



## ОЧНЫЙ ЭТАП

11 класс

Вариант 1

### Задание 1 (10 баллов)

Салон сотовой связи продал 495 телефонов, базовая цена каждого из которых составляла 5000 руб. При этом каждый  $m$ -й продаваемый телефон был акционный и продавался со скидкой равной 500 руб. Покупатель каждого третьего акционного телефона получал, сверх того, и дополнительную скидку в размере 750 руб. Определите число  $m$ , если итоговая выручка салона от продажи телефонов составила 2 413 750 руб.

#### Решение.

Пусть  $x$  - количество телефонов, проданных с максимальной ( $500 + 750 = 1250$  руб.) скидкой. Количество остальных акционных телефонов тогда выражается формулой  $2x + r$ , где  $r \in \{0, 1, 2\}$ . При этом общая сумма скидок, равная  $1250x + 500(2x + r) = 2250x + 500r$  (руб.), равна с другой стороны  $495 \cdot 5000 - 2413750 = 61250$  (руб.).

Уравнение  $2250x + 500r = 61250$  при  $r = 0$  и  $r = 2$  не имеет целых корней, а при  $r = 1$  получается  $x = 27$ . Искомое  $m$  теперь находим как неполное частное от деления 495 на  $27 + 2 \cdot 27 + 1 = 82$ .

Ответ: 6.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача решена полностью	+	10
Составлено какое-либо правильное уравнение относительно $m$ (или тесно связанной с $m$ величины) и показано, что $m = 6$ ему удовлетворяет.	+/-	7
Приведены расчеты, показывающие, что возможно равенство $m = 6$ .	-/+	3
Составлено какое-либо правильное уравнение, но дальше продвижений нет.	-/.	2

**Задание 2 (10 баллов)**

Решите уравнение  $\sin(\sin x) = \sin(1 + \cos x)$ .

**Решение.**

Для данного равенства возможны два случая.

$$1. \sin x = 1 + \cos x + 2\pi k, k \in Z; \text{ при этом } |2\pi k| = |\sin x - \cos x - 1| \leq 1 + |\sin x - \cos x| = 1 + \sqrt{2} \left| \sin \left( x - \frac{\pi}{4} \right) \right| \leq 1 + \sqrt{2} <$$

$$2\pi. \text{ Отсюда } k = 0. \text{ Далее, } \sin x = 1 + \cos x \rightarrow \sin x - \cos x = 1 \rightarrow \sin \left( x - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow x - \frac{\pi}{4} = (-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z.$$

$$2. \sin x + 1 + \cos x = \pi(2k + 1).$$

Поскольку  $|\sin x + 1 + \cos x| < 3 < \pi \leq |\pi(2k + 1)|$ , то в этом случае решений нет.

Ответ:  $\frac{\pi}{4} + (-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача решена полностью	+	<b>10</b>
Задача в основном решена, необходимые неравенства указаны, но не доказаны	+/-	<b>8</b>
Ход решений верный, но при выписывании корней допущены ошибки	-/+	<b>4</b>
С самого начала ( и до конца решения) рассматривался только один из двух возможных случаев.	-/.	<b>2</b>

**Задание 3 (12 баллов)**

Десятичная запись суммы  $3 + 33 + 333 + \dots + 33\dots3$  оканчивается на 2023. Каким наименьшим может быть количество цифр в последнем слагаемом?

**Решение.**

Указанную сумму обозначим через  $S$ , а количество слагаемых в ней (совпадающее с количеством цифр в последнем слагаемом) - через  $n$ . Тогда сумма остатков слагаемых от деления на 10 000 равна  $369 + 3333(n - 3)$ , и дает

при делении на 10 000 равна  $369 + 3333(n - 3)$  и дает при делении на 10 000 такой же остаток, что и  $S$ .

Поэтому выполнено равенство  $369 + 3333(n - 1) = 10000m + 2023$ , где  $m$  - некоторое натуральное число.

Отсюда

$$\begin{aligned} n - 3 &= \frac{10\,000m + 2023 - 369}{3333} = 3m + \frac{m + 1654}{3333} \\ &= 3(3333k - 1654) + k = 10000k - 4962, \end{aligned}$$

где  $k = \frac{m+1654}{3333}$  - натуральное число.

При  $k=1$  получается  $n = 10\,000 - 4962 + 3 = 5041$ .

Ответ: 5041

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача решена полностью	+	<b>12</b>
Ход решений верный, но допущены ошибки в вычислениях	+/-	<b>7-9</b>
Верно составлено уравнение, но дальше продвижений нет	-/+	<b>3</b>
Отмечено, что можно ограничиться рассмотрением остатков по модулю 10 000, но дальше продвижений нет	-/.	<b>1</b>

#### **Задание 4 (12 баллов)**

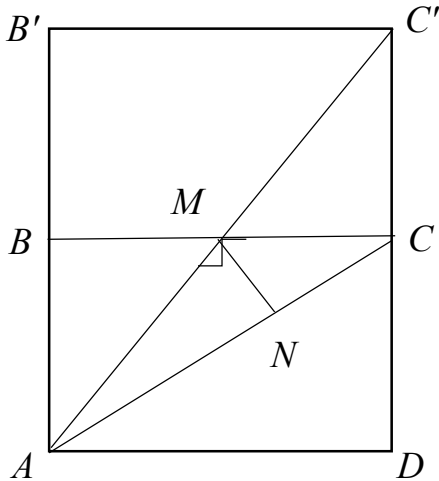
На поверхности куба  $ABCD A'B'C'D'$  построена замкнутая линия, каждая точка  $X$  которой обладает следующим свойством: длина кратчайшего пути по поверхности куба между точками  $X$  и  $A$  равна длине кратчайшего пути по поверхности куба между  $X$  и  $C'$ . Найдите длину этой линии, если длина ребра куба равна 1.

**Решение.**

Из соображений симметрии ясно, что ребрами  $A'B'$ ,  $B'B$ ,  $BC$ ,  $CD$ ,  $DD'$ ,  $D'A'$  и отрезками  $AB'$ ,  $AC$ ,  $AD'$ ,  $C'B$ ,  $C'A'$ ,  $C'D$  линия, о которой идет речь в условии задачи, разбивается на 12 равных частей. Поэтому достаточно рассмотреть точки, принадлежащие треугольнику  $ABC$ .

Пусть  $P$  - одна из таких точек. Тогда кратчайшим путем между  $P$  и  $A$  служит отрезок  $PA$ , а кратчайшим путем между  $P$  и  $C'$  - двухзвенная ломаная  $PKC'$ , вершина  $K$  которой принадлежит ребру  $BC$  (в случае  $P \in BC$  имеем просто

отрезок  $PC'$ ). На ребрах куба объединение граней  $ABCD$  и  $BB'CC'$  представляет собой прямоугольник  $AB'C'D$ , а ломаная  $PKC'$  - отрезок  $PC'$  в нем. Условие  $PA = PC'$  означает, что  $P$  лежит на серединном перпендикуляре к отрезку  $AC'$ ; этот перпендикуляр пересекается с треугольником  $ABC$  по отрезку  $MN$ , где  $M$  середина ребра  $BC$ , а  $N$  - точка на отрезке  $AC$ ,  $\angle AMN = 90^\circ$  (см рисунок).



Найдем длину отрезка  $MN$ .

Из равенств  $\operatorname{tg} \angle BAM = \frac{BM}{AB} = \frac{1}{2}$ ,  $\angle MAN = 45^\circ - \angle BAM$ ,

и формулы тангенса разности углов получаем

$$\operatorname{tg} \angle MAN = \frac{1}{3},$$

откуда

$$MN = \frac{1}{3} AM = \frac{1}{3} \sqrt{AB^2 + BM^2} = \frac{\sqrt{5}}{6}$$

Умножив это число на 12, получим ответ к задаче.

Ответ:  $2\sqrt{5}$ .

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача решена полностью	+	<b>12</b>
Приведено правильное построение линии, но длина линии не найдена или найдена неверно в результате ошибок в вычислениях.	+/-	<b>8-10</b>
Отмечено, что линия является 12-звенной ломаной	-/.	<b>1</b>

**Задание 5 (12 баллов)**

При каких значениях параметра  $a$  система уравнений

$$\begin{cases} \frac{1}{\log_x 5} - \frac{1}{\log_y 5} = 1, \\ y = ax^2 + x + 1 \end{cases}$$

не имеет решений.

**Решение.**

Область допустимых значений переменных задается условиями

$$x > 0, x \neq 1, y > 0, y \neq 1.$$

Из первого уравнения получаем

$$\log_5 x - \log_5 y = 1, \log_5 \frac{x}{y} = 1, x = 5y$$

При  $x = 5y$  второе уравнение системы имеет вид

$$25ay^2 + 4y + 1 = 0.$$

Ясно, что если  $a \geq 0$ , то  $y < 0$ , и система не имеет решений.

При  $a < 0$  уравнение  $25ay^2 + 4y + 1 = 0$  имеет ровно один положительный корень, причем исходная система тогда и только тогда не имеет решений, когда этот корень равен  $\frac{1}{5}$  или 1.

Первое из этих чисел является корнем при  $a = -\frac{9}{5}$ , второе при  $a = -\frac{1}{5}$ .

Ответ: при  $a \in \left\{-\frac{9}{5}, -\frac{1}{5}\right\} \cup [0; +\infty)$ .

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача решена полностью	+	<b>12</b>
Ход решения верный, но не найдено одно из изолированных чисел.	+/-	<b>8</b>
Начало решения верное, но в итоге получен неверный ответ $a \in [0; +\infty)$ .	-/+	<b>2</b>

**Задание 6 (14 баллов)**

В остроугольном неравнобедренном треугольнике  $ABC$  проведены медианы  $AM$  и  $CN$ , а также высоты  $AP$  и  $CQ$ . Известно, что  $MP = NQ$  и что радиус окружности, касающейся стороны  $AC$  и продолжений сторон  $BA$  и  $BC$ , равен 1. Найдите периметр треугольника  $ABC$ .

**Решение.**

Докажем, что  $\angle ABC = 60^\circ$ . Для этого положим  $\angle BAC = \alpha$ ,  $\angle ABC = \beta$ ,  $\angle BCA = \gamma$  и воспользуемся формулами  $BC = 2R \sin \alpha$ ,  $AB = 2R \sin \gamma$ , где  $R$  - радиус описанной окружности треугольника  $ABC$ .

Имеем

$$\begin{aligned} MP &= |CM - CP| = \\ &= \left| \frac{1}{2} BC - CP \right| = |R \sin \alpha - 2R \sin \beta \cos \gamma| = R |\sin(\beta + \gamma) - 2 \sin \beta \cos \gamma| = \\ &= R |\cos \beta \sin \gamma - \sin \beta \cos \gamma| = R |\sin(\beta - \gamma)| = R \sin |\beta - \gamma|. \end{aligned}$$

Аналогично

$$NQ = R \sin |\beta - \alpha|.$$

Поэтому  $\sin |\beta - \gamma| = \sin |\beta - \alpha|$ .

Поскольку из условия задачи вытекают соотношения

$$|\beta - \gamma| < 90^\circ, |\beta - \alpha| < 90^\circ \text{ и } \gamma \neq 0,$$

то  $\beta - \gamma = -(\beta - \alpha)$ , откуда  $2\beta = \alpha + \gamma$ .

С учетом равенства  $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$  это означает, что  $\beta = 60^\circ$ .

Теперь найдем периметр треугольника  $ABC$ .

Пусть окружность с центром  $O$  касается стороны  $AC$  в точке  $K$ , а продолжений сторон  $BA$  и  $BC$  - в точках  $S$  и  $T$  соответственно.

Тогда  $AK = AS$ ,  $CK = CT$  и

$$AB + BC + AC = AB + BC + CT = BC + BT = 2 \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} = 2 \operatorname{ctg} 30^\circ = 2\sqrt{3}$$

Ответ:  $2\sqrt{3}$ .

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача решена полностью	+	<b>14</b>
Установлено равенство $\angle B = 60^\circ$ , но периметр треугольника не найден	+/-	<b>7</b>
Равенство $\angle B = 60^\circ$ не доказано, но с его использованием найден периметр.	-/+	<b>2</b>

**Задание 7 (14 баллов)**

Найдите наименьшее значение функции

$$f(x) = \sqrt{2x^2 + 2x + 1} + \sqrt{x^2 - 18x + 45}.$$

*Решение.*

Область определения функции  $f(x)$  определяется системой неравенств

$$\begin{cases} x^2 - 18x + 45 \geq 0, \\ 2x^2 + 2x + 1 \geq 0. \end{cases}$$

Следовательно, функция  $f(x)$  определена при  $x \in (-\infty; 3] \cup [15; +\infty)$ .

Производная функции равна

$$f'(x) = \frac{2x + 1}{\sqrt{2x^2 + 2x + 1}} + \frac{2x - 18}{\sqrt{x^2 - 18x + 45}}$$

Заметим, что  $f'(x) < 0$  при  $x \in (-\infty; 3]$  и  $f'(x) > 0$  при  $x \in [15; +\infty)$ .

Итак, функция  $f(x)$  возрастает на множестве  $[15; +\infty)$  и убывает на множестве  $(-\infty; 3]$ .

Таким образом наименьшее значение функция достигает в одной из точек  $x = 3$  или  $x = 15$ .

Поскольку  $f(3) = 5 < f(15) = \sqrt{481}$ , то наименьшее значение равно 5.

Ответ: 5

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача решена полностью	+	<b>14</b>
Получен верный ответ, но доказательство неравенства $f'(x) < 0$ при $x \in (-\infty; 3]$ неполное.	+/-	<b>10 - 12</b>
Получен верный ответ, но не доказано, что производная $f'(x) < 0$ при $x \in (-\infty; 3]$ . Доказано, что $f'(x) > 0$ при $x \in [15; +\infty)$ .	-/+	<b>6</b>
Отмечено, но не доказано, что функция принимает минимальное значение на границе области определения. Имеются определенные продвижения в доказательстве этого факта.	-/.	<b>2</b>

### Задача 8 (16 баллов)

На плоскости отмечено 8 различных точек, среди которых есть красные, синие и зеленые. Точек других цветов нет. Известно, что сумма всех попарных расстояний между красными и синими точками равна 12, между красными и зелеными равна 10, а между синими и зелеными равна 1. Каким может быть количество красных отмеченных точек?

#### Решение.

Пусть отмечены красные точки  $A_1, \dots, A_p$ , синие точки  $B_1, \dots, B_q$ , и зеленые точки  $C_1, \dots, C_r$ .

Поскольку для каждой точки  $(A_i B_j C_k)$  выполняется неравенство треугольника  $A_i B_j \leq A_i C_k + B_j C_k$ ,

то

$$\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q \sum_{k=1}^r A_i B_j \leq \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q \sum_{k=1}^r (A_i C_k + B_j C_k)$$

Откуда

$$12r \leq 10q + p.$$

Аналогично, просуммировав неравенства  $A_i C_k \leq A_i B_j + B_j C_k$ , получим

$$10q \leq 12r + p.$$

Далее перебором можно установить, что найденным соотношениям и равенству  $p + q + r = 8$  удовлетворяют ровно две тройки натуральных чисел

$$p = 4, q = 2, r = 2 \text{ и } p = 6, q = 1, r = 1.$$

Покажем, что оба найденных варианта могут быть реализованы на прямой.

Каждую из отмеченных точек будем задавать ее координатой.

Первый вариант:

$$A_1 = 1, A_2 = \frac{5}{4}, A_3 = \frac{3}{2}, A_4 = \frac{5}{2}, B_1 = 0, B_2 = \frac{1}{8}, C_1 = \frac{1}{4}, C_2 = \frac{3}{8}$$

Второй вариант:

$$A_1 = \frac{1}{5}, A_2 = \frac{2}{5}, A_3 = \frac{3}{5}, A_4 = \frac{4}{5}, A_5 = 3, A_6 = 7, B_1 = 0, C_1 = 1$$

Ответ: 4 или 6

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача решена полностью	+	<b>16</b>
Установлено, что все числа, кроме 4 и 6 не подходят. Примеров нет.	+/-	<b>12</b>
Если пример(ы) для 4 и/или 6 красных точек	-/+	по <b>3</b> за каждый вариант