Оценочный бланк олимпиадных заданий по математике

Код участника: 93010003

Номер задания		1	2	3	4	5	6	7	8
Полученные баллы	Первый проверяющий	10	10	12	12	12	14	14	3
	Второй проверяющий	10	10	12	12	12	14	14	3
	Итого	10	10	12	12	12	14	14	3
Сумма баллов (оценка)		87							

Члены жюри:

Подпись	Кисамбеев И.М.
	Фамилия И.О.
Подпись	Волкова Е.С.
	Фамилия И.О.
Подпись	Фамилия И.О.

Всероссийская олимпиада школьников
«Миссия выполнима.
Твое призвание -финансист!»

ПО МАТЕМАТИКЕ 8-9 классы

Заключительный (очный) этап
2017/2018 учебный год

930/ 0003 1343

Код участника

Вариант I

Задание 1 (10 баллов)

Длины сторон *AB, BC, CD* и *DA* выпуклого четырехугольника *ABCD* равны соответственно 5, 17, 5 и 9. Найдите длину диагонали *DB*, если известно, что она является целым числом.

Задание 2 (10 баллов)

Найдите знаменатель дроби $\frac{100!}{28^{20}}$ после ее сокращения до несократимой.

(Выражение 100! равно произведению первых 100 натуральных чисел: $100! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot\ldots\cdot 100$.)

Задание 3 (12 баллов)

Последовательность $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ такова, что $a_{2n} = \frac{1}{a_{2n-1}}$, а $a_{2n+1} = 1 - a_{2n}$. Найдите a_1, если $a_{2018} = 2$.

Задание 4 (12 баллов)

Турнир по стрельбе предполагает несколько серий по 10 выстрелов каждая. В одной из серий Иван выбил 82 очка, в результате чего среднее количество очков, выбиваемых им за серию, увеличилось с 75 до 76 очков. Сколько очков должен выбить Иван в следующей серии выстрелов, чтобы среднее количество очков, выбитых за серию, стало равно 77?

Задание 5. (12 баллов)

Уравнение $x^2 + ax + b + 1 = 0$ имеет два различных ненулевых целочисленных корня. Докажите, что число $a^2 + b^2$ не является простым, если числа a и b целые?

Задание 6 (14 баллов)

По регламенту шахматного турнира каждый участник должен сыграть с каждым один раз. После того как было сыграно ровно 99 партий, оказалось, что множество участников турнира можно разбить на две неравные по численности группы так, что все соперники, относящиеся к одной и той же группе, уже сыграли партии между собой. При этом были сыграны, но не более четырех, партии между соперниками, которые относятся к разным группам. Каково наибольшее возможное число участников этого шахматного турнира?

Задание 7 (14 баллов)

В компании работает 168 человек. Среди любых четырех человек можно выбрать хотя бы одного, знакомого с остальными тремя. Каково минимальное возможное количество людей, которые знакомы со всеми?

Задача 8 (16 баллов)

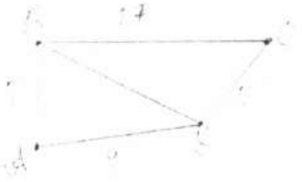
Вова играл старыми костяшками от домино, на которых стерлись все точки, так что они стали не отличимыми. Каждая костяшка представляет собой прямоугольник 2×1, а их число равно 24. Вова решил каждый день по-новому раскладывать костяшки в виде дорожки 2×12, так чтобы рисунок раскладки никогда не повторялся. Сколько дней Вова сможет так раскладывать костяшки, пока все возможные раскладки не будут исчерпаны, если в день он делает одну раскладку?

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМА. ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ-ФИНАНСИСТ!»

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ Чистовик

1

№1 Решение:



1) Неравенство в $\triangle ABD$:
$AB + AD > BD$, $5 + 9 > BD$, $BD < 14$

2) Неравенство в $\triangle BCD$:
$BD + DC > BC$; $BD + 5 > 17$, $BD > 12$

3) Получаем: $14 > BD > 12$

Т.к. по условию длина BD целая, то $BD = 13$.

Ответ: $BD = 13$

№2 Решение:

$\frac{100!}{98^{[illegible]}}$

1) $98^{[illegible]} = (2 \cdot 7^2)^{[illegible]} = 2^{[illegible]} \cdot 7^{[illegible]}$, значит знаменатель содержит произведение [illegible] на [illegible] на [illegible]

2) В числителе семерок 16.

1) $7 = 7$ 5) $35 = 7 \cdot 5$ 9) $63 = 7 \cdot 9$ 13) $91 = 7 \cdot 13$
2) $14 = 7 \cdot 2$ 6) $42 = 7 \cdot 6$ 10) $70 = 7 \cdot 10$ 16) $98 = 7 \cdot 7 \cdot 2$ (две семерки)
3) $21 = 7 \cdot 3$ 7) $49 = 7 \cdot 7$ (две семерки) 11) $77 = 7 \cdot 11$
4) $28 = 7 \cdot 4$ 8) $56 = 7 \cdot 8$ 12) $84 = 7 \cdot 12$

После сокращения семерок в знаменателе останется 4 семерки, которые нельзя сократить.
[illegible] делится на двойки, поэтому она не сокращается.

[illegible]

После сокращения у нас останется в знаменателе $7^4 = 2401$, что нельзя сократить.

Ответ: 2401

Запрещается делать пометки, раскрывающие авторство работы

9301 0003

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМА, ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ-ФИНАНСИСТ!»

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

+

2

[illegible]

Запрещается делать пометки, раскрывающие авторство работы

93010003

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМА. ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ-ФИНАНСИСТ!»

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ Чистовик

3

№1 Решение: +

Пусть до того, как Иван выбил 82 очка, он сделал k серий и выбил в сумме x очков. Тогда до выбивания 82 очков среднее кол-во очков, выбиваемых за серию равно $\frac{x}{k} = 75$ (по условию), $x = 75k$ (1)

Когда Иван выбил 82 очка, среднее кол-во ~~x~~ очков, выбиваемых за серию стало равно $\frac{x+82}{k+1} = 76$ (по условию), подставим сюда (1)

$\frac{75k+82}{k+1} = 76$, ОДЗ: $k \neq -1$, $k \neq 0$

$76k+76 = 75k+82$, $k=6$ (ОДЗ), тогда $x \overset{\text{из (1)}}{=} 75k = 75 \cdot 6 = 450$

$75 \times 6 = 450$

Пусть в следующей серии выстрелов Иван выбьет y очков, тогда среднее кол-во очков, выбиваемых за серию станет равно

$\frac{x+82+y}{k+2} = 77$ (по условию). Подставим сюда найденные $k=6$, $x=450$

$\frac{450+82+y}{8} = 77$, $532+y = 616$, $y = 84$ очка

$77 \times 8 = 616$; $616 - 532 = 84$

Ответ: Иван должен выбить 84 очка в следующей серии выстрелов, чтобы среднее количество очков, выбиваемых за серию стало равно 77

+

Запрещается делать пометки, раскрывающие авторство работы

93 01 0003

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМА. ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ-ФИНАНСИСТ!»

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ Чистовик

(15) ~~Задача~~ Доказательство (+) 4

$x^2+ax+b+1=0$, $x_1 \neq 0$, $x_2 \neq 0$; Доказать: a^2+b^2 не является простым

$x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$ $\qquad x_2 \neq 0$

Т.к. корни не указаны явно, то воспользуемся теоремой Виета

$$\begin{cases} x_1+x_2=-a & (1) \\ x_1 x_2 = b+1 & (2) \end{cases}$$

Из (1): $x_1+x_2=-a$, $a^2=(x_1+x_2)^2$

Из (2): $b=x_1x_2-1$, $b^2=(x_1x_2-1)^2$

$a^2+b^2=(x_1+x_2)^2+(x_1x_2-1)^2 = x_1^2+x_2^2+\underline{2x_1x_2}+(x_1x_2)^2+1-\underline{2x_1x_2}=$

$=x_1^2+x_2^2+x_1^2x_2^2+1 = x_1^2(x_2^2+1)+x_2^2+1=(x_1^2+1)(x_2^2+1)$

$a^2+b^2=(x_1^2+1)(x_2^2+1)$

По усл. $x_1 \neq 0$ и $x_2 \neq 0$, значит $x_1^2 \neq 0$ и $x_2^2 \neq 0$

Но по условию $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$, значит $x_1^2 \geq 1$ и $x_2^2 \geq 1$. Из этого следует, что

$x_1^2+1 \geq 2$ и ~~[illegible]~~ $x_2^2+1 \geq 2$, значит $(x_1^2+1)(x_2^2+1)$ — составное, не простое. [illegible]

$a^2+b^2=(x_1^2+1)(x_2^2+1)$ — не простое, a^2+b^2 не является простым, ч.т.д. [illegible]

Запрещается делать пометки, раскрывающие авторство работы

93010003

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

[illegible]

5

[illegible]

[illegible]

9301 0003

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМА, ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ-ФИНАНСИСТ!»

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ [illegible]

6

(№7) [illegible]

+

Обозначим людей точками, будем проводить ребро между незнакомыми людьми.

1) Докажем от противного, что нет 3-х и более пар незнакомых людей, состоящих из разных людей. Допустим, что есть 3 ~~более~~ пары незнакомых людей, состоящих из разных людей.

Тогда в [illegible] у этих людей нет человека, знакомого с остальными тремя, т.к. у каждого в этой [illegible] ~~есть~~ есть незнакомый человек, что противоречит условию (~~X~~ Рис 1)

Рис 1

2) Докажем, что если есть пара незнакомых людей, то также у [illegible] могут быть другие незнакомые люди, или у них будет один общий незнакомый человек и также у одного из них могут быть другие незнакомые люди.

Если у них были бы разные незнакомые люди, то образуются 3 пары незнакомых людей, чего быть не может (условие 1) (Рис 2)

Рис 2

Если у них была бы один общий незнакомый человек и у каждого были другие разные незнакомые люди, то образуются 3 пары незнакомых людей, чего быть не может (Рис 3)

Рис 3

Если у них больше одного общего незнакомого человека, то образуется 3 пары незнакомых людей (Рис 4)

Рис 4

Получается, ~~незнакомые люди могут быть только~~

Несколько незнакомых людей может быть у одного человека и некоторые из них не [illegible] могут быть незнакомы, [illegible] людей, знакомых со всеми.

3) Докажем, что у одного человека не более 2-х незнакомых.

Рис 5

Если у человека трое незнакомых, то в 4-х из этих людей не будет человека, знакомого с остальными тремя (Рис 5)

4) Получается у одного человека могут быть не более 2-х незнакомых, которые могут быть незнакомы друг с другом, [illegible] людей, [illegible] ~~людей~~ [illegible] ~~X~~ 156-30=125

Запрещается делать пометки, раскрывающие авторство работы

9301 0003

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМА, ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ-ФИНАНСИСТ!»

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

Черновик 7

(...) Продолжение решения

5) [illegible]

[illegible]

[illegible]

Ответ: [illegible]

Запрещается делать пометки, раскрывающие авторство работы

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМА, ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ-ФИНАНСИСТ!»

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ [illegible]

8

[illegible]

[illegible] ?

Прямоугольник заполнения каждого решения является либо [illegible], либо [illegible]

Пусть [illegible] — x, а [illegible] — y, пусть [illegible] — 0, а [illegible] — 1

Тогда 2x + y = 10 (так 10 клеток по горизонтали)

При x = 5 y = 0 1 вариант

При x = 0 y = 10 1 вариант [illegible] 1 вариант

При x = 4 y = 2 [illegible] вариантов

[illegible] 0 [illegible] 9 вар., второго 0 → 9 вар. [illegible] все варианты [illegible] 0 [illegible] ряда [illegible] ряда, вариантов $\frac{9 \cdot 9 - 9}{2} + 9 =$ [illegible] 45

[illegible]

~~[illegible] → 36, второго 0 → 36, варианты, когда 0 не стоят [illegible] рядом [illegible] $\frac{9 \cdot 9 - 9}{2} + 9 =$ [illegible] вар.~~

~~[illegible] 3 рядом [illegible] вариантов $\frac{[illegible]}{6} + 9 =$ [illegible] вар.~~

~~[illegible] → 56, второго 0 → 56, [illegible] 56 и четвертого 56, когда 0 не стоят [illegible] вариантов [illegible] 4 ряда [illegible] + 8 = [illegible]~~

Запрещается делать пометки, раскрывающие авторство работы

9301 0003

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМА, ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ-ФИНАНСИСТ!»

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

9

[illegible]

[illegible]

Расставим группы [illegible] [illegible]

[illegible]

Расставим группы [illegible]

[illegible]

9 3 01 0003

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМА. ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ-ФИНАНСИСТ!»

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

[illegible]

$a_{2018} = 1 - \frac{1}{a_{2017}} = 2$

[illegible]

$\frac{1}{2} \quad 2 \quad -1 \quad \frac{1}{2} \quad 2$

[illegible]

$a_{2015} = a_{2015-6k}$

$= a_{2015-6 \cdot 335} = a_5 = 2$

$a_5 = \frac{1}{a_1}$ $\boxed{a_1 = \frac{1}{a_5} = \frac{1}{2}}$

Запрещается делать пометки, раскрывающие авторство работы

93010003

$$\frac{75k+82}{k+1} = 76$$

$$75k + 82 = 76k + 76$$

$$-k = -6$$

$$k = 6;\quad x = 75 \cdot 6 = 450$$

$$\frac{450+82+y}{8} = 77$$

$$532 + y = 616$$

$$\boxed{y = 84}$$

$$\frac{x}{k} = 75\ (1) \qquad \frac{x+82}{k+1} = 76\ (2)$$

$$\frac{x+82+y}{k+2} = 77\ (3) \qquad y = ?$$

93010003

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМА. ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ-ФИНАНСИСТ!»

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

Запрещается делать пометки, раскрывающие авторство работы

8301 0003

$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

$C_3^2 = \frac{6}{2} = 3$

$C_{162}^4 = \frac{162!}{4!\cdot 158!} = \frac{[illegible]}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$

$= [illegible]970$

$\frac{166\cdot 167}{2} = 167\cdot 84$

Нет 2-х пар [illegible]

[illegible] — [illegible]

[illegible] не [illegible]

[illegible] пара [illegible]

[illegible]

Одна [illegible]

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМА. ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ-ФИНАНСИСТ!»

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

[illegible]

$x^2 + ax + b + 1 = 0$

$a, b \in \mathbb{Z}$, $x \neq 0$, $b + 1 \neq 0$, [illegible]

[illegible]

$D = a^2 - 4b - 4 > 0$

$x_1 x_2 = b + 1$, $b = x_1 x_2 - 1$

$x_1 + x_2 = -a$

$a^2 = (x_1 + x_2)^2$

$b^2 = (x_1 x_2 - 1)^2$

$a^2 + b^2 = (x_1 + x_2)^2 + (x_1 x_2 - 1)^2 =$

$= x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 + (x_1 x_2)^2 - 2x_1 x_2 + 1 =$

$= x_1^2 + x_2^2 + (x_1 x_2)^2 + 1 =$ [illegible]

$=$ [illegible]

$= (x_1^2 + 1)(x_2^2 + 1)$, $x_1^2 \neq 0$ и $x_2^2 \neq 0$, т.к. $x_1 \neq 0$, $x_2 \neq 0$

$x_1^2 + 1 \geq 2$, т.к. $x_1^2 \geq 1$, $x_1^2 + 1 \geq 2$

$x_2^2 + 1 \geq 2$, т.к. $x_2^2 \geq 1$, $x_2^2 + 1 \geq 2$, значит $(x_1^2 + 1)(x_2^2 + 1)$ [illegible]

$a^2 + b^2 \notin P$

Запрещается делать пометки, раскрывающие авторство работы

93010003

9.4

a b

$\frac{a(a-1)}{2}$ $\frac{b(b-1)}{2}$

$\frac{a(a-1)}{2} + \frac{b(b-1)}{2} + k = 99$

$k \in \{1, 2, 3, 4\}$

$\min 99 - k = 99 - 4 = 95$

$\max 99 - k = 99 - 1 = 98$

$98 \geq \frac{a(a-1)}{2} + \frac{b(b-1)}{2} \geq 95$

$196 \geq a(a-1) + b(b-1) \geq 190$

$196 \geq a^2 - a + b^2 - b \geq 190$

≤ 196

93010003

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМА, ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ-ФИНАНСИСТ!»

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ Черновик

Запрещается делать пометки, раскрывающие авторство работы

83010003

830/0003

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМА, ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ-ФИНАНСИСТ!»

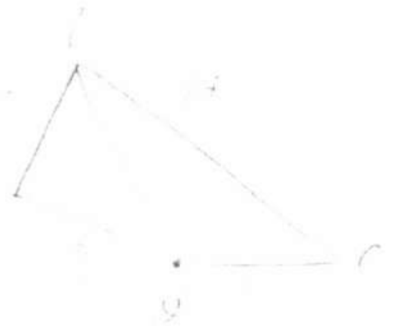
ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

Запрещается делать пометки, раскрывающие авторство работы

83010003

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМА, ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ-ФИНАНСИСТ!»

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ



$BD + DC > BC$

$BD + 5 > 17$

$BD > 12$

$BD = 13$

$7^{20} \cdot 2^{10}$

$28 = 14 \cdot 2 = 2^2 \cdot 7$

Запрещается делать пометки, раскрывающие авторство работы

9301003

$$a_{2k} = \frac{1}{a_{2k-1}}$$

$$a_{2018} = \frac{1}{a_{2017}}$$

$$a_{2017} = \frac{1}{2}$$

$$a_{2018} = 2 = \frac{1}{a_{2017}} \Rightarrow a_{2017} = \frac{1}{2} = 1 - \ldots$$

Оценочный бланк олимпиадных заданий по математике

Код участника: 613117

Номер задания		1	2	3	4	5	6	7	8
Полученные баллы	Первый проверяющий	10	10	12	12	12	0	14	0
	Второй проверяющий	10	10	12	12	12	0	14	0
	Итого	10	10	12	12	12	0	14	0
Сумма баллов (оценка)		70							

Члены жюри:

Подпись — Фамилия И.О.: Федосеев В.Г.

Подпись — Фамилия И.О.: Хисамбеев И.Ш.

Подпись — Фамилия И.О.

Всероссийская олимпиада школьников «Миссия выполнима. Твое призвание -финансист!»

ПО МАТЕМАТИКЕ 8-9 классы

Заключительный (очный) этап
2017/2018 учебный год

613117

Код участника

Вариант II

Задание 1. (10 баллов)

Длины сторон *AB, BC, CD* и *DA* выпуклого четырехугольника *ABCD* равны соответственно 7, 21, 6 и 10. Найдите длину диагонали *DB*, если известно, что она является целым числом.

Задание 2. (10 баллов)

Найдите знаменатель дроби $\frac{300!}{44^{32}}$ после ее сокращения до несократимой.

(Выражение 100! равно произведению первых 100 натуральных чисел: $100! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot \ldots \cdot 100$.)

Задание 3. (12 баллов)

Последовательность $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ такова, что $a_{2n} = \frac{1}{a_{2n-1}}$, а $a_{2n+1} = 1 - a_{2n}$. Найдите a_1, если $a_{2025} = 2$.

Задание 4. (12 баллов)

Турнир по стрельбе предполагает несколько серий по 10 выстрелов каждая. В одной из серий Петр выбил 85 очков, в результате чего среднее количество очков, выбиваемых им за серию, увеличилось с 69 до 71 очков. Сколько очков должен выбить Петр в следующей серии выстрелов, чтобы среднее количество очков, выбитых за серию, стало равно 72?

613117

Задание 5. (12 баллов)

Уравнение $x^2+ax+b+1=0$ имеет два различных ненулевых целочисленных корня. Докажите, что число a^2+b^2 не является простым, если числа a и b целые?

Задание 6. (14 баллов)

По регламенту шахматного турнира каждый участник должен сыграть с каждым один раз. После того как была сыграна ровно 61 партия, оказалось, что множество участников турнира можно разбить на две неравные по численности группы так, что соперники, относящиеся к одной и той же группе, уже сыграли партии между собой. При этом партии между соперниками, которые относятся к разным группам, если и были сыграны, то не более двух. Каково наибольшее возможное число участников этого шахматного турнира?

Задание 7. (14 баллов)

В компании работает 182 человека. Среди любых четырех человек можно выбрать хотя бы одного, знакомого с остальными тремя. Каково минимальное возможное количество людей, которые знакомы со всеми?

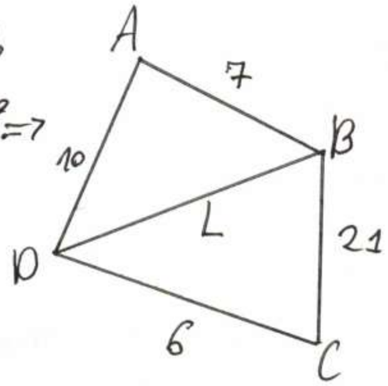
Задача 8. (16 баллов)

Сережа нашел старый, возможно неполный, набор от игры в домино. На всех найденных костяшках от домино стерлись все точки, так что они стали не отличимыми. Каждая костяшка представляет собой прямоугольник 2×1. Сережа решил каждый день по-новому раскладывать костяшки в виде дорожки шириной 2 так, чтобы рисунок раскладки никогда не повторялся. В итоге Сережа смог раскладывать костяшки 144 дня, после чего все возможные раскладки были исчерпаны. Сколько костяшек от домино нашел Сережа, если в день он делал одну раскладку?

613117

ЧИСТОВИК

№1



1. Так как $ABCD$ - выпуклый четырёхугольник, то все его углы: $\angle A, \angle B, \angle C$ и $\angle D$ меньше $180^\circ \Rightarrow$
$\Rightarrow \cos\angle A, \cos\angle B, \cos\angle C, \cos\angle D$ ~~меньше~~ больше -1.

И так как все углы ненулевые, то их косинусы меньше 1. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \cos\angle A, \cos\angle B, \cos\angle C, \cos\angle D \in (-1;1)$.

2. Рассмотрим $\triangle ABD$, $AB=7$, $AD=10$. Пусть длина $BD - L$. Тогда по теореме косинусов:

$$L^2 = AB^2 + AD^2 - 2\cdot AB\cdot AD\cdot\cos\angle A = 7^2 + 10^2 - 2\cdot 7\cdot 10\cdot\cos\angle A,$$

$$L^2 = 149 - 140\cos\angle A,$$

так как $\cos\angle A \in (-1;1) \Rightarrow 149-140 < L^2 < 149+140 \Leftrightarrow 9 < L^2 < 289$.

3. Рассмотрим $\triangle BCD$, $BC=21$, $CD=6$. По теореме косинусов:

$$L^2 = BC^2 + CD^2 - 2BC\cdot CD\cdot\cos\angle C = 21^2 + 6^2 - 2\cdot 21\cdot 6\cdot\cos\angle C,$$

$$L^2 = 477 - 252\cdot\cos\angle C,$$

так как $\cos\angle C \in (-1;1) \Rightarrow 477-252 < L^2 < 477+252 \Leftrightarrow 225 < L^2 < 729$.

4. Объединяя результаты, получаем:

$$\begin{cases} 9 < L^2 < 289, \\ 225 < L^2 < 729; \end{cases} \quad 225 < L^2 < 289,$$

и с учётом того, что $L \in \mathbb{Z}$ и $L > 0$:

$$\sqrt{225} = 15 < L < 17 = \sqrt{289} \Rightarrow L = 16.$$

Ответ: длина диагонали $DB - 16$.

+

№2.

Докажем следующую лемму:

Лемма 1.

пусть $n \in \mathbb{N}$ и p-простое. Тогда в разложении $n!$ на простые числа, p будет присутствовать в степени α:

$\alpha = \left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \left[\frac{n}{p^3}\right] + \ldots + \left[\frac{n}{p^\beta}\right]$, где $[x]$ - целая часть числа и β такое, что $p^\beta < n < p^{\beta+1}$.

$n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n$,
кол-во чисел от 1 до n, которые делятся на p — $\left[\frac{n}{p}\right]$.
Однако, ~~в~~ при этом ~~не учитываются Значит p встречается в разложении~~ по ~~крайней мере $\left[\frac{n}{p}\right]$ раз. Однако, не учитываются те p, которые входили в разложения некоторого числа больше чем 1 раз.~~
кол-во чисел от 1 до n, которые делятся на p^2 — $\left[\frac{n}{p^2}\right]$,
. . .
кол-во чисел от 1 до n, которые делятся на p^β — $\left[\frac{n}{p^\beta}\right]$.
Тогда p встречается в разложении чисел, которые делятся на $p^{\alpha'}$ — ~~$\left[\frac{n}{p^{\alpha'}}\right]$~~, α' раз. Посчитаем кол-во p в разложении $n!$. Оно равно суммарному кол-ву p, которые встречаются в числах, делящихся ~~делящих~~ на p^β, плюс суммарное кол-во p, которые встречаются в числах, делящихся на $p^{\beta-1}$, но не на p^β, и т.д.
Сумм. Кол-во ~~чисел~~ p, которые встречаются в числах, которые делятся на p^k, но не на p^{k+1}, равно: $k\cdot\left\{\left[\frac{n}{p^k}\right]-\left[\frac{n}{p^{k+1}}\right]\right\}$. Отсюда получаем, что:

$$\alpha = \beta\cdot\left[\frac{n}{p^\beta}\right] + (\beta-1)\cdot\left\{\left[\frac{n}{p^{\beta-1}}\right]-\left[\frac{n}{p^\beta}\right]\right\} + (\beta-2)\left\{\left[\frac{n}{p^{\beta-2}}\right]-\left[\frac{n}{p^{\beta-1}}\right]\right\} + \ldots =$$

$$= [\beta-(\beta-1)]\cdot\left[\frac{n}{p^\beta}\right] + [(\beta-1)-(\beta-2)]\cdot\left[\frac{n}{p^{\beta-1}}\right] + \ldots = \left[\frac{n}{p^\beta}\right] + \left[\frac{n}{p^{\beta-1}}\right] + \ldots + \left[\frac{n}{p}\right].$$

ч.т.д.

тогда 2 встречается в разложении 300! α раз, где:

$$\alpha = \left[\frac{300}{2}\right] + \left[\frac{300}{4}\right] + \left[\frac{300}{8}\right] + \left[\frac{300}{16}\right] + \left[\frac{300}{32}\right] + \left[\frac{300}{64}\right] + \left[\frac{300}{128}\right] + \left[\frac{300}{256}\right]$$

$= 150 + 75 + 37 + 18 + 9 + 4 + 2 + 1 = 296 \Rightarrow$ 300! делится на 2^{296}.

11 встретится в разложении 300! β раз, где

$\beta = \left[\frac{300}{11}\right] + \left[\frac{300}{121}\right] = 27 + 2 = 29 \Rightarrow$ 300! делится на 11^{29}, но не на 11^{30}.

$$\frac{300!}{44^{32}} = \frac{300!}{(2^2\cdot 11)^{32}} = \frac{300!}{2^{64}\cdot 11^{32}} = \frac{2^{296}\cdot 11^{29}\cdot K}{2^{64}\cdot 11^{32}} = \frac{2^{232}\cdot K}{11^3},$$ где $K \in N$, $2 \nmid K$, $11 \nmid K$.

Значит получится несократимая дробь со знаменателем $11^3 = 121\cdot 11 = 1331$

Ответ: 1331.

+

№3.

$a_{2n} = \frac{1}{a_{2n-1}} \Rightarrow a_{2n-1} = \frac{1}{a_{2n}}$ и $a_{2n+1} = 1 - a_{2n} \Rightarrow a_{2n} = 1 - a_{2n+1}$.

Тогда $a_{2n-2} = 1 - a_{2n-1} = 1 - \frac{1}{a_{2n}} = 1 - \frac{1}{1-a_{2n+1}}$, для $n \in N$, $2n-2 \geq 1$.

~~$a_{2025} = 2 \Rightarrow a_{2022} = 1 - \frac{1}{1-2} = 1 - \frac{1}{-1} = 2 = a_{2025}$.~~

Аналогично получаем, что $a_{2n-1} = \frac{1}{1-\frac{1}{a_{2n+2}}}$.

Из этих формул получим, что если $a_{2n+1} = 2$ для некоторого n, то

$a_{2n-2} = 1 - \frac{1}{1-2} = 1 - \frac{1}{-1} = 2 = a_{2n+1}$;

и если $a_{2n+2} = 2$, для некоторого n, то

$a_{2n-1} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2 = a_{2n+2}$.

То есть, если $a_{2n} = 2 \Rightarrow a_{2n-3} = 2$, а если $a_{2n-3} = 2 \Rightarrow a_{2n-6} = 2$.

Объединяя результаты, получаем:

~~$a_{3k}=a_{3(k-1)}=a$~~ $a_n=a_{n-3}=a_{n-3\cdot2}=a_{n-3\cdot3}=\ldots=a_{n-3k}$, для любых n и $k\in N$, $n-3k\geq1$. Тогда, с учётом того, что $2025=3\cdot675$, получаем: $a_{2025}=a_{2022}=\ldots=a_3 \Leftrightarrow a_3=2$.

Воспользуемся реккурентными формулами для последовательности:

$a_2=1-a_3=-1$,

$a_1=\frac{1}{a_2}=-1$.

+

Ответ: $a_1=-1$.

№4.

Пусть Пётр всего совершил N_c серий и суммарно ~~сделал~~ выбил N_0 ~~выстрелов~~ очков. Тогда, если ε_1 - ср. кол-во очков, выбиваемых им за серию, то $\varepsilon_1=\frac{N_0}{N_c}$, $\varepsilon_1=69$.

После того, как он совершил ещё одну серию N_c^* стало равным N_c+1, а N_0 - N_0+85. Пусть ε_2 - новое ср. кол-во очков.

Тогда: $\varepsilon_2=\frac{N_0+85}{N_c+1}$, $\varepsilon_2=71$.

+

$$\varepsilon_2=\frac{N_0+85}{N_c+1}=\frac{\varepsilon_1 N_c+85}{N_c+1}=\frac{\varepsilon_1(N_c+1)+85-\varepsilon_1}{N_c+1}=\varepsilon_1+\frac{85-\varepsilon_1}{N_c+1},$$

$$\frac{85-\varepsilon_1}{N_c+1}=\varepsilon_2-\varepsilon_1,\quad N_c+1=\frac{85-\varepsilon_1}{\varepsilon_2-\varepsilon_1}=\frac{85-69}{71-69}=\frac{16}{2}=8 \text{ и } N_c=7.$$

$N_0=\varepsilon_1\cdot N_c=69\cdot7=483$. Пусть Петру нужно выбить ещё x очков, чтоб среднее стало равно 72. Тогда:

$$72=\frac{N_0+85+x}{N_c+2}=\frac{483+85+x}{7+2}=\frac{568+x}{9},\quad 568+x=72\cdot9=648,\ x=648-568=80.$$

Ответ: 80 очков.

№5.

$x^2+ax+b+1=0$. Пусть корни этого уравнения — x_1 и x_2; $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$

$x_1 \neq x_2 \neq 0$. Пусть a и $b \in \mathbb{Z}$.

По теореме Виета:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -a, \\ x_1 \cdot x_2 = b+1. \end{cases}$$

Тогда выразим a и b через x_1 и x_2:

$$\begin{cases} a = -(x_1+x_2), \\ b = x_1 x_2 - 1. \end{cases}$$

$$a^2+b^2 = (x_1+x_2)^2 + (x_1x_2-1)^2 = [x_1^2+x_2^2+2x_1x_2] + [x_1^2x_2^2+1-2x_1x_2] =$$
$$= x_1^2x_2^2 + x_1^2 + x_2^2 + 1 = (x_1^2+1)x_2^2 + (x_1^2+1) = (x_1^2+1)(x_2^2+1).$$

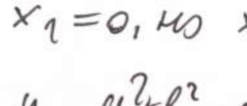
Предположим, что a^2+b^2 — простое, тогда это выражение имеет лишь 2 делителя: 1 и p, $p \in P$. Пусть, для определённости $x_1^2+1=1$, $x_2^2+1=p \Rightarrow x_1=0$, но x_1 и x_2 — ненулевые $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ предположение неверно и a^2+b^2 — составное, для a и $b \in \mathbb{Z}$.

ч.т.д.

№7.

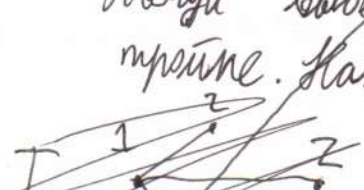
Выберем произвольную тройку человек. Назовём их 1, 2 и 3. Пусть среди этих трёх человек есть

такой, что ~~дружит~~ знаком с двумя другими. Предположим, для определённости это 1. В дальнейшем будем обозначать что человек x знаком с человеком y как:



Тогда выберем произвольного человека, не принадлежащего этой тройке. Например 2. ~~Возможно два варианта знакомств:~~

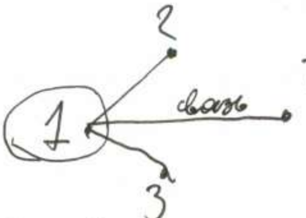
I.



В четвёрке (1, 2, 3, 2) должен быть хотя бы один человек, знакомый с другими тремя.

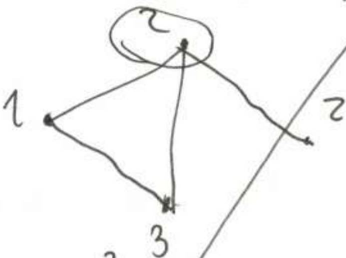
Рассмотрим все варианты:

1. Если это — 1, то:

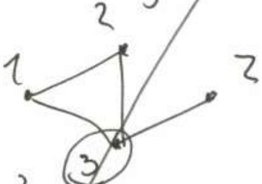


(на рисунке указаны лишь те „связи", которые достоверно присутствуют).

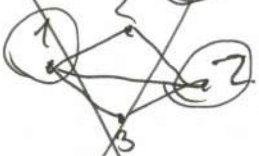
2. Если это — 2, то:



3. Если это — 3, то:



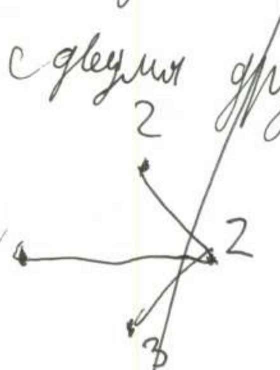
4. Если это — Z, то:



Заметим, что во всех вариантах среди тройки (1, 2, 3) точно присутствует такой человек, который знаком с другими тремя.

~~Докажем, что в тройке (1, 2, 3) есть человек, знакомый со всеми людьми.~~

1. Пусть в тройке нет человека, который был бы знаком с двумя другими. Возьмём, не принадлежащего тройке, человека Z.



Тогда Z должен быть знаком с 1, 2, 3 иначе в четвёрке (1, 2, 3, Z) не будет человека, знакомого со всеми. Так как Z был выбран произвольно, то каждый человек, не принадлежащий тройке (1, 2, 3) должен ~~присутствовать~~ быть знаком с 1, 2, 3 => среди (1, 2, 3) нет человека, знакомого со всеми.

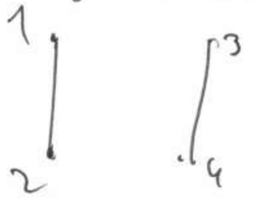
ЧИСТОВИК 613117

№7.

Будем обозначать, что человек 1 и 2 незнакомы, как:

а знакомства:

Предположим, что из 182 человек можно найти 2 пары незнакомых людей; причём пары не имеют общих людей:

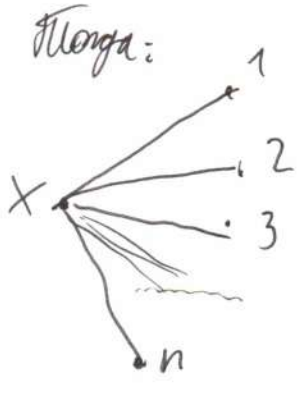


(показаны лишь те связи, которые достоверно есть)

тогда в четвёрке (1, 2, 3, 4) нет человека, знакомого со всеми. Следовательно предположение неверно и нельзя найти 2 пары незнакомых людей, которые не имеют общих людей.

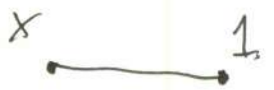
Тогда, либо все люди знакомы, либо есть ровно 1 человек, который ~~незнакомый с несколькими людьми~~ входит во все возможные пары незнакомцев. В первом варианте кол-во людей, знакомых со всеми — 182. Рассмотрим 2-ой вариант. Пусть этот самый человек — x, и он незнаком с $1, 2, \dots, n$.

Тогда:



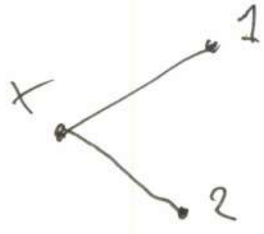
Если $n \geq 3$, то можно взять такую четвёрку, в которой не будет человека, знакомого со всеми. Тогда $n \leq 2$.

$n = 1$,



В этом варианте все люди, кроме X и 1, знакомы со всеми другими. Значит, кол-во людей, знакомых со всеми — 180.

$n = 2$

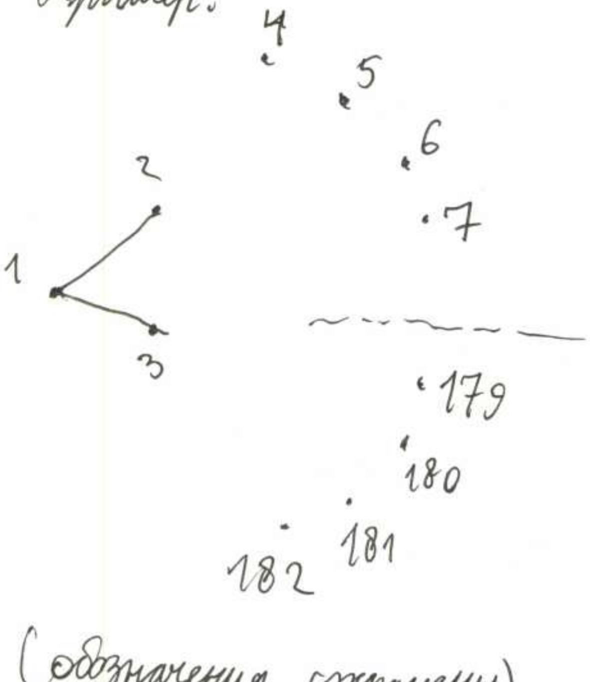


Все люди, кроме X, 1, 2, знакомы со всеми другими. Значит, кол-во людей, знакомых со всеми — 179.

Объединяя результаты, получаем, что минимальное кол-во людей, знакомых со всеми, — 179.

~~Ответ: 179. Пример.~~

Пример:



(обозначения сохранены)

Ответ: 179.

ЧЕРНОВИК 613117

№2.

$\frac{300!}{44^{32}}$, $44 = 2^2 \cdot 11$, $44^{32} = 2^{64} \cdot 11^{32}$

$2025 : 3 = 675$ $3k$. $a_3 = 2$. $a_2 = -1$, $a_1 = -1$

11, 22, 33, ...

$N_n = \left[\frac{300}{11}\right] + \left[\frac{300}{11^2}\right] + \dots$ 11^{29}

$27 + 2 + 0 \dots$

121, $\cancel{1} 121$.

$\left[\frac{300}{2}\right] + \left[\frac{300}{2^2}\right] + \left[\frac{300}{2^3}\right] \dots$ 331

$a_{r+3k} = a_r$

n=	1	2	3	4	5	6	7	8
[ ]	150	75	37	18	9	4	2	1

34 16 20 7 3

71 146 $\boxed{2^{296} \cdot 11^{29}}$

$2^{64} \cdot 11^{32}$

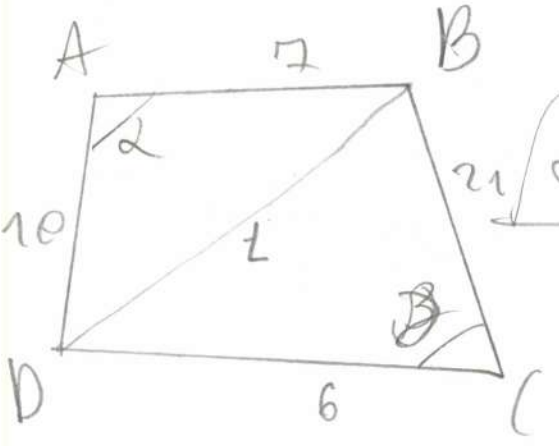
$a_{2025} = 2$,
$a_{2024} = 1 - 2 = -1$,
$a_{2023} = -1$,
$a_{2022} = 2$,
$a_{2021} = \frac{1}{2}$,
$a_{2020} = \frac{1}{2}$,
$a_{2019} = 2$

№3. $a_{2n-1} = \frac{1}{a_{2n}}$, $a_{2n} = 1 - a_{2n+1}$

$a_1, a_2, \dots a_{2n}$ (a_n), $a_{2n} = \frac{1}{a_{2n-1}}$, $a_{2n+1} = 1 - a_{2n}$. $1 - \frac{1}{2}$ $\frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$

~~$a_{2n+1} = 1 -$~~ $a_{2n+2} = \frac{1}{1 - a_{2n}}$ $a_{2n} = \frac{1}{1 - a_{2n-2}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{1 - a_{2n-4}}} \dots$

№ 1.



$\boxed{\alpha, \gamma < 180^\circ}$

n	n^2
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25
6	36
7	49
8	64
9	81
10	100
11	121
12	144

$L = 7^2 + 10^2 - 2 \cdot 7 \cdot 10 \cdot \cos\alpha$

$\boxed{L = 149 - 140\cos\alpha}$

$L = 21^2 + 6^2 - 2 \cdot 21 \cdot 6 \cdot \cos\gamma$

$\boxed{L = 477 - 252\cos\gamma}$

$\times \begin{array}{r} 21 \\ 21 \\ \hline 21 \\ 42 \\ \hline 441 \end{array}$ 36 417 $\times \begin{array}{r} 126 \\ 2 \\ \hline 252 \end{array}$

225

$-1 < \cos\alpha < 1$

$\boxed{9 < L < 289}$

$\boxed{225 < L < 729.}$

729

$15^2 < L < 27^2$

$L = 16^2$

$L = 1$

$x^2+ax+b+1=0$ x_1, x_2,

$x_1+x_2 \neq 0$, $x_1x_2 \in \mathbb{Z}$

~~доказать~~:

$\boxed{a, b \in \mathbb{Z} \Rightarrow a^2+b^2 \in S}$.

$x_1+x_2=-a$

$x_1x_2=b+1$

$(x_1+x_2)^2=a^2$,

$b^2=(x_1x_2-1)^2$,

$a^2+b^2=x_1^2+x_2^2+\cancel{2x_1x_2}+(x_1x_2)^2+1-\cancel{2x_1x_2}$

$a^2+b^2=(x_1^2+1)(x_2^2+1)$

>1 >1

≥ 2 ≥ 2

2°

1 2 2 2 3

170

$N \geq 3$

$N \geq 1$ $\exists$ $\boxed{\ldots}$, где нет $\Rightarrow$

$\Rightarrow N=3$

N=182

одиночн[?]

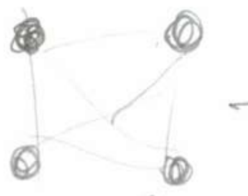
181

180

$N \geq 1$

$180 / \frac{3}{60}$

$\boxed{N \geq 60}$



$N_{в} = 10$ – средняя. 122

40

85 м

69	27	12	5	2	1	82
40	18	8	4	2	1	

$69 \to 71$

55

27

$\mathcal{E}_1 = 69, \ \mathcal{E}_2 = 71$

$\boxed{N = 100}$ 55

$$\mathcal{E}_1 = \frac{N_{св}}{N_c}, \quad \mathcal{E}_2 = \frac{N_{св} + 85}{N_c + 1},$$

16

18 17

12

$$N_{св} = 69 N_c, \quad \mathcal{E}_2 = 69 + \frac{16}{N_c + 1}, \quad 8$$

коммутатив. $71 = \mathcal{E}_2$

36 37

$$2 = \frac{16}{N_c + 1}, \quad N_c + 1 = 8, \quad N_c = 7 \quad 8$$

36

$69 = 7$

N 6. N 6 12

27

+1 +1

$$a_{2n-1} = \frac{1}{a_{2n}} = \frac{1}{1-a_{2n+1}} = \frac{1}{1-\frac{1}{a_{2n+2}}}$$

$$a_{2n-1} = \frac{1}{a_{2n}} = \frac{1}{1-a_{2n+1}}$$

$$a_{2n_2} = 1 - \frac{1}{1-a_{2n+1}}$$

$$a_{2n-2} = a_{2n+1}.$$

2025 | 3
-18 | 675
22
-21
15

16

146

250

296

121

121

1334

232

$$1. \left[\frac{n}{p}\right] - \left[\frac{n}{p^2}\right] - [n]$$

$$1 \cdot \left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right]$$

$$\beta \cdot \left[\frac{n}{p^\beta}\right] + (\beta-1)\left(\left[\frac{n}{p^{\beta-1}}\right] - \left[\frac{n}{p^\beta}\right]\right) +$$

$$(\beta-1)\left[\frac{n}{p^{\beta-1}}\right]$$

$$\left[\frac{n}{p^\beta}\right] + (\beta-2)\left(\left[\frac{n}{p^{\beta-2}}\right] - \dots\right.$$

470

250

670

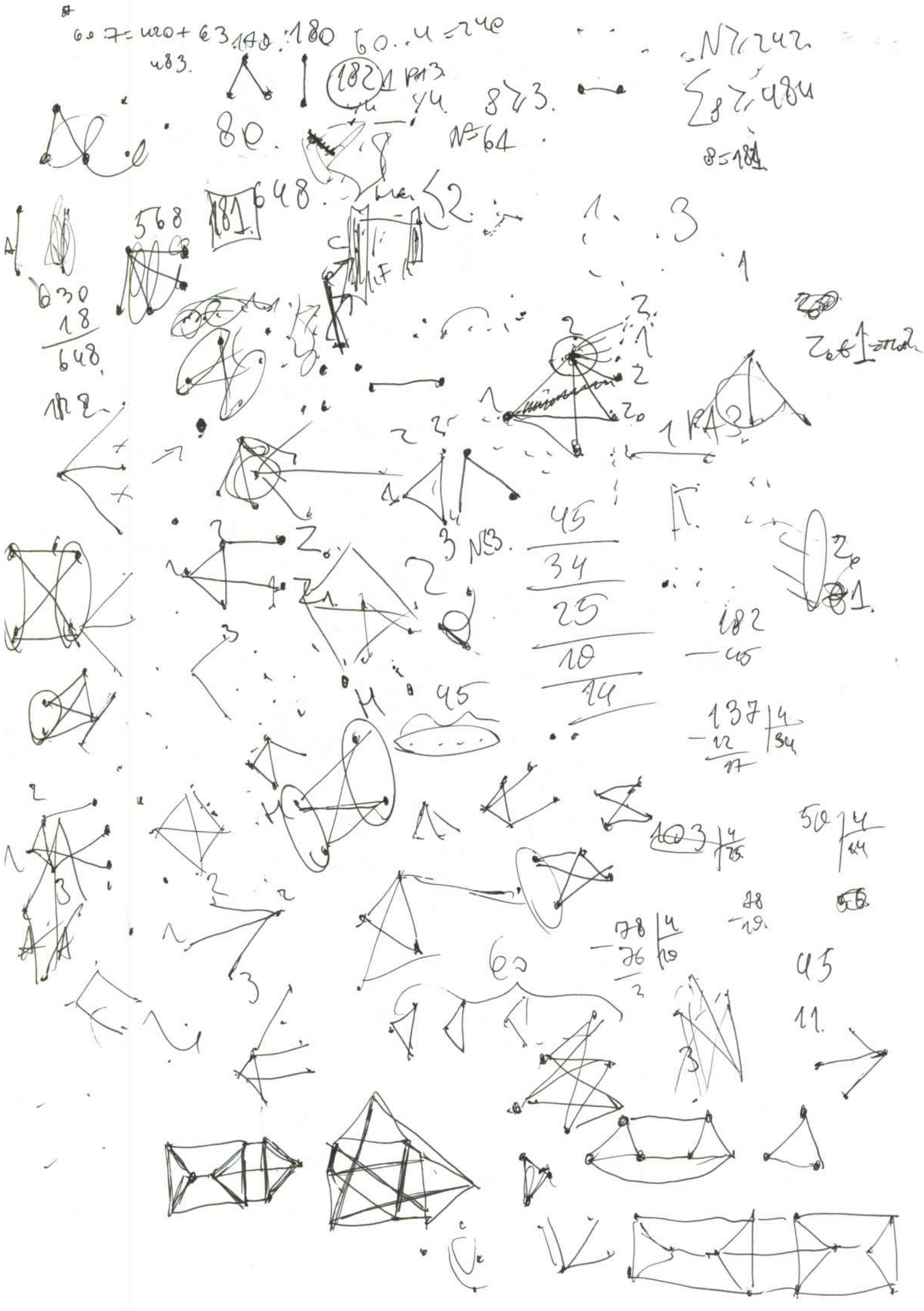
720

27.

$N_1 < 11$

$\frac{42}{6}$

12
24
252
441 + 36
470


60·7 = 420 + 63
483.
140 : 180
60·4 = 240
N ≥ 242
∑ ≥ 484
8 = 181
182
1 раз
44
80.
8 ≥ 3.
№ = 64
648
181
568
630
18
648
1 раз
№3.
45
34
25
10
14
182
−45
137
103
50
78
76
62
45
11.

Оценочный бланк олимпиадных заданий по математике

Код участника: 58010008

Номер задания		1	2	3	4	5	6	7	8
Полученные баллы	Первый проверяющий	10	5	12	12	12	14	0	3
	Второй проверяющий	10	5	12	12	12	14	0	3
	Итого	10	5	12	12	12	14	0	3
Сумма баллов (оценка)		68							

Члены жюри:

Подпись	Александрова И.А. Фамилия И.О.
Подпись	Волкова Е.С Фамилия И.О.
Подпись	Федин В.Г. Фамилия И.О.

Всероссийская олимпиада школьников «Миссия выполнима. Твое призвание -финансист!»

ПО МАТЕМАТИКЕ 8-9 классы

Заключительный (очный) этап 2017/2018 учебный год

5801 0008

Код участника

Вариант I

Задание 1 (10 баллов)

Длины сторон AB, BC, CD и DA выпуклого четырехугольника $ABCD$ равны соответственно 5, 17, 5 и 9. Найдите длину диагонали DB, если известно, что она является целым числом.

Задание 2 (10 баллов)

Найдите знаменатель дроби $\dfrac{100!}{28^{20}}$ после ее сокращения до несократимой.

(Выражение $100!$ равно произведению первых 100 натуральных чисел: $100! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 100$.)

Задание 3 (12 баллов)

Последовательность $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ такова, что $a_{2n} = \dfrac{1}{a_{2n-1}}$, а $a_{2n+1} = 1 - a_{2n}$. Найдите a_1, если $a_{2018} = 2$.

Задание 4 (12 баллов)

Турнир по стрельбе предполагает несколько серий по 10 выстрелов каждая. В одной из серий Иван выбил 82 очка, в результате чего среднее количество очков, выбиваемых им за серию, увеличилось с 75 до 76 очков. Сколько очков должен выбить Иван в следующей серии выстрелов, чтобы среднее количество очков, выбитых за серию, стало равно 77?

58010008

Задание 5. (12 баллов)

Уравнение $x^2 + ax + b + 1 = 0$ имеет два различных ненулевых целочисленных корня. Докажите, что число $a^2 + b^2$ не является простым, если числа a и b целые?

Задание 6 (14 баллов)

По регламенту шахматного турнира каждый участник должен сыграть с каждым один раз. После того как было сыграно ровно 99 партий, оказалось, что множество участников турнира можно разбить на две неравные по численности группы так, что все соперники, относящиеся к одной и той же группе, уже сыграли партии между собой. При этом были сыграны, но не более четырех, партии между соперниками, которые относятся к разным группам. Каково наибольшее возможное число участников этого шахматного турнира?

Задание 7 (14 баллов)

В компании работает 168 человек. Среди любых четырех человек можно выбрать хотя бы одного, знакомого с остальными тремя. Каково минимальное возможное количество людей, которые знакомы со всеми?

Задача 8 (16 баллов)

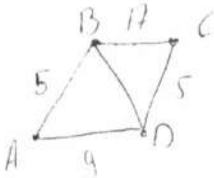
Вова играл старыми костяшками от домино, на которых стерлись все точки, так что они стали не отличимыми. Каждая костяшка представляет собой прямоугольник 2×1, а их число равно 24. Вова решил каждый день по-новому раскладывать костяшки в виде дорожки 2×12, так чтобы рисунок раскладки никогда не повторялся. Сколько дней Вова сможет так раскладывать костяшки, пока все возможные раскладки не будут исчерпаны, если в день он делает одну раскладку?

58010008

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМА, ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ-ФИНАНСИСТ!»

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ Чистовик

№1



Из $\triangle BCD$

$BD^2 = 289+25-2\cdot5\cdot17\cdot\cos C$

$BD^2 = 314 - 170\cos C \qquad 1 > \cos C > -1$

$484 > BD^2 > 144$

Из $\triangle ABD$ $BD^2 = 25+81-2\cdot9\cdot5\cdot\cos\alpha$

$BD^2 = 106 - 90\cos\alpha \qquad 1 > \cos\alpha > -1$

$\begin{cases} 196 > BD^2 > 16 \\ 484 > BD^2 > 144 \end{cases}$ $\underbrace{144=12^2 \quad 196=14^2}$ под эти условия подходит только 13^2

$196 > 169 > 16$

$484 > 169 > 144$ другие квадраты целых чисел не подходят $\Rightarrow BD=13$

(+)

Ответ: $BD=13$

№2

$\dfrac{100!}{28^{20}} = \dfrac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot\ \ \cdot100}{7^{20}\cdot2^{40}}$ $\qquad 98 = 2\cdot49 = 2\cdot7^2$

Всего чисел от 1 до 100 $\vdots\ 7$ − 14, но $49=7^2 \Rightarrow$ 15 чисел можно сократить $\Rightarrow 7^{20} : 7^{15} = 7^5$ т.к. 7 − простое число $\Rightarrow$ получить его перемножением других чисел невозможно и так не получить числа кратные 7 меньше

Всего от 1 до 100 − 50 четных чисел $\Rightarrow 2^{40}$ уйдет $\Rightarrow$ останется число 7^5

Ответ: 7^5

$\frac{+}{2}$

ЛИСТ 1

Запрещается делать пометки, раскрывающие авторство работы

58010008

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМАЮ, ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ-ФИНАНСИСТ!»

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

Чистовик

№3

$a_{2n} = \frac{1}{a_{2n-1}}$ $a_{2n+1} = 1 - a_{2n}$

$a_{2018} = a_{2n} = \frac{1}{a_{2017}}$ $a_{2017} = 1 - a_{2016}$ $a_{2016} = \frac{1}{a_{2015}}$

$2 = \frac{1}{a_{2017}} \Rightarrow a_{2017} = \frac{1}{2}$ $\frac{1}{2} = 1 - a_{2016} \Rightarrow a_{2016} = \frac{1}{2}$ $\frac{1}{2} = \frac{1}{a_{2015}} \Rightarrow a_{2015} = 2$

$a_{2015} = 1 - a_{2014}$ $a_{2014} = \frac{1}{a_{2013}}$ $a_{2013} = 1 - a_{2012}$

$2 = 1 - a_{2014} \Rightarrow a_{2014} = -1$ $-1 = \frac{1}{a_{2013}} \Rightarrow a_{2013} = -1$ $-1 = 1 - a_{2012} \Rightarrow a_{2012} = 2$

$a_{2012} = \frac{1}{a_{2011}}$ $a_{2011} = 1 - a_{2010}$ $a_{2010} = \frac{1}{a_{2009}}$

$2 = \frac{1}{a_{2011}} \Rightarrow a_{2011} = \frac{1}{2}$ $\frac{1}{2} = 1 - a_{2010} \Rightarrow a_{2010} = \frac{1}{2}$ $\frac{1}{2} = \frac{1}{a_{2009}} \Rightarrow a_{2009} = 2$

$a_{2009} = 1 - a_{2008}$ $a_{2008} = \frac{1}{a_{2007}}$ $a_{2007} = 1 - a_{2006}$

$2 = 1 - a_{2008} \Rightarrow a_{2008} = -1$ $-1 = \frac{1}{a_{2007}} \Rightarrow a_{2007} = -1$ $-1 = 1 - a_{2006} \Rightarrow a_{2006} = 2$

цикл
$a_{2018} = 2$
$a_{2017} = \frac{1}{2}$
$a_{2016} = \frac{1}{2}$
$a_{2015} = 2$
$a_{2014} = -1$
$a_{2013} = -1$

$a_{2012} = 2$
$a_{2011} = \frac{1}{2}$
$a_{2010} = \frac{1}{2}$
$a_{2009} = 2$
$a_{2008} = -1$
$a_{2007} = -1$
$a_{2006} = 2$

Цикл повторяется через каждые 6 чисел

$2018 : 6 = 336$ (ост. 2)

a_1 будет являться 2 числом в цикле $a_1 = \frac{1}{2}$

+

Ответ: $a_1 = \frac{1}{2}$

№4

Пусть n - кол-во серий

$76n = 82 + 75(n-1)$

$76n = 82 + 75n - 75$

$n = 7$

В 7 партии средние кол-во очков стало 76

$77 \cdot 8 = x + 76 \cdot 7$

$x = 616 - 532$

$x = 84$

Ответ 84 очка

+

Лист 2

Запрещается делать пометки, раскрывающие авторство работы

58 01 0008

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМАЮ, ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ-ФИНАНСИСТ!»

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ Чистовик

№5

$x^2+ax+b+1=0$

$x_1x_2=b+1 \Rightarrow b=x_1x_2-1$

$x_1+x_2=-a \Rightarrow a=-x_1-x_2$

$a^2+b^2=(x_1x_2-1)^2+(-x_1-x_2)^2=x_1^2x_2^2-\cancel{2x_1x_2}+1+x_1^2+x_2^2+\cancel{2x_1x_2}=$

$=x_1^2(x_2^2+1)+x_2^2+1=(x_2^2+1)(x_1^2+1)$ +

a^2+b^2 - можно представить в виде произведения 2х скобок =>

=> a^2+b^2 - не простое

т.к. x_2 и $x_1 \neq 0$ ~~=>~~ и x_1^2 и $x_2^2>0$ => эти множители не 1 и не сама сумма a^2+b^2 => a^2+b^2 - не простое ■

№6

кол-во партий равно $(n-1)+(n-2)+(n-3)\ldots+(n-n)$

где n - кол-во человек

Рассмотрим все такие числа равные сумме последовательных чисел: 1; 3; 6; 10; 15; 21; 28; 36; 45; 55; 66; 78, 91

т.к. между 2 разными группами сыграно более 4 партий =>

=> сумма партий внутри групп равна от 91 до 95

Если 91 то во 2 группе 6

Если в 1 группе 78 то во второй от 17 до 20 таких чисел нет =>

=> 78 не может быть

Если в 1 группе 66 то во второй от 32 до 29 таких чисел нет =>

=> 66 не может быть

Если в 1 группе 55 то во второй от 43 до 40 таких чисел нет =>

=> 55 не может быть

Лист 3

Запрещается делать пометки, раскрывающие авторство работы

5801 0008

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМАЯ. ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ-ФИНАНСИСТ!»

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

Чистовик

Если в 1 группе 45 то во второй от 53 до 50 => таких чисел нет

Если в 1 группе 36 то во второй от 62 до 59 => таких чисел нет

Если в 1 группе 28 то во второй от 70 до 67 => таких чисел нет

Если в 1 группе 21 то во второй от 74 до 77 => таких чисел нет

Если в 1 группе 15 то во второй от 83 до 80 => таких чисел нет

Если в 1 группе 10 то во второй от 88 до 85 => таких чисел нет

Если в 1 группе 6 то во второй 91

Если 3 или 1 то число > 91 => число > 100 => нет таких чисел

⇓

91 в 1 группе и 6 во второй

$91 = 1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12+13 \Rightarrow n_1 = 14$

$6 = 1+2+3 \Rightarrow n_2 = 4$

тогда $N_{max} = n_1 + n_2 = 14 + 4 = 18$

Ответ: $N_{max} = 18$ человек

+

Лист 6

Запрещается делать пометки, раскрывающие авторство работы

58010008

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМА. ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ-ФИНАНСИСТ!»

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ Участник

№ 8

т.к все постилки выше симметричны => рисунок

раскладки будет состоять из плиток 1х2 постилки

разобьем эту дорожку на квадраты 2х2 их будет 6 штук

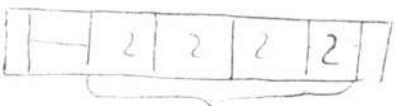
каждый квадрат можно разложить 2 способами

=> кол-во вариантов равно $2^6 = 64$

Есть еще несколько вариантов когда мы ставим

1 вертикальную по краям

т.к варианты симметричны по отношению к середине



кол-во вариантов $2 \cdot 2^4 = 16 \cdot 2 = 32$

должна быть хотя бы одна горизонтальная

кол-во вариантов $2^2 = 4 \cdot 2 = 8$

[illegible] может быть больше т.к [illegible] будут все вертикальные [illegible] уже [illegible] => будет хотя бы одна горизонтальная

Есть еще 1 вариант когда сверху стоят по 5 вертикальных и в центре горизонтальные

Σ вариантов = 64+32+8+1 = 105 вариантов = 105 дней

Ответ 105 дней

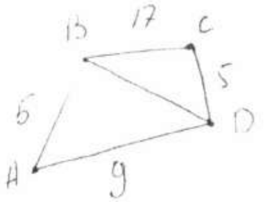
7

Лист 5

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМА, ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ-ФИНАНСИСТ!»

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

ЧЕРНОВИК



$BD^2 = BC^2 + CD^2 - 2BC\,CD \cdot \cos C$

$BD^2 = 289 + 25 - 170 \cdot \cos C$

$BD^2 = 314 \pm 85 \quad \cos C = \pm \frac{1}{2}$

$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB\,AD \cdot \cos\alpha$

$BD^2 = 25 + 81 - 90\cos\alpha$

$BD^2 = 106 \pm 45$

$BD^2 \pm$

$\frac{17}{2}$ $\frac{17}{2}$

$17 \cdot 17 = 289$, $289 + 25 = 314$, $314 + 85 = 399$, $314 - 85 = 229$, $314 + 170 = 484$, $16 \cdot 16 = 256$, $81 + 25 = 106$, $106 - 45 = 61$, $106 + 45 = 151$, $81 - 25 = 56$, $289 - 25 = 264$

$2^2 \cdot 3^2$ 6^2 $4 \cdot 9 = 36$

$28 \cdot 3 = 84$, $27 \cdot 8 = 216$, 6^3

$1 \cdot \cancel{2} \cdot 3 \cdot \cancel{4} \cdot 5 \cdot 6 \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{8} \cdot 9 \quad 1 \quad 100 \quad 56 \quad 7$

$\cancel{28} \cdot 28$ $1\ \cancel{2}\ 3\ \cancel{4}\ 5\ \cancel{6}\ \cancel{7}\ 8\ 9\ 10\ 11\ 12\ 13\ \cancel{14}\ \ldots\ 56\ 28 \ldots 56 \ldots 14$

$28 = 2 \cdot 14$

$28 = 7 \cdot 4$

$28 = 28 \cdot 1$

$28 = 56 : 2$ $\quad 56 = 8 \cdot 7 = 4 \cdot 2 \cdot 7$

$28 = 84 : 3$ $\quad 84 = 3 \cdot 42$

$28 = 42 \cdot 2$

$21 \cdot 4 = 7 \cdot 3 \cdot 4 = 7 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2$

$42 = 6 \cdot 7 = 21 \cdot 2 =$

28^{14}

$7^{14} \cdot 4^{14}$

$14^{14} \cdot 2^{14}$ $\quad 2^{13} \quad 2^{12}$

$7^{14} \cdot \cancel{2^{28}}$

$\cancel{2^{14}}\ 2^7$

$7^{\cancel{28}} \cdot \cancel{2^{14}} \cdot 7^{14}$ $\quad 7^5$

$7^{20} \cdot 2^{40} = 7^{\cancel{65}}$

6 8 10 12 16 18 20 22 24 26 ~~28~~
30 32 34 36 38 40 44
46 48 50 52 54 58
60 62 64 66 68
70 72 74 76 78
80 82 ~~84~~ 86 88 90
92 94 96 ~~98~~ 100

7 14 21 42 ~~28~~ 35 $7 \cdot 9$ $6 \cdot 3$
28 70 77 94 56
7 14 21 28 35 42 49 56 63
70 77 84 91 98

~~2 4 6 8 10 12 16 18 20 22 24~~

$a_{2017} = \frac{1}{2}$

$a_1\ a_2\ a_3\ \ldots\ a_n$ $\quad a_{2017} = 1 - a_{2016}$

$a_2 \neq \frac{1}{2}$ $\quad a_{2018} =$ $\quad a_{2016} = \frac{1}{2}$ $\quad \frac{1}{2}$ $\quad a_{2015} = 1 - a_{2014}$

$a_{2 \cdot 1009} = \frac{1}{\frac{1}{2}}$ $\quad a_{2016} = \frac{1}{2}$ $\quad a_{2014} = 1$

a_{2015}

Лист 1

Запрещается делать пометки, раскрывающие авторство работы

58010008

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМА, ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ-ФИНАНСИСТ!»

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ Черновик

$a_{2018} = \frac{1}{a_{2017}}$ $a_{2017} = 1 - a_{2016}$

$a_{2017} = \frac{1}{2}$ $a_{2016} = \frac{1}{2}$

$a_{2016} = \frac{1}{a_{2015}}$ $a_{2015} = 2$ $a_{2015} = 1 - a_{2014}$

$a_{2014} = -1$ $a_{2014} = \frac{1}{a_{2013}}$ $a_{2013} = -1$

$a_{2013} = 1 - a_{2012}$ $a_{2012} = \frac{1}{a_{2011}}$

$a_{2012} = 2$ $a_{2011} = \frac{1}{2}$

$a_{2011} = 1 - a_{2010}$ $a_{2010} = \frac{1}{a_{2009}}$

$a_{2010} = \frac{1}{2}$ $a_{2009} = 2$

$a_{2009} = 1 - a_{2008}$

$a_{2008} = -1$

$a_{2018} = 2$
$a_{2017} = \frac{1}{2}$
$a_{2016} = \frac{1}{2}$
$a_{2015} = 2$
$a_{2014} = -1$
$a_{2013} = -1$
$a_{2012} = 2$
$a_{2011} = \frac{1}{2}$
$a_{2010} = \frac{1}{2}$
$a_{2009} = 2$
$a_{2008} = -1$

$2018 : 6 = 336$, остаток 2

336 2

$a_1 = \frac{1}{2}$

$-a-1$

$\frac{a^2 - a^2 + 4b + 4}{2}$

n 10 10 10

$\frac{82 + n}{2} = 75 + n$ $\frac{n_1 + n_2}{2} = 75$ $n_1 + n_2 = 150$

$\frac{82 + 150}{3} = \frac{232}{3}$

$150 + 82 = 232$ $75 \cdot 3 = 225$ $225 + 84 = 9$ $375 + 82 = 460$

$\frac{225 + 82}{4}$

$300 + 82$ $\frac{375 + 82}{6}$, $\frac{466}{6}$

$466 : 6 = 77$

76 $76n = 82 + 75(n-1)$

$76n = 82 + 75n - 75$

$n = 82 - 75$

$n = 7$

$\cancel{77n = 532 +}$

$616 - 532$ $2\sqrt{b+1}$

$n=7$ $75 \cdot 6 = 450$ $450 + 82 = 432$

$432 : 7$ $75 \cdot 6 = 450$ $450 + 82 = 532$ $532 : 7 = 76$

$77 \cdot 8 = 616$ $616 - 532 = 48$ $616 - 532 = 84$ 84 очки

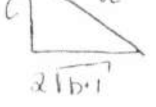
$x^2 + ax + b + 1 = 0$

$x^2 + ax + b + 1 = 0$

$D = a^2 - 4b - 4 = c^2$

$a^2 - 4(b+1) = c^2$

$a^2 - c^2 = 4(b+1)$



$x_1 \cdot x_2 =$

Лист 2

Запрещается делать пометки, раскрывающие авторство работы

58010008

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМА, ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ-ФИНАНСИСТ!»

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

Черновик

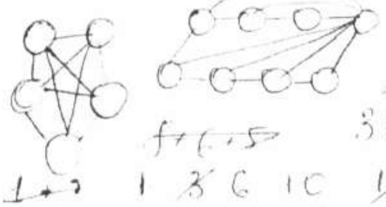
$x^2+ax+b+1=0$

$D=a^2-4b-4>0$

$a^2-4b-4>0$

$D\ a^2>4(b+1)$

$\frac{H-H}{2}=\frac{2}{2}$ $\quad \frac{2-2}{2}=\frac{2}{2}$



$1\ 3\ 6\ 10\ 15\ 21$

$28\ 36\ 45\ 55\ 66$

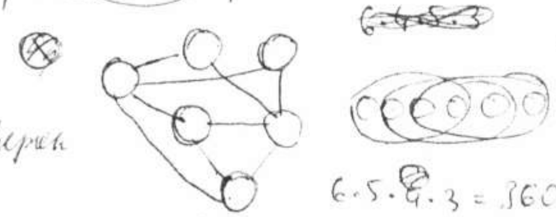
$91+6 \quad 91+6$

$13+3=16$

$98-78=20$

$168:4 = 42$ $\quad$ 42 гл.

$168\cdot167\cdot166\cdot165$ – исп. 60 четверен



$6\cdot5\cdot4\cdot3=360$

$a^2-4(b+1)$ $\quad D=b^2-4ac$

$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\cdot\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{b^2-b^2+4ac}{4a^2}=\frac{c}{a}$

$x_1+x_2=\frac{-b}{a}$ $\quad x_1+x_2=-a$ $\quad x_1+x_2=-a$

$x_1x_2=\frac{c}{a}$ $\quad x_1x_2=b+1$ $\quad x_1x_2=b+1$

$x_1=-a-x_2$

$x_1=\frac{b+1}{x_1}$

$-a-x_2=\frac{b+1}{x_2}$

$-ax_2-x_2^2=b+1$

$-x_2(a+x_2)=b+1$

$b=-x_2(a+x_2)-1$

$a=-x_1-x_2$

$b=x_1x_2-1$

$x_1^2+2x_1x_2+x_2^2+x_1^2x_2^2-2x_1x_2+1$

$x_1^2+x_2^2+x_1^2x_2^2+1$

$x_1^2(x_2^2+1)+x_2^2+1$

$(x_2^2+1)(x_1^2+1)$ – не простое т.к. множится

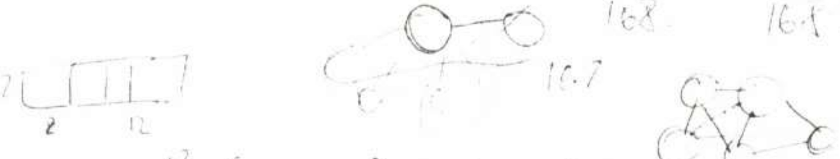
Лист 3

Запрещается делать пометки, раскрывающие авторство работы

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМА, ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ-ФИНАНСИСТ!»

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

Черновик



168. 16·13·165

289
256
225

$BD^2 = 289+25-2\cdot5\cdot17\cdot\cos C$

$BD^2 = 81+25-2\cdot5\cdot9\cdot\cos\alpha$

$BD^2 = 314 - 170\cos C$

$BD^2 = 106 - 90\cos\alpha$

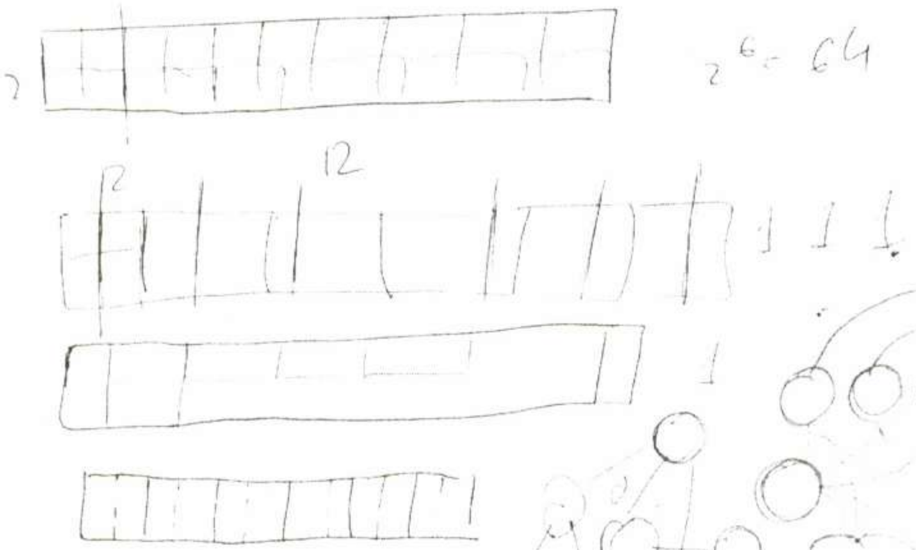
$484 > BD^2 > 144 \quad 196 > DB^2 > 16$

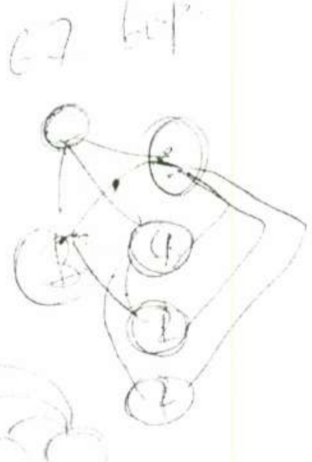
13^2 - единственный квадрат попадающий под 2 условия => $BD = 13$

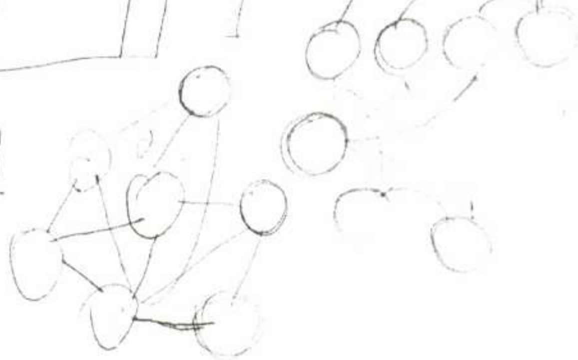
так минимум 42 как максимум 168.

2^6

$2^6 = 64$







Лист 4

Запрещается делать пометки, раскрывающие авторство работы

5801 0008

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМАЮ, ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ-ФИНАНСИСТ!»

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

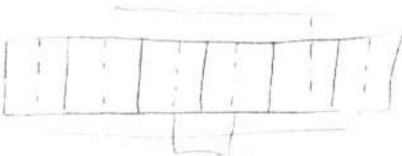
Черновик

№ 8.

Т.к. все костяшки внешне одинаковы => рисунок расклада будет состоять из положений этих костяшек. разобьём эту дорожку на квадраты 2×2 их будет 6 штук

каждый квадрат можно заполнить 2 способами
=> кол-во вариантов = $2^6 = 64$

но есть ещё несколько вариантов: когда справа (с одного и другого) стоит нечётное кол-во вертикальных костяшек вследствие того что они занимают 1 ячейку 1 => нужно добавлять костяшку со второго края т.к. количество [illegible] если мы не добавим.



таких вариантов всего 3
⇓
общее кол-во вариантов равно $64+3=67$

Ответ 67 дней.

№ 7.

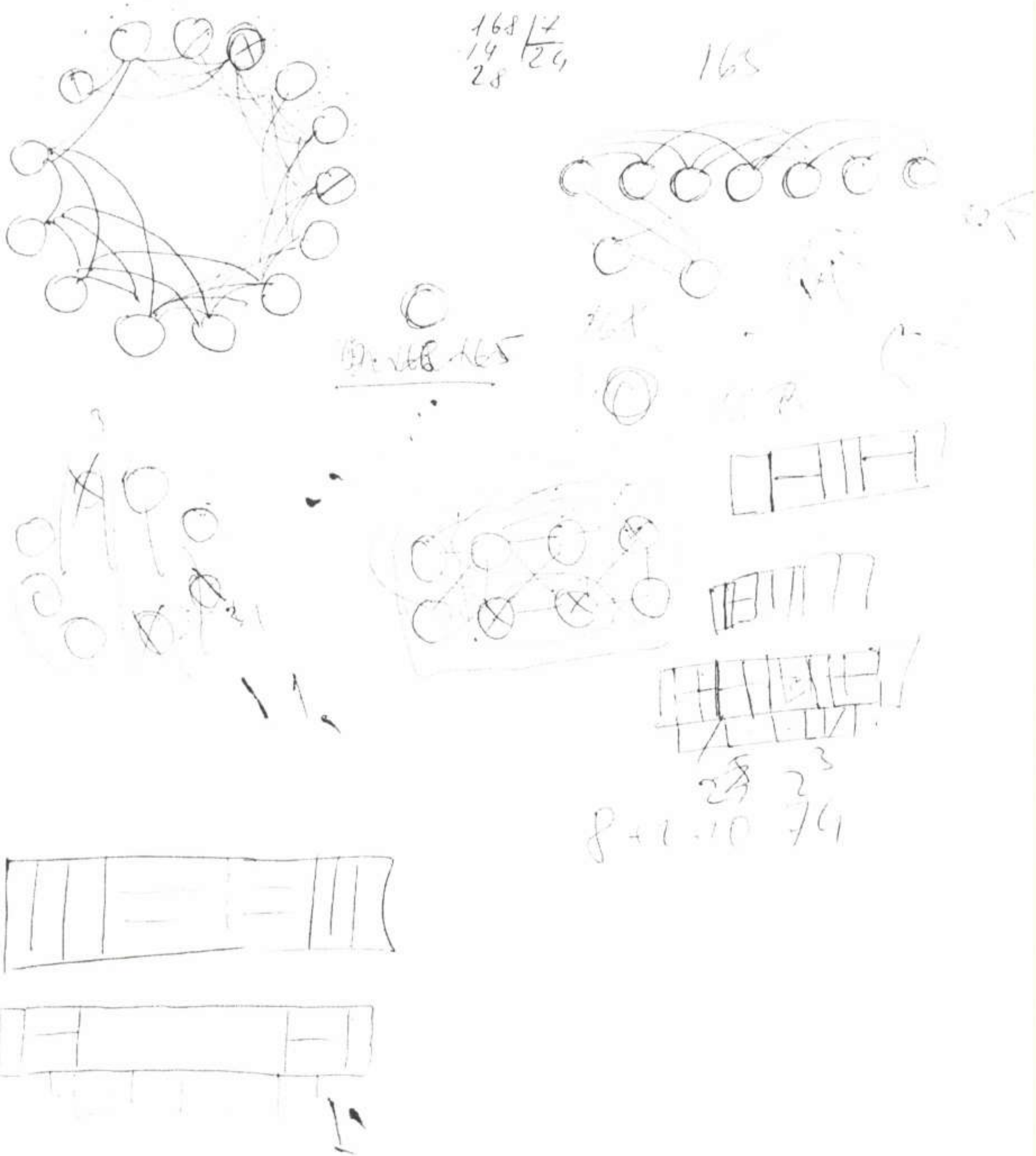
Т.к. знакомые из всех взаимно

Лист 5

58010008

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМА, ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ-ФИНАНСИСТ!»

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ Черновик



Лист 6

Запрещается делать пометки, раскрывающие авторство работы