 \\ \hline 1021110 \end{array}$$

$$\frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 10$$

$$\begin{array}{r} 2008 \\ +\ 502 \\ \hline 7028 \end{array}$$

Оценочный бланк олимпиадных заданий по математике

Код участника: 93010015

Номер задания		1	2	3	4	5	6	7	8
Полученные баллы	Первый проверяющий	10	5	6	0	0	10	7	0
	Второй проверяющий	10	5	6	0	0	10	7	0
	Итого	10	5	6	0	0	10	7	0.
Сумма баллов (оценка)		38							

Члены жюри:

Подпись	Фамилия И.О.
[signature]	Федин В.Г.
[signature]	Александрова И.А.

Всероссийская олимпиада школьников «Миссия выполнима. Твое призвание -финансист!»

ПО МАТЕМАТИКЕ 10 класс

Заключительный (очный) этап 2017/2018 учебный год

93010015 22507

Код участника

Вариант I

Задание 1. (10 баллов)

Пять различных гирь, каждая из которых весит целое число килограмм, были взвешены всевозможными группами по три гири. В результате получили следующие веса (в килограммах) десяти взвешенных групп: 10, 14, 15, 16, 17, 17, 18, 21, 22, 24. Найдите веса этих пяти гирь.

Задание 2. (10 баллов)

Даны 2018 чисел $x_1, x_2, \dots, x_{2018}$, каждое из которых равно либо $2-\sqrt{3}$ либо $2+\sqrt{3}$. Найдите наибольшее возможное значение суммы $x_1x_2 + x_3x_4 + x_5x_6 + \dots + x_{2017}x_{2018}$, если известно, что она является целым числом.

Задание 3. (12 баллов)

Найдите наименьшее значение функции $f(x) = |x| + |x+1| + \dots + |x+2022|$.

Задача 4. (12 баллов)

Биссектрисы углов A, B и C треугольника ABC пересекаются с описанной около этого треугольника окружностью в точках A_1, B_1 и C_1, соответственно. Найдите расстояния между точкой A_1 и центром вписанной в треугольник ABC окружности, если известно, что $\angle A_1B_1C_1 = 50^\circ$, $\angle A_1C_1B_1 = 70^\circ$, $B_1C_1 = \sqrt{3}$.

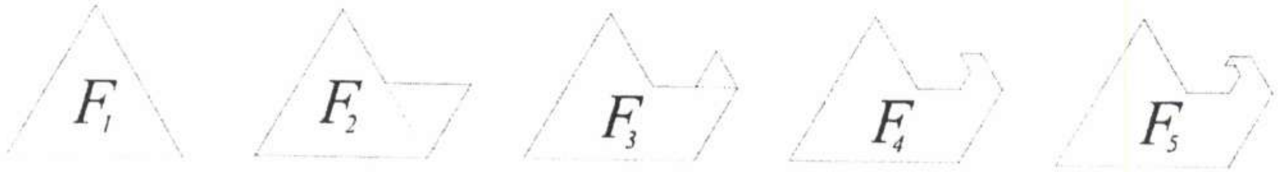
9301 0015

Задание 5. (12 баллов)

Докажите, что для любых действительных чисел a, b, c таких, что $0 < a, b, c < 1$, выполнено следующее неравенство $\sqrt{abc} + \sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)} < 1$.

Задание 6. (14 баллов)

Дана бесконечная последовательность многоугольников $F_1, F_2, F_3, F_4\dots$ Фигура F_1 – это равносторонний треугольник со стороной 1. Пятиугольник F_2 получается из треугольника F_1 построением на его стороне равностороннего треугольника со стороной $\frac{1}{2}$, как показано на рисунке. Семиугольник F_3 получается из пятиугольника F_2 построением на его стороне длины $\frac{1}{2}$ равностороннего треугольника со стороной $\frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$ и так далее. На каждом шаге строится треугольник, сторона которого в два раза меньше стороны треугольника, построенного на предыдущем шаге.



Докажите, что периметр каждой из рассматриваемых фигур не превышает 4.

Задание 7. (14 баллов)

Иван и Петр играют в следующую игру. Из кучки, которая содержит 2018 камней, они по очереди берут некоторое количество камней. Если перед ходом в кучке имеется N камней, то игрок может взять k камней, только если k является делителем числа N. Проигрывает тот игрок, который возьмет последний камень. Кто из игроков имеет выигрышную стратегию, если первым берет камни Иван?

Задача 8. (16 баллов)

Сколько решений в целых числах имеет уравнение $x_1^4 + x_2^4 + \dots + x_{14}^4 = 2031$.

9301 0015

Чистовик

1.

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

№1.

Известно, что три самые маленькие гири в сумме = 10, а три самые большие гири в сумме = 24. Обозначим каждую гирю буквой, в порядке возрастания веса: a, b, c, d, e.

$a < b < c < d < e$.

$10 = a + b + c$, $a \in N, b \in N, c \in N$.

При таких условиях, десять может быть равно нескольким суммам разных чисел:

$10 = 1+2+7$
$10 = 1+3+6$
$10 = 1+4+5$
$10 = 2+3+5$

единственные суммы равные десяти, удовлетворяющие условия.

$c+d+e=24$
$b+d+e=22$

$\Rightarrow c$ на $2 > b \Rightarrow 10 = 2+3+5$, т.к это единственная из имеющихся сумм, выполняющая это условие.

Тогда $a = 2; b=3; c=5$.

(+)

$d+e = 24 - c = 24 - 5 = 19$

Известно, что $a+b+d = 14$; $2+3+d = 14$; $d = 14-5 = 9$.

$e = 19 - d = 19 - 9 = 10$

Итого:

$a = 2$; $b = 3$; $c = 5$; $d = 9$; $e = 10$.

8301 0015

Чистовик

2.

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

Проверка.

1) $2+3+5=10$
2) $2+3+9=14$
3) $2+3+10=15$
4) $2+5+9=16$
5) $2+5+10=17$
6) $2+5+10=17$
7) $3+5+10=18$
8) $2+9+10=21$
9) $3+9+10=22$
10) $5+9+10=24$

Ответ: $a=2$; $b=3$; $c=5$; $d=9$; $e=10$.

№2.

Известно, что x_n равен либо $2-\sqrt{3}$, либо $2+\sqrt{3}$ $\Rightarrow$ $x_n \cdot x_{n+1}$ будет равняться либо $(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})=7$, либо $(2+\sqrt{3})^2=7+4\sqrt{3}$, либо $(2-\sqrt{3})^2=7-4\sqrt{3}$. Также известно, что наибольшее возможное значение суммы $x_1x_2+x_3x_4+x_5x_6+\ldots+x_{2017}x_{2018}$ является целым числом $\Rightarrow$ в сумме все слагаемые должны равняться либо $(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})=7$, либо должно быть одинаковое число слагаемых равных $7+4\sqrt{3}$ и слагаемых равных $7-4\sqrt{3}$, т.к. в этом случае $4\sqrt{3}$ и $(-4\sqrt{3})$ будут

Чистовик

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «МИССИЯ ВЫПОЛНИМА, ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ-ФИНАНСИСТ!»

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

взаимноуничтожаться, также в этом случае может быть любое кол-во слагаемых равных 7, в зависимости от кол-ва других слагаемых.

Проверка

$7 \cdot (2018:2) = 7063$

$14 \cdot \frac{(2018:2)}{2} = 7063$

$\frac{1}{2}$

Ответ: 7063.

№3.

Функция $f(x)$ = сумме модулей чисел $\Rightarrow$ её наименьшее значение будет больше, либо равное нулю. Т.к во всех модулях к x прибавляются положительные числа, начиная с единицы, увеличивающиеся на 1 $\Rightarrow$ наименьшее значение функции будет равно при x равном отрицательному числу половины наибольшего числа прибавленного к x в модуле.

нет строгого обоснования!

$x = -(2022:2) = -1011$

$f(-1011) = 1011 + 1010 + 1009 + ... + 2 + 1 + 0 + 1 + 2 + ... + 1009 + 1010 + 1011$

$2 \cdot S_{1011} = \frac{(1+1011)1011}{2} \cdot 2 = 1012 \cdot 1011 = 1023132.$

$\frac{1}{2}$

$f(-1011) = 1023132$ – наименьшее значение функции.

Ответ: 1023132.

93010015

Чистовик

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМА. ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ-ФИНАНСИСТ!»

4.

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

№6.

Известно, что две стороны треугольника F_1 никак не будут меняться при последующих изменениях фигуры. Мы знаем, что на каждом шаге строится треугольник, сторона которого в два раза меньше стороны треугольника, построенного на предыдущем шаге ⇒ получается последовательность, пределом которой является 2. Последовательность $\frac{x}{2^n}$, где $n \in N$ стремится к двойке, но никогда её не достигнет, т.к. если в последовательности к числам прибавлять половины предыдущих чисел, то такая последовательность никогда не станет в 2 раза больше самого первого числа в этой последовательности ⇒ периметр каждой из рассматриваемых фигур никогда не достигнет 4, т.к. к P двух сторон $\Delta F_1 = 2$ прибавляется последовательность $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+...+\frac{1}{2^n}$ ⇒ периметр фигур будет стремиться к 4, но никогда его не достигнет, ч.т.д.

±

нет строго д-ва!

83 01 0015

Чистовик

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМА. ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ-ФИНАНСИСТ!»

5.

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

№7.

Выигрышная стратегия у Ивана. Т.к. в большинстве случаев он сможет, практически, не давать право выбора числа Пети, т.к. будет делать так, чтобы когда ходил Петя, в кучке было число камней, равное простому числу, и Пете придётся брать только один камень, т.к. если он возьмёт число камней, равное числу камней в кучке, то он проиграет. А он может выбрать только число один или число равное числу камней в кучке потому, что простые числа делятся только на один и на самого себя => их делитель это 1 и это самое число.

Ответ: выигрышная стратегия у Ивана.

+/2

Не показано, что Иван может сделать простое число!

№5.

$\sqrt{abc}+\sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)}<1$

$\sqrt{abc}+\sqrt{1-a-b-c+ab+bc+ac-abc}<1$

Чем больше будет abc, тем меньше будет $\sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)}$, чем меньше будет abc, тем меньше будет $\sqrt{abc}$, при таких условиях $\sqrt{abc}+\sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)}<1$.

−

Запрещается делать пометки, раскрывающие авторство работы

8301 0015

Черновик.

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМА. ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ-ФИНАНСИСТ!»

6.

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

№8.

Ответ: не имеет решений. −

Запрещается делать пометки, раскрывающие авторство работы

Черновик

9301 0015

1.

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМА, ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ-ФИНАНСИСТ!»

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

№1

$5!:(4!\cdot 3!)=$ [illegible]

$x_n x_{n+1}$ равно

№2.

или $(2-\sqrt{3})\cdot(2+\sqrt{3})=4+3=7$

или $(2+\sqrt{3})(2+\sqrt{3})=4+4\sqrt{3}+3=7+4\sqrt{3}$

или $(2-\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=4-4\sqrt{3}+3=7-4\sqrt{3}$

$7\cdot 1009=7063$

Ответ: 7063.

№1.

$S:10=17{,}4$

Известно, что три самые маленькие цифры в сумме = 10, а три самые большие цифры в сумме = 24.

$10=y+x+k,\ y\in Z,\ x\in Z,\ k\in Z.$

$a_1; b_2; c_3; d_4; e_5.$

$a+b+c=10$ ~~$a+b+2c+d+e=34$~~

$c+d+e=24$

$10=1+2+7;\ 1+3+6;\ 1+4+5$

$2+3+5;$ ~~$2+4+4$~~

~~$3+4+3$~~ т.к. все цифры различны

Запрещается делать пометки, раскрывающие авторство работы

8301 0015

$$\left.\begin{array}{l} c+d+e=24 \\ b+d+e=22 \end{array}\right| \Rightarrow c \text{ на } 2 > b \Rightarrow 10 = 2+3+5 = a+b+c =$$

$= 2+3+5$

$a = 2$

$b = 3$

$c = 5$

$d + e = 24 - 5 = 19$

Известно, что $a+b+d=14$; $2+3+d=14$; $d=9$

$e = 19 - 9 = 10.$

Итого:

$a = 2$

$b = 3$

$c = 5$

$d = 9$

$e = 10$

Проверка.

1. $2+3+5=10$
2. $2+3+9=14$
3. $2+3+10=15$
4. $2+5+9=16$
5. $3+5+9=17$
6. $2+5+10=17$
7. $3+5+10=18$
8. $2+9+10=21$
9. $3+9+10=22$
10. $5+9+10=24$

Ответ: $a=2$; $b=3$; $c=5$; $d=9$; $e=10$.

93 01 0015

Черновик

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМА, ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ-ФИНАНСИСТ!»

2.

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

№3

~~график $F(x)$ = ~~неделимо~~ $\Rightarrow$ наим. знач. функции будет при $x=0$ $\Rightarrow$ $F(0) = 1+2+3+4+\ldots+2020+2021+2022$~~

~~$S_{2022} = \frac{(a_1+a_{2022})2022}{2} = (1+2022)\cdot 1011 = 2023\cdot 1011 = 2045253.$~~

$F(x) = |x| + |x+1| + |x+2| + |x+3| + |x+4| + |x+5| + |x+6|$

если $x=0$, то $1+2+3+4+5+6=21$

если $x=-1$, то $1+1+2+3+4+5=16$

если $x=-2$, то $2+1+1+2+3+4=13$

если $x=-3$, то $3+2+1+1+2+3=12$

если $x=-4$, то $4+3+2+1+1+2=13$

наим знач функции $F(x)$ будет равняться при $x=-1011$.

$F(-1011) = 1011+1010+1009+\ldots+1+0+1+2+3+4+\ldots+1009+1010+1011.$

$S_{1011} = \frac{(1+1011)1011}{2} = \frac{1012\cdot 1011}{2}\cdot 2 = 1012\cdot 1011 = 1.023.132.$

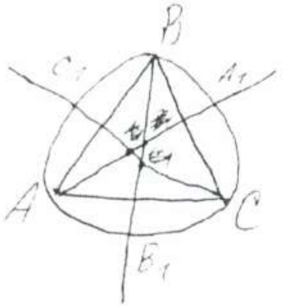
~~503~~,3

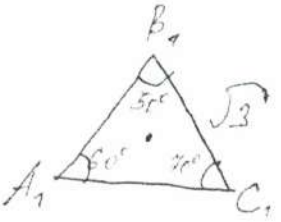
Ответ: 1.023 132.

Запрещается делать пометки, раскрывающие авторство работы

9301 0015

№4.





$(1-a)(1-b)(1-c)=(1-b-a+ab)(1-c)=$

$=1-b-a+ab-c+bc+ac-abc=$

$=1-a-b-c+ab+bc+ac-abc$

$\frac{\sqrt{3}}{4}$

№6.

$P_{F_1}=3$

$P_{F_2}=3\frac{1}{2}$

$P_{F_3}=3\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$

нов последовательность $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}$ стремится к ~~[illegible]~~ единице, но никогда её не достигает

нов сторона → 1 $\quad 3+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}\longrightarrow 4$

~~[illegible]~~ в последовательностях $\frac{x}{2^n}$ + ... $x \in Z$. ... натуральные никогда не достигнется x, т.к. если к ~~[illegible]~~ числу ~~прибавить его половину, то он~~ таким числам прибавлять ах пото

9301 0015

Черновик

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМА. ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ-ФИНАНСИСТ!»

3.

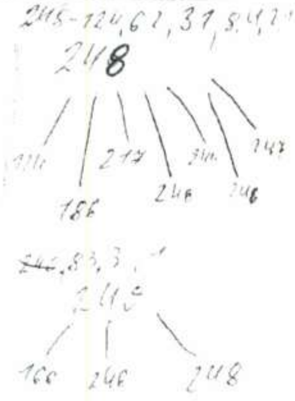
ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

№7.

$N = 2018$

$K = \cancel{2018}, 1009, 2, 1.$

1008 - 1
1007 - 1
1006 - 503
503 - 1
502 - 251
251 - 1
250 - ~~[illegible]~~ 1
248



Выигрышную стратегию имеет Иван, т.к. в самом начале игры,

~~[illegible]~~

последовательность никогда не станет в 2 раза больше самого первого числа в этой послед. ⇒ P ≠ P каждой из расм. фигур никогда не достигнет 4, т.к. к ~~[illegible]~~ 2 (P двух ст. ΔF_1) прибавляют посл. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n}$ ⇒ P будет → 4, но никогда его не достигнет, ч.т.д.

Запрещается делать пометки, раскрывающие авторство работы

9301 0015

$1-a-b-c+ab+bc+ac-abc$

$\cancel{abc}+1-a-b-c+ab+bc+ac \; \cancel{<1} \; -\cancel{abc}<1$

$-a-b-c+ab+bc+ac<0$

93010015

Черновик

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМА, ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ-ФИНАНСИСТ!»

4.

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

№1.

Известно, что три самые маленькие гири в сумме = 10, а три самые большие гири в сумме = 24. Обозначим каждую гирю буквой, в порядке возрастания веса: a, b, c, d и e.

$a+b+c=10 \quad a\in Z; b\in Z; c\in Z.$

№2.

Известно, что x_n равен либо $2-\sqrt{3}$, либо $2+\sqrt{3} \Rightarrow$ $x_n \cdot x_{n+1}$ будет равняться либо $(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})=7$, либо $(2+\sqrt{3})^2=7+4\sqrt{3}$, либо $(2-\sqrt{3})^2=7-4\sqrt{3}$. Также известно, что ~~сумма всех чисел~~ наибольшее возм. знач. суммы $x_1x_2+x_3x_4+x_5x_6+\ldots+x_{2017}x_{2018}$ явл. целым числом. $\Rightarrow$ в сумме все слагаемые должны равняться либо $(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})=7$, либо должно быть одинаковое число слагаемых равных $(2+\sqrt{3})^2=7+4\sqrt{3}$ и слагаемых равных $(2-\sqrt{3})^2=7-4\sqrt{3}$, т.к. в этом случае $4\sqrt{3}$ и $(-4\sqrt{3})$ будут взаимно-уничтожаться и может быть любое кол-во слагаемых равных $(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})=7$.

~~Вывод~~ Проверка.

Запрещается делать пометки, раскрывающие авторство работы

93010015

№3.

Функция $F(x)$ = ~~модульных~~ сумма модулей ⇒ ее наименьшее значение будет больше, либо равное нулю.

~~Известно, что~~ Т.к. в модулях к x прибавляются положительные не числа начиная с единицы, увеличивающиеся на 1 ⇒ ~~наименьшее~~ значение функции будет ~~при ответе~~ $x=$с.

$x = -(2022:2) = -1011$.

~~x~~ $F(-1011) = 1011 + 1010 + 1009 + \ldots + 1 + 0 + 1 + \ldots + 1009 + 1010 + 1011$

$2 \cdot S_{1011} = \frac{(1+1011)1011}{2} \cdot 2 = 1012 \cdot 1011 = 1.023.132$.

$F(-1011) = 1023132$. – наим. знач. функции.

Ответ: 1023132.

№6.

Известно, что две стороны треугольника F_1 никак не будут меняться при последующих изменениях фигуры. ~~Мы видим, что при изменении фигуры прибавляются одни~~ ~~всего $\frac{1}{2}$ от~~ ~~добавленного периметра на~~

Мы знаем, что на каждом шаге строится ⇒ получается „косая" стремящаяся к ~~...~~ 2. Но известно, что косая $= \frac{x}{2^n}$, где $n \in N$ ~~никогда~~ ~~не~~ стремиться к двойке, но никогда ее не достигнет, т.к если к ~~числу~~ сумме в косой чисел прибавлять к концу ~~их~~ половины ~~это~~ предыдущих чисел, то