

## ФИНАНСОВЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПРИ ПРАВИТЕЛЬСТВЕ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Департамент экономической теории

Центр макроэкономических исследований

Балацкий Евгений, Екимова Наталья, Юревич Максим

### Математическое моделирование в экономических публикациях

Москва 28 февраля 2018 года

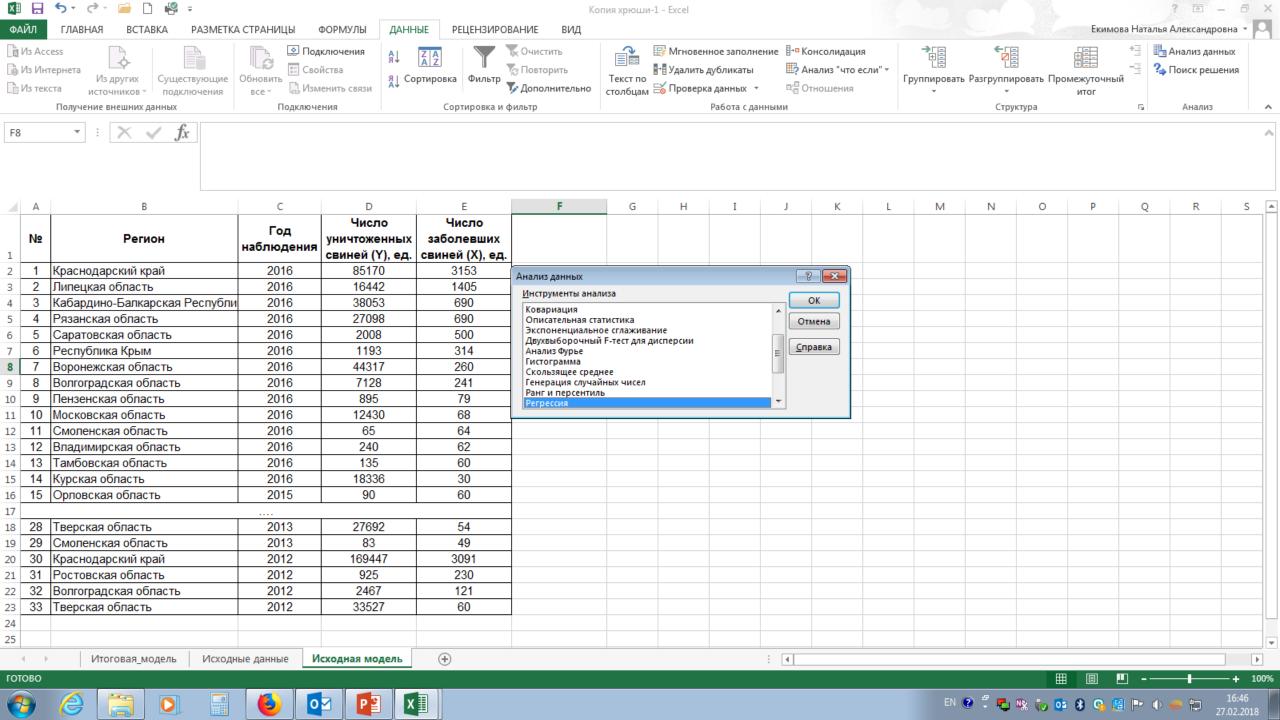
### ОБЩАЯ МОДЕЛЬ

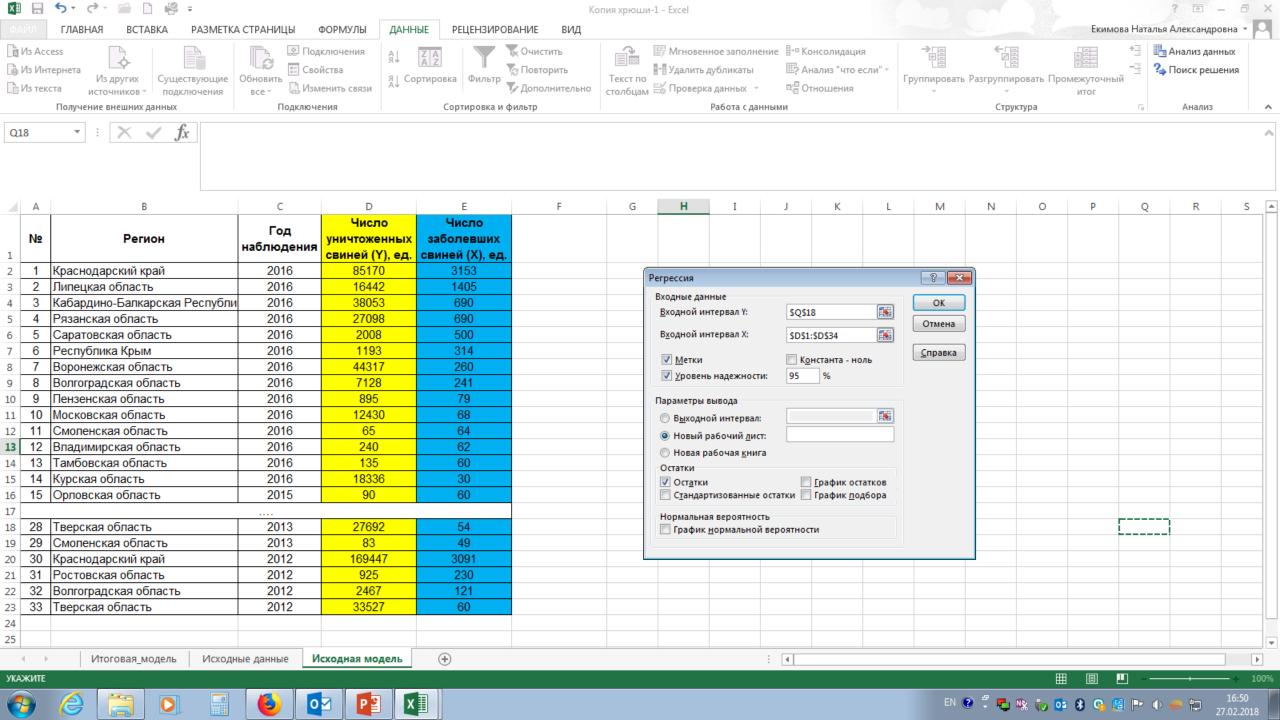
$$y = a_0 + a_1 * x_1 + \cdots + a_n * x_n$$

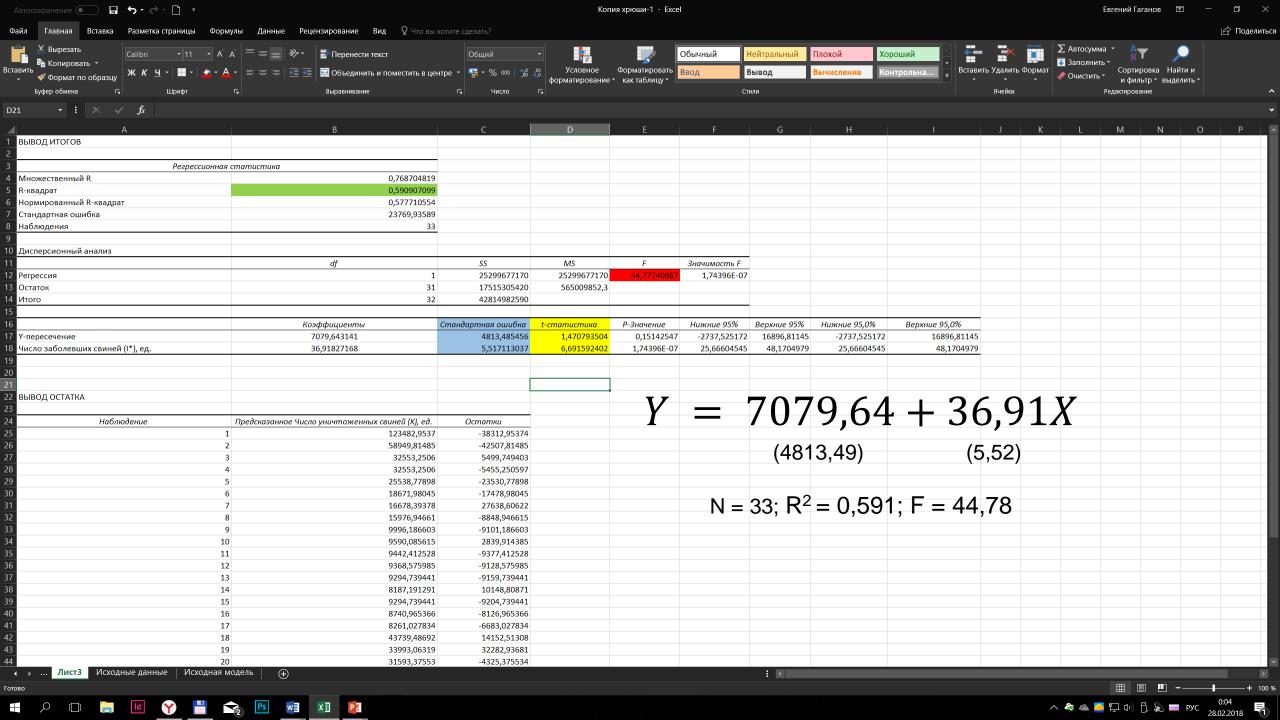
у – выходная переменная; х – входные переменные;а – отыскиваемые параметры

## ОПРЕДЕЛИТЬ КОЛИЧЕСТВО СВИНЕЙ, УНИЧТОЖЕННЫХ ВСЛЕДСТВИЕ ИХ ЗАБОЛЕВАНИЯ АЧС В РЕГИОНАХ РОССИИ С 2012-2016 ГОДЫ

Nº	Регион	Год наблюдения	Число уничтоженных свиней (Y), ед.	Число заболевших свиней (X), ед.
1	Краснодарский край	2016	85170	3153
2	Липецкая область	2016	16442	1405
3	Кабардино-Балкарская Республика	2016	38053	690
4	Рязанская область	2016	27098	690
5	Саратовская область	2016	2008	500
6	Республика Крым	2016	1193	314
7	Воронежская область	2016	44317	260
8	Волгоградская область	2016	7128	241
9	Пензенская область	2016	895	79
10	Московская область	2016	12430	68
11	Смоленская область	2016	65	64
12	Владимирская область	2016	240	62
13	Тамбовская область	2016	135	60
14	Курская область	2016	18336	30
15	Орловская область	2015	90	60
28	Тверская область	2013	27692	54
29	Смоленская область	2013	83	49
30	Краснодарский край	2012	169447	3091
31	Ростовская область	2012	925	230
32	Волгоградская область	2012	2467	121
33	Тверская область	2012	33527	60







### ОЦЕНКА ЗНАЧИМОСТИ ПАРАМЕТРОВ

Суть проверки общего качества уравнения регрессии – оценить насколько хорошо эмпирическое уравнение регрессии согласуется со статистическими данными

#### Основные показатели качества:

- 1. Коэффициент детерминации  $R^2$  (Коэффициент корреляции  $r_{xy}$ )
  - 2. Значение *F*-статистики (критерий Фишера)
  - 3. Стандартная ошибка регрессии (Т-статистика)
    - 4. Средняя ошибка аппроксимации
  - 5. Критерий Дарбина-Уотсона (в случае временных рядов)

### КОЭФФИЦИЕНТ ДЕТЕРМИНАЦИИ R<sup>2</sup>

Коэффициент  $R^2$  показывает долю объясненной вариации зависимой переменной

Используется для предварительной оценки качества модели и как основа для расчета других показателей

$$0 \le R^2 \le 1$$

Чем ближе  $R^2$  к 1, тем лучше регрессия аппроксимирует статистические данные, тем теснее линейная связь между зависимой и объясняющими переменными

## Критические значения коэффициентов корреляции (r) для уровней значимости 0,05 и 0,01

df	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.01$	df	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.01$
1	0,9969	0,9998	17	0,4555	0,5751
2	0,9950	0,9900	18	0,4438	0,5614
3	0,8783	0,9587	19	0,4329	0,5487
4	0,8114	0,9172	20	0,4227	0,5368
5	0,7545	0,8745	25	0,3809	0,4869
6	0,7067	0,8343	30	0,3494	0,4487
7	0,6664	0,7977	35	0,3246	0,4182
8	0,6319	0,7640	40	0,3044	0,3932
9	0,6021	0,7348	45	0,2875	0,3721
10	0,5760	0,7079	50	0,2732	0,3541
11	0,5529	0,6835	60	0,2500	0,3248
12	0,5324	0,6614	70	0,2319	0,3017
13	0,5139	0,6411	80	0,2172	0,2830
14	0,4973.	0,6226	90	0,2050	0,2673
15	0,4821	0,6055	100	0,1946	0,2540
16	0,4683	0,5897			The second second

$$r = \sqrt{R^2}$$

$$df = n - m - 1$$

n – количество наблюдений,
 m – число объясняющих
 переменных (число
 параметров модели
 регрессии без учета
 свободного члена)

$$r = 0,7687$$
  
 $df = 33 - 1 - 1 = 31$   
 $r_{\text{табл}} = 0,3494$ 

#### F-CTATИСТИКА

**F-тест** состоит в проверке гипотезы **H**<sub>0</sub> о *статистической* незначимости уравнения регрессии и показателя тесноты связи

Для этого выполняется сравнение фактического  $F_{\phi a \kappa m}$  и критического (табличного)  $F_{maбл}$  значений F-критерия  $\Phi$ ишера

**Г**табл < **Г**факт – **Н**<sub>0</sub>-гипотеза о случайной природе оцениваемых характеристик отклоняется и признается их статистическая значимость и надежность

**Г**табл > **Г**факт – Н₀-гипотеза не отклоняется и признается статистическая незначимость и ненадежность уравнения регрессии

## Таблица значений F-критерия Фишера на уровне значимости 0,05

	Уровень значимости α = 0,05											
k,				31.0		k		-				
~2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	243	244
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,36	19,37	19,38	19,39	19,40	19,41
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,88	8,84	8,81	8,78	8,76	8,74
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,93	5,91
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,78	4,74	4,70	4,68
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,03	4,00
7	5,50	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,63	3,60	3,57
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,34	3,31	3,28
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,13	3,10	3,07
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,97	2,94	2,91
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,86	2,82	2,79
12	4,75	3,88	3,49	3,26	3,11	3,00	2,92	2,85	2,80	2,76	2,72	2,69
13	4,67	3,80	3,41	3,18	3,02	2,92	2,84	2,77	2,72	2,67	2,63	2,60
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,77	2,70	2,65	2,60	2,56	2,53
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,70	2,64	2,59	2,55	2,51	2,48
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,45	2,42
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,62	2,55	2,50	2,45	2,41	2,38

k₁-число независимых факторов

$$k_2 = n - m - 1$$

$$F = 44,78$$
 $k_1 = 1$ 
 $k_2 = 31$ 
 $F_{\text{табл}} = 4,17$ 

### СТАНДАРТНЫЕ ОШИБКИ РЕГРЕССИИ

*Стандартные ошибки* коэффициентов

регрессии – это средние квадратические отклонения коэффициентов регрессии от их истинных значений.

Сравнивая значение коэффициента с его стандартной ошибкой, можно судить о значимости коэффициента: он является значимым, если есть достаточно высокая вероятность того, что его истинное значение отлично от нуля

Для стандартных ошибок оценок нет таблиц критических уровней – для точного суждения используются *t*-статистики:

t = коэффициент / стандартная ошибка

#### Т-СТАТИСТИКА

Т-статистика (t-критерий Стьюдента) используется для проверки значимости каждого фактора регрессионной модели

Значение t-статистики сравнивается с критическим, имеющим распределение Стьюдента с (n-m-1) степенями свободы

#### ПОРЯДОК РАБОТЫ ПРИ ПРОВЕРКЕ ЗНАЧИМОСТИ КОЭФФИЦИЕНТА ПО t-CTATUCTUKE:

- 1. Выбираем уровень значимости  $\alpha$  (1% или 5%)
  - 2. Вычисляем число степеней свободы
- 3. По таблицам распределения Стьюдента определяем критическое значение t
- 4. Если модуль t-статистики больше критического значения, то коэффициент является значимым на уровне значимости  $\alpha$ 
  - 5. В противном случае коэффициент не значим (на данном уровне  $\alpha$ )

#### Критические значения t-критерия на уровнях значимости 0,10; 0,05; 0,01

Число средней		α	, i	Число средней	α			
свободы df	0,10	0,05	0,01	свободы <i>df</i>	0,10	0,05	0,01	
1	6,3138	12,706	63,657	18	1,7341	2,1009	2,8784	
2	2,9200	4,3027	9,9248	19	1,7291	2,0930	2,8609	
3	2,3534	3,1825	5,8409	20	1,7247	2,0860	2,8453	
4	2,1318	2,7764	4,6041	21	1,7207	2,0796	2,8314	
5	2,0150	2,5706	4,0321	22	1,7171	2,0739	2,8188	
6	1,9432	2,4469	3,7074	23	1,7139	2,0687	2,8073	
7	1,8946	2,3646	3,4995	24	1,7109	2,0639	2,7969	
8	1,8595	2,3060	3,3554	25	1,7081	2,0595	2,7874	
. 9	1,8331	2,2622	3,2498	26	1,7056	2,0555	32,7787	
10	1,8125	2,2281	3,1693	27	1,7033	2,0518	2,7707	
11	1,7959	2,2010	3,1058	28	1,7011	2,0484	2,7633	
12	1,7823	2,1788	3,0545	29	1,6991	2,0452	2,7564	
13	1,7709	2,1604	3,0123	30	1,6973	2,0423	2,7500	
14	1,7613	2,1448	2,9768	40	1,6839	2,0211	2,7045	
15	1,7530	2,1315	2,9467	60	1,6707	2,0003	2,6603	
16	1,7459	2,1199	2,9208	120	1,6577	1,9799	2,6174	
17	1,7396	2,1098	2,8982	∞	1,6449	1,9600	2,5758	

#### Т-СТАТИСТИКА

При оценке значимости коэффициентов регрессии можно использовать следующие «грубые» правила (почти всегда работает при n>10), позволяющее не прибегать к таблицам:

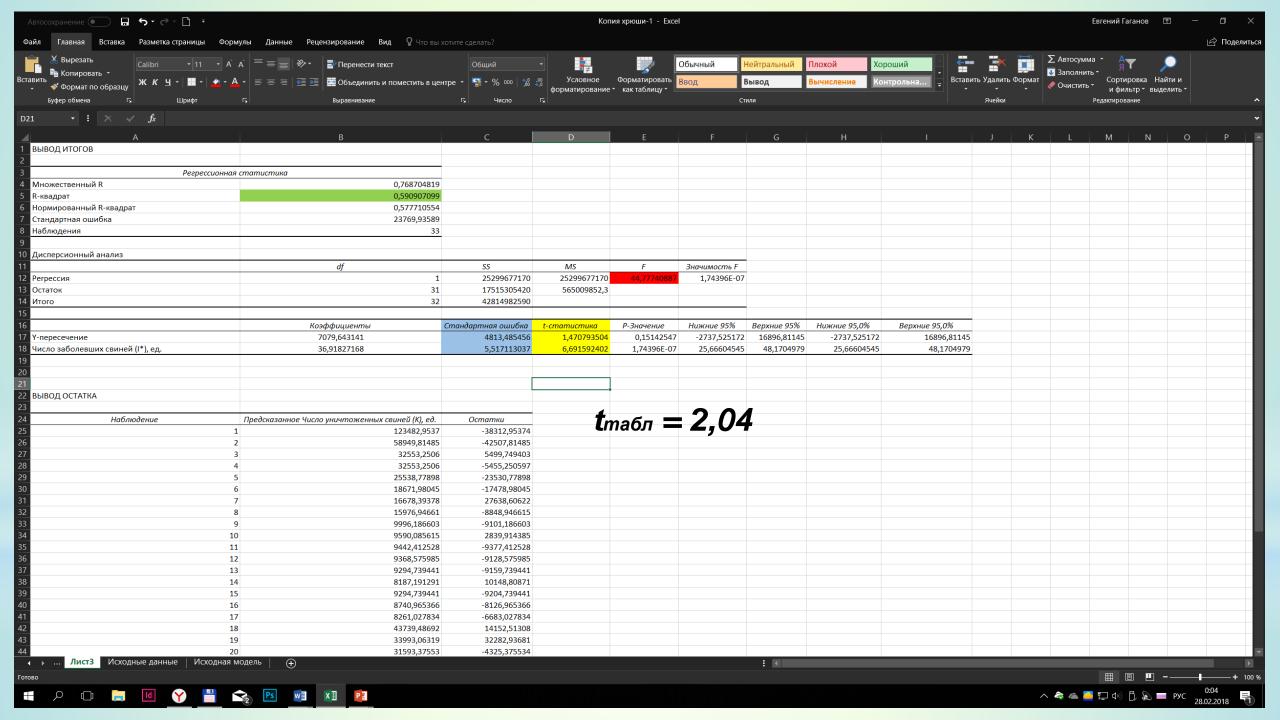
Если **t** ≤**1**, то коэффициент *не может быть признан значимым* 

Если  $1 < |t| \le 2$ , то найденная оценка может рассматриваться как относительно *(слабо) значимая* 

Если  $2 < |t| \le 3$ , то доверительная вероятность составляет 0,95-0,99

Если **t** >3, то это почти гарантия значимости коэффициента

Если **коэффициент > стандартной ошибки в 2 и более раза, то это почти** гарантия значимости коэффициента



#### «ОШИБКИ» РЕГРЕССИИ

- 1. Невключение в модель всех объясняющих переменных
- 2. Неправильный выбор функциональной зависимости модели
  - 3. Агрегирование данных
  - 4. Ограниченность статистических данных
  - 5. Прочее (человеческий фактор, ошибки измерений и т.п.)

#### ОШИБКИ ПЕРВОГО И ВТОРОГО РОДА; УРОВЕНЬ ЗНАЧИМОСТИ

		Верная	гипотеза		
		Ho	H₁		
Результат применения критерия	Ho	верно принята	неверно принята (Ошибка второго рода)		
	H <sub>1</sub>	неверно отвергнута (Ошибка первого рода)	верно отвергнута		

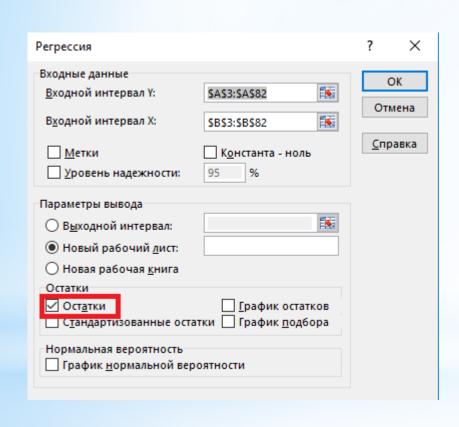
# Поиск оптимальной регрессионной модели: первичная оценка

стика							
0,810194369							
0,656414916							
0,647490628							
15453,48811							
80							
df	SS	MS	F	Значимость F			
2	35130789394	17565394697	73,55375829	1,4E-18			
77	18388392696	238810294,8					
79	53519182090						
	Стандартная						
Коэффициенты	ошибка	t-статистика	Р-Значение	Нижние 95%	Верхние 95%	Нижние 95,0%	Верхние 95,0%
2245,058788	2013,527545	1,11498787	0,268323551	-1764,386786	6254,504363	-1764,386786	6254,504363
39,69734355	3,273110382	12,12832411	1,52767E-19	33,17974811	46,21493898	33,17974811	46,21493898
1,451982104	86,53266101	0,016779585	0,986655859	-170,8565595	173,7605237	-170,8565595	173,7605237
	0,810194369 0,656414916 0,647490628 15453,48811 80 df 2 77 79 Коэффициенты 2245,058788 39,69734355	0,810194369 0,656414916 0,647490628 15453,48811 80  df SS 2 35130789394 77 18388392696 79 53519182090  Коэффициенты ошибка 2245,058788 2013,527545 39,69734355 3,273110382	0,810194369       0,656414916         0,647490628       15453,48811         80       80         df       SS       MS         2       35130789394       17565394697         77       18388392696       238810294,8         79       53519182090         Стандартная ошибка       t-статистика         2245,058788       2013,527545       1,11498787         39,69734355       3,273110382       12,12832411	0,810194369       0,6556414916         0,647490628       15453,48811         80       80         df       SS       MS       F         2       35130789394       17565394697       73,55375829         77       18388392696       238810294,8       79         79       53519182090       79       79         Коэффициенты ошибка сийбка сийб	0,810194369       0,6556414916         0,647490628       15453,48811         80       80         df       SS       MS       F       Значимость F         2       35130789394       17565394697       73,55375829       1,4E-18         77       18388392696       238810294,8       79       53519182090         Коэффициенты ошибка сибания сибани	0,810194369       0,656414916       0 <td>0,810194369       0,656414916       0</td>	0,810194369       0,656414916       0

## Поиск оптимальной регрессионной модели: исключение незначимых переменных

вывод итогов								
Регрессионная	статистика							
Множественный	0,810193594							
R-квадрат	0,656413659							
Нормированный	0,652008706							
Стандартная оші	15354,13581							
Наблюдения	80							
Дисперсионный	анализ							
	df	SS	MS	F	Значимость F			
Регрессия	1	35130722156	35130722156	149,0171737	8,88207E-20			
Остаток	78	18388459935	235749486,3					
Итого	79	53519182090						
	Коэффициент	Стандартная						
	ы	ошибка	t-статистика	Р-Значение	Нижние 95%	Верхние 95%	Нижние 95,0%	Верхние 95,0%
Ү-пересечение	2258,992378	1822,53146	1,239480595	0,218883984	-1369,389037	5887,373793	-1369,389037	5887,373793
Заболело (гол.)	39,69678684	3,251900091	12,20725906	8,88207E-20	33,22275107	46,1708226	33,22275107	46,1708226

# Поиск оптимальной регрессионной модели: исключение из выборки экстремальных значений



-		
вывод итогов		
Регрессионна	я статистика	
Множественныі	0,810193594	
R-квадрат	0,656413659	
Нормированныі	0,652008706	
Стандартная ош	15354,13581	
Наблюдения	80	
ВЫВОД ОСТАТКА	4	
Наблюдение	Предсказанное Ү	Остатки
1	29649,7753	8403,224705
2	2616,26346	-2611,26346
3	5395,038538	-4500,038538
4	2735,35382	-2731,35382
5	2457,476312	-2421,476312
6	2616,26346	-2606,26346
7	58032,97788	-41590,97788
8	22107,3858	-20099,3858
9	29649,7753	-2551,775295
10	4958,373883	7471,626117
11	2576.566673	-2566.566673

# Поиск оптимальной регрессионной модели: исключение из выборки экстремальных значений

вывод итогов								
Регрессионная с	татистика							
Множественный R	0,768704819							
R-квадрат	0,590907099							
Нормированный R-ква	0,577710554							
Стандартная ошибка	23769,93589							
Наблюдения	33							
Дисперсионный анали	13							
	df	SS	MS	F	Значимость F			
Регрессия	1	25299677170	25299677170	44,77740887	1,74396E-07			
Остаток	31	17515305420	565009852,3					
Итого	32	42814982590						
		Стандартная						
	Коэффициенты	ошибка	t-статистика	Р-Значение	Нижние 95%	Верхние 95%	Нижние 95,0%	Верхние 95,0%
Ү-пересечение	7079,643141	4813,485456	1,470793504	0,15142547	-2737,525172	16896,81145	-2737,525172	16896,81145
Заболело (гол.)	36,91827168	5,517113037	6,691592402	1,74396E-07	25,66604545	48,1704979	25,66604545	48,1704979

# Поиск оптимальной регрессионной модели: введение дополнительных переменных

В выборку вводится фиктивная переменная, отражающая низкий, средний и высокий уровни опасности эпидемии, принимающая значения 0,1 и 2 соответственно.

вывод итогов								
Регрессионная ста	тистика							
Множественный R	0,887657406							
R-квадрат	0,78793567							
Нормированный R-квадра	0,773798048							
Стандартная ошибка	17396,86812							
Наблюдения	33							
Дисперсионный анализ								
	df	SS	MS	F	Значимость F			
Регрессия	2	33735451982	16867725991	55,73325335	7,88886E-11			
Остаток	30	9079530608	302651020,3					
Итого	32	42814982590						
	Коэффициен	Стандартна	t-				Нижние	Верхние
	ты	я ошибка	статистика	Р-Значение	Нижние 95%	Верхние 95%	95,0%	95,0%
Ү-пересечение	-10779,64923	4884,067351	-2,207104951	0,035098859	-20754,24546	-805,0530062	-20754,24546	-805,0530062
Число заболевших								
свиней, ед.	31,81118261	4,152149943	7,661376166	1,51677E-08	23,33136115	40,29100408	23,33136115	40,29100408
Уровень								
неблагополучия региона	20135,81601	3813,974775	5,279483268	1,058E-05	12346,64038	27924,99164	12346,64038	27924,99164

# Поиск оптимальной регрессионной модели: изменение функциональной зависимости

Гипотеза: зависимость между переменными имеет логарифмический характер.

вывод итогов								
Регрессионная стаг	пистика							
Множественный R	0,887657406							
R-квадрат	0,78793567							
Нормированный R-квадра	0,773798048							
Стандартная ошибка	17396,86812							
Наблюдения	33							
Дисперсионный анализ								
	df	SS	MS	F	Значимость F			
Регрессия	2	33735451982	16867725991	55,73325335	7,88886E-11			
Остаток	30	9079530608	302651020,3					
Итого	32	42814982590						
	Коэффициен	Стандартна	t-				Нижние	Верхние
	<i>ты</i>	, я ошибка	статистика	Р-Значение	Нижние 95%	Верхние 95%	95,0%	95,0%
Ү-пересечение	-10779,64923	4884,067351	-2,207104951	0,035098859	-20754,24546	-805,0530062	-20754,24546	-805,0530062
Число заболевших								
свиней, ед.	31,81118261	4,152149943	7,661376166	1,51677E-08	23,33136115	40,29100408	23,33136115	40,29100408
Уровень								
неблагополучия региона	20135,81601	3813,974775	5,279483268	1,058E-05	12346,64038	27924,99164	12346,64038	27924,99164

### Поиск оптимальной регрессионной модели: оценка качества модели

Средняя ошибка аппроксимации - среднее отклонение расчетных значений от фактических:

$$\overline{A} = \frac{\sum |y_i - y_x| : y_i}{n} 100\%$$

вывод остатка										
			Фактическое							
Наблюдение	Предсказанное Ү	Остатки	значение Ү	Үф-Үп /Үф						
1	11,22	0,13	11,35	0,01						
2	13,49	-1,45	12,04	0,12						
3	9,30	0,41	9,71	0,04						
4	11,18	-0,21	10,97	0,02						
5	10,89	0,21	11,10	0,02						
6	10,85	-0,30	10,55	0,03						
7	8,52	1,69	10,21	0,17						
8	8,49	1,73	10,21	0,17						
9	5,98	1,63	7,60	0,21						
10	5,77	1,31	7,08	0,19						
33	10,12	-0,31	9,82	0,03						
				9,9%						

#### Заключение

#### Области применения регрессионного анализа:

- 1. Межпространственные и межвременные выборки
- 2. Модели на основе панельных данных
- 3. Предсказание наступления определенных событий (logit- и probit-модели)

#### Специальные программные приложения:

- 1. Eviews, Staitistica
- 2. RStudio

### БЛАГОДАРИМ ЗА ВНИМАНИЕ!