



Федеральное государственное образовательное бюджетное  
учреждение высшего образования  
«ФИНАНСОВЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ПРИ ПРАВИТЕЛЬСТВЕ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ»  
(Финансовый университет)  
Департамент математики

В.В. Богун

# ФИНАНСОВАЯ МАТЕМАТИКА: ТЕОРИЯ И РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

*Учебное пособие*

МОСКВА  
2024



УДК 336:51(075.8)  
ББК 65.26в631я73  
Б74

## ОГЛАВЛЕНИЕ

### Рецензенты:

*Кальсин Андрей Евгеньевич*, доктор экономических наук, профессор, заведующий кафедрой экономической теории и менеджмента ФГБОУ ВО «Ярославский государственный педагогический университет им К.Д. Ушинского»;

*Тихомиров Сергей Александрович*, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры геометрии и алгебры ФГБОУ ВО «Ярославский государственный педагогический университет им К.Д. Ушинского».

### Богун В.В.

Б74 **Финансовая математика: теория и решение задач:** Учебное пособие / В.В. Богун. — М.: Прометей, 2024. — 112 с.

ISBN 978-5-00172-

В учебном пособии изложены основные положения теоретических и практических занятий по финансовой математике с точки зрения применения табличного редактора Excel к решению задач. Представленный материал обеспечивает преподавание учебной дисциплины «Финансовая математика», основываясь на актуальных и наглядных алгоритмах решения задач по изучаемой дисциплине через призму интеграции математических и информационных знаний, умений и навыков обучаемых.

Новизна учебного пособия заключается в том, что показано применение табличного редактора Excel для решения задач по финансовой математике с корректным отображением множества числовых значений не только параметров итоговых результатов расчетов, но и промежуточных результатов реализации вычислительных алгоритмов с целью наглядного представления процессов поэтапного решения поставленных задач в необходимом формате.

Пособие предназначено для использования в учебном процессе обучающимися по направлению подготовки 38.03.01 «Экономика».

ISBN 978-5-00172-

© Богун В.В., 2024

© Издательство «Прометей», 2024

<b>ТЕМА 1. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ РАБОТЫ С ФИНАНСОВЫМИ ДАННЫМИ</b> .....	5
Числовые последовательности .....	5
Арифметическая прогрессия .....	8
Геометрическая прогрессия .....	9
Пример решения комплексной задачи с применением редактора Excel .....	11
<b>ТЕМА 2. РЕАЛИЗАЦИЯ НАРАЩЕНИЯ С ПРОСТЫМИ И СЛОЖНЫМИ ПРОЦЕНТАМИ</b> .....	15
Теоретический аспект .....	15
Пример решения комплексной задачи с применением редактора Excel .....	20
Пример решения комплексной задачи с применением редактора Excel .....	25
<b>ТЕМА 3. РЕАЛИЗАЦИЯ ДИСКОНТИРОВАНИЯ С ПРОСТЫМИ И СЛОЖНЫМИ ПРОЦЕНТАМИ</b> .....	31
Теоретический аспект .....	31
Пример решения комплексной задачи с применением редактора Excel .....	37
Пример решения комплексной задачи с применением редактора Excel .....	43
<b>ТЕМА 4. РЕАЛИЗАЦИЯ ПОТОКОВ ПЛАТЕЖЕЙ</b> .....	47
Теоретический аспект .....	47
Пример решения комплексной задачи с применением редактора Excel .....	50

<b>ТЕМА 5. РЕНТЫ</b> .....	56
Теоретический аспект .....	56
Пример решения комплексной задачи с применением редактора Excel .....	61
<b>ТЕМА 6. ПОРТФЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ</b> .....	66
Выборки и параметры выборок и вариационных рядов .....	66
Сравнительный анализ выборок .....	69
Оценка эффективности портфеля из одного вида ценных бумаг .....	74
Пример решения комплексной задачи с применением редактора Excel .....	77
Оценка эффективности портфеля из двух видов ценных бумаг .....	80
Пример решения комплексной задачи с применением редактора Excel .....	87
Оценка эффективности портфеля из трех видов ценных бумаг .....	93
Пример решения комплексной задачи с применением редактора Excel .....	101
<b>СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ</b> .....	109

## ТЕМА 1. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ РАБОТЫ С ФИНАНСОВЫМИ ДАННЫМИ

### Числовые последовательности

Под числовой последовательностью  $\{a_n\}$  понимается закономерность, однозначно определяющая соответствие между множеством значений натуральных чисел (порядковых номеров членов числовой последовательности) и множеством членов (элементов) числовой последовательности, выраженная в виде строго обозначенной функциональной зависимости между данными числовыми объектами.

В большинстве случаев числовая последовательность задается в виде формулы ее общего члена  $a_n = f(n)$ , которая позволяет по номеру элемента последовательности однозначно определить значение соответствующего номеру члена данной последовательности.

Представим описание числовой последовательности в виде следующей таблицы, связывающей значения номеров  $n$  и членов последовательности  $a_n = f(n)$ .

Под пределом  $A$  числовой последовательности  $\{a_n\}$  понимается такое числовое или бесконечное значение, при котором для любого, даже сколь угодно малого положительного числа  $\varepsilon > 0$ , найдется такой критический номер члена последовательности  $n_{кр}$ , зависящий от  $\varepsilon$  ( $n_{кр} = n(\varepsilon)$ ), что для всех членов последовательности с номерами  $n > n_{кр}$  выполняется неравенство  $|a_n - A| < \varepsilon$ .

Предел числовой последовательности  $\{a_n\}$  обозначается  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$  или  $a_n \rightarrow A$  при  $n \rightarrow \infty$ . Каждая числовая последовательность может иметь только одно значение предела числовой последовательности.

С точки зрения значения предела числовой последовательности можно получить следующую классификацию числовых последовательностей:

1. Бесконечно малые числовые последовательности — числовые последовательности, значение предела которых равен нулю, то есть  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B = 0$  ( $\{b_n\} = \frac{4n-3}{3n^3+2}$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n-3}{3n^3+2} = 0).$$

2. Ограниченные числовые последовательности — числовые последовательности, значения предела которых равен определенному, отличному от нуля, числу, то есть

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = D = C \quad (\{d_n\} = \frac{5n^6+7}{2n^6-4}, \lim_{n \rightarrow \infty} d_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^6+7}{2n^6-4} = \frac{5}{2}).$$

3. Бесконечно большие числовые последовательности — числовые последовательности, предел которых равен бесконечному значению, то есть  $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n = G = \pm\infty$

$$(\{g_n\} = \frac{7n^5+6}{4n^2-3}, \lim_{n \rightarrow \infty} g_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n^5+6}{4n^2-3} = \infty).$$

Процесс нахождения значения предела числовой последовательности может изначально приводить к ситуации неопределенности, в рамках которой однозначно без реализации определенных алгоритмов невозможно определить значение предела рассматриваемой числовой последовательности.

При решении задач по финансовой математике важное значение имеет понятие второго замечательного предела, который представляет одну из известных ситуаций неопределенности, не позволяющей однозначно получить

значение предела и однозначно классифицировать числовую последовательность.

Под вторым замечательным пределом понимается предел числовой последовательности вида  $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ , нахождение которого изначально связано с наличием неопределенности вида  $[1^\infty]$ , однако применение определенного доказательства приводит к получению конкретного значения предела данной числовой последовательности:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = [1^\infty] = e \approx 2,7182818284.$$

Для нас важным является следующая реализация числовой последовательности:  $a_n = \left(1 + \frac{k}{n}\right)^{mn}$ .

Получим следующее значение предела числовой последовательности  $\{a_n\}$ :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{n}\right)^{mn} = [1^\infty] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{n}{k}}\right)^{\frac{n}{k} \cdot m \cdot k} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \left(1 + \frac{1}{\frac{n}{k}}\right)^{\frac{n}{k}} \right)^{m \cdot k} = \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{n}{k}}\right)^{\frac{n}{k}} \right)^{m \cdot k} = \\ &= \left| \begin{array}{l} t = \frac{n}{k} \\ n \rightarrow \infty \\ t \rightarrow \infty \end{array} \right| = \left( \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t \right)^{m \cdot k} = e^{m \cdot k}. \end{aligned}$$

Под числовой прогрессией понимается определенная числовая последовательность, в рамках которой реализуются однозначно определенные правила или закономерности, в соответствии с которыми осуществляется последовательный переход между значениями соседних элементов.

В рамках финансовой математики с точки зрения реализации финансовых расчетов в качестве основных математических объектов выступают арифметическая и геометрическая прогрессии.

## Арифметическая прогрессия

**Арифметической прогрессией** называется числовая последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему члену, сложенному с одним и тем же числом, которое является постоянным для данной последовательности.

Числовая последовательность  $\{a_n\}$  является арифметической прогрессией, если для любого номера (или индекса) члена числовой последовательности  $n$ , являющегося натуральным числом, выполняется условие последовательного перехода на значение каждого последующего члена согласно рекуррентному выражению:  $a_{n+1} = a_n + d$ , где число  $d$  представляет собой разность арифметической прогрессии.

Арифметическая прогрессия является возрастающей, если значение разности арифметической прогрессии  $d$  определяется положительным числом ( $d > 0$ ), а если значение разности арифметической прогрессии  $d$  определяется отрицательным числом ( $d < 0$ ), то она является убывающей арифметической прогрессией.

Таким образом, для однозначного задания функциональной закономерности, представленной в рамках определенной арифметической прогрессии, необходимо знать числовые значения первого элемента и разности арифметической прогрессии.

Арифметическая прогрессия является конечной, если в рамках данной числовой последовательности отбрасываются все члены, следующие за каким-то конкретным членом последовательности с номером или индексом элемента  $n$ , то есть за  $a_n$ .

Зная числовые значения первого члена и разности арифметической прогрессии, можно найти числовое значение любого ее  $n$ -го члена согласно *формуле  $n$ -го члена арифметической прогрессии*:  $a_n = a_1 + d \cdot (n - 1)$ .

Для нахождения *суммы  $n$ -го количества первых членов арифметической прогрессии* применяется следующая формула:

$$S_n = \sum_{i=1}^n a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2 \cdot a_1 + d \cdot (n - 1)}{2} \cdot n.$$

## Геометрическая прогрессия

**Геометрической прогрессией** называется числовая последовательность отличных от нуля чисел, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему члену, умноженному на одно и то же число, которое является постоянным для данной последовательности.

Числовая последовательность  $\{b_n\}$  является геометрической прогрессией, если для любого (или индекса) члена числовой последовательности  $n$ , являющегося натуральным числом, выполняется условие последовательного перехода на значение каждого последующего

члена согласно рекуррентному выражению:  $b_{n+1} = b_n \cdot q$ , где число  $q$  представляет собой знаменатель геометрической прогрессии, при этом  $b_1 \neq 0$  и  $q \neq 0$ .

Геометрическая прогрессия является возрастающей, если значение знаменателя геометрической прогрессии  $q$  по модулю определяется числом, большим единицы ( $|q| > 1$ ), а если значение знаменателя геометрической прогрессии  $q$  по модулю определяется числом, меньшим единицы ( $|q| < 1$ ), то она называется убывающей геометрической прогрессией.

Таким образом, для однозначного задания функциональной закономерности, представленной в рамках определенной геометрической прогрессии, необходимо знать числовые значения первого элемента и знаменателя геометрической прогрессии.

Геометрическая прогрессия является конечной, если в рамках данной числовой последовательности отбрасываются все члены, следующие за каким-то конкретным членом последовательности с номером или индексом элемента  $n$ , то есть за  $a_n$ .

Зная числовые значения первого члена и знаменателя геометрической прогрессии, можно найти числовое значение любого его  $n$ -го члена согласно формуле  $n$ -го члена геометрической прогрессии:  $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$ .

Для нахождения суммы  $n$ -го количества первых членов геометрической прогрессии применяется следующая формула:

$$S_n = \sum_{i=1}^n b_i = b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_{n-2} + b_{n-1} + b_n = \frac{b_n \cdot q - b_1}{q - 1} = \frac{b_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}.$$

Геометрическая прогрессия называется *бесконечно убывающей*, если её знаменатель  $q$  по абсолютной величине меньше единицы ( $|q| < 1$ ).

*Суммой бесконечно убывающей геометрической прогрессии* называется число, к которому неограниченно приближается сумма  $n$  первых членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии при неограниченном увеличении  $n$ . Сумма  $n$  первых бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна:  $S_n = \frac{b_1}{q - 1}$ .

## Пример решения комплексной задачи с применением редактора Excel

*Условие задачи:* Необходимо для заданных значений первых членов двух арифметических прогрессий (возрастающей и убывающей) с соответствующими разностями (положительной и отрицательной) и двух геометрических прогрессий (возрастающей и убывающей) с соответствующими знаменателями (больше и меньше единицы) осуществить автоматизированные расчеты параметров прогрессий согласно применяемым алгоритмам и наглядное представление всех промежуточных и итоговых результатов в редакторе электронных таблиц Excel.

В таблице 1.2 представлены основные особенности вычисления расчетных параметров арифметической и геометрической прогрессий.

На рисунках 1.1–1.5 ниже представлено решение описанной задачи в редакторе электронных таблиц Excel (рисунок 1.1 — параметры исходных данных, рисунок 1.2 — выполнение расчетов параметров арифметической прогрессии, рисунок 1.3 — выполнение расчетов параметров геометрической прогрессии) с применением описанных на рисунке 1.4 и 1.5. формул.

Таблица 1.2

**Параметры арифметической и геометрической прогрессий**

Наименование параметра прогрессии	Арифметическая прогрессия	Геометрическая прогрессия
Рекуррентная формула	$a_{n+1} = a_n + d$	$b_{n+1} = b_n \cdot q$
Формула n-го члена	$a_n = a_1 + d \cdot (n - 1)$	$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$
Сумма n первых членов	$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$ $S_n = \frac{2 \cdot a_1 + d \cdot (n - 1)}{2} \cdot n$	$S_n = \frac{b_n \cdot q - b_1}{q - 1}$ $S_n = \frac{b_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$

	A	B	C
1	<b>Исходные данные</b>		
2	<b>Наименование параметра</b>	<b>Обозначение</b>	<b>Значение</b>
3	<b>Арифметическая прогрессия</b>		
4	Первый член	a <sub>1</sub>	128
5	Разность положительная	d <sub>1</sub>	3
6	Разность отрицательная	d <sub>2</sub>	-4
7	<b>Геометрическая прогрессия</b>		
8	Первый член	a <sub>1</sub>	246
9	Знаменатель больше единицы	q <sub>1</sub>	2
10	Знаменатель меньше единицы	q <sub>2</sub>	0,25

Рис. 1.1. Исходные данные для расчетов

	A	B	C	D	E	F	G
11	<b>Реализация расчетов параметров арифметической прогрессии</b>						
12	Номер члена арифметической прогрессии	Возрастающая прогрессия			Убывающая прогрессия		
13		Значение члена по формуле 1	Значение члена по формуле 2	Сумма членов прогрессии	Значение члена по формуле 1	Значение члена по формуле 2	Сумма членов прогрессии
14	1	128	128	128	128	128	128
15	2	131	131	259	124	124	252
16	3	134	134	393	120	120	372
17	4	137	137	530	116	116	488
18	5	140	140	670	112	112	600
19	6	143	143	813	108	108	708
20	7	146	146	959	104	104	812
21	8	149	149	1 108	100	100	912
22	9	152	152	1 260	96	96	1 008
23	10	155	155	1 415	92	92	1 100
24	11	158	158	1 573	88	88	1 188
25	12	161	161	1 734	84	84	1 272
26	Сумма членов прогрессии	1 734	1734	1 734	1 272	1272	1 272

Рис. 1.2. Детализация расчетов параметров арифметической прогрессии

	A	B	C	D	E	F	G
27	<b>Реализация расчетов параметров геометрической прогрессии</b>						
28	Номер члена арифметической прогрессии	Возрастающая прогрессия			Убывающая прогрессия		
29		Значение члена по формуле 1	Значение члена по формуле 2	Сумма членов прогрессии	Значение члена по формуле 1	Значение члена по формуле 2	Сумма членов прогрессии
30	1	246	246	246	246,000000	246,000000	246,000000
31	2	492	492	738	61,500000	61,500000	307,500000
32	3	984	984	1 722	15,375000	15,375000	322,875000
33	4	1 968	1 968	3 690	3,843750	3,843750	326,718750
34	5	3 936	3 936	7 626	0,960938	0,960938	327,679688
35	6	7 872	7 872	15 498	0,240234	0,240234	327,919922
36	7	15 744	15 744	31 242	0,060059	0,060059	327,979980
37	8	31 488	31 488	62 730	0,015015	0,015015	327,994995
38	9	62 976	62 976	125 706	0,003754	0,003754	327,998749
39	10	125 952	125 952	251 658	0,000938	0,000938	327,999687
40	11	251 904	251 904	503 562	0,000235	0,000235	327,999922
41	12	503 808	503 808	1 007 370	0,000059	0,000059	327,999980
42	Сумма членов прогрессии	1 007 370	1007370	1 007 370	327,999980	327,999980	327,999980

Рис. 1.3. Детализация расчетов параметров геометрической прогрессии

	А	В
43	Адрес ячейки формулы	Формула
44	Ячейка B14	=С\$4
45	Ячейка C14	=С\$4
46	Ячейка D14	=B14
47	Ячейка B15	=B14+С\$5
48	Ячейка C15	=С\$4+С\$5*(A15-1)
49	Ячейка D15	=D14+B15
50	Ячейка B26	=(B14+B25)/2*СЧЁТ(\$A\$14:\$A\$25)
51	Ячейка C26	=(2*С\$4+С\$5*(СЧЁТ(\$A\$14:\$A\$25)-1))/2*СЧЁТ(\$A\$14:\$A\$25)
52	Ячейка D26	=D25
53	Ячейка E14	=С\$4
54	Ячейка F14	=С\$4
55	Ячейка G14	=E14
56	Ячейка E15	=E15+С\$6
57	Ячейка F15	=С\$4+С\$6*(A15-1)
58	Ячейка G15	=G14+E15
59	Ячейка E26	=(E14+E25)/2*СЧЁТ(\$A\$14:\$A\$25)
60	Ячейка F26	=(2*С\$4+С\$6*(СЧЁТ(\$A\$14:\$A\$25)-1))/2*СЧЁТ(\$A\$14:\$A\$25)
61	Ячейка G26	=G25

Рис. 1.4. Применяемые для реализации расчетов формулы (начало)

	А	В
62	Ячейка B30	=С\$8
63	Ячейка C30	=С\$8
64	Ячейка D30	=B30
65	Ячейка B31	=B30*С\$9
66	Ячейка C31	=С\$8*С\$9^(A31-1)
67	Ячейка D31	=D30+B31
68	Ячейка B42	=(B41*С\$9-B30)/(С\$9-1)
69	Ячейка C42	=(B30*(С\$9^СЧЁТ(\$A\$30:\$A\$41)-1))/(С\$9-1)
70	Ячейка D42	=D41
71	Ячейка E30	=С\$8
72	Ячейка F30	=С\$8
73	Ячейка G30	=E30
74	Ячейка E31	=E30*С\$10
75	Ячейка F31	=С\$8*С\$10^(A31-1)
76	Ячейка G31	=G30+E31
77	Ячейка E42	=(E41*С\$10-E30)/(С\$10-1)
78	Ячейка F42	=(E30*(С\$10^СЧЁТ(\$A\$30:\$A\$41)-1))/(С\$10-1)
79	Ячейка G42	=G41

Рис. 1.5. Применяемые для реализации расчетов формулы (конец)

## ТЕМА 2. РЕАЛИЗАЦИЯ НАРАЩЕНИЯ С ПРОСТЫМИ И СЛОЖНЫМИ ПРОЦЕНТАМИ

### Теоретический аспект

При реализации отношений между кредитором (предоставляет денежную сумму в пользование) и заемщиком (получает денежную сумму в пользование) основным числовым параметром финансовых расчетов является годовая процентная ставка.

Процентная ставка представляет собой отношение в процентах суммы, выплаченной по кредиту, к величине самого кредита за фиксированный промежуток времени, который, как правило, является кратным по отношению к величине года.

По большому счету, данный параметр определяет величину дохода кредитора за использование своих денег заемщиком или плату заемщика за использование денежных средств кредитора.

*Под наращением первоначальной суммы* понимается процесс увеличения исходной (начальной) суммы в связи с последовательным присоединением к ней процентных сумм для получения большей по величине наращенной (конечной) суммы.

В рамках нижеприведенных формул имеем следующие обозначения расчетных параметров:

*PV* – исходная (начальная) сумма в условных единицах,



$RV$  – положительная сумма процентов в условных единицах,

$FV$  – наращенная (конечная) сумма в условных единицах,

$p$  – процентная ставка,

$t$  – время в годах,

$b$  – доля от года.

При использовании схемы начисления простых процентов (базируется на арифметической прогрессии) не учитывается сумма процентов, зачисленных в предыдущие периоды, то есть не происходит капитализация, при этом в процессе наращенная первоначальная сумма увеличивается согласно следующей формуле:

$$FV = PV + RV = PV \cdot (1 + p \cdot t),$$

Представим детализацию получения обозначенной расчетной формулы согласно индексам (номерам) выполняемых операций:

1. Вначале первой итерации процесса наращенная мы фиксируем исходную (начальную) сумму  $PV$ .

2. В конце первой расчетной итерации начисления простых процентов получаем первую промежуточную наращенную (конечную) сумму, которая автоматически является промежуточной исходной (начальной) суммой для начала второй итерации:

$$FV_1 = PV_2 = PV + PV \cdot p = PV \cdot (1 + p).$$

3. В конце второй расчетной итерации начисления простых процентов получаем вторую промежуточную наращенную (конечную) сумму, которая автоматически является промежуточной исходной (начальной) суммой для начала третьей итерации:

$$\begin{aligned} FV_2 = PV_3 &= PV_2 + PV \cdot p = PV + PV \cdot p + PV \cdot p = \\ &= PV \cdot (1 + p) + PV \cdot p = PV \cdot (1 + 2 \cdot p). \end{aligned}$$

4. Таким образом, к концу  $t$ -ой итерации начисления простых процентов получаем итоговую наращенную (конечную) сумму:

$$\begin{aligned} FV &= FV_t = PV_{t+1} = PV_t + PV \cdot p = PV + PV \cdot p + \dots + PV \cdot p = \\ &= PV \cdot (1 + p \cdot (t-1)) + PV \cdot p = PV \cdot (1 + p \cdot (t-1) + p) = PV \cdot (1 + p \cdot t). \end{aligned}$$

С точки зрения параметров соответствующей арифметической прогрессии, для которой значения первого члена  $a_1 = PV$ , разности  $d = PV \cdot p$  и количества членов  $n = t$ , имеем выражения для следующих определенных параметров, представленных в таблице 2.1 ниже.

Таблица 2.1

#### Применение арифметической прогрессии к наращению по простым процентам

Наименование параметра прогрессии	Расчет значения параметра прогрессии согласно применяемой схеме
Рекуррентная формула	$a_{t+1} = a_t + PV \cdot p$
Формула $t$ -го члена	$a_t = PV + PV \cdot p \cdot (t-1) = PV \cdot (1 + p \cdot (t-1))$
Формула $(t+1)$ -го члена	$a_{t+1} = PV + PV \cdot p \cdot t = PV \cdot (1 + p \cdot t) = FV$

При выполнении расчетных алгоритмов согласно реализации схемы начисления простых процентов для каждой вычислительной итерации  $n$  необходимо применять следующие формулы:

- промежуточная исходная (начальная) сумма в условных единицах:  $PV_n = FV_{n-1}$ ;

- промежуточная положительная сумма процентов в условных единицах:  $RV_n = PV_n \cdot p \cdot n$ ;

• промежуточная наращенная (конечная) сумма в условных единицах:  $FV_n = PV_n \cdot (1 + p \cdot n)$ .

При использовании схемы начисления сложных процентов (базируется на геометрической прогрессии) учитывается сумма процентов, зачисленных в предыдущие периоды, то есть происходит капитализация, при этом в процессе наращенная первоначальная сумма увеличивается согласно следующей формуле:

$$FV = PV + RV = PV \cdot (1 + p)^t,$$

Под мультиплицирующим множителем понимается коэффициент, показывающим, во сколько раз при реализации процесса наращенная с применением схемы начисления сложных процентов увеличится исходная (начальная) сумма за обозначенное количество лет, положенная в банк под указанное количество процентов, значение которого определяется следующим выражением:

$$M(p, t) = \frac{FV}{PV} = (1 + p)^t.$$

Представим детализацию получения обозначенной расчетной формулы согласно индексам (номерам) выполняемых операций:

1. Вначале первой итерации процесса наращенная мы фиксируем исходную (начальную)  $PV$ .

2. В конце первой расчетной итерации начисления сложных процентов получаем первую промежуточную наращенную (конечную) сумму, которая автоматически является промежуточной исходной (начальной) суммой для начала второй итерации:

$$FV_1 = PV_2 = PV + PV \cdot p = PV \cdot (1 + p).$$

3. В конце второй расчетной итерации начисления сложных процентов получаем вторую промежуточную наращенную (конечную) сумму, которая автоматически является промежуточной исходной (начальной) суммой для начала третьей итерации:

$$\begin{aligned} FV_2 &= PV_3 = PV_2 + PV \cdot p = PV \cdot (1 + p) + PV \cdot (1 + p) \cdot p = \\ &= PV \cdot (1 + p) \cdot (1 + p) = PV \cdot (1 + p)^2. \end{aligned}$$

4. Таким образом, к концу  $t$ -ой итерации начисления сложных процентов получаем итоговую наращенную (конечную) сумму:

$$\begin{aligned} FV &= FV_t = PV_{t+1} = PV_t + PV \cdot p = PV \cdot (1 + p) \cdot \dots \cdot (1 + p) + \\ &+ PV \cdot (1 + p) \cdot \dots \cdot (1 + p) \cdot p = PV \cdot (1 + p)^{t-1} + \\ &+ PV \cdot (1 + p)^{t-1} \cdot p = PV \cdot (1 + p)^{t-1} \cdot (1 + p) = PV \cdot (1 + p)^t. \end{aligned}$$

С точки зрения параметров соответствующей геометрической прогрессии, для которой значения первого члена  $b_1 = PV$ , знаменателя  $q = 1 + p$  и количества членов  $n = t$ , имеем выражения для следующих определенных параметров, представленных в таблице 2.2 ниже.

Таблица 2.2

#### Применение геометрической прогрессии к наращению по сложным процентам

Наименование параметра прогрессии	Расчет значения параметра прогрессии согласно применяемой схеме
Рекуррентная формула	$b_{t+1} = b_t \cdot (1 + p)$
Формула $t$ -го члена	$b_t = PV \cdot (1 + p)^{t-1}$
Формула $(t+1)$ -го члена	$b_{t+1} = PV \cdot (1 + p)^{t-1} \cdot (1 + p) = PV \cdot (1 + p)^t = FV$

При выполнении расчетных алгоритмов согласно реализации схемы начисления сложных процентов для каждой вычислительной итерации  $n$  необходимо применять следующие формулы:

- промежуточная исходная (начальная) сумма в условных единицах:  $PV_n = FV_{n-1}$ ;
- положительная сумма процентов в условных единицах:  $RV_n = PV_n \cdot ((1+p)^n - 1)$ ;
- промежуточная наращенная (конечная) сумма в условных единицах:  $FV_n = PV_n \cdot (1+p)^n$ .

Если календарный срок составляет больше одного года, но не целое число лет, то используются так называемые смешанные проценты, при этом в процессе наращеня первоначальная сумма увеличивается согласно следующей формуле:

$$FV = PV + RV = PV \cdot (1+p)^t \cdot (1+p \cdot b).$$

### Пример решения комплексной задачи с применением редактора Excel

*Условие задачи:* Необходимо для заданных значений параметров реализации вклада в банк в виде величины начальной суммы вклада, процентной ставки по вкладу и продолжительности вклада осуществить автоматизированные расчеты параметров вкладов с учетом применения различных схем начисления процентов согласно применяемым алгоритмам и наглядное представление всех промежуточных и итоговых результатов в редакторе электронных таблиц Excel.

На рисунках 2.1-2.3 ниже представлено решение описанной задачи в редакторе электронных таблиц Excel (рисунок 2.1 — параметры исходных данных, рисунок 2.2 — выполнение расчетов параметров вклада по простой, сложной и смешанной процентным схемам) с применением описанных на рисунке 2.3 формул.

A		B		C	
Исходные данные					
Номер позиции	Наименование параметра	Обозначение	Значение		
3	Начальная сумма	PV	215 000,00 Р		
4	Время вклада, Годы	t	7		
5	Время вклада, месяцы	tm	5		
6	Процентная ставка	p	9,00%		

Рис. 2.1. Исходные данные для расчетов

Реализация расчетов параметров вкладов											
Номер позиции	Простые проценты			Сложные проценты			Разность между схемами			Смешанные проценты	
	Сумма на начало периода	Сумма на конец периода	Сумма процентов	Сумма на начало периода	Сумма на конец периода	Сумма процентов	Сумма на начало периода	Сумма на конец периода	Сумма процентов	Сумма на начало периода	Сумма на конец периода
9	215 000,00 Р	19 350,00 Р	234 350,00 Р	215 000,00 Р	234 350,00 Р	19 350,00 Р	0,00 Р	0,00 Р	19 350,00 Р	234 350,00 Р	234 350,00 Р
10	234 350,00 Р	38 700,00 Р	273 050,00 Р	234 350,00 Р	255 441,50 Р	20 091,50 Р	0,00 Р	1 741,50 Р	40 441,50 Р	255 441,50 Р	255 441,50 Р
11	255 700,00 Р	58 050,00 Р	313 750,00 Р	255 700,00 Р	278 431,24 Р	22 731,24 Р	1 741,50 Р	5 381,24 Р	46 122,74 Р	278 431,24 Р	278 431,24 Р
12	273 050,00 Р	77 400,00 Р	350 450,00 Р	273 050,00 Р	303 490,05 Р	30 440,05 Р	5 381,24 Р	11 090,05 Р	51 811,29 Р	303 490,05 Р	303 490,05 Р
13	292 400,00 Р	96 750,00 Р	389 150,00 Р	303 490,05 Р	330 804,15 Р	27 314,10 Р	11 090,05 Р	19 054,15 Р	46 368,25 Р	330 804,15 Р	330 804,15 Р
14	311 750,00 Р	116 100,00 Р	427 850,00 Р	330 804,15 Р	360 576,52 Р	29 772,37 Р	19 054,15 Р	29 476,52 Р	51 528,89 Р	360 576,52 Р	360 576,52 Р
15	331 100,00 Р	135 450,00 Р	466 550,00 Р	360 576,52 Р	393 028,41 Р	32 451,89 Р	29 476,52 Р	42 578,41 Р	57 050,30 Р	393 028,41 Р	393 028,41 Р
16	350 450,00 Р	143 512,50 Р	493 962,50 Р	393 028,41 Р	407 397,46 Р	14 369,05 Р	42 578,41 Р	48 884,96 Р	61 443,37 Р	407 397,46 Р	407 397,46 Р
17	358 512,50 Р	145 518,75 Р	504 031,25 Р	407 397,46 Р	407 397,46 Р	0,00 Р	0,00 Р	48 884,96 Р	61 443,37 Р	407 397,46 Р	407 397,46 Р
18	Общие показатели	215 000,00 Р	443 512,50 Р	215 000,00 Р	407 397,46 Р	192 397,46 Р	0,00 Р	48 884,96 Р	192 397,46 Р	407 397,46 Р	407 397,46 Р

Рис. 2.2. Детализация расчетов параметров вкладов с применением различных схем начисления процентов

	А	В
19	Адрес ячейки формулы	Формула
20	Ячейка В10	=С\$3
21	Ячейка С10	=В\$10*С\$6*А10
22	Ячейка D10	=В\$10*(1+С\$6*А10)
23	Ячейка В11	=D10
24	Ячейка С11	=В\$10*С\$6*А11
25	Ячейка D11	=В\$10*(1+С\$6*А11)
26	Ячейка В17	=D16
27	Ячейка С17	=В\$10*С\$6*(А16+С5/12)
28	Ячейка D17	=В\$10*(1+С\$6*(А16+С5/12))
29	Ячейка В18	=D18-С18
30	Ячейка С18	=С3*С6*(С4+С5/12)
31	Ячейка D18	=С3*(1+С6*(С4+С5/12))
32	Ячейка E10	=С\$3
33	Ячейка F10	=Е\$10*((1+С\$6)^А10-1)
34	Ячейка G10	=Е\$10*(1+С\$6)^А10
35	Ячейка E11	=G10
36	Ячейка F11	=Е\$10*((1+С\$6)^А11-1)
37	Ячейка G11	=Е\$10*(1+С\$6)^А11
38	Ячейка E17	=G16
39	Ячейка F17	=Е\$10*((1+С\$6)^(А16+С5/12)-1)
40	Ячейка G17	=Е\$10*(1+С\$6)^(А16+С5/12)
41	Ячейка E18	=G18-F18
42	Ячейка F18	=С3*((1+С6)^(С4+С5/12)-1)
43	Ячейка G18	=С3*(1+С6)^(С4+С5/12)
44	Ячейка H10	=E10-B10
45	Ячейка I10	=F10-C10
46	Ячейка J10	=G10-D10
47	Ячейка K10	=С\$3
48	Ячейка L10	=К\$10*((1+С\$6)^А10-1)
49	Ячейка M10	=К\$10*(1+С\$6)^А10
50	Ячейка K11	=M10
51	Ячейка L11	=К\$10*((1+С\$6)^А11-1)
52	Ячейка M11	=К\$10*(1+С\$6)^А11
53	Ячейка K17	=M16
54	Ячейка L17	=К\$10*((1+С\$6)^А16*(1+С\$6*(С5/12))-1)
55	Ячейка M17	=К\$10*(1+С\$6)^А16*(1+С\$6*(С5/12))
56	Ячейка K18	=M18-L18
57	Ячейка L18	=С3*((1+С6)^С4*(1+С6*С5/12)-1)
58	Ячейка M18	=С3*(1+С6)^С4*(1+С6*С5/12)

Рис. 2.3. Применяемые для реализации расчетов формулы

В случаях, когда процессы наращеня осуществляются согласно формулам начисления простых и сложных процентов, также возможно использование кратного или непрерывного начисления процентов на основе применения определенных расчетных алгоритмов.

В рамках нижеприведенных формул имеем следующие дополнительные обозначения расчетных параметров:

$m$  — кратность начисления процентов за год,

$e$  — основание натурального логарифма.

При использовании схемы начисления простых процентов (базируется на арифметической прогрессии), в рамках которой не учитывается сумма процентов, зачисленных в предыдущие периоды, применение кратного начисления процентов не приводит к изменениям в процессе наращеня исходной (начальной) суммы с целью получения необходимого значения наращенной (конечной) суммы, которая увеличивается согласно следующей формуле:

$$FV = PV + RV = PV \cdot \left( 1 + p \cdot \frac{t}{m} \cdot m \right) = PV \cdot (1 + p \cdot t),$$

Детализация представленной расчетной формулы по индексам (номерам) операций идентична описанию аналогичной формулы для начисления простых процентов без учета кратности начисления процентов.

Применение схемы кратного начисления процентов в рамках процесса наращеня для каждой вычислительной итерации  $n$  с точки зрения изначальной реализации простого начисления процентов подразумевает необходимость использования следующих формул:

- промежуточная исходная (начальная) сумма в условных единицах:  $PV_n = FV_{n-1}$ ;
- промежуточная положительная сумма процентов в условных единицах:  $RV_n = PV_n \cdot p \cdot n$ ;

• промежуточная наращенная (конечная) сумма в условных единицах:  $FV_n = PV_n \cdot (1 + p \cdot n)$ .

При использовании схемы начисления сложных процентов (базируется на геометрической прогрессии), в рамках которой учитывается сумма процентов, зачисленных в предыдущие периоды, применение кратного начисления процентов приводит к существенным изменениям в процессе наращивания исходной (начальной) суммы с целью получения необходимого значения наращенной (конечной) суммы, которая увеличивается согласно следующей формуле:

$$FV = PV + RV = PV \cdot \left(1 + \frac{p}{m}\right)^{m \cdot t}.$$

Детализация представленной расчетной формулы по индексам (номерам) операций в целом соответствует описанию аналогичной формулы для начисления сложных процентов без учета кратности начисления процентов.

Применение схемы кратного начисления процентов в рамках процесса наращивания для каждой вычислительной итерации  $n$  с точки зрения изначальной реализации начисления сложных процентов подразумевает необходимость использования следующих формул:

• промежуточная исходная (начальная) сумма в условных единицах:  $PV_n = FV_{n-1}$ ;

• промежуточная положительная сумма процентов в условных единицах:  $RV_n = PV_n \cdot \left( \left(1 + \frac{p}{m}\right)^n - 1 \right)$ ;

• промежуточная наращенная (конечная) сумма в условных единицах:  $FV_n = PV_n \cdot \left(1 + \frac{p}{m}\right)^n$ .

При реализации процесса наращивания использование схемы непрерывного начисления процентов

подразумевает применение следующей расчетной формулы увеличения исходной (начальной) суммы:

$$FV = PV + RV = PV \cdot e^{\frac{pt}{m}} = PV \cdot e^{pt}.$$

Доказательство данной формулы базируется на применении формулы второго замечательного предела.

Применение схемы непрерывного начисления процентов для каждой вычислительной итерации  $n$  подразумевает необходимость использования следующих формул:

• промежуточная исходная (начальная) сумма в условных единицах:  $PV_n = FV_{n-1}$ ;

• промежуточная положительная сумма процентов в условных единицах:  $RV_n = PV_n \cdot \left( e^{\frac{pn}{m}} - 1 \right)$ ;

• промежуточная наращенная (конечная) сумма в условных единицах:  $FV_n = PV_n \cdot e^{\frac{pn}{m}}$ .

Необходимо отметить, что для кредитора или вкладчика выгодно частое начисление процентов, а для заемщика наоборот.

В рамках таблицы 2.3 ниже представлена совокупная информация по реализации процесса наращивания с точки зрения указания наименований и формул для расчетов значений необходимых параметров.

## Пример решения комплексной задачи с применением редактора Excel

*Условие задачи:* Необходимо для заданных значений параметров исходных данных для реализации операции получения финансовых средств в рамках банковского кредита в виде величины начальной суммы кредита,

## Параметры реализации процесса наращеня

Настоящее время	Процесс наращеня		Будущее время
	Наименование (обозначение) параметра	Наименование (обозначение) параметра	
Исходная (начальная) сумма PV	Формулы для различных схем начисления процентов		Наращенная (конечная) сумма FV
	Однократное начисление процентов за рассматриваемый период (год)		
	Простые проценты	Смешанные проценты	
	Сложные проценты	Сложные проценты	
PV	Многократное начисление процентов за рассматриваемый период (год)		FV
	Дискретное начисление процентов		
	Простые проценты	Сложные проценты	
	Сложные проценты	Непрерывное начисление процентов	

процентной ставки по кредиту и продолжительности кредита осуществить автоматизированные расчеты параметров кредитов с учетом применения как различных схем начисления процентов по кредиту (простые, сложные и непрерывные), так и регулируемым кратностям начисления процентов (один раз в год, четыре раза в год, то есть раз в квартал, и двенадцать раз в год, то есть ежемесячно) согласно применяемым алгоритмам и наглядное представление всех промежуточных и итоговых результатов в редакторе электронных таблиц Excel.

На рисунках 2.4-2.8 ниже представлено решение описанной задачи в редакторе электронных таблиц Excel (рисунок 2.4 — параметры исходных данных, рисунок 2.5, 2.6, 2.7 — выполнение расчетов параметров кредита для различной кратности начисления процентов по простой, сложной и непрерывной схемам) с применением описанных на рисунке 2.8 формул.

	A	B	C
1	Исходные данные		
2	Наименование параметра	Обозначение	Значение
3	Начальная сумма кредита	PV	367 000,00 Р
4	Продолжительность кредита, года	t	3
5	Процентная ставка	p	8,00%
6	Величина кратности 1	m <sub>1</sub>	1
7	Величина кратности 2	m <sub>2</sub>	4
8	Величина кратности 3	m <sub>3</sub>	12

Рис. 2.4. Исходные данные для расчетов

Также при выполнении расчетов значений параметров процесса наращеня применяется понятие эффективной процентной ставки, которая представляет собой годовую процентную ставку и по факту является эквивалентным финансовым результатом, получаемым при реализации схемы выплат с кратным начислением процентов:

$$i_{EF} = \left(1 + \frac{p}{m}\right)^m - 1.$$



№	A	B	C	D	E	F
	Адрес ячейки формулы	Формула	Адрес ячейки формулы	Формула	Адрес ячейки формулы	Формула
73						
74	Ячейка B13	=C\$3	Ячейка B20	=C\$3	Ячейка B36	=C\$3
75	Ячейка C13	=B\$13*(C\$5/C\$6)*A13	Ячейка C20	=B\$13*(C\$5/C\$7)*A20	Ячейка C36	=B\$13*(C\$5/C\$8)*A36
76	Ячейка D13	=B\$13*(1+(C\$5/C\$6)^A13)	Ячейка D20	=B\$13*(1+(C\$5/C\$7)^A20)	Ячейка D36	=B\$13*(1+(C\$5/C\$8)^A36)
77	Ячейка B15	=D14	Ячейка B31	=D30	Ячейка B71	=D70
78	Ячейка C15	=B\$13*(C\$5/C\$6)*A15	Ячейка C31	=B\$13*(C\$5/C\$7)*A31	Ячейка C71	=B\$13*(C\$5/C\$8)*A71
79	Ячейка D15	=B\$13*(1+(C\$5/C\$6)^A15)	Ячейка D31	=B\$13*(1+(C\$5/C\$7)^A31)	Ячейка D71	=B\$13*(1+(C\$5/C\$8)^A71)
80	Ячейка B16	=D16-C16	Ячейка B32	=D32-C32	Ячейка B72	=D72-C72
81	Ячейка C16	=C3*(C5/C6)*C4*C6	Ячейка C32	=C3*(C5/C7)*C4*C7	Ячейка C72	=C3*(C5/C8)*C4*C8
82	Ячейка D16	=C3*(1+(C5/C6)^C4*C6)	Ячейка D32	=C3*(1+(C5/C7)^C4*C7)	Ячейка D72	=C3*(1+(C5/C8)^C4*C8)
83	Ячейка E13	=C\$3	Ячейка E20	=C\$3	Ячейка E36	=C\$3
84	Ячейка F13	=E\$13*(1+(C\$5/C\$6)^A13-1)	Ячейка F20	=E\$13*(1+(C\$5/C\$7)^A20-1)	Ячейка F36	=E\$13*(1+(C\$5/C\$8)^A36-1)
85	Ячейка G13	=E\$13*(1+(C\$5/C\$6)^A13)	Ячейка G20	=E\$13*(1+(C\$5/C\$7)^A20)	Ячейка G36	=E\$13*(1+(C\$5/C\$8)^A36)
86	Ячейка E15	=G14	Ячейка E31	=G30	Ячейка E71	=G70
87	Ячейка F15	=E\$13*(1+(C\$5/C\$6)^A15-1)	Ячейка F31	=E\$13*(1+(C\$5/C\$7)^A31-1)	Ячейка F71	=E\$13*(1+(C\$5/C\$8)^A71-1)
88	Ячейка G15	=E\$13*(1+(C\$5/C\$6)^A15)	Ячейка G31	=E\$13*(1+(C\$5/C\$7)^A31)	Ячейка G71	=E\$13*(1+(C\$5/C\$8)^A71)
89	Ячейка E16	=G16-F16	Ячейка E32	=G32-F32	Ячейка E72	=G72-F72
90	Ячейка F16	=C3*(1+(C5/C6)^C4*C6)	Ячейка F32	=C3*(1+(C5/C7)^C4*C7)	Ячейка F72	=C3*(1+(C5/C8)^C4*C8)
91	Ячейка G16	=C3*(1+(C5/C6)^C4*C6)	Ячейка G32	=C3*(1+(C5/C7)^C4*C7)	Ячейка G72	=C3*(1+(C5/C8)^C4*C8)
92	Ячейка H13	=E13-B13	Ячейка H20	=E20-B20	Ячейка H36	=E36-B36
93	Ячейка I13	=F13-C13	Ячейка I20	=F20-C20	Ячейка I36	=F36-C36
94	Ячейка J13	=G13-D13	Ячейка J20	=G20-D20	Ячейка J36	=G36-D36
95	Ячейка K13	=C\$3	Ячейка K20	=C\$3	Ячейка K36	=C\$3
96	Ячейка L13	=K\$13*(EXP(C\$5/C\$6^A13)-1)	Ячейка L20	=K\$13*(EXP(C\$5/C\$7^A20)-1)	Ячейка L36	=K\$13*(EXP(C\$5/C\$8^A36)-1)
97	Ячейка M13	=K\$13*EXP(C\$5/C\$6^A13)	Ячейка M20	=K\$13*EXP(C\$5/C\$7^A20)	Ячейка M36	=K\$13*EXP(C\$5/C\$8^A36)
98	Ячейка K15	=M14	Ячейка K31	=M30	Ячейка K71	=M70
99	Ячейка L15	=K\$13*(EXP(C\$5/C\$6^A15)-1)	Ячейка L31	=K\$13*(EXP(C\$5/C\$7^A31)-1)	Ячейка L71	=K\$13*(EXP(C\$5/C\$8^A71)-1)
100	Ячейка M15	=K\$13*EXP(C\$5/C\$6^A15)	Ячейка M31	=K\$13*EXP(C\$5/C\$7^A31)	Ячейка M71	=K\$13*EXP(C\$5/C\$8^A71)
101	Ячейка K16	=M16-L16	Ячейка K32	=M32-L32	Ячейка K72	=M72-L72
102	Ячейка L16	=C3*(EXP(C5^C4/C6^C6)-1)	Ячейка L32	=C3*(EXP(C5^C4/C7^C7)-1)	Ячейка L72	=C3*(EXP(C5^C4/C8^C8)-1)
103	Ячейка M16	=C3*EXP(C5^C4/C6^C6)-1	Ячейка M32	=C3*EXP(C5^C4/C7^C7)-1	Ячейка M72	=C3*EXP(C5^C4/C8^C8)-1

Рис. 2.8. Применяемые для реализации расчетов формулы

## ТЕМА 3. РЕАЛИЗАЦИЯ ДИСКОНТИРОВАНИЯ С ПРОСТЫМИ И СЛОЖНЫМИ ПРОЦЕНТАМИ

### Теоретический аспект

*Под дисконтированием возвращаемой (ожидаемой к поступлению) суммы* понимается процесс определения начальной (приведенной) суммы на основе учета последовательного вычитания от наращенной суммы процентных сумм в соответствии с обозначенной ставкой дисконтирования для получения меньшей по величине приведенной (конечной) суммы. По своей сути процесс дисконтирования является обратным по отношению к процессу наращенной.

*Под математическим дисконтированием* рассматривают решение задачи, обратной наращению, то есть определению начальной суммы по величине наращенной суммы. Формулы для математического описания процесса дисконтирования можно получить, выразив из формулы для наращенной суммы начальную сумму с применением соответствующих алгебраических преобразований.

В рамках нижеприведенных формул имеем следующие обозначения расчетных параметров:

*FV* – возвращаемая (начальная) сумма в условных единицах,

*DV* – положительная сумма процентов (дисконт) на начальной суммы в условных единицах,



$PV$  – приведенная (конечная) сумма в условных единицах,

$p$  — процентная ставка наращивания,

$d$  — учетная ставка дисконтирования,

$t$  — время в годах,

$b$  — доля от года.

При реализации процесса дисконтирования с использованием схемы удержания простых процентов (базируется на арифметической прогрессии) получаем следующее выражение для определения начальной (приведенной) суммы:

$$PV = FV - DV = \frac{FV}{1 + p \cdot t}.$$

Дисконт начальной суммы:

$$DV = FV - PV = FV \cdot \left(1 - \frac{1}{1 + p \cdot t}\right) = FV \cdot \left(\frac{1 + p \cdot t - 1}{1 + p \cdot t}\right) = \frac{FV \cdot p \cdot t}{1 + p \cdot t}.$$

При реализации процесса дисконтирования с использованием схемы удержания сложных процентов (базируется на геометрической прогрессии) получаем следующее выражение для определения начальной (приведенной) суммы:

$$PV = FV - DV = \frac{FV}{(1 + p)^t}.$$

Дисконт начальной суммы:

$$DV = FV - PV = FV \cdot \left(1 - \frac{1}{(1 + p)^t}\right) = FV \cdot \left(\frac{(1 + p)^t - 1}{(1 + p)^t}\right).$$

Под *банковским учетом* понимается учет долговых обязательств, то есть покупка банком денежных средств по цене, которая по величине изначально меньше номинальной, представленных, например, в виде векселя.

Вексель является долговым обязательством заемщика, которое он может представить для покупки в банк, с обязательством выкупа в срок погашения.

При использовании схемы удержания простых процентов (базируется на арифметической прогрессии) первоначальная сумма, которую получит владелец векселя за  $n$  лет до погашения при расчете по простой учетной ставке, определяется следующим образом:

$$PV = FV - DV = FV \cdot (1 - d \cdot t).$$

Представим детализацию получения обозначенной расчетной формулы согласно индексам (номерам) выполняемых операций:

1. В начале первой итерации процесса удержания мы фиксируем возвращаемую (начальную) сумму  $FV$ .

2. В конце первой расчетной итерации удержания простых процентов получаем первую промежуточную приведенную (конечную) сумму, которая автоматически является промежуточной возвращаемой (начальной) суммой для начала второй итерации:

$$PV_1 = FV_2 = FV - FV \cdot d = FV \cdot (1 - d).$$

3. В конце второй расчетной итерации удержания простых процентов получаем вторую промежуточную приведенную (конечную) сумму, которая автоматически является промежуточной возвращаемой (начальной) суммой для начала третьей итерации:

$$PV_2 = FV_3 = FV_2 - FV_2 \cdot p = FV - FV \cdot d - FV \cdot d = FV \cdot (1 - d) - FV \cdot d = FV \cdot (1 - 2 \cdot d).$$

4. Таким образом, к концу  $t$ -ой итерации удержания простых процентов получаем приведенную (конечную) сумму:

$$PV = PV_t = FV_{t+1} = FV_t - FV_t \cdot d = FV - FV \cdot d - \dots - FV \cdot d = FV \cdot (1 - d \cdot (t - 1)) - FV \cdot d = FV \cdot (1 - d \cdot (t - 1) - d) = FV \cdot (1 - d \cdot t).$$

С точки зрения параметров соответствующей арифметической прогрессии, для которой значения первого

члена  $a_1 = FV$ , разности  $d = FV \cdot d$  и количества членов  $n = t$ , имеем выражения для следующих определенных параметров, представленных в таблице 3.1 ниже.

Таблица 3.1

**Применение арифметической прогрессии  
к дисконтированию по простым процентам**

Наименование параметра прогрессии	Расчет значения параметра прогрессии согласно применяемой схеме
Рекуррентная формула	$a_{t+1} = a_t - FV \cdot d$
Формула $t$ -го члена	$a_t = FV - FV \cdot d \cdot (t-1) = FV \cdot (1 - d \cdot (t-1))$
Формула $(t+1)$ -го члена	$a_{t+1} = FV - FV \cdot d \cdot t = FV \cdot (1 - d \cdot t) = PV$

При выполнении расчетных алгоритмов согласно реализации схемы удержания простых процентов для каждой вычислительной итерации  $n$  необходимо применять следующие формулы:

- промежуточная возвращаемая (начальная) сумма в условных единицах:  $FV_n = PV_{n-1}$ ;
- промежуточная положительная сумма процентов (дисконта) в условных единицах:  $DV_n = FV_n \cdot d \cdot n$ ;
- промежуточная приведенная (конечная) сумма в условных единицах:  $PV_n = FV_n \cdot (1 - d \cdot n)$ .

При использовании схемы удержания сложных процентов (базируется на геометрической прогрессии) первоначальная сумма, которую получит владелец векселя за  $n$  лет до погашения при расчете по простой учетной ставке, определяется следующим образом:

$$PV = FV - DV = FV \cdot (1 - d)^t,$$

Под дисконтным множителем понимается коэффициент, показывающим, во сколько раз при реализации процесса дисконтирования с применением схемы удержания сложных процентов уменьшится возвращаемая (начальная) сумма за обозначенное количество лет, обозначенная банком в виде номинальной стоимости векселя, под указанное количество процентов, значение которого определяется следующим выражением:

$$D(d, t) = \frac{PV}{FV} = (1 - d)^t.$$

Представим детализацию получения обозначенной расчетной формулы согласно индексам (номерам) выполняемых операций:

1. В начале первой итерации процесса дисконтирования мы фиксируем возвращаемую (начальную) сумму  $FV$ .
2. В конце первой расчетной итерации удержания сложных процентов получаем первую промежуточную приведенную (конечную) сумму, которая автоматически является промежуточной возвращаемой (начальной) суммой для начала второй итерации:

$$PV_1 = FV_2 = FV - FV \cdot d = FV \cdot (1 - d).$$

3. В конце второй расчетной итерации удержания сложных процентов получаем вторую промежуточную приведенную (конечную) сумму, которая автоматически является промежуточной возвращаемой (начальной) суммой для начала третьей итерации:

$$PV_2 = FV_3 = FV_2 - FV \cdot d = FV \cdot (1 - d) - FV \cdot (1 - d) \cdot d = FV \cdot (1 - d) \cdot (1 - d) = FV \cdot (1 - d)^2.$$

4. Таким образом, к концу  $t$ -ой итерации удержания сложных процентов получаем приведенную (конечную) сумму:

$$\begin{aligned}
 PV &= PV_t = FV_{t+1} = FV_t - FV \cdot d = FV \cdot (1-d) \cdot \dots \cdot (1-d) - \\
 &- FV \cdot (1-d) \cdot \dots \cdot (1-d) \cdot d = FV \cdot (1-d)^{t-1} + FV \cdot (1-d)^{t-1} \cdot d = \\
 &= FV \cdot (1-d)^{t-1} \cdot (1-d) = FV \cdot (1-d)^t.
 \end{aligned}$$

С точки зрения параметров соответствующей геометрической прогрессии, для которой значения первого члена  $b_1 = FV$ , знаменателя  $q = 1 - d$  и количества членов  $n = t$ , имеем выражения для следующих определенных параметров, представленных в таблице 3.2 ниже.

Таблица 3.2

#### Применение геометрической прогрессии к дисконтированию по сложным процентам

Наименование параметра прогрессии	Расчет значения параметра прогрессии согласно применяемой схеме
Рекуррентная формула	$b_{t+1} = b_t \cdot (1-d)$
Формула $t$ -го члена	$b_t = FV \cdot (1-d)^{t-1}$
Формула $(t+1)$ -го члена	$b_{t+1} = FV \cdot (1-d)^{t-1} \cdot (1-d) = FV \cdot (1-d)^t = PV$

При выполнении расчетных алгоритмов процесса дисконтирования по простой учетной ставке для каждой вычислительной итерации  $n$  необходимо применять следующие формулы:

- промежуточная возвращаемая (начальная) сумма в условных единицах:  $FV_n = PV_{n-1}$ ;

- промежуточная положительная сумма процентов (дисконта) в условных единицах:  $DV_n = FV_n \cdot (1 - (1-d)^n)$ ;
- промежуточная приведенная (конечная) сумма в условных единицах:  $PV_n = FV_n \cdot (1-d)^n$ .

Если календарный срок составляет больше одного года, но не целое число лет, то используются так называемые смешанные проценты, при этом в процессе дисконтирования первоначальная сумма уменьшается согласно следующей формуле:

$$PV = FV - RV = FV \cdot (1-d)^t \cdot (1-d \cdot b).$$

В рамках таблицы 3.3 ниже представлена совокупная информация по реализации процесса дисконтирования с точки зрения указания наименований и формул для расчетов значений необходимых параметров.

#### Пример решения комплексной задачи с применением редактора Excel

*Условие задачи:* Необходимо для заданных значений параметров реализации учета векселя в банке в виде величины стоимости векселя, учетной процентной ставки и продолжительности срока учета осуществить автоматизированные расчеты параметров векселя на основе применения различных схем погашения процентов исходя из учетной ставки согласно применяемым алгоритмам и наглядное представление всех промежуточных и итоговых результатов в редакторе электронных таблиц Excel.

На рисунках 3.1-3.3 ниже представлено решение описанной задачи в редакторе электронных таблиц Excel (рисунок 3.1 — параметры исходных данных, рисунок 3.2 — выполнение расчетов параметров учета векселя по простой, сложной и смешанной схемам погашения процентов) с применением описанных на рисунке 3.3 формул.

Таблица 3.3

Параметры реализации процесса дисконтирования

Настоящее время	Процесс дисконтирования		Будущее время
Наименование (обозначение) параметра	Формулы для различных схем удержания процентов		Наименование (обозначение) параметра
Приведенная (конечная) сумма PV	Однократное удержание процентов за рассматриваемый период (год)		Возвращаемая сумма FV
	Простые проценты	Смешанные проценты	
	$PV = FV \cdot (1 - d \cdot t)$	$PV = FV \cdot (1 - d)^t$	
	Многократное удержание процентов за рассматриваемый период (год)		
	Дискретное удержание процентов	Непрерывное удержание процентов	
	Простые проценты	Сложные проценты	
	$PV = FV \cdot (1 - d \cdot t)$	$PV = FV \cdot (1 - d)^t$	
		$PV = FV \cdot \left(1 - \frac{d}{m}\right)^{mt}$	
		$PV = FV \cdot (1 - d \cdot t)$	
		$PV = FV \cdot e^{-dt}$	

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	Исходные данные												
2	Наименование параметра	Обозначение	Значение										
3	Приведенная сумма	FV	215 000,00 Р										
4	Время дисконтирования, года	t	7										
5	Время дисконтирования, месяцы	tm	5										
6	Учетная ставка	d	9,00%										

Рис. 3.1. Исходные данные для расчетов

Реализация расчетов параметров вкладов													
Номер позиции	Простые проценты			Сложные проценты			Разность между схемами			Смешанные проценты			
	Сумма на начало периода	Сумма на конец периода	Сумма на конец периода	Сумма на начало периода	Сумма на конец периода	Сумма на конец периода	Сумма на начало периода	Сумма на конец периода	Сумма на начало периода	Сумма на конец периода	Сумма на конец периода	Сумма на конец периода	
9	215 000,00 Р	19 350,00 Р	195 650,00 Р	215 000,00 Р	195 650,00 Р	178 041,50 Р	0,00 Р	1 741,50 Р	0,00 Р	1 741,50 Р	195 650,00 Р	19 350,00 Р	
10	195 650,00 Р	38 700,00 Р	176 950,00 Р	195 650,00 Р	178 041,50 Р	178 041,50 Р	0,00 Р	1 741,50 Р	5 067,77 Р	9 836,17 Р	178 041,50 Р	52 982,24 Р	
11	176 950,00 Р	58 050,00 Р	156 900,00 Р	176 950,00 Р	147 436,17 Р	147 436,17 Р	5 067,77 Р	9 836,17 Р	9 836,17 Р	15 916,91 Р	147 436,17 Р	67 565,83 Р	
12	156 950,00 Р	77 400,00 Р	137 600,00 Р	156 900,00 Р	122 091,89 Р	122 091,89 Р	9 836,17 Р	15 916,91 Р	15 916,91 Р	21 451,49 Р	122 091,89 Р	80 833,09 Р	
13	137 600,00 Р	96 750,00 Р	118 250,00 Р	137 600,00 Р	92 806,38 Р	92 806,38 Р	15 916,91 Р	21 451,49 Р	21 451,49 Р	27 000,00 Р	92 806,38 Р	103 828,38 Р	
14	118 250,00 Р	116 100,00 Р	92 150,00 Р	118 250,00 Р	68 223,35 Р	68 223,35 Р	21 451,49 Р	27 000,00 Р	27 000,00 Р	32 544,84 Р	68 223,35 Р	78 723,35 Р	
15	92 150,00 Р	135 450,00 Р	71 450,00 Р	92 150,00 Р	43 053,35 Р	43 053,35 Р	27 000,00 Р	32 544,84 Р	32 544,84 Р	38 089,32 Р	43 053,35 Р	53 048,32 Р	
16	71 450,00 Р	154 800,00 Р	50 800,00 Р	71 450,00 Р	23 903,35 Р	23 903,35 Р	32 544,84 Р	38 089,32 Р	38 089,32 Р	43 634,80 Р	23 903,35 Р	33 958,32 Р	
17	50 800,00 Р	174 150,00 Р	30 150,00 Р	50 800,00 Р	4 753,35 Р	4 753,35 Р	38 089,32 Р	43 634,80 Р	43 634,80 Р	49 180,28 Р	4 753,35 Р	15 108,28 Р	
18	30 150,00 Р	193 500,00 Р	9 500,00 Р	30 150,00 Р	2 603,35 Р	2 603,35 Р	43 634,80 Р	49 180,28 Р	49 180,28 Р	54 725,76 Р	2 603,35 Р	6 513,28 Р	
19	9 500,00 Р	212 850,00 Р	3 850,00 Р	9 500,00 Р	503,35 Р	503,35 Р	49 180,28 Р	54 725,76 Р	54 725,76 Р	60 271,24 Р	503,35 Р	1 018,28 Р	
20	3 850,00 Р	232 200,00 Р	1 700,00 Р	3 850,00 Р	293,35 Р	293,35 Р	54 725,76 Р	60 271,24 Р	60 271,24 Р	65 816,72 Р	293,35 Р	603,35 Р	
21	1 700,00 Р	251 550,00 Р	550,00 Р	1 700,00 Р	83,35 Р	83,35 Р	60 271,24 Р	65 816,72 Р	65 816,72 Р	71 362,20 Р	83,35 Р	158,35 Р	
22	550,00 Р	270 900,00 Р	340,00 Р	550,00 Р	33,35 Р	33,35 Р	65 816,72 Р	71 362,20 Р	71 362,20 Р	76 907,68 Р	33,35 Р	103,35 Р	
23	340,00 Р	290 250,00 Р	130,00 Р	340,00 Р	13,35 Р	13,35 Р	71 362,20 Р	76 907,68 Р	76 907,68 Р	82 453,16 Р	13,35 Р	53,35 Р	
24	130,00 Р	309 600,00 Р	30,00 Р	130,00 Р	3,35 Р	3,35 Р	76 907,68 Р	82 453,16 Р	82 453,16 Р	88 000,00 Р	3,35 Р	3,35 Р	
25	30,00 Р	328 950,00 Р	0,00 Р	30,00 Р	0,00 Р	0,00 Р	82 453,16 Р	88 000,00 Р	88 000,00 Р	93 545,44 Р	0,00 Р	0,00 Р	
26	0,00 Р	348 300,00 Р	0,00 Р	0,00 Р	0,00 Р	0,00 Р	88 000,00 Р	93 545,44 Р	93 545,44 Р	99 090,88 Р	0,00 Р	0,00 Р	
27	0,00 Р	367 650,00 Р	0,00 Р	0,00 Р	0,00 Р	0,00 Р	93 545,44 Р	99 090,88 Р	99 090,88 Р	104 636,32 Р	0,00 Р	0,00 Р	
28	0,00 Р	387 000,00 Р	0,00 Р	0,00 Р	0,00 Р	0,00 Р	99 090,88 Р	104 636,32 Р	104 636,32 Р	110 181,76 Р	0,00 Р	0,00 Р	
29	0,00 Р	406 350,00 Р	0,00 Р	0,00 Р	0,00 Р	0,00 Р	104 636,32 Р	110 181,76 Р	110 181,76 Р	115 727,20 Р	0,00 Р	0,00 Р	
30	0,00 Р	425 700,00 Р	0,00 Р	0,00 Р	0,00 Р	0,00 Р	110 181,76 Р	115 727,20 Р	115 727,20 Р	121 272,64 Р	0,00 Р	0,00 Р	
31	0,00 Р	445 050,00 Р	0,00 Р	0,00 Р	0,00 Р	0,00 Р	115 727,20 Р	121 272,64 Р	121 272,64 Р	126 818,08 Р	0,00 Р	0,00 Р	
32	0,00 Р	464 400,00 Р	0,00 Р	0,00 Р	0,00 Р	0,00 Р	121 272,64 Р	126 818,08 Р	126 818,08 Р	132 363,52 Р	0,00 Р	0,00 Р	
33	0,00 Р	483 750,00 Р	0,00 Р	0,00 Р	0,00 Р	0,00 Р	126 818,08 Р	132 363,52 Р	132 363,52 Р	137 908,96 Р	0,00 Р	0,00 Р	
34	0,00 Р	503 100,00 Р	0,00 Р	0,00 Р	0,00 Р	0,00 Р	132 363,52 Р	137 908,96 Р	137 908,96 Р	143 454,40 Р	0,00 Р	0,00 Р	
35	0,00 Р	522 450,00 Р	0,00 Р	0,00 Р	0,00 Р	0,00 Р	137 908,96 Р	143 454,40 Р	143 454,40 Р	149 000,00 Р	0,00 Р	0,00 Р	
36	0,00 Р	541 800,00 Р	0,00 Р	0,00 Р	0,00 Р	0,00 Р	143 454,40 Р	149 000,00 Р	149 000,00 Р	154 545,44 Р	0,00 Р	0,00 Р	
37	0,00 Р	561 150,00 Р	0,00 Р	0,00 Р	0,00 Р	0,00 Р	149 000,00 Р	154 545,44 Р	154 545,44 Р	160 090,88 Р	0,00 Р	0,00 Р	
38	0,00 Р	580 500,00 Р	0,00 Р	0,00 Р	0,00 Р	0,00 Р	154 545,44 Р	160 090,88 Р	160 090,88 Р	165 636,32 Р	0,00 Р	0,00 Р	
39	0,00 Р	599 850,00 Р	0,00 Р	0,00 Р	0,00 Р	0,00 Р	160 090,88 Р	165 636,32 Р	165 636,32 Р	171 181,76 Р	0,00 Р	0,00 Р	
40	0,00 Р	619 200,00 Р	0,00 Р	0,00 Р	0,00 Р	0,00 Р	165 636,32 Р	171 181,76 Р	171 181,76 Р	176 727,20 Р	0,00 Р	0,00 Р	
41	0,00 Р	638 550,00 Р	0,00 Р	0,00 Р	0,00 Р	0,00 Р	171 181,76 Р	176 727,20 Р	176 727,20 Р	182 272,64 Р	0,00 Р	0,00 Р	
42	0,00 Р	657 900,00 Р	0,00 Р	0,00 Р	0,00 Р	0,00 Р	176 727,20 Р	182 272,64 Р	182 272,64 Р	187 818,08 Р	0,00 Р	0,00 Р	
43	0,00 Р	677 250,00 Р	0,00 Р	0,00 Р	0,00 Р	0,00 Р	182 272,64 Р	187 818,08 Р	187 818,08 Р	193 363,52 Р	0,00 Р	0,00 Р	
44	0,00 Р	696 600,00 Р	0,00 Р	0,00 Р	0,00 Р	0,00 Р	187 818,08 Р	193 363,52 Р	193 363,52 Р	198 908,96 Р	0,00 Р	0,00 Р	
45	0,00 Р	715 950,00 Р	0,00 Р	0,00 Р	0,00 Р	0,00 Р	193 363,52 Р	198 908,96 Р	198 908,96 Р	204 454,40 Р	0,00 Р	0,00 Р	
46	0,00 Р	735 300,00 Р	0,00 Р	0,00 Р	0,00 Р	0,00 Р	198 908,96 Р	204 454,40 Р	204 454,40 Р	210 000,00 Р	0,00 Р	0,00 Р	
47	0,00 Р	754 650,00 Р	0,00 Р	0,00 Р	0,00 Р	0,00 Р	204 454,40 Р	210 000,00 Р	210 000,00 Р	215 545,44 Р	0,00 Р	0,00 Р	
48	0,00 Р	774 000,00 Р	0,00 Р	0,00 Р	0,00 Р	0,00 Р	210 000,00 Р	215 545,44 Р	215 545,44 Р	221 090,88 Р	0,00 Р	0,00 Р	
49	0,00 Р	793 350,00 Р	0,00 Р	0,00 Р	0,00 Р	0,00 Р	215 545,44 Р	221 090,88 Р	221 090,88 Р	226 636,32 Р	0,00 Р	0,00 Р	
50	0,00 Р	812 700,00 Р	0,00 Р	0,00 Р	0,00 Р	0,00 Р	221 090,88 Р	226 636,32 Р	226 636,32 Р	232 181,76 Р	0,00 Р	0,00 Р	
51	0,00 Р	832 050,00 Р	0,00 Р	0,00 Р	0,00 Р	0,00 Р	226 636,32 Р	232 181,76 Р	232 181,76 Р	237 727,20 Р	0,00 Р	0,00 Р	
52	0,00 Р	851 400,00 Р	0,00 Р	0,00 Р	0,00 Р	0,00 Р	232 181,76 Р	237 727,20 Р	237 727,20 Р	243 272,64 Р	0,00 Р	0,00 Р	
53	0,00 Р	870 750,00 Р	0,00 Р	0,00 Р	0,00 Р	0,00 Р	237 727,20 Р	243 272,64 Р	243 272,64 Р	248 818,08 Р	0,00 Р	0,00 Р	
54	0,00 Р	890 100,00 Р	0,00 Р	0,00 Р	0,00 Р	0,00 Р	243 272,64 Р	248 818,08 Р	248 818,08 Р	254 363,52 Р	0,00 Р	0,00 Р	
55	0,00 Р	909 450,00 Р	0,00 Р	0,00 Р	0,00 Р	0,00 Р	248 818,08 Р	254 363,52 Р	254 363,52 Р	260 000,00 Р	0,00 Р	0,00 Р	
56	0,00 Р	928 800,00 Р	0,00 Р	0,00 Р	0,00 Р	0,00 Р	254 363,52 Р	260 000,00 Р	260 000,00 Р	265 636,32 Р	0,00 Р	0,00 Р	
57	0,00 Р	948 150,00 Р	0,00 Р	0,00 Р	0,00 Р	0,00 Р	260 000,00 Р	265 636,32 Р	265 636,32 Р	271 272,64 Р	0,00 Р	0,00 Р	
58	0,00 Р	967 500,00 Р	0,00 Р	0,00 Р	0,00 Р	0,00 Р	265 636,32 Р	271 272,64 Р	271 272,64 Р	276 908,96 Р	0,00 Р	0,00 Р	
59	0,00 Р	986 850,00 Р	0,00 Р	0,00 Р	0,00 Р	0,00 Р	271 272,64 Р	276 908,96 Р	276 908,96 Р	282 545,44 Р	0,00 Р	0,00 Р	
60	0,00 Р	1 006 200,00 Р	0,00 Р	0,00 Р	0,00 Р	0,00 Р	276 908,96 Р	282 545,44 Р	282 545,44 Р	288 181,76 Р	0,00 Р	0,00 Р	
61	0,00 Р	1 025 550,00 Р	0,00 Р	0,00 Р	0,00 Р	0,00 Р	282 545,44 Р	288 181,76 Р	288 181,76 Р	293 818,08 Р	0,00 Р	0,00 Р	
62	0,00 Р	1 044 900,00 Р	0,00 Р	0,00 Р	0,00 Р	0,00 Р	288 181,76 Р	293 818,08 Р	293 818,08 Р	300 000,00 Р	0,00 Р	0,00 Р	
63	0,00 Р	1 064 250,00 Р	0,00 Р	0,00 Р	0,00 Р	0,00 Р	293 818,08 Р	300 000,00 Р	300 000,00 Р	306 181,76 Р	0,00 Р	0,00 Р	
64	0,00 Р	1 083 600,00 Р	0,00 Р	0,00 Р	0,00 Р	0,00 Р	300 000,00 Р	306 181,76 Р	306 181,76 Р	312 363,52 Р	0,00 Р	0,00 Р	
65	0,00 Р	1 102 950,00 Р	0,00 Р	0,00 Р	0,00 Р	0,00 Р	306 181,76 Р	312 363,52 Р	312 363,52 Р	318 545,44 Р	0,00 Р	0,00 Р	
66	0,00 Р	1 122 300,00 Р	0,00 Р	0,00 Р	0,00 Р	0,00 Р	312 363,52 Р	318 545,44 Р	318 545,44 Р	324 727,20 Р	0,00 Р	0,00 Р	
67	0,00 Р	1 141 650,00 Р	0,00 Р	0,00 Р	0,00 Р	0,00 Р	318 545,44 Р	324 727,20 Р	324 727,20 Р	330 908,96 Р	0,00 Р	0,00 Р	
68	0,00 Р	1 161 000,00 Р	0,00 Р	0,00 Р	0,00 Р	0,00 Р	324 727,20 Р	330 908,96 Р	330 908,96 Р	337 090,88 Р	0,00 Р	0,00 Р	
69	0,00 Р	1 180 350,00 Р	0,00 Р	0,00 Р	0,00 Р	0,00 Р	330 908,96 Р	337 090,88 Р	337 090,88 Р	343 272,64 Р	0,00 Р	0,00 Р	
70	0,00 Р	1 200 000,00 Р	0,00 Р	0,00 Р	0,00 Р	0,00 Р	337 090,88 Р	343 272,64 Р	343 272,64 Р	349 454,40 Р	0,00 Р	0,00 Р	
71	0,00 Р	1 219 650,00 Р	0,00 Р	0,00 Р	0,00 Р	0,00 Р	343 272,64 Р	349 454,40 Р	349 454,40 Р	355 636,32 Р	0,00 Р	0,00 Р	
72	0,00 Р	1 239 300,00 Р	0,00 Р	0,00 Р	0,00 Р	0,00 Р	349 454,40 Р	355 636,32 Р	355 636,32 Р	3			

	А	В
	Адрес ячейки формулы	Формула
19		
20	Ячейка B10	=С\$3
21	Ячейка C10	=B\$10*С\$6*A10
22	Ячейка D10	=B\$10*(1-С\$6*A10)
23	Ячейка B11	=D10
24	Ячейка C11	=B\$10*С\$6*A11
25	Ячейка D11	=B\$10*(1-С\$6*A11)
26	Ячейка B17	=D16
27	Ячейка C17	=B\$10*С\$6*(A16+C5/12)
28	Ячейка D17	=B\$10*(1-С\$6*(A16+C5/12))
29	Ячейка B18	=D18+C18
30	Ячейка C18	=C3*C6*(C4+C5/12)
31	Ячейка D18	=C3*(1-C6*(C4+C5/12))
32	Ячейка E10	=С\$3
33	Ячейка F10	=E\$10*(1-(1-С\$6)^A10)
34	Ячейка G10	=E\$10*(1-С\$6)^A10
35	Ячейка E11	=G10
36	Ячейка F11	=E\$10*(1-(1-С\$6)^A11)
37	Ячейка G11	=E\$10*(1-С\$6)^A11
38	Ячейка E17	=G16
39	Ячейка F17	=E\$10*(1-С\$6)^(A16+C5/12)
40	Ячейка G17	=E\$10*(1-С\$6)^(A16+C5/12)
41	Ячейка E18	=G18+F18
42	Ячейка F18	=C3*(1-(1-C6)^(C4+C5/12))
43	Ячейка G18	=C3*(1-C6)^(C4+C5/12)
44	Ячейка H10	=E10-B10
45	Ячейка I10	=C10-F10
46	Ячейка J10	=G10-D10
47	Ячейка K10	=С\$3
48	Ячейка L10	=E\$10*(1-(1-С\$6)^A10)
49	Ячейка M10	=K\$10*(1-С\$6)^A10
50	Ячейка K11	=M10
51	Ячейка L11	=E\$10*(1-(1-С\$6)^A10)
52	Ячейка M11	=K\$10*(1-С\$6)^A10
53	Ячейка K17	=M16
54	Ячейка L17	=K\$10*(1-(1-С\$6)^A16*(1-С\$6*(C5/12)))
55	Ячейка M17	=K\$10*(1-С\$6)^A16*(1-С\$6*(C5/12))
56	Ячейка K18	=M18+L18
57	Ячейка L18	=K\$10*(1-(1-С\$6)^A16*(1-С\$6*(C5/12)))
58	Ячейка M18	=C3*(1-C6)^C4*(1-C6*(C5/12))

Рис. 3.3. Применяемые для реализации расчетов формулы

В случаях, когда процессы дисконтирования осуществляются согласно формулам удержания простых и сложных процентов, также возможно использование кратного или непрерывного удержания процентов на основе применения определенных расчетных алгоритмов.

В рамках нижеприведенных формул имеем следующие дополнительные обозначения расчетных параметров:

$m$  — кратность удержания процентов за год,

$e$  — основание натурального логарифма.

При использовании схемы удержания простых процентов (базируется на арифметической прогрессии), в рамках которого не учитывается сумма процентов, удержанных в предыдущие периоды, использование кратного удержания процентов не приводит к изменениям в процессе дисконтирования возвращаемой (начальной) суммы с целью получения необходимого значения приведенной (конечной) суммы (получаемой владельцем векселя до погашения при расчете по простой учетной ставке), которая уменьшается согласно следующей формуле:

$$PV = FV - DV = FV \cdot \left(1 - d \cdot \frac{t}{m} \cdot m\right) = FV \cdot (1 - d \cdot t).$$

Детализация представленной расчетной формулы по индексам (номерам) операций идентична описанию аналогичной формулы для удержания простых процентов без учета кратности удержания процентов.

Применение схемы кратного удержания процентов в рамках процесса дисконтирования для каждой вычислительной итерации  $n$  с точки зрения изначальной реализации простого удержания процентов подразумевает необходимость использования следующих формул

• промежуточная возвращаемая (начальная) сумма в условных единицах:  $FV_n = PV_{n-1}$ ;

- промежуточная положительная сумма процентов (дисконта):  $DV_n = FV_n \cdot d \cdot t$ ;
- промежуточная приведенная (конечная) сумма в условных единицах:  $PV_n = FV_n \cdot (1 - d \cdot t)$ .

При реализации схемы удержания сложных процентов (базируется на геометрической прогрессии), в рамках которого учитывается сумма процентов, удержанных в предыдущие периоды, применение кратного удержания процентов приводит к существенным изменениям в процессе дисконтирования возвращаемой (начальной) суммы с целью получения необходимого значения приведенной (конечной) суммы (получаемой владельцем векселя до погашения при расчете по сложной учетной ставке), которая уменьшается согласно следующей формуле:

$$PV = FV - DV = FV \cdot \left(1 - \frac{d}{m}\right)^{mt}.$$

Детализация представленной расчетной формулы по индексам (номерам) операций в целом соответствует описанию аналогичной формулы для удержания сложных процентов без учета кратности начисления процентов.

Применение схемы кратного удержания процентов в рамках процесса дисконтирования для каждой вычислительной итерации  $n$  с точки зрения изначальной реализации удержания сложных процентов подразумевает необходимость использования следующих формул:

- промежуточная возвращаемая (начальная) сумма в условных единицах:  $FV_n = PV_{n-1}$ ;
- промежуточная положительная сумма процентов (дисконта) в условных единицах:  $DV_n = FV_n \cdot \left(1 - \left(1 - \frac{d}{m}\right)^n\right)$ ;

- промежуточная приведенная (конечная) сумма в условных единицах:  $PV_n = FV_n \cdot \left(1 - \frac{d}{m}\right)^n$ .

При реализации процесса дисконтирования использование схемы непрерывного удержания процентов подразумевает применение следующей расчетной формулы уменьшения возвращаемой (начальной) суммы:

$$PV = FV - DV = FV \cdot e^{-\frac{pt}{m}} = FV \cdot e^{-pt} = \frac{FV}{e^{pt}}.$$

Доказательство данной формулы базируется на применении формулы второго замечательного предела.

### Пример решения комплексной задачи с применением редактора Excel

*Условие задачи:* Необходимо для заданных значений параметров реализации учета векселя в банке в виде величины стоимости векселя, учетной процентной ставки и продолжительности срока учета осуществить автоматизированные расчеты параметров векселя на основе применения как различных схем погашения процентов исходя из учетной ставки, так и регулируемым кратностям начисления процентов (один раз в год, четыре раза в год, то есть раз в квартал, и двенадцать раз в год, то есть ежемесячно) согласно применяемым алгоритмам и наглядное представление всех промежуточных и итоговых результатов в редакторе электронных таблиц Excel.

На рисунках 3.4-3.8 ниже представлено решение описанной задачи в редакторе электронных таблиц Excel (рисунок 3.4 — параметры исходных данных, рисунок 3.5, 3.6, 3.7 — выполнение расчетов параметров учета векселя для различной кратности начисления процентов по простой, сложной и непрерывной схемам) с применением описанных на рисунке 3.8 формул.



Также при выполнении расчетов значений параметров процесса дисконтирования применяется понятие эффективной процентной ставки, которая представляет собой годовую процентную ставку и по факту является эквивалентным финансовым результатом, получаемым при реализации схемы с кратным удержанием процентов:

$$i_{EF} = \left(1 - \frac{d}{m}\right)^m - 1.$$

№	А	В	С	Д	Е	Ф
73	Адрес ячейки Формула	Формула	Адрес ячейки Формула	Формула	Адрес ячейки Формула	Формула
74	Ячейка B13	=SC3	Ячейка B20	=SC3	Ячейка B36	=SC3
75	Ячейка C13	=SB\$13*(SC\$5/SC\$6)*A13	Ячейка C20	=SB\$13*(SC\$5/SC\$7)*A20	Ячейка C36	=SB\$13*(SC\$5/SC\$8)*A36
76	Ячейка D13	=SB\$13*(1-(SC\$5/SC\$6)*A13)	Ячейка D20	=SB\$13*(1-(SC\$5/SC\$7)*A20)	Ячейка D36	=SB\$13*(1-(SC\$5/SC\$8)*A36)
77	Ячейка B15	=D14	Ячейка B31	=D30	Ячейка B71	=D70
78	Ячейка C15	=SB\$13*(SC\$5/SC\$6)*A15	Ячейка C31	=SB\$13*(SC\$5/SC\$7)*A31	Ячейка C71	=SB\$13*(SC\$5/SC\$8)*A71
79	Ячейка D15	=SB\$13*(1-(SC\$5/SC\$6)*A15)	Ячейка D31	=SB\$13*(1-(SC\$5/SC\$7)*A31)	Ячейка D71	=SB\$13*(1-(SC\$5/SC\$8)*A71)
80	Ячейка B16	=D16+C16	Ячейка B32	=D32+C32	Ячейка B72	=D72+C72
81	Ячейка C16	=C3*(C5/C6)*C4*C6	Ячейка C32	=C3*(C5/C7)*C4*C7	Ячейка C72	=C3*(C5/C8)*C4*C8
82	Ячейка D16	=C3*(1-(C5/C6)*C4*C6)	Ячейка D32	=C3*(1-(C5/C7)*C4*C7)	Ячейка D72	=C3*(1-(C5/C8)*C4*C8)
83	Ячейка E13	=SC3	Ячейка E20	=SC3	Ячейка E36	=SC3
84	Ячейка F13	=SE\$13*(1-(1-(SC\$5/SC\$6))^A13)	Ячейка F20	=SE\$13*(1-(1-(SC\$5/SC\$7))^A20)	Ячейка F36	=SE\$36*(1-(1-(SC\$5/SC\$8))^A36)
85	Ячейка G13	=SE\$13*(1-(SC\$5/SC\$6))^A13	Ячейка G20	=SE\$13*(1-(SC\$5/SC\$7))^A20	Ячейка G36	=SE\$36*(1-(SC\$5/SC\$8))^A36
86	Ячейка E15	=G14	Ячейка E31	=G30	Ячейка E71	=G70
87	Ячейка F15	=SE\$13*(1-(1-(SC\$5/SC\$6))^A15)	Ячейка F31	=SE\$13*(1-(1-(SC\$5/SC\$7))^A31)	Ячейка F71	=SE\$36*(1-(1-(SC\$5/SC\$8))^A70)
88	Ячейка G15	=SE\$13*(1-(SC\$5/SC\$6))^A15	Ячейка G31	=SE\$13*(1-(SC\$5/SC\$7))^A31	Ячейка G71	=SE\$36*(1-(SC\$5/SC\$8))^A71
89	Ячейка E16	=G16+F16	Ячейка E32	=G32+F32	Ячейка E72	=G72+F72
90	Ячейка F16	=C3*(1-(1-(C5/C6))^C4*C6)	Ячейка F32	=C3*(1-(1-(C5/C7))^C4*C7)	Ячейка F72	=C3*(1-(1-(C5/C8))^C4*C8)
91	Ячейка G16	=C3*(1-(C5/C6))^C4*C6	Ячейка G32	=C3*(1-(C5/C7))^C4*C7	Ячейка G72	=C3*(1-(C5/C8))^C4*C8
92	Ячейка H13	=E13-B13	Ячейка H20	=E20-B20	Ячейка H36	=E36-B36
93	Ячейка I13	=F13-C13	Ячейка I20	=F20-B20	Ячейка I36	=C36-F36
94	Ячейка J13	=G13-D13	Ячейка J20	=G20-D20	Ячейка J36	=G36-D36
95	Ячейка K13	=SC3	Ячейка K20	=SC3	Ячейка K36	=SC3
96	Ячейка L13	=SK\$13*(1-EXP(-SC\$5/SC\$6*A13))	Ячейка L20	=SK\$13*(1-EXP(-SC\$5/SC\$7*A20))	Ячейка L36	=SK\$13*(1-EXP(-SC\$5/SC\$8*A36))
97	Ячейка M13	=SK\$13*EXP(-SC\$5/SC\$6*A13)	Ячейка M20	=SK\$13*EXP(-SC\$5/SC\$7*A20)	Ячейка M36	=SK\$13*EXP(-SC\$5/SC\$8*A36)
98	Ячейка K15	=M14	Ячейка K31	=M30	Ячейка K71	=M70
99	Ячейка L15	=SK\$13*(1-EXP(-SC\$5/SC\$6*A15))	Ячейка L31	=SK\$13*(1-EXP(-SC\$5/SC\$7*A31))	Ячейка L71	=SK\$13*(1-EXP(-SC\$5/SC\$8*A71))
100	Ячейка M15	=SK\$13*EXP(-SC\$5/SC\$6*A15)	Ячейка M31	=SK\$13*EXP(-SC\$5/SC\$7*A31)	Ячейка M71	=SK\$13*EXP(-SC\$5/SC\$8*A71)
101	Ячейка K16	=M16+L16	Ячейка K32	=M32+L32	Ячейка K72	=M72+L72
102	Ячейка L16	=C3*(1-EXP(-C5*C4/C6*C6))	Ячейка L32	=C3*(1-EXP(-C5*C4/C7*C7))	Ячейка L72	=C3*(1-EXP(-C5*C4/C8*C8))
103	Ячейка M16	=C3*EXP(-C5*C4/C6*C6)	Ячейка M32	=C3*EXP(-C5*C4/C7*C7)	Ячейка M72	=C3*EXP(-C5*C4/C8*C8)

Рис. 3.8. Применяемые для реализации расчетов формулы

## ТЕМА 4. РЕАЛИЗАЦИЯ ПОТОКОВ ПЛАТЕЖЕЙ

### Теоретический аспект

Потоком платежей или финансовым потоком называется числовая последовательность, которая показывает взаимосвязь между определенным количеством числовых значений моментов времени  $t_k$  и величин платежей  $C_k$  согласно следующему представлению:

$$CF = \{(t_0; C_0), (t_1; C_1), \dots, (t_n; C_n)\}.$$

Фиксируемые моменты времени  $t_k$  расположены в порядке возрастания, начиная с нулевого платежа  $t_0$  (осуществляется начальный взнос  $C_0$ ), тогда как значения остальных величин потоков платежей  $C_k$  представляют собой отличные от нуля положительные (доход) или отрицательные (расход) числа.

Пусть мы имеем ограниченное количество последовательно выполняемых платежей  $n$  — конечное значение.

При вычислении современной и конечной величины финансового потока в качестве параметра присутствует  $p$  — годовая процентная ставка.

При рассмотрении отдельно взятого инвестиционного проекта величина первого выполняемого платежа  $C_0$  имеет знак «-», поскольку рассматривается как начальное вложение капитала при реализации выбранного проекта (например, строительство жилого дома).

Важным в инвестиционных вложениях является ответ на вопрос: начиная с какой процентной ставки проект



начнет приносить прибыль. Такая процентная ставка называется внутренней нормой доходности финансового потока и вычисляется как решение уравнения, при котором чистая приведенная стоимость  $NPV$  (net present value) достигает нулевого значения, то есть точки безубыточного реализуемого проекта.

Рассмотрим формирование потоков платежей согласно реализации простой годовой процентной ставки (базируется на арифметической прогрессии).

Для финансового потока можно определить современную величину:

$$PV = C_0 + \frac{C_1}{1+p \cdot t_1} + \frac{C_2}{1+p \cdot t_2} + \dots + \frac{C_n}{1+p \cdot t_n} = C_0 + \sum_{m=1}^n \frac{C_m}{1+p \cdot t_m} = \sum_{m=0}^n \frac{C_m}{1+p \cdot t_m}.$$

Для финансового потока можно определить конечную величину:

$$FV = C_0 \cdot (1+p \cdot t_n) + C_1 \cdot (1+p \cdot t_{n-1}) + \dots + C_{n-1} \cdot (1+p \cdot t_1) + C_n = \sum_{m=0}^{n-1} C_m \cdot (1+p \cdot t_{n-m}) + C_n = \sum_{m=0}^n C_m \cdot (1+p \cdot t_{n-m}).$$

В случае использования простой годовой процентной ставки приведенную величину потока или чистую приведенную стоимость  $NPV$  рассчитывают по следующей формуле:

$$NPV = -C_0 + \frac{C_1}{1+p \cdot t_1} + \frac{C_2}{1+p \cdot t_2} + \dots + \frac{C_n}{1+p \cdot t_n} = -C_0 + \sum_{m=1}^n \frac{C_m}{1+p \cdot t_m}.$$

Если  $NPV = 0$ , то

$$-C_0 + \frac{C_1}{1+p \cdot t_1} + \frac{C_2}{1+p \cdot t_2} + \dots + \frac{C_n}{1+p \cdot t_n} = -C_0 + \sum_{m=1}^n \frac{C_m}{1+p \cdot t_m} = 0.$$

При выполнении расчетных алгоритмов согласно применению простой годовой процентной ставки для

каждой вычислительной итерации  $n$  с точки зрения определения параметров финансового потока необходимо применять следующие формулы:

- промежуточная современная (начальная) сумма в условных единицах:  $PV_n = -C_0 + \sum_{m=1}^n \frac{C_m}{1+p \cdot t_m}$ ;
- промежуточная величина учета величины платежа в условных единицах:  $RV_n = \frac{C_n}{1+p \cdot t_n}$ ;
- промежуточная конечная сумма в условных единицах:  $FV_n = PV_n + RV_n = C_n + \frac{C_n}{1+p \cdot t_n}$ .

Рассмотрим реализацию потоков платежей реализации сложной годовой процентной ставки (базируется на геометрической прогрессии).

Для финансового потока можно определить современную величину:

$$PV = C_0 + \frac{C_1}{(1+p)^{t_1}} + \frac{C_2}{(1+p)^{t_2}} + \dots + \frac{C_n}{(1+p)^{t_n}} = C_0 + \sum_{m=1}^n \frac{C_m}{(1+p)^{t_m}} = \sum_{m=0}^n \frac{C_m}{(1+p)^{t_m}}.$$

Для финансового потока можно определить конечную величину:

$$FV = C_0 \cdot (1+i)^{t_n} + C_1 \cdot (1+i)^{t_{n-1}} + \dots + C_{n-1} \cdot (1+i)^{t_1} + C_n = \sum_{m=0}^{n-1} C_m \cdot (1+p)^{t_{n-m}} + C_n = \sum_{m=0}^n C_m \cdot (1+p)^{t_{n-m}}.$$

В случае использования сложной годовой процентной ставки приведенную величину потока или чистую приведенную стоимость  $NPV$  рассчитывают по следующей формуле:

$$NPV = -C_0 + \frac{C_1}{(1+i)} + \frac{C_2}{(1+i)^2} + \dots + \frac{C_n}{(1+i)^n} = -C_0 + \sum_{m=1}^n \frac{C_m}{(1+i)^m}.$$

Если  $NPV = 0$ , то

$$-C_0 + \frac{C_1}{(1+i)} + \frac{C_2}{(1+i)^2} + \dots + \frac{C_n}{(1+i)^n} = -C_0 + \sum_{m=1}^n \frac{C_m}{(1+i)^m} = 0.$$

При выполнении расчетных алгоритмов согласно применению сложной годовой процентной ставки для каждой вычислительной итерации  $n$  с точки зрения определения параметров финансового потока необходимо применять следующие формулы:

- промежуточная современная (начальная) сумма

в условных единицах:  $PV_n = -C_0 + \sum_{m=1}^n \frac{C_m}{(1+i)^m}.$

- промежуточная величина учета величины платежа

в условных единицах:  $RV_n = \frac{C_n}{(1+i)^{tn}};$

- промежуточная конечная сумма в условных единицах:

$$FV_n = PV_n + RV_n = C_n + \frac{C_n}{(1+i)^{tn}}.$$

### Пример решения комплексной задачи с применением редактора Excel

*Условие задачи:* Необходимо для заданных значений параметров потока платежей в виде указания начального взноса  $C_0$ , а также определенного конечного множества пар значений моментов времени  $t_k$  и величин платежей  $C_k$  осуществить автоматизированные расчеты

параметров финансового потока в соответствии с реализацией внутренней нормы доходности с учетом применения различных схем формирования годовой процентной ставки согласно применяемым алгоритмам и наглядное представление всех промежуточных и итоговых результатов в редакторе электронных таблиц Excel.

Необходимо отметить, что для нахождения значения итогового результата расчетов, а, именно, такой нормы доходности в виде годовой процентной ставки по простой и сложной схемам реализации процентных ставок, при которой получаем наличие чистой приведенной стоимости рассматриваемого финансового потока, целесообразно применять инструмент «Подбор параметра», активация которого доступна на вкладке «Данные» в редакторе электронных таблиц Microsoft Excel.

На рисунках 4.1-4.4 ниже представлено решение описанной задачи в редакторе электронных таблиц Excel (рисунок 4.1 — параметры исходных данных, рисунок 4.2 — выполнение расчетов параметров финансового потока по схемам начисления простых и сложных процентов с применением описанных на рисунке 4.4 формул, рисунок 4.3 — использование инструмента «Подбор параметра»).

A		B	C	D	E	F	G	H	I	J
1		Исходные данные								
2	Наименование параметра	Обозначение	Значение							
3	Начальная сумма	C <sub>0</sub>	-450 000,00 Р							
4	Платеж для времени t <sub>1</sub>	C <sub>1</sub>	96 000,00 Р							
5	Платеж для времени t <sub>2</sub>	C <sub>2</sub>	145 000,00 Р							
6	Платеж для времени t <sub>3</sub>	C <sub>3</sub>	72 000,00 Р							
7	Платеж для времени t <sub>4</sub>	C <sub>4</sub>	232 000,00 Р							
8	Платеж для времени t <sub>5</sub>	C <sub>5</sub>	-45 800,00 Р							
9	Платеж для времени t <sub>6</sub>	C <sub>6</sub>	36 000,00 Р							
10	Платеж для времени t <sub>7</sub>	C <sub>7</sub>	-28 000,00 Р							

Рис. 4.1. Исходные данные для расчетов

A		B	C	D	E	F	G	H	I	J
11	Реализация расчетов параметров									
12	Простые проценты									
13	Номер позиции	Платеж для времени t <sub>n</sub>	Сумма процентов	Приведенная величина потока	Платеж для времени t <sub>n</sub>	Сумма процентов	Приведенная величина потока	Платеж для времени t <sub>n</sub>	Сумма процентов	Приведенная величина потока
14		1	96 000,00 Р	91 471,69 Р	-358 528,31 Р	96 000,00 Р	91 659,95 Р	-358 340,05 Р	0,00 Р	-188,26 Р
15		2	145 000,00 Р	131 936,92 Р	-226 591,39 Р	145 000,00 Р	132 185,80 Р	-226 54,251 Р	0,00 Р	-248,88 Р
16		3	72 000,00 Р	62 689,64 Р	-163 901,75 Р	72 000,00 Р	62 669,71 Р	-163 484,5415 Р	0,00 Р	19,93 Р
17		4	232 000,00 Р	193 652,83 Р	29 751,08 Р	232 000,00 Р	192 806,45 Р	29 321,91126 Р	0,00 Р	846,38 Р
18		5	-45 800,00 Р	-36 712,69 Р	-6 961,61 Р	-45 800,00 Р	-36 341,89 Р	-7019,973987 Р	0,00 Р	-370,80 Р
19		6	36 000,00 Р	27 755,71 Р	20 794,11 Р	36 000,00 Р	27 274,25 Р	20 254,27937 Р	0,00 Р	481,46 Р
20	7	-28 000,00 Р	-20 794,11 Р	0,00 Р	-28 000,00 Р	-20 254,28 Р	-1,47931E-07 Р	0,00 Р	-539,83 Р	
21	Общие показатели	0,00 Р	450 000,00 Р	0,00 Р	0,00 Р	450 000,00 Р	0,00 Р	0,00 Р	0,00 Р	
22	Наименование параметра	Обозначение	Значение	Обозначение	Значение	Обозначение	Значение	Обозначение	Значение	Значение
23	Простые проценты	P <sub>1</sub>	4,95%	Сложные проценты	P <sub>2</sub>	4,73%	Разность между схемами			-0,22%
24	Норма доходности									

Рис. 4.2. Детализация расчетов параметров финансового потока с применением различных схем начисления процентов

A		B	C	D	E	F	G	H	I	J
11	Реализация расчетов параметров									
12	Простые проценты									
13	Номер позиции	Платеж для времени t <sub>n</sub>	Сумма процентов	Приведенная величина потока	Платеж для времени t <sub>n</sub>	Сумма процентов	Приведенная величина потока	Платеж для времени t <sub>n</sub>	Сумма процентов	Приведенная величина потока
14		1	96 000,00 Р	86 486,49 Р	-363 513,51 Р	96 000,00 Р	86 486,49 Р	-363 513,51 Р	0,00 Р	0,00 Р
15		2	145 000,00 Р	118 852,46 Р	-244 661,05 Р	145 000,00 Р	118 852,46 Р	-244 661,05 Р	0,00 Р	1 167,21 Р
16		3	72 000,00 Р	54 135,34 Р	-190 525,72 Р	72 000,00 Р	54 135,34 Р	-190 525,72 Р	0,00 Р	1 489,56 Р
17		4	232 000,00 Р	161 111,11 Р	29 414,61 Р	232 000,00 Р	161 111,11 Р	29 414,61 Р	0,00 Р	8 285,53 Р
18		5	-45 800,00 Р	-29 548,39 Р	-58 962,99 Р	-45 800,00 Р	-29 548,39 Р	-58 962,99 Р	0,00 Р	-2 368,32 Р
19		6	36 000,00 Р	21 686,75 Р	-37 276,25 Р	36 000,00 Р	21 686,75 Р	-37 276,25 Р	0,00 Р	2 439,68 Р
20	7	-28 000,00 Р	-15 819,21 Р	-53 095,45 Р	-28 000,00 Р	-15 819,21 Р	-53 095,45 Р	0,00 Р	-2 332,77 Р	
21	Общие показатели	-53 095,45 Р	396 904,55 Р	-53 095,45 Р	-53 095,45 Р	388 223,67 Р	-61 776,33 Р	8 680,88 Р	8 680,88 Р	
22	Наименование параметра	Обозначение	Значение	Обозначение	Значение	Обозначение	Значение	Обозначение	Значение	Значение
23	Простые проценты	P <sub>1</sub>	11,00%	Сложные проценты	P <sub>2</sub>	11,00%	Разность между схемами			

Выбор параметра: ? X

Установить в ячейке: \$D\$20

Значение: 0

Изменить значение выделите: \$C\$24

OK Отмена

A		B	C	D	E	F	G	H	I	J
11	Реализация расчетов параметров									
12	Простые проценты									
13	Номер позиции	Платеж для времени t <sub>n</sub>	Сумма процентов	Приведенная величина потока	Платеж для времени t <sub>n</sub>	Сумма процентов	Приведенная величина потока	Платеж для времени t <sub>n</sub>	Сумма процентов	Приведенная величина потока
14		1	96 000,00 Р	91 471,69 Р	-358 528,31 Р	96 000,00 Р	91 659,95 Р	-358 340,05 Р	0,00 Р	-188,26 Р
15		2	145 000,00 Р	131 936,92 Р	-226 591,39 Р	145 000,00 Р	132 185,80 Р	-226 54,251 Р	0,00 Р	-248,88 Р
16		3	72 000,00 Р	62 689,64 Р	-163 901,75 Р	72 000,00 Р	62 669,71 Р	-163 484,5415 Р	0,00 Р	19,93 Р
17		4	232 000,00 Р	193 652,83 Р	29 751,08 Р	232 000,00 Р	192 806,45 Р	29 321,91126 Р	0,00 Р	846,38 Р
18		5	-45 800,00 Р	-36 712,69 Р	-6 961,61 Р	-45 800,00 Р	-36 341,89 Р	-7019,973987 Р	0,00 Р	-370,80 Р
19		6	36 000,00 Р	27 755,71 Р	20 794,11 Р	36 000,00 Р	27 274,25 Р	20 254,27937 Р	0,00 Р	481,46 Р
20	7	-28 000,00 Р	-20 794,11 Р	0,00 Р	-28 000,00 Р	-20 254,28 Р	-1,47931E-07 Р	0,00 Р	-539,83 Р	
21	Общие показатели	0,00 Р	450 000,00 Р	0,00 Р	0,00 Р	450 000,00 Р	0,00 Р	0,00 Р	0,00 Р	
22	Наименование параметра	Обозначение	Значение	Обозначение	Значение	Обозначение	Значение	Обозначение	Значение	Значение
23	Простые проценты	P <sub>1</sub>	4,95%	Сложные проценты	P <sub>2</sub>	4,73%	Разность между схемами			-0,22%

Выбор параметра: ? X

Установить в ячейке: \$D\$20

Значение: 0

Изменить значение выделите: \$C\$24

OK Отмена

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	
11	Реализация расчетов параметров										
12	Номер позиции	Подбор параметра	?	X	Сложные проценты	Приведенная величина потока	Разность между схемами	Платеж для времени t <sub>n</sub>	Сумма процентов	Приведенная величина потока	
13	1	Установить в ячейке: \$G\$20	0	↑	Сумма процентов	-363 513,51 Р	0,00 Р	0,00 Р	4 985,20 Р	4 985,20 Р	
14	2	Значение: 0			Приведенная величина потока	-24 5828,2607 Р	0,00 Р	0,00 Р	14 251,66 Р	19 236,87 Р	
15	3	Изменяя значение ячейки: \$E\$24		↑	Сумма процентов	-193 182,4812 Р	0,00 Р	0,00 Р	10 043,86 Р	29 280,73 Р	
16	4				Приведенная величина потока	-40356,89524 Р	0,00 Р	0,00 Р	40 827,25 Р	70 107,98 Р	
17	5			Отмена	Сумма процентов	-27 180,07 Р	0,00 Р	0,00 Р	-9 532,61 Р	60 575,36 Р	
18	6			Отмена	Приведенная величина потока	-48289,89596 Р	0,00 Р	0,00 Р	8 508,64 Р	69 084,00 Р	
19	7			Отмена	Сумма процентов	-13 486,44 Р	0,00 Р	0,00 Р	-7 307,67 Р	61 776,33 Р	
20	Общие показатели	-28 000,00 Р	-20 794,11 Р	0,00 Р	388 233,67 Р	-61 776,33 Р	61 776,33 Р	61 776,33 Р	61 776,33 Р	61 776,33 Р	
21	Наименование параметра	Область значений	4,95%	Р <sub>1</sub>	Область значений	Значение	Разность между схемами				
22	Простые проценты	Сложные проценты	11,00%	Р <sub>2</sub>	Простые проценты	Сложные проценты	Разность между схемами				
23	Норма доходности	Р <sub>1</sub>	4,95%		Р <sub>2</sub>		6,05%				
24											

  

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	
11	Реализация расчетов параметров										
12	Номер позиции	Подбор параметра	?	X	Сложные проценты	Приведенная величина потока	Разность между схемами	Платеж для времени t <sub>n</sub>	Сумма процентов	Приведенная величина потока	
13	1	Установить в ячейке: \$G\$20	0	↑	Сумма процентов	-358 340,05 Р	0,00 Р	0,00 Р	-188,26 Р	-188,26 Р	
14	2	Значение: 0			Приведенная величина потока	-226154,2509 Р	0,00 Р	0,00 Р	-248,88 Р	-437,14 Р	
15	3	Изменяя значение ячейки: 0			Сумма процентов	-163484,3414 Р	0,00 Р	0,00 Р	19,93 Р	-417,21 Р	
16	4				Приведенная величина потока	-29521,91152 Р	0,00 Р	0,00 Р	846,38 Р	429,17 Р	
17	5			Отмена	Сумма процентов	-20 254,28 Р	0,00 Р	0,00 Р	-370,80 Р	58,37 Р	
18	6			Отмена	Приведенная величина потока	20254,27963 Р	0,00 Р	0,00 Р	481,46 Р	539,83 Р	
19	7			Отмена	Сумма процентов	-20 254,28 Р	0,00 Р	0,00 Р	-539,83 Р	0,00 Р	
20	Общие показатели	-28 000,00 Р	-20 794,11 Р	0,00 Р	450 000,00 Р	0,00 Р	0,00 Р	0,00 Р	0,00 Р	0,00 Р	
21	Наименование параметра	Область значений	4,95%	Р <sub>1</sub>	Область значений	Значение	Разность между схемами				
22	Простые проценты	Сложные проценты	11,00%	Р <sub>2</sub>	Простые проценты	Сложные проценты	Разность между схемами				
23	Норма доходности	Р <sub>1</sub>	4,95%		Р <sub>2</sub>		-0,22%				
24											

Рис. 4.3. Применение инструмента «Подбор параметра» для нахождения величины нормы доходности

	A	B
25	Адрес ячейки формулы	Формула
26	Ячейка B14	=C4
27	Ячейка C14	=B14/(1+\$C\$24*\$A14)
28	Ячейка D14	=\$C\$3+B14/(1+\$C\$24*\$A14)
29	Ячейка B20	=C10
30	Ячейка C20	=B20/(1+\$C\$24*\$A20)
31	Ячейка D20	=D19+B20/(1+\$C\$24*\$A20)
32	Ячейка B21	=C3+C21
33	Ячейка C21	=СУММ(C14:C20)
34	Ячейка D21	=D20
35	Ячейка D14	=C4
36	Ячейка E14	=E14/(1+\$E\$24)^\$A14
37	Ячейка F14	=\$C\$3+E14/(1+\$E\$24)^\$A14
38	Ячейка D20	=C10
39	Ячейка E20	=E20/(1+\$E\$24)^\$A20
40	Ячейка F20	=G19+E20/(1+\$E\$24)^\$A20
41	Ячейка D21	=C3+F21
42	Ячейка E21	=E20/(1+\$E\$24)^\$A20
43	Ячейка F21	=G19+E20/(1+\$E\$24)^\$A20
44	Ячейка H10	=B14-E14
45	Ячейка I10	=C14-F14
46	Ячейка J10	=D14-G14

Рис. 4.4. Применяемые для реализации расчетов формулы

## ТЕМА 5. РЕНТЫ

### Теоретический аспект

Под рентной или регулярным потоком понимается такой финансовый поток, в рамках которого платежи  $C_k$  осуществляются через равные промежутки времени, называемые периодом ренты. Различают авансированные ренты (пренумерандо), в которых платеж осуществляется в начале периода и обыкновенные ренты (постнумерандо), в которых платеж осуществляется в конце периода.

В рамках нижеприведенных формул имеем следующие обозначения расчетных параметров:

$PV$  — приведенная (начальная) стоимость ренты в условных единицах,

$RV$  — положительная сумма процентов в условных единицах,

$FV$  — наращенная (конечная) стоимость ренты в условных единицах,

$R$  — годовой платеж,

$t$  — срок ренты в годах,

$p$  — годовая процентная ставка,

$k$  — кратность начисления процентов в течение одного года,

$m$  — кратность платежей в течение одного года.

Рассмотрение обыкновенных рент с точки зрения применения кратности начисления процентов и кратности выполнения платежей в течение одного года будет осуществляться согласно схеме начисления сложных

процентов, поскольку именно данная схема применяется в реальных финансовых расчетах, так как при реализации схемы начисления простых процентов вариативность значений указанных параметров не влияет на значения получаемой наращенной (конечной) суммы в целом, что было наглядно показано ранее на примере кратного начисления процентов в рамках исследования процессов наращивания и дисконтирования.

При реализации обыкновенной ренты с одинаковыми годовыми платежами  $R$  величина приведенная величина может быть найдена как сумма геометрической прогрессии:

$$S_n = \frac{b_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1} = b_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q},$$

где:  $b_1 = \frac{R}{1 + p}$  — величина первого члена прогрессии,

$q = \frac{1}{1 + p} = (1 + p)^{-1}$  — величина знаменателя прогрессии.

Рассмотрим возможные различные варианты реализации обыкновенных рент с точки зрения варьирования значений параметров  $k$  (кратность начисления процентов) и  $m$  (кратность платежей):

1. Однократное начисление процентов ( $k = 1$ ) и однократная реализация платежей ( $m = 1$ ) в течение одного года:

Приведенная (начальная) стоимость ренты:

$$PV = R \cdot \frac{1 - (1 + p)^{-t}}{p}.$$

Наращенная (конечная) стоимость ренты:

$$FV = R \cdot \frac{(1 + p)^t - 1}{p}.$$

Связь между приведенной и наращенной стоимостями ренты:  $FV = PV \cdot (1+p)^t$ .

$$\begin{aligned} \frac{FV}{PV} &= \frac{R \cdot \frac{(1+p)^t - 1}{p}}{R \cdot \frac{1 - (1+p)^{-t}}{p}} = \frac{(1+p)^t - 1}{1 - (1+p)^{-t}} = \\ &= \frac{(1+p)^t - 1}{1 - \frac{1}{(1+p)^t}} = \frac{(1+p)^t - 1}{\frac{(1+p)^t - 1}{(1+p)^t}} = (1+p)^t. \end{aligned}$$

2. Многократное начисление процентов ( $k > 1$ ) и однократная реализация платежей ( $m = 1$ ) в течение одного года:

Приведенная (начальная) стоимость ренты:

$$PV = R \cdot \frac{1 - \left(1 + \frac{p}{k}\right)^{-kt}}{p}.$$

Наращенная (конечная) стоимость ренты:

$$FV = R \cdot \frac{\left(1 + \frac{p}{k}\right)^{kt} - 1}{p}.$$

Связь между приведенной и наращенной стоимостями ренты:  $FV = PV \cdot \left(1 + \frac{p}{k}\right)^{kt}$ .

$$\frac{FV}{PV} = \frac{R \cdot \frac{\left(1 + \frac{p}{k}\right)^{kt} - 1}{p}}{R \cdot \frac{1 - \left(1 + \frac{p}{k}\right)^{-kt}}{p}} = \frac{\left(1 + \frac{p}{k}\right)^{kt} - 1}{1 - \left(1 + \frac{p}{k}\right)^{-kt}} = \frac{\left(1 + \frac{p}{k}\right)^{kt} - 1}{1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{p}{k}\right)^{kt}}} =$$

$$= \frac{\left(1 + \frac{p}{k}\right)^{kt} - 1}{\left(1 + \frac{p}{k}\right)^{kt} - 1} = \left(1 + \frac{p}{k}\right)^{kt}.$$

3. Однократное начисление процентов ( $k = 1$ ) и многократная реализация платежей ( $m > 1$ ) в течение одного года:

Приведенная (начальная) стоимость ренты:

$$PV = \frac{R}{m} \cdot \frac{1 - (1+p)^{-t}}{(1+p)^{\frac{1}{m}} - 1}.$$

Наращенная (конечная) стоимость ренты:

$$FV = \frac{R}{m} \cdot \frac{(1+p)^t - 1}{(1+p)^{\frac{1}{m}} - 1}.$$

Связь между приведенной и наращенной стоимостями ренты:  $FV = PV \cdot (1+p)^t$ .

$$\frac{FV}{PV} = \frac{\frac{R}{m} \cdot \frac{(1+p)^t - 1}{(1+p)^{\frac{1}{m}} - 1}}{\frac{R}{m} \cdot \frac{1 - (1+p)^{-t}}{(1+p)^{\frac{1}{m}} - 1}} = \frac{(1+p)^t - 1}{1 - (1+p)^{-t}} =$$

$$\frac{(1+p)^t - 1}{1 - \frac{1}{(1+p)^t}} = \frac{(1+p)^t - 1}{\frac{(1+p)^t - 1}{(1+p)^t}} = (1+p)^t.$$

4. Многократное начисление процентов ( $k > 1$ ) и многократная реализация платежей ( $m > 1$ ) в течение одного года:

Приведенная (начальная) стоимость ренты:

$$PV = \frac{R}{m} \cdot \frac{1 - \left(1 + \frac{p}{k}\right)^{-kt}}{\left(1 + \frac{p}{k}\right)^{\frac{k}{m}} - 1}.$$

Наращенная (конечная) стоимость ренты:

$$FV = \frac{R}{m} \cdot \frac{\left(1 + \frac{p}{k}\right)^{kt} - 1}{\left(1 + \frac{p}{k}\right)^{\frac{k}{m}} - 1}.$$

Связь между приведенной и наращенной стоимостями ренты:  $FV = PV \cdot \left(1 + \frac{p}{k}\right)^{kt}$ .

$$\begin{aligned} \frac{FV}{PV} &= \frac{\frac{R}{m} \cdot \frac{\left(1 + \frac{p}{k}\right)^{kt} - 1}{\left(1 + \frac{p}{k}\right)^{\frac{k}{m}} - 1}}{\frac{R}{m} \cdot \frac{1 - \left(1 + \frac{p}{k}\right)^{-kt}}{\left(1 + \frac{p}{k}\right)^{\frac{k}{m}} - 1}} = \frac{\left(1 + \frac{p}{k}\right)^{kt} - 1}{1 - \left(1 + \frac{p}{k}\right)^{-kt}} = \\ &= \frac{\left(1 + \frac{p}{k}\right)^{kt} - 1}{1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{p}{k}\right)^{kt}}} = \frac{\left(1 + \frac{p}{k}\right)^{kt} - 1}{\frac{\left(1 + \frac{p}{k}\right)^{kt} - 1}{\left(1 + \frac{p}{k}\right)^{kt}}} = \left(1 + \frac{p}{k}\right)^{kt}. \end{aligned}$$

Все параметры ренты с точки зрения реализации приведенной (начальной) и наращенной (конечной) сумм тесно связаны между собой в рамках обозначенных выше формул, поэтому нахождение любого из параметров ренты может быть осуществлено либо аналитическим путем, если это возможно в рамках формулы, либо с применением инструмента «Подбор параметра» в редакторе электронных таблиц Excel, если однозначное аналитическое выражение данного параметра невозможно отобразить в рамках используемой формулы.

### Пример решения комплексной задачи с применением редактора Excel

*Условие задачи:* Необходимо для заданных значений параметров реализации ренты в виде величин годового платежа, процентной ставки и срока ренты осуществить автоматизированные расчеты параметров ренты с учетом применения как однократных, так и многократных начислений процентов и реализация платежей в течение одного года согласно применяемым алгоритмам и наглядное представление всех промежуточных и итоговых результатов в редакторе электронных таблиц Excel.

На рисунках 5.1-5.5 ниже представлено решение описанной задачи в редакторе электронных таблиц Excel (рисунок 5.1 — параметры исходных данных, рисунки 5.2, 5.3 и 5.4 — выполнение расчетов параметров кредита для различной кратности начисления процентов по простой, сложной и непрерывной процентным схемам) с применением описанных на рисунке 5.5. формул.

A		B	C
Исходные данные			
1	Наименование параметра	Обозначение	Значение
2	Годовой платеж	R	450 000,00р.
3	Годовая процентная ставка	P	8,00%
4	Срок ренты, года	t	3
5	Кратность начисления процентов 1	k <sub>1</sub>	1
6	Кратность начисления процентов 2	k <sub>2</sub>	4
7	Кратность начисления процентов 3	k <sub>3</sub>	12
8	Кратность платежей 1	P <sub>1</sub>	1
9	Кратность платежей 2	P <sub>2</sub>	4
10	Кратность платежей 3	P <sub>3</sub>	12

Рис. 5.1. Исходные данные для расчетов

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Кратность платежей 1	P <sub>1</sub>	Кратность начисления процентов 1 (k <sub>1</sub> )	Приведенная стоимость	Кратность начисления процентов 2 (k <sub>2</sub> )	Приведенная стоимость	Кратность начисления процентов 3 (k <sub>3</sub> )	Приведенная стоимость	Кратность начисления процентов 3 (k <sub>3</sub> )	Приведенная стоимость
Номер позиции	PV <sub>11</sub>	Наращенная стоимость FV <sub>11</sub>	Наращенная стоимость FV <sub>12</sub>	Наращенная стоимость FV <sub>12</sub>	Наращенная стоимость FV <sub>12</sub>	Наращенная стоимость FV <sub>13</sub>	Наращенная стоимость FV <sub>13</sub>	Наращенная стоимость FV <sub>13</sub>	Наращенная стоимость FV <sub>13</sub>
13	1	416 666,67 P	450 000,00 P	415 730,44 P	450 000,00 P	415 512,65 P	450 000,00 P	415 512,65 P	450 000,00 P
14	2	802 469,14 P	936 000,00 P	799 801,11 P	937 094,47 P	799 181,02 P	937 349,78 P	799 181,02 P	937 349,78 P
15	3	1 159 693,64 P	1 460 880,00 P	1 154 623,04 P	1 464 341,19 P	1 153 445,61 P	1 465 149,35 P	1 153 445,61 P	1 465 149,35 P
16	Общие показатели	1 159 693,64 P	1 460 880,00 P	1 154 623,04 P	1 464 341,19 P	1 153 445,61 P	1 465 149,35 P	1 153 445,61 P	1 465 149,35 P

Рис. 5.2. Детализация расчетов параметров кредитов с величиной кратности платежей 1

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Кратность платежей 2	P <sub>2</sub>	Кратность начисления процентов 1 (k <sub>1</sub> )	Приведенная стоимость	Кратность начисления процентов 2 (k <sub>2</sub> )	Приведенная стоимость	Кратность начисления процентов 3 (k <sub>3</sub> )	Приведенная стоимость	Кратность начисления процентов 3 (k <sub>3</sub> )	Приведенная стоимость
Номер позиции	PV <sub>21</sub>	Наращенная стоимость FV <sub>21</sub>	Наращенная стоимость FV <sub>21</sub>	Наращенная стоимость FV <sub>22</sub>	Наращенная стоимость FV <sub>22</sub>	Наращенная стоимость FV <sub>23</sub>	Наращенная стоимость FV <sub>23</sub>	Наращенная стоимость FV <sub>23</sub>	Наращенная стоимость FV <sub>23</sub>
20	4	110 356,16 P	112 500,00 P	110 294,12 P	112 500,00 P	110 279,67 P	112 500,00 P	110 279,67 P	112 500,00 P
21	1	218 609,34 P	227 185,49 P	218 425,61 P	227 250,00 P	218 382,83 P	227 250,00 P	218 382,83 P	227 250,00 P
22	2	324 799,60 P	344 098,92 P	324 436,87 P	344 295,00 P	324 352,44 P	344 295,00 P	324 352,44 P	344 295,00 P
23	3	428 966,27 P	463 283,57 P	428 369,48 P	463 680,90 P	428 230,60 P	463 680,90 P	428 230,60 P	463 680,90 P
24	4	531 147,90 P	584 783,57 P	530 264,19 P	585 454,52 P	530 058,60 P	585 454,52 P	530 058,60 P	585 454,52 P
25	5	631 382,32 P	708 643,90 P	630 160,98 P	709 663,61 P	629 876,89 P	709 663,61 P	629 876,89 P	709 663,61 P
26	6	729 706,64 P	834 910,40 P	728 099,00 P	836 356,88 P	727 725,14 P	836 356,88 P	727 725,14 P	836 356,88 P
27	7	826 157,26 P	963 629,83 P	824 116,66 P	965 584,02 P	823 642,23 P	965 584,02 P	823 642,23 P	965 584,02 P
28	8	920 769,88 P	1 094 849,83 P	918 251,63 P	1 097 395,70 P	917 666,28 P	1 097 395,70 P	917 666,28 P	1 097 395,70 P
29	9	1 013 579,53 P	1 228 618,98 P	1 010 540,81 P	1 231 843,61 P	1 009 834,65 P	1 231 843,61 P	1 009 834,65 P	1 231 843,61 P
30	10	1 104 620,56 P	1 364 986,80 P	1 101 020,41 P	1 368 980,48 P	1 100 183,95 P	1 368 980,48 P	1 100 183,95 P	1 368 980,48 P
31	11	1 193 926,69 P	1 504 003,78 P	1 189 725,89 P	1 508 860,09 P	1 188 750,09 P	1 508 860,09 P	1 188 750,09 P	1 508 860,09 P
32	12	1 193 926,69 P	1 504 003,78 P	1 189 725,89 P	1 508 860,09 P	1 188 750,09 P	1 508 860,09 P	1 188 750,09 P	1 508 860,09 P
33	Общие показатели	1 193 926,69 P	1 504 003,78 P	1 189 725,89 P	1 508 860,09 P	1 188 750,09 P	1 508 860,09 P	1 188 750,09 P	1 508 860,09 P

Рис. 5.3. Детализация расчетов параметров кредита с величиной кратности платежей 4





## ТЕМА 6. ПОРТФЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

### Выборки и параметры выборок и вариационных рядов

Пусть для изучения количественного признака  $X$  из генеральной совокупности извлечена выборка с вариантами,  $x_2, \dots, x_n$  определенного объема  $n$ , при этом значения могут быть представлены как в виде одинаковых, так и в виде различных чисел.

В таблице 6.1 ниже представлена реализация одной выборки, в рамках которой для набора определенного количества пронумерованных объектов указываются значения одного исследуемого признака для данных объектов выборки.

Таблица 6.1

#### Задание отдельно взятой выборки объектов

Порядковый номер	Значение признака
1	$x_1$
2	$x_2$
...	...
$n$	$x_n$

В математической статистике под вариационным рядом понимается соответствие между двумя конечными последовательностями чисел, в рамках первой из которых

в порядке возрастания указываются различные варианты значений  $x_i$ , тогда как для второй последовательности указываются частоты или количества повторов данных значений  $f_i$ , что отражено в таблице 6.2 ниже.

Таблица 6.2

#### Задание вариационного ряда

$x_i$	$x_1$	$x_2$	...	$x_k$
$f_i$	$f_1$	$f_1$	...	$f_k$

Тогда под объемом выборки  $n$  понимается общее количество всех вариантов в выборке, то есть сумма частот для всех различных вариантов рассматриваемой выборки:

$$n = \sum_{i=1}^k f_i = f_1 + f_2 + \dots + f_k.$$

Поэтому целесообразно рассматривать вариационный ряд в представленном в рамках таблицы 6.3 виде.

Таблица 6.3

#### Дополненное представление вариационного ряда

$x_i$	$x_1$	$x_2$	...	$x_k$	$n$
$f_i$	$f_1$	$f_1$	...	$f_k$	$\sum_{i=1}^k f_i$

#### Числовые характеристики выборки (вариационного ряда)

**1. Выборочная средняя** выборки объемом  $n$  (соответствующего вариационного ряда) обозначается  $\bar{X}$

, значение параметра определяется как среднее арифметическое всех представленных в рамках выборки значений вариантов (равняется отношению суммы произведений значений вариантов  $x_i$  на их частоты  $f_i$  к объему выборки  $n$ ):

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

$$\left( \bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^k x_i \cdot f_i}{n} = \frac{x_1 \cdot f_1 + x_2 \cdot f_2 + \dots + x_k \cdot f_k}{n} \right).$$

**2. Выборочная исправленная дисперсия** выборки объемом  $n$  (соответствующего вариационного ряда) обозначается  $\overline{D}_x$ , значение параметра определяется как среднее арифметическое значений всех квадратов отклонений представленных в рамках выборки вариантов от выборочного среднего с поправкой на исправленный вариант реализации (равняется отношению суммы произведений квадратов разностей между значениями вариантов и средней выборочной величиной на их частоты к объему выборки):

$$\overline{D}_x = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2}{n-1} = \frac{(x_1 - \bar{X})^2 + (x_2 - \bar{X})^2 + \dots + (x_n - \bar{X})^2}{n-1}$$

$$\left( \overline{D}_x = \frac{\sum_{i=1}^k (x_i - \bar{X})^2 \cdot f_i}{n-1} = \frac{(x_1 - \bar{X})^2 \cdot f_1 + (x_2 - \bar{X})^2 \cdot f_2 + \dots + (x_k - \bar{X})^2 \cdot f_k}{n-1} \right).$$

**3. Выборочное исправленное среднее квадратичное отклонение** выборки объемом  $n$  (соответствующего

вариационного ряда) обозначается  $\overline{\sigma}_x$ , значение параметра определяется как квадратный корень из значения выборочной исправленной дисперсии вариационного ряда:

$$\overline{\sigma}_x = \sqrt{\overline{D}_x} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{X})^2 + (x_2 - \bar{X})^2 + \dots + (x_k - \bar{X})^2}{n-1}}$$

$$\left( \overline{\sigma}_x = \sqrt{\overline{D}_x} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^k (x_i - \bar{X})^2 \cdot f_i}{n-1}} = \right.$$

$$\left. = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{X})^2 \cdot f_1 + (x_2 - \bar{X})^2 \cdot f_2 + \dots + (x_k - \bar{X})^2 \cdot f_k}{n-1}} \right).$$

## Сравнительный анализ выборок

Одним из вариантов проведения сравнительного анализа двух выборок является применение коэффициента корреляции с точки зрения его непосредственного нахождения и интерпретации, при этом необходимо соблюдать условие рассмотрения одного и того же набора объектов в рамках рассматриваемых выборок, для которых представлены для сравнения значения различных признаков объектов.

В таблице 6.4 ниже представлена реализация двух выборок, в рамках которых для набора определенного количества пронумерованных объектов указываются значения исследуемых признаков для данных объектов выборки.

Таблица 6.4

**Задание двух признаков для одной выборки объектов**

Порядковый номер	Значение признака 1	Значение признака 2
1	$x_{11}$	$x_{21}$
2	$x_{12}$	$x_{22}$
...	...	...
$n$	$x_{1n}$	$x_{2n}$

В рамках математической статистики для сравнительного анализа двух вариационных рядов изначально необходимо на основе имеющейся информации о выборках построить отвечающие признакам исходные вариационные ряды (таблицы 6.5 и 6.6), в рамках которых в порядке возрастания указываются различные варианты значений  $x_{1i}(x_{2j})$  и частоты или количества повторов данных значений  $f_{1i}(f_{2j})$ , а только затем сформировать совокупность вариационных рядов (таблица 6.7), в рамках которого отражены одновременно различные варианты значений исходных вариационных рядов  $x_{1i}$  и  $x_{2j}$  с указанием частот или количества повторов совокупностей данных значений  $f_{1i}, f_{2j}$ .

Таблица 6.5

**Дополненное представление первого вариационного ряда**

$x_{1i}$	$x_{11}$	$x_{21}$	...	$x_{1k_1}$	$n_1$
$f_{1i}$	$f_{11}$	$f_{21}$	...	$f_{1k_1}$	$\sum_{i=1}^{k_1} f_{1i}$

Таблица 6.6

**Дополненное представление второго вариационного ряда**

$x_{2i}$	$x_{21}$	$x_{22}$	...	$x_{2k_2}$	$n_2$
$f_{2i}$	$f_{21}$	$f_{22}$	...	$f_{2k_2}$	$\sum_{j=1}^{k_2} f_{2j}$

Таблица 6.7

**Дополненное представление совокупности вариационных рядов**

$X_1$ $X_2$	$x_{21}$	$x_{22}$	...	$x_{2k_2}$	$f_{1i}$
$x_{11}$	$f_{11,21}$	$f_{11,22}$	...	$f_{11,2k_2}$	$f_{11}$
$x_{12}$	$f_{12,21}$	$f_{12,22}$	...	$f_{12,2k_2}$	$f_{12}$
...	...	...	...	...	...
$x_{1k_1}$	$f_{1k_1,21}$	$f_{1k_1,22}$	...	$f_{1k_1,2k_2}$	$f_{1k_1}$
$f_{2j}$	$f_{21}$	$f_{22}$	...	$f_{2k_2}$	$\sum_{i=1}^{k_1} f_{1i} = \sum_{j=1}^{k_2} f_{2j}$

**Числовые характеристики совокупности выборок (вариационных рядов)**

**1. Выборочная исправленная ковариация** совокупности выборок объемом  $n$  каждая (соответствующих вариационных рядов) обозначается  $\overline{\text{cov}}_{x_1, x_2}$ , значение параметра определяется как среднее арифметическое значений

всех произведений отклонений представленных в рамках совокупности выборок соответствующих вариантов от выборочных средних с поправкой на исправленный вариант реализации (равняется отношению суммы произведений для каждого из исходных вариационных рядов разностей между значениями вариантов и средних выборочных величин на частоты их одновременного появления к объему выборки):

$$\begin{aligned} \text{COV}_{x_1, x_2} &= \frac{\sum_{i=1}^n (x_{1i} - \bar{X}_1) \cdot (x_{2i} - \bar{X}_2)}{n-1} = \\ &= \frac{(x_{11} - \bar{X}_1) \cdot (x_{21} - \bar{X}_2) + \dots + (x_{1n} - \bar{X}_1) \cdot (x_{2n} - \bar{X}_2)}{n-1}. \\ \left( \text{COV}_{x_1, x_2} &= \frac{\sum_{i=1}^{h_1} \sum_{j=1}^{h_2} (x_{1i} - \bar{X}_1) \cdot (x_{2j} - \bar{X}_2) \cdot f_{x_{1i}, x_{2j}}}{n-1} = \right. \\ &= \left. \frac{(x_{11} - \bar{X}_1) \cdot (x_{21} - \bar{X}_2) \cdot f_{x_{11}, x_{21}} + \dots + (x_{1h_1} - \bar{X}_1) \cdot (x_{2h_2} - \bar{X}_2) \cdot f_{x_{1h_1}, x_{2h_2}}}{n-1} \right). \end{aligned}$$

Необходимо отметить, что для совокупности выборок объемом  $n$  каждая (соответствующих вариационных рядов) на основе расчетов можно создать ковариационную матрицу, отражающую распределения параметров отклонений рассматриваемых выборок (вариационных рядов) от выборочных средних значений как относительно самих себя, так и друг друга, которая представлена в виде таблицы 6.8.

**2. Выборочный исправленный коэффициент корреляции** совокупности выборок объемом  $n$  каждая (соответствующих вариационных рядов) обозначается  $r_{x_1, x_2}$ , значение параметра определяется через отношение значения выборочной исправленной ковариации к произведению

Таблица 6.8  
Распределение параметров отклонений выборок (вариационных рядов) относительно выборочных средних исследуемых выборок

$X_1$	$X_2$	$X_2$
$X_1$	$X_1$	$X_1, X_2$
$X_2$	$X_2$	$X_1, X_2$

значений выборочных исправленных среднеквадратических отклонений каждой из выборок (каждого из вариационных рядов):

$$\overline{r_{x_1, x_2}} = \frac{\overline{\text{COV}_{x_1, x_2}}}{\sigma_{x_1} \cdot \sigma_{x_2}}.$$

$$\left( \overline{r_{x_1, x_2}} = \frac{\overline{\text{COV}_{x_1, x_2}}}{\sigma_{x_1} \cdot \sigma_{x_2}} \right).$$

Интерпретация значения выборочного исправленного коэффициента корреляции, отражающего степень взаимосвязи между совокупностями выборок объемом  $n$  каждая (соответствующих вариационных рядов):

– Если значение коэффициента корреляции равно 0, то одномерные дискретные случайные величины  $X_1$  и  $X_2$  никак не связаны друг с другом с точки зрения значений, то есть являются некоррелированными.

– Если значение коэффициента корреляции равно 1, то между одномерными дискретными случайными величинами  $X_1$  и  $X_2$  существует строго прямая связь, тогда как при значении -1 наблюдается строго обратная связь.

– Если значение коэффициента корреляции отлично от 0 и является отрицательным числом ( $-1 < r(X_1, X_2) < 0$ ), то между одномерными дискретными случайными величинами  $X_1$  и  $X_2$  существует обратная по характеру связь, тогда как в обратном случае ( $0 < r(X_1, X_2) < 1$ ) связь является прямой по характеру.

– Сила связи выбирается согласно представленной ниже таблице 6.9.

### Оценка эффективности портфеля из одного вида ценных бумаг

В процессе реализации операций на фондовом рынке одной из основных задач является составление

Таблица 6.9

#### Интерпретация значения выборочного исправленного коэффициента корреляции

Сила связи	Характер связи	
	Прямая (+)	Обратная (-)
Связь отсутствует	$\overline{r_{x_1, x_2}} = 0$	$\overline{r_{x_1, x_2}} = 0$
Слабая связь	$0 < \overline{r_{x_1, x_2}} \leq 0,3$	$-0,3 \leq \overline{r_{x_1, x_2}} < 0$
Связь средней силы	$0,3 < \overline{r_{x_1, x_2}} < 0,7$	$-0,7 < \overline{r_{x_1, x_2}} < -0,3$
Сильная связь	$0,7 \leq \overline{r_{x_1, x_2}} < 1$	$-1 < \overline{r_{x_1, x_2}} \leq -0,7$
Строгая связь	$\overline{r_{x_1, x_2}} = 1$	$\overline{r_{x_1, x_2}} = -1$

адекватного портфеля из имеющихся ценных бумаг (например, акций), подразумевающего удачное сочетание значений максимальной доходности и минимума рисков.

При рассмотрении портфеля, состоящего из одного вида ценных бумаг, в качестве параметров исходных данных по аналогии с финансовым потоком выступает числовая последовательность, которая показывает взаимосвязь между определенным количеством числовых значений моментов времени  $t_k$  (как правило, выражаются в виде последовательности натуральных чисел) и выборочных величин доходности  $r_k$  согласно следующему представлению:

$$DF_R = \{(t_1; r_1), (t_2; r_2), \dots, (t_n; r_n)\} = \{(1; r_1), (2; r_2), \dots, (n; r_n)\}.$$

Также подобную последовательность можно выразить в виде аналога выборки с вариантами в виде значений доходностей исследуемого вида ценных бумаг  $r_1, r_2, \dots, r_n$  определенного объема  $n$ , при этом значения доходностей могут быть представлены как в виде одинаковых, так и в виде различных чисел, которые, как правило, выражаются в виде процентов, отражающих относительный рост или падение доходности отдельно рассматриваемого вида ценных бумаг, что отражено в таблице 6.10 ниже.

Таблица 6.10

**Задание выборочных доходностей  
портфеля для одного вида ценных бумаг**

Порядковый номер	Выборочные доходности для портфеля из одного вида ценных бумаг
1	$r_1$
2	$r_2$
...	...
$n$	$r_n$

Для портфеля, целиком состоящего из одного вида ценных бумаг, могут быть получены в процессе выполнения определенных расчетных алгоритмов значения следующих параметров:

**1. Доходность портфеля, состоящего из одного вида ценных бумаг**, являющаяся аналогом выборочного среднего, обозначается  $\mu_R$ , значение параметра определяется как среднее арифметическое зафиксированных в определенные моменты времени значений выборочных доходностей данного вида ценных бумаг за определенный рассматриваемый промежуток времени для выборки объемом  $n$ :

$$\mu_R = \frac{\sum_{i=1}^n r_i}{n} = \frac{r_1 + r_2 + \dots + r_n}{n}.$$

**2. Квадрат риска портфеля, состоящего из одного вида ценных бумаг**, являющийся аналогом выборочной исправленной дисперсии, обозначается  $\sigma_R^2$ , значение параметра получается как среднее арифметическое значений всех квадратов отклонений зафиксированных в определенные моменты времени значений выборочных доходностей данного вида ценных бумаг от доходности отдельного вида ценных бумаг для выборки объемом  $n$ :

$$\sigma_R^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (r_i - \mu_R)^2}{n-1} = \frac{(r_1 - \mu_R)^2 + (r_2 - \mu_R)^2 + \dots + (r_n - \mu_R)^2}{n-1}.$$

**3. Риск портфеля, состоящего из одного вида ценных бумаг**, являющийся аналогом выборочного исправленного среднего квадратического отклонения, обозначается  $\sigma_R$ , значение параметра получается как квадратный корень из значения квадрата риска одного вида ценных бумаг для выборки объемом  $n$ :

$$\sigma_R = \sqrt{\sigma_R^2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (r_i - \mu_R)^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{(r_1 - \mu_R)^2 + (r_2 - \mu_R)^2 + \dots + (r_n - \mu_R)^2}{n-1}}.$$

### Пример решения комплексной задачи с применением редактора Excel

*Условие задачи:* Необходимо для заданных значений параметров реализации портфеля, в рамках которого содержатся ценные бумаги только одного вида, в виде

указания последовательности значений величин выборочных доходностей (за каждый месяц в течение года) осуществить автоматизированные расчеты параметров исследуемого портфеля одного вида ценных бумаг с точки зрения рассматриваемого промежутка времени, согласно применяемым алгоритмам и наглядное представление всех промежуточных и итоговых результатов в редакторе электронных таблиц Excel.

На рисунках 6.1-6.5 ниже представлено решение описанной задачи в редакторе электронных таблиц Excel (рисунок 6.1 — параметры исходных данных, рисунки 6.2 и 6.3 — выполнение промежуточных расчетов доходности и квадрата риска портфеля соответственно, реализуемых с применением описанных на рисунке 6.5 формул, рисунок 6.4 — вывод итоговых результатов расчетов по портфелю и представление сравнительного анализа полученных результатов расчетов со значениями соответствующих расчетных функций, входящих в инструментарий редактора электронных таблиц Excel).

	A	B	C
1	Исходные данные		
2	Наименование параметра	Обозначение	Значение
3	Количество замеров для портфеля из одного вида ценных бумаг	$k_0$	12
4	Наименование параметра	Выборочные доходности для портфеля из одного вида ценных бумаг	
5	Номер позиции	Обозначение	Значение
6	1	$r_1$	-3,50%
7	2	$r_2$	8,00%
8	3	$r_3$	10,67%
9	4	$r_4$	-4,36%
10	5	$r_5$	5,67%
11	6	$r_6$	10,20%
12	7	$r_7$	-5,67%
13	8	$r_8$	4,35%
14	9	$r_9$	-13,57%
15	10	$r_{10}$	10,56%
16	11	$r_{11}$	5,68%
17	12	$r_{12}$	-3,46%
18	Количество замеров для портфеля из одного вида ценных бумаг	$k_0$	12

Рис. 6.1. Исходные данные для расчетов

	A	B	C
19	Реализация расчетов параметров портфеля из одного вида ценных бумаг		
20	Промежуточные расчеты по портфелю из одного вида ценных бумаг		
21	Наименование параметра	Наращивание доходности портфеля из одного вида ценных бумаг	
22	Номер позиции	Обозначение	Значение
23	1	$\mu_1$	-3,50%
24	2	$\mu_2$	4,50%
25	3	$\mu_3$	15,17%
26	4	$\mu_4$	10,81%
27	5	$\mu_5$	16,48%
28	6	$\mu_6$	26,68%
29	7	$\mu_7$	21,01%
30	8	$\mu_8$	25,36%
31	9	$\mu_9$	11,79%
32	10	$\mu_{10}$	22,35%
33	11	$\mu_{11}$	28,03%
34	12	$\mu_{12}$	24,57%
35	Доходность портфеля из одного вида ценных бумаг	$\mu$	2,05%

Рис. 6.2. Детализация расчетов доходности портфеля из одного вида ценных бумаг

	A	B	C
36	Наименование параметра	Наращивание квадрата риска портфеля из одного вида ценных бумаг	
37	Номер позиции	Обозначение	Значение
38	1	$\sigma_1^2$	0,31%
39	2	$\sigma_2^2$	0,66%
40	3	$\sigma_3^2$	1,41%
41	4	$\sigma_4^2$	1,82%
42	5	$\sigma_5^2$	1,95%
43	6	$\sigma_6^2$	2,61%
44	7	$\sigma_7^2$	3,21%
45	8	$\sigma_8^2$	3,26%
46	9	$\sigma_9^2$	5,70%
47	10	$\sigma_{10}^2$	6,42%
48	11	$\sigma_{11}^2$	6,56%
49	12	$\sigma_{12}^2$	6,86%
50	Квадрат риска портфеля из одного вида ценных бумаг	$\sigma_{10}^2$	0,62%

Рис. 6.3. Детализация расчетов квадрата риска портфеля из одного вида ценных бумаг



	А	В	С
51	Итоговые расчеты по портфелю из одного вида ценных бумаг		
52	Наименование параметра	Параметры портфеля из одного вида ценных бумаг	
53		Обозначение	Значение
54	Доходность портфеля из одного вида ценных бумаг	$\mu_0$	2,05%
55	Квадрат риска портфеля из одного вида ценных бумаг	$\sigma_0^2$	0,62%
56	Риск портфеля из одного вида ценных бумаг	$\sigma_0$	7,90%
57	Excel Доходность портфеля из одного вида ценных бумаг	$\mu_0$	2,05%
58	Excel Квадрат риска портфеля из одного вида ценных бумаг	$\sigma_0^2$	0,62%
59	Excel Риск портфеля из одного вида ценных бумаг	$\sigma_0$	7,90%

Рис. 6.4. Итоговые результаты расчетов портфеля из одного вида ценных бумаг

	А	В
61	Адрес ячейки формулы	Формула
62	Ячейка C18	=СЧЁТ(C6:C17)
63	Ячейка C23	=C6
64	Ячейка C24	=C23+C7
65	Ячейка C35	=C34/\$C\$3
66	Ячейка C38	=(C6-C\$35)^2
67	Ячейка C39	=C38+(C7-C\$35)^2
68	Ячейка C50	=C49/(\$C\$3-1)
69	Ячейка C54	=C35
70	Ячейка C55	=C50
71	Ячейка C56	=КОРЕНЬ(C55)
72	Ячейка C57	=СРЗНАЧ(C6:C17)
73	Ячейка C58	=ДИСП.В(C6:C17)
74	Ячейка C59	=СТАНДОТКЛОН.В(C6:C17)

Рис. 6.5. Применяемые для реализации расчетов формулы

### Оценка эффективности портфеля из двух видов ценных бумаг

При рассмотрении портфеля, состоящего из двух видов ценных бумаг, согласно их распределению в портфеле по долям  $x_{R1}$  и  $x_{R2}$ , в качестве параметров исходных данных по аналогии с портфелем из одного вида ценных бумаг выступают две числовые последовательности,

которые отражают взаимосвязь между определенным количеством числовых значений моментов времени  $t_k$ , идентичных для обеих выборок, и выборочных величин доходностей для каждого из двух видов ценных бумаг  $r_{1k}$  и  $r_{2k}$  согласно следующим представлениям:

$$DF_{R1} = \{(t_1; r_{11}), (t_2; r_{12}), \dots, (t_n; r_{1n})\} = \{(1; r_{11}), (2; r_{12}), \dots, (n; r_{1n})\}.$$

$$DF_{R2} = \{(t_1; r_{21}), (t_2; r_{22}), \dots, (t_n; r_{2n})\} = \{(1; r_{21}), (2; r_{22}), \dots, (n; r_{2n})\}.$$

Подобные последовательности можно выразить в виде аналогов выборок с вариантами в виде значений доходностей исследуемых двух видов ценных бумаг определенного объема  $n$ , при этом значения доходностей могут быть представлены как в виде одинаковых, так и в виде различных чисел, которые, как правило, выражаются в виде процентов, отражающих относительный рост или падение доходностей рассматриваемых видов ценных бумаг, что отражено в таблице 6.11 ниже.

Таблица 6.11

#### Задание выборочных доходностей портфеля для двух видов ценных бумаг

Порядковый номер	Выборочные доходности портфеля для первого вида ценных бумаг	Выборочные доходности портфеля для второго вида ценных бумаг
1	$r_{11}$	$r_{21}$
2	$r_{12}$	$r_{22}$
...	...	...
$n$	$r_{1n}$	$r_{2n}$

Для каждого вида ценных бумаг, имеющих в рамках портфеля, могут быть получены в процессе выполнения определенных расчетных алгоритмов значения следующих параметров:

**1. Доходности по каждому из двух видов ценных бумаг портфеля**, являющиеся аналогом выборочного среднего, обозначаются  $\mu_{R1}$  и  $\mu_{R2}$ , значения параметров определяются как средние арифметические зафиксированных в определенные моменты времени значений выборочных доходностей данных видов ценных бумаг за определенный рассматриваемый промежуток времени для выборки объемом  $n$ :

$$\mu_{R1} = \frac{\sum_{i=1}^n r_{1i}}{n} = \frac{r_{11} + r_{12} + \dots + r_{1n}}{n},$$

$$\mu_{R2} = \frac{\sum_{i=1}^n r_{2i}}{n} = \frac{r_{21} + r_{22} + \dots + r_{2n}}{n}.$$

**2. Квадраты рисков по каждому из двух видов ценных бумаг портфеля**, являющиеся аналогами выборочной исправленной дисперсии, обозначаются  $\sigma_{R1}^2$  и  $\sigma_{R2}^2$ , значения параметров получаются как средние арифметические значений всех квадратов отклонений зафиксированных в определенные моменты времени значений выборочных доходностей данных видов ценных бумаг от доходностей рассматриваемых видов ценных бумаг для выборки объемом  $n$ :

$$\sigma_{R1}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (r_{1i} - \mu_{R1})^2}{n-1} = \frac{(r_{11} - \mu_{R1})^2 + (r_{12} - \mu_{R1})^2 + \dots + (r_{1n} - \mu_{R1})^2}{n-1},$$

$$\sigma_{R2}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (r_{2i} - \mu_{R2})^2}{n-1} = \frac{(r_{21} - \mu_{R2})^2 + (r_{22} - \mu_{R2})^2 + \dots + (r_{2n} - \mu_{R2})^2}{n-1}.$$

**3. Риски по каждому из двух видов ценных бумаг портфеля**, являющиеся аналогами выборочного исправленного среднего квадратического отклонения, обозначаются  $\sigma_{R1}$  и  $\sigma_{R2}$ , значения параметров получаются как квадратные корни из значений квадратов рисков рассматриваемых видов ценных бумаг для выборки объемом  $n$ :

$$\sigma_{R1} = \sqrt{\sigma_{R1}^2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (r_{1i} - \mu_{R1})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{(r_{11} - \mu_{R1})^2 + (r_{12} - \mu_{R1})^2 + \dots + (r_{1n} - \mu_{R1})^2}{n-1}},$$

$$\sigma_{R2} = \sqrt{\sigma_{R2}^2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (r_{2i} - \mu_{R2})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{(r_{21} - \mu_{R2})^2 + (r_{22} - \mu_{R2})^2 + \dots + (r_{2n} - \mu_{R2})^2}{n-1}}.$$

После нахождения расчетных параметров для каждого вида ценных бумаг портфеля необходимо осуществить сравнительный анализ совокупности данных видов ценных бумаг с целью получения в процессе выполнения определенных расчетных алгоритмов значений следующих параметров:

**1. Выборочная исправленная ковариация совокупности двух видов ценных бумаг портфеля** выборками объемом  $n$  каждая, обозначается  $\text{cov}_{R1,R2}$ , значение параметра определяется как среднее арифметическое значений всех произведений отклонений представленных в рамках совокупности выборок соответствующих выборочных доходностей данных видов ценных бумаг от доходностей рассматриваемых видов ценных бумаг с поправкой на исправленный вариант реализации:

$$\begin{aligned} \text{COV}_{R1,R2} &= \frac{\sum_{i=1}^n (r_{1i} - \mu_{R1}) \cdot (r_{2i} - \mu_{R2})}{n-1} = \\ &= \frac{(r_{11} - \mu_{R1}) \cdot (r_{21} - \mu_{R2}) + \dots + (r_{1n} - \mu_{R1}) \cdot (r_{2n} - \mu_{R2})}{n-1}. \end{aligned}$$

**2. Выборочный исправленный коэффициент корреляции совокупности двух видов ценных бумаг портфеля** выборками объемом  $n$  каждая, обозначается  $\rho_{R1,R2}$ , значение параметра определяется через отношение значения выборочной исправленной ковариации совокупности двух видов ценных бумаг портфеля к произведению значений рисков по каждому из двух видов ценных бумаг портфеля:

$$\rho_{R1,R2} = \frac{\text{COV}_{R1,R2}}{\sigma_{R1} \cdot \sigma_{R2}}.$$

Интерпретация получаемого числового значения выборочного исправленного коэффициента корреляции для совокупности двух исследуемых видов ценных бумаг аналогична интерпретации значения описанного выше выборочного исправленного коэффициента корреляции.

После определения характера и силы взаимосвязи между представленными в рамках портфеля двух видов ценных бумаг реализуется определенный алгоритм нахождения непосредственно значений доходности и риска рассматриваемого портфеля ценных бумаг в целом, который основывается на составлении определенной конечной совокупности матриц, используемых при выполнении определенных расчетных операций.

Получаем следующие матрицы, являющиеся исходными для выполнения расчетов в отношении портфеля ценных бумаг в целом:

**1. Матрица-столбец доходностей имеющихся в портфеле двух видов ценных бумаг,** отражающая

полученные в результате расчетов доходности по каждому из видов ценных бумаг в портфеле:

$$M = \begin{pmatrix} \mu_{R1} \\ \mu_{R2} \end{pmatrix}.$$

Транспонированная матрица доходностей или вектор видов ценных бумаг портфеля:

$$M^T = (\mu_{R1} \quad \mu_{R2}).$$

**2. Квадратная ковариационная матрица имеющихся в портфеле двух видов ценных бумаг,** отражающая распределение параметров отклонений рассматриваемых видов ценных бумаг портфеля от их доходностей относительно как друг друга, так и непосредственно самих себя:

$$V = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{R1}^2 & \text{COV}_{R1,R2} \\ \text{COV}_{R1,R2} & \sigma_{R2}^2 \end{pmatrix}.$$

**3. Матрица-столбец долей активов имеющихся в портфеле двух видов ценных бумаг,** отражающая распределение объемов имеющихся изначально в портфеле видов ценных бумаг:

$$X = \begin{pmatrix} x_{R1} \\ x_{R2} \end{pmatrix}.$$

Транспонированная матрица или вектор долей активов двух видов ценных бумаг портфеля:

$$X^T = (x_{R1} \quad x_{R2}).$$

Для портфеля, целиком состоящего из двух видов ценных бумаг, имеющихся в рамках портфеля в строго определенных долях, могут быть получены в процессе выполнения определенных расчетных алгоритмов значения следующих параметров:

**1. Доходность портфеля, состоящего из двух видов ценных бумаг,** обозначается  $\mu_R$ , значение параметра определяется как результат умножения матрицы, являющейся транспонированной по отношению к матрице-столбцу доходностей имеющихся в портфеле видов ценных бумаг, на матрицу-столбец долей активов данных видов ценных бумаг:

$$\mu_R = M_{1 \times 2}^T \times X_{2 \times 1} = (\mu_{R1} \quad \mu_{R2}) \times \begin{pmatrix} x_{R1} \\ x_{R2} \end{pmatrix} = (\mu_{R1} \cdot x_{R1} + \mu_{R2} \cdot x_{R2}).$$

**2. Квадрат риска портфеля, состоящего из двух видов ценных бумаг,** обозначается  $\sigma_R^2$ , значение параметра получается как результат умножения матрицы, являющейся транспонированной по отношению к матрице-столбцу долей активов имеющихся в портфеле видов ценных бумаг, на квадратную ковариационную матрицу имеющихся в портфеле видов ценных бумаг и на матрицу-столбец долей активов данных видов ценных бумаг:

$$\begin{aligned} \sigma_R^2 &= X_{1 \times 2}^T \times V_{2 \times 2} \times X_{2 \times 1} = (x_{R1} \quad x_{R2}) \times \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_{R1} \\ x_{R2} \end{pmatrix} = \\ &= (x_{R1} \cdot v_{11} + x_{R2} \cdot v_{21} \quad x_{R1} \cdot v_{12} + x_{R2} \cdot v_{22}) \times \begin{pmatrix} x_{R1} \\ x_{R2} \end{pmatrix} = \\ &= ((x_{R1} \cdot v_{11} + x_{R2} \cdot v_{21}) \cdot x_{R1} + (x_{R1} \cdot v_{12} + x_{R2} \cdot v_{22}) \cdot x_{R2}) = \\ &= x_{R1}^2 \cdot v_{11} + x_{R1} \cdot x_{R2} \cdot v_{21} + x_{R1} \cdot x_{R2} \cdot v_{12} + x_{R2}^2 \cdot v_{22} = \\ &= x_{R1}^2 \cdot v_{11} + x_{R1} \cdot x_{R2} \cdot (v_{12} + v_{21}) + x_{R2}^2 \cdot v_{22}. \end{aligned}$$

**3. Риск портфеля, состоящего из двух видов ценных бумаг,** обозначается  $\sigma_R$ , значение параметра определяется как квадратный корень из значения квадрата риска двух видов ценных бумаг для выборки объемом  $n$ :

$$\sigma_R = \sqrt{\sigma_R^2} = \sqrt{x_{R1}^2 \cdot v_{11} + x_{R1} \cdot x_{R2} \cdot (v_{12} + v_{21}) + x_{R2}^2 \cdot v_{22}}.$$

## Пример решения комплексной задачи с применением редактора Excel

*Условие задачи:* Необходимо для заданных значений параметров реализации портфеля, в рамках которого содержатся ценные бумаги трех видов, в виде указания последовательности значений величин выборочных доходностей (за каждый месяц в течение года) осуществить автоматизированные расчеты параметров исследуемого портфеля двух видов ценных бумаг с точки зрения рассматриваемого промежутка времени, согласно применяемым алгоритмам и наглядное представление всех промежуточных и итоговых результатов в редакторе электронных таблиц Excel.

На рисунках 6.6-6.14 ниже представлено решение описанной задачи в редакторе электронных таблиц Excel (рисунок 6.6 — параметры исходных данных, рисунки 6.7 и 6.8 — выполнение промежуточных расчетов доходностей и квадратов рисков по двум видам ценных бумаг портфеля, рисунок 6.9 — вывод итоговых результатов расчетов по двум видам ценных бумаг и представление сравнительного анализа полученных результатов расчетов со значениями соответствующих расчетных функций, входящих в инструментарий редактора электронных таблиц Excel; рисунок 6.10 — выполнение промежуточных расчетов по анализу взаимосвязей между двумя видами ценных бумаг в портфеле с точки зрения нахождения ковариации, рисунок 6.11 — вывод итоговых результатов расчетов и интерпретация параметров сравнения двух видов ценных бумаг и представление сравнительного анализа полученных результатов расчетов со значениями соответствующих расчетных функций, входящих в инструментарий редактора электронных таблиц Excel; рисунок 6.12 — выполнение расчетных алгоритмов

нахождения доходности и риска исследуемого портфеля из двух видов ценных бумаг), при этом все необходимые расчеты реализуются с применением описанных на рисунке 6.13 и 6.14 формул.

	A	B	C	D	E	
1	Исходные данные					
2	Наименование параметра		Обозначение	Значение		
3	Количество замеров для портфеля из двух видов ценных бумаг		$k_0$	12		
4	Матрица долей по видам акций в портфеле					
5	Доля акций первого вида ценных бумаг в портфеле		$x_{R1}$	37,00%		
6	Доля акций второго вида ценных бумаг в портфеле		$x_{R2}$	63,00%		
7	Сумма долей по двум видам ценных бумаг в портфеле		$\text{sum}(x_{R1}, x_{R2})$	100,00%		
8	Наименование параметра		Выборочные доходности для первого вида ценных бумаг в портфеле	Выборочные доходности для второго вида ценных бумаг в портфеле		
9	Номер позиции	Обозначение	Значение	Обозначение	Значение	
10	1	$r_{11}$	12,78%	$r_{21}$	-4,56%	
11	2	$r_{12}$	2,56%	$r_{22}$	2,45%	
12	3	$r_{13}$	10,80%	$r_{23}$	-2,56%	
13	4	$r_{14}$	-9,25%	$r_{24}$	3,60%	
14	5	$r_{15}$	10,00%	$r_{25}$	12,56%	
15	6	$r_{16}$	5,78%	$r_{26}$	-3,45%	
16	7	$r_{17}$	-3,56%	$r_{27}$	12,67%	
17	8	$r_{18}$	12,67%	$r_{28}$	13,56%	
18	9	$r_{19}$	-3,25%	$r_{29}$	-4,34%	
19	10	$r_{110}$	5,45%	$r_{210}$	5,45%	
20	11	$r_{111}$	-6,23%	$r_{211}$	3,24%	
21	12	$r_{112}$	13,45%	$r_{212}$	-4,46%	
22	Количество замеров по видам ценных бумаг в портфеле		$k_1$	12	$k_2$	12

Рис. 6.6. Исходные данные для расчетов

	A	B	C	D	E	
23	Реализация расчетов параметров портфеля из двух видов ценных бумаг					
24	Промежуточные расчеты по видам ценных бумаг портфеля					
25	Наименование параметра		Наращивание доходности первого вида ценных бумаг портфеля	Наращивание доходности второго вида ценных бумаг портфеля		
26	Номер позиции	Обозначение	Значение	Обозначение	Значение	
27	1	$mu_{11}$	12,78%	$mu_{21}$	-4,56%	
28	2	$mu_{12}$	15,34%	$mu_{22}$	-2,11%	
29	3	$mu_{13}$	26,14%	$mu_{23}$	-4,67%	
30	4	$mu_{14}$	16,89%	$mu_{24}$	-1,07%	
31	5	$mu_{15}$	26,89%	$mu_{25}$	11,49%	
32	6	$mu_{16}$	32,67%	$mu_{26}$	8,04%	
33	7	$mu_{17}$	29,11%	$mu_{27}$	20,71%	
34	8	$mu_{18}$	41,78%	$mu_{28}$	34,27%	
35	9	$mu_{19}$	38,53%	$mu_{29}$	29,93%	
36	10	$mu_{110}$	43,98%	$mu_{210}$	35,38%	
37	11	$mu_{111}$	37,75%	$mu_{211}$	38,62%	
38	12	$mu_{112}$	51,20%	$mu_{212}$	34,16%	
39	Доходности по видам ценных бумаг портфеля		$mu_{R1}$	4,27%	$mu_{R2}$	2,85%

Рис. 6.7. Детализация расчетов доходностей по двум видам ценных бумаг портфеля

	A	B	C	D	E	
40	Наименование параметра		Наращивание квадрата риска первого вида ценных бумаг портфеля	Наращивание квадрата риска второго вида ценных бумаг портфеля		
41	Номер позиции	Обозначение	Значение	Обозначение	Значение	
42	1	$sigma^2_{11}$	0,12%	$sigma^2_{21}$	0,55%	
43	2	$sigma^2_{12}$	0,75%	$sigma^2_{22}$	0,53%	
44	3	$sigma^2_{13}$	1,18%	$sigma^2_{23}$	0,84%	
45	4	$sigma^2_{14}$	3,01%	$sigma^2_{24}$	0,83%	
46	5	$sigma^2_{15}$	3,34%	$sigma^2_{25}$	1,79%	
47	6	$sigma^2_{16}$	3,56%	$sigma^2_{26}$	2,19%	
48	7	$sigma^2_{17}$	3,97%	$sigma^2_{27}$	3,15%	
49	8	$sigma^2_{18}$	4,68%	$sigma^2_{28}$	4,30%	
50	9	$sigma^2_{19}$	5,24%	$sigma^2_{29}$	4,82%	
51	10	$sigma^2_{110}$	5,26%	$sigma^2_{210}$	4,89%	
52	11	$sigma^2_{111}$	6,56%	$sigma^2_{211}$	4,89%	
53	12	$sigma^2_{112}$	7,20%	$sigma^2_{212}$	5,42%	
54	Квадраты рисков портфеля по видам ценных бумаг портфеля		$sigma^2_{R1}$	0,65%	$sigma^2_{R2}$	0,49%

Рис. 6.8. Детализация расчетов квадратов рисков по двум видам ценных бумаг портфеля

	A	B	C	D	E	
55	Итоговые расчеты по видам ценных бумаг портфеля					
56	Наименование параметра		Параметры первого вида ценных бумаг портфеля	Параметры второго вида ценных бумаг портфеля		
57		Обозначение	Значение	Обозначение	Значение	
58	Доходности по видам ценных бумаг портфеля		$mu_{R1}$	4,27%	$mu_{R2}$	2,85%
59	Квадраты рисков по видам ценных бумаг портфеля		$sigma^2_{R1}$	0,65%	$sigma^2_{R2}$	0,49%
60	Риски по видам ценных бумаг портфеля		$sigma_{R1}$	8,09%	$sigma_{R2}$	7,02%
61	Excel Доходности по видам ценных бумаг портфеля		$mu_{R1}$	4,27%	$mu_{R2}$	2,85%
62	Excel Квадраты рисков по видам ценных бумаг портфеля		$sigma^2_{R1}$	0,65%	$sigma^2_{R2}$	0,49%
63	Excel Риски по видам ценных бумаг портфеля		$sigma_{R1}$	8,09%	$sigma_{R2}$	7,02%

Рис. 6.9. Итоговые результаты расчетов по двум видам ценных бумаг портфеля

	A	B	C
64	<b>Промежуточные расчеты по сравнению двух видов ценных бумаг портфеля</b>		
65	<b>Наименование параметра</b>	<b>Наращивание ковариации для двух видов ценных бумаг портфеля</b>	
66	<b>Номер позиции</b>	<b>Обозначение</b>	<b>Значение</b>
67	1	$cov_{r11,r21}$	-0,63%
68	2	$cov_{r12,r22}$	-0,62%
69	3	$cov_{r13,r23}$	-0,98%
70	4	$cov_{r14,r24}$	-1,08%
71	5	$cov_{r15,r25}$	-0,52%
72	6	$cov_{r16,r26}$	-0,62%
73	7	$cov_{r17,r27}$	-1,39%
74	8	$cov_{r18,r28}$	-0,49%
75	9	$cov_{r19,r29}$	0,05%
76	10	$cov_{r110,r210}$	0,09%
77	11	$cov_{r111,r211}$	0,04%
78	12	$cov_{r112,r212}$	-0,63%
79	<b>Ковариация между двумя видами ценных бумаг портфеля</b>		$cov_{R1,R2}$
			<b>-0,06%</b>

Рис. 6.10. Детализация расчетов по сравнению двух видов ценных бумаг портфеля

	A	B	C
80	<b>Итоговые расчеты по сравнению двух видов ценных бумаг портфеля</b>		
81	<b>Наименование параметра</b>	<b>Обозначение</b>	<b>Значение</b>
82	Расчет Ковариация между двумя видами ценных бумаг портфеля	$cov_{R1,R2}$	<b>-0,06%</b>
83	Расчет Коэффициент корреляции между двумя видами ценных бумаг портфеля	$r_{R1,R2}$	<b>-10,04%</b>
84	Excel Ковариация между двумя видами ценных бумаг портфеля	$cov_{R1,R2}$	<b>-0,06%</b>
85	Excel Коэффициент корреляции между двумя видами ценных бумаг портфеля	$r_{R1,R2}$	<b>-10,04%</b>
86	Характер связи между двумя видами ценных бумаг портфеля	$h_{R1,R2}$	<b>Обратная</b>
87	Сила связи между двумя видами ценных бумаг портфеля	$s_{R1,R2}$	<b>Слабая</b>

Рис. 6.11. Итоговые результаты расчетов по сравнению двух видов ценных бумаг портфеля

	A	B	C	D	E	F	G
88	<b>Итоговые расчеты по портфелю из двух видов ценных бумаг</b>						
89	<b>Наименование параметра</b>	<b>Обозначение</b>	<b>Значение</b>				
90	Матрица доходностей по видам ценных бумаг портфеля	$\mu_{R1}$ $\mu_{R2}$	4,27% 2,85%				
91	Доходность первого вида ценных бумаг портфеля						
92	Доходность второго вида ценных бумаг портфеля						
93	<b>Наименование параметра</b>	<b>Обозначение</b>	<b>Значения</b>				
94	Ковариационная матрица для двух видов ценных бумаг портфеля	<b>Ковариация</b>	$V_1$ $V_2$	$V_2$ $cov_{R1,R2}$ $sigma_{R2}$	$V_1$ $V_2$	$V_1$ $V_2$	$V_2$ -0,06% 0,49%
95							
96							
97	<b>Результаты расчетов по портфелю из двух видов ценных бумаг</b>	<b>Обозначение</b>	<b>Значение</b>				
98	<b>Наименование параметра</b>	<b>Обозначение</b>	<b>Значение</b>				
99	Доходность портфеля из двух видов ценных бумаг портфеля	Мю	3,37%				
100	Квадрат риска портфеля из двух видов ценных бумаг портфеля	$Sigma_{R1}^2$	0,26%				
101	Риск портфеля из двух видов ценных бумаг портфеля	$Sigma_{R2}$	5,09%				

Рис. 6.12. Итоговые расчеты параметров портфеля из двух видов ценных бумаг

	A	B	C	D
102	Адрес ячейки формулы	Формула	Адрес ячейки формулы	Формула
103	Ячейка C22	=СЧЕТ(С10;С21)	Ячейка E22	=СЧЕТ(Е10;Е21)
104	Ячейка C27	=С10	Ячейка E27	=E10
105	Ячейка C38	=С37+С21	Ячейка E38	=E37+E21
106	Ячейка C39	=С38/СC33	Ячейка E39	=E38/СC33
107	Ячейка C42	=С10-СC39/2	Ячейка E42	=E10-ЕC39/2
108	Ячейка C53	=С52+(С21-СC39)/2	Ячейка E53	=E52+(E21-ЕC39)/2
109	Ячейка C54	=С53/СC33+1	Ячейка E54	=E53/СC33+1
110	Ячейка C58	=С39	Ячейка E58	=E39
111	Ячейка C59	=С54	Ячейка E59	=E54
112	Ячейка C60	=КОРЕНЬ(С59)	Ячейка E60	=КОРЕНЬ(Е59)
113	Ячейка C61	=СРЗНАЧ(С10;С21)	Ячейка E61	=СРЗНАЧ(Е10;Е21)
114	Ячейка C62	=ДИСП(С10;С21)	Ячейка E62	=ДИСП(Е10;Е21)
115	Ячейка C63	=СТАНДОТКЛОН(С10;С21)	Ячейка E63	=СТАНДОТКЛОН(Е10;Е21)

Рис. 6.13. Применяемые для реализации расчетов параметров двух видов ценных бумаг в портфеле формулы

A		B	
Адрес ячейки формулы	Формула		
116 Ячейка C7	=СУММ(C5;C6)		
118 Ячейка C67	=C10-C\$39*(E10-E\$39)		
119 Ячейка C68	=C67+(C11-C\$39)*(E11-E\$39)		
120 Ячейка C79	=C78/(C3-1)		
121 Ячейка C82	=C79		
122 Ячейка C83	=C82/(C60*E60)		
123 Ячейка C84	=КОВАРИАНЦИЯ(B(C10;C21;E10;E21)		
124 Ячейка C85	=КОРРЕЛ(C10;C21;E10;E21)		
Ячейка C86	=ЕСЛИ(И(C83>=1;C83<0);"Обратная";ЕСЛИ(C83=0;"Отсутствует"; ЕСЛИ(И(C83>0;C83<=1);"Прямая";0)))		
Ячейка C87	=ЕСЛИ(ABS(C83)=0;"Отсутствует"; ЕСЛИ(И(ABS(C83)>0;ABS(C83)<=0,3);"Слабая"; ЕСЛИ(И(ABS(C83)>0,3;ABS(C83)<0,7);"Средняя";ЕСЛИ(И(ABS(C83)>=0,7;ABS(C83)<1); "Сильная";ЕСЛИ(ABS(C83)=1;"Строгая";0))))))		
126	=C58		
127 Ячейка C90	=E58		
128 Ячейка C91	=C59		
129 Ячейка F94	=C82		
130 Ячейка G94	=C82		
131 Ячейка F95	=C82		
132 Ячейка G95	=E59		
133 Ячейка C98	=МУМНОЖ(ТРАНСП(C91;C92);C5;C6)		
134 Ячейка C99	=МУМНОЖ(ТРАНСП(C5;C6);МУМНОЖ(F95;G96;C5;C6))		
135 Ячейка C100	=КОРЕНЬ(C100)		

Рис. 6.14. Применяемые для реализации расчетов параметров портфеля из двух видов ценных бумаг формулы

## Оценка эффективности портфеля из трех видов ценных бумаг

При рассмотрении портфеля, состоящего из трех видов ценных бумаг согласно их распределению в портфеле по долям  $x_{R1}$ ,  $x_{R2}$  и  $x_{R3}$ , в качестве параметров исходных данных по аналогии с портфелем из двух видов ценных бумаг выступают уже три числовые последовательности, которые отражают взаимосвязь между определенным количеством числовых значений моментов времени  $t_k$ , идентичных для трех выборок и выборочных величин доходностей для каждого вида ценных бумаг  $r_{1k}$ ,  $r_{2k}$  и  $r_{3k}$ , согласно следующим представлениям:

$$DF_{R1} = \{(t_1; r_{11}), (t_2; r_{12}), \dots, (t_n; r_{1n})\} = \{(1; r_{11}), (2; r_{12}), \dots, (n; r_{1n})\}$$

$$DF_{R2} = \{(t_1; r_{21}), (t_2; r_{22}), \dots, (t_n; r_{2n})\} = \{(1; r_{21}), (2; r_{22}), \dots, (n; r_{2n})\}$$

$$DF_{R3} = \{(t_1; r_{31}), (t_2; r_{32}), \dots, (t_n; r_{3n})\} = \{(1; r_{31}), (2; r_{32}), \dots, (n; r_{3n})\}$$

Подобные последовательности можно выразить в виде аналогов выборок с вариантами в виде значений доходностей исследуемых видов ценных бумаг определенного объема  $n$ , при этом значения доходностей могут быть представлены как в виде одинаковых, так и в виде различных чисел, которые, как правило, выражаются в виде процентов, отражающих относительный рост или падение доходностей рассматриваемых видов ценных бумаг, что отражено в таблице 6.12 ниже.

Для каждого вида ценных бумаг, имеющих в рамках портфеля, могут быть получены в процессе выполнения определенных расчетных алгоритмов значения следующих параметров:

**1. Доходности по каждому из трех видов ценных бумаг портфеля, являющиеся аналогом выборочного среднего, обозначаются  $\mu_{R1}$ ,  $\mu_{R2}$  и  $\mu_{R3}$ , значения параметров**

Таблица 6.12

Задание выборочных доходностей портфеля для трех видов ценных бумаг

Порядковый номер	Выборочные доходности портфеля для первого вида ценных бумаг	Выборочные доходности портфеля для второго вида ценных бумаг	Выборочные доходности портфеля для третьего вида ценных бумаг
1	$r_{11}$	$r_{21}$	$r_{31}$
2	$r_{12}$	$r_{22}$	$r_{32}$
...	...	...	...
$n$	$r_{1n}$	$r_{2n}$	$r_{3n}$

определяются как средние арифметические зафиксированных в определенные моменты времени значений выборочных доходностей данных видов ценных бумаг за определенный рассматриваемый промежуток времени для выборки объемом  $n$ :

$$\mu_{R1} = \frac{\sum_{i=1}^n r_{1i}}{n} = \frac{r_{11} + r_{12} + \dots + r_{1n}}{n}.$$

$$\mu_{R2} = \frac{\sum_{i=1}^n r_{2i}}{n} = \frac{r_{21} + r_{22} + \dots + r_{2n}}{n}.$$

$$\mu_{R3} = \frac{\sum_{i=1}^n r_{3i}}{n} = \frac{r_{31} + r_{32} + \dots + r_{3n}}{n}.$$

**2. Квадраты рисков по каждому из трех видов ценных бумаг портфеля**, являющиеся аналогами выборочной исправленной дисперсии, обозначаются  $\sigma_{R1}^2$ ,  $\sigma_{R2}^2$  и  $\sigma_{R3}^2$ , значения параметров получаются как средние арифметические значений всех квадратов отклонений зафиксированных в определенные моменты времени значений выборочных доходностей данных видов ценных бумаг от доходностей рассматриваемых видов ценных бумаг для выборки объемом  $n$ :

$$\sigma_{R1}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (r_{1i} - \mu_{R1})^2}{n-1} = \frac{(r_{11} - \mu_{R1})^2 + (r_{12} - \mu_{R1})^2 + \dots + (r_{1n} - \mu_{R1})^2}{n-1}.$$

$$\sigma_{R2}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (r_{2i} - \mu_{R2})^2}{n-1} = \frac{(r_{21} - \mu_{R2})^2 + (r_{22} - \mu_{R2})^2 + \dots + (r_{2n} - \mu_{R2})^2}{n-1}.$$

$$\sigma_{R3}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (r_{3i} - \mu_{R3})^2}{n-1} = \frac{(r_{31} - \mu_{R3})^2 + (r_{32} - \mu_{R3})^2 + \dots + (r_{3n} - \mu_{R3})^2}{n-1}.$$



**3. Риски по каждому из трех видов ценных бумаг портфеля, являющиеся аналогами выборочного исправленного среднего квадратического отклонения, обозначаются  $\sigma_{R1}$ ,  $\sigma_{R2}$  и  $\sigma_{R3}$ , значения параметров получаются как квадратные корни из значений квадратов рисков рассматриваемых видов ценных бумаг для выборки объемом  $n$ :**

$$\begin{aligned}\sigma_{R1} &= \sqrt{\sigma_{R1}^2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (r_{1i} - \mu_{R1})^2}{n-1}} = \\ &= \sqrt{\frac{(r_{11} - \mu_{R1})^2 + (r_{12} - \mu_{R1})^2 + \dots + (r_{1n} - \mu_{R1})^2}{n-1}}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{R2} &= \sqrt{\sigma_{R2}^2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (r_{2i} - \mu_{R2})^2}{n-1}} = \\ &= \sqrt{\frac{(r_{21} - \mu_{R2})^2 + (r_{22} - \mu_{R2})^2 + \dots + (r_{2n} - \mu_{R2})^2}{n-1}}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{R3} &= \sqrt{\sigma_{R3}^2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (r_{3i} - \mu_{R3})^2}{n-1}} = \\ &= \sqrt{\frac{(r_{31} - \mu_{R3})^2 + (r_{32} - \mu_{R3})^2 + \dots + (r_{3n} - \mu_{R3})^2}{n-1}}.\end{aligned}$$

После нахождения расчетных параметров для каждого вида ценных бумаг портфеля необходимо осуществить сравнительный анализ совокупности данных видов ценных бумаг с целью получения в процессе выполнения определенных расчетных алгоритмов значений следующих параметров:

**1. Выборочные исправленные ковариации совокупности попарно для трех видов ценных бумаг портфеля**

выборками объемом  $n$  каждая, обозначаются  $\text{cov}_{R1,R2}$ ,  $\text{cov}_{R1,R3}$  и  $\text{cov}_{R2,R3}$ , значения параметров определяется как средние арифметические значения всех произведений отклонений представленных в рамках совокупности выборок соответствующих выборочных доходностей данных видов ценных бумаг от доходностей рассматриваемых видов ценных бумаг с поправкой на исправленный вариант реализации:

$$\begin{aligned}\text{cov}_{R1,R2} &= \frac{\sum_{i=1}^n (r_{1i} - \mu_{R1}) \cdot (r_{2i} - \mu_{R2})}{n-1} = \\ &= \frac{(r_{11} - \mu_{R1}) \cdot (r_{21} - \mu_{R2}) + \dots + (r_{1n} - \mu_{R1}) \cdot (r_{2n} - \mu_{R2})}{n-1}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{cov}_{R1,R3} &= \frac{\sum_{i=1}^n (r_{1i} - \mu_{R1}) \cdot (r_{3i} - \mu_{R3})}{n-1} = \\ &= \frac{(r_{11} - \mu_{R1}) \cdot (r_{31} - \mu_{R3}) + \dots + (r_{1n} - \mu_{R1}) \cdot (r_{3n} - \mu_{R3})}{n-1}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{cov}_{R2,R3} &= \frac{\sum_{i=1}^n (r_{2i} - \mu_{R2}) \cdot (r_{3i} - \mu_{R3})}{n-1} = \\ &= \frac{(r_{21} - \mu_{R2}) \cdot (r_{31} - \mu_{R3}) + \dots + (r_{2n} - \mu_{R2}) \cdot (r_{3n} - \mu_{R3})}{n-1}.\end{aligned}$$

**2. Выборочные исправленные коэффициенты корреляции попарно для трех видов ценных бумаг портфеля** выборками объемом  $n$  каждая, обозначаются  $\rho_{R1,R2}$ ,  $\rho_{R1,R3}$  и  $\rho_{R2,R3}$ , значения параметров определяются через отношения значений выборочных исправленных ковариаций для рассматриваемых вариантов совокупностей двух из трех видов ценных бумаг портфеля к произведению значений рисков обозначенных двух видов ценных бумаг:

$$\rho_{R1,R2} = \frac{\text{COV}_{R1,R2}}{\sigma_{R1} \cdot \sigma_{R2}}.$$

$$\rho_{R1,R3} = \frac{\text{COV}_{R1,R3}}{\sigma_{R1} \cdot \sigma_{R3}}.$$

$$\rho_{R2,R3} = \frac{\text{COV}_{R2,R3}}{\sigma_{R2} \cdot \sigma_{R3}}.$$

Интерпретации получаемых числовых значений выборочных исправленных коэффициентов корреляции попарно по совокупностям двум их трех видов ценных бумаг рассматриваемого портфеля аналогична интерпретации значения описанного выше выборочного исправленного коэффициента корреляции.

После определения характера и силы попарных взаимосвязей между представленными в рамках портфеля трех видов ценных бумаг реализуется определенный алгоритм нахождения непосредственно значений доходности и риска рассматриваемого портфеля из исследуемых трех видов ценных бумаг в целом, который основывается на составлении определенной конечной совокупности матриц, над которыми выполняются определенные расчетные операции.

Получаем следующие исходные для выполнения расчетов для портфеля ценных бумаг в целом матрицы:

**1. Матрица-столбец доходностей имеющихся в портфеле трех видов ценных бумаг**, отражающей полученные в результате расчетов доходности по каждому из видов ценных бумаг в портфеле:

$$M = \begin{pmatrix} \mu_{R1} \\ \mu_{R2} \\ \mu_{R3} \end{pmatrix}.$$

Транспонированная матрица доходностей или вектор видов ценных бумаг портфеля:

$$M^T = (\mu_{R1} \quad \mu_{R2} \quad \mu_{R3}).$$

**2. Квадратная ковариационная матрица имеющихся в портфеле трех видов ценных бумаг**, отражающая распределение параметров отклонений рассматриваемых видов ценных бумаг портфеля от их доходностей относительно как друг друга, так и непосредственно самих себя:

$$V = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{R1}^2 & \text{COV}_{R1,R2} \\ \text{COV}_{R1,R2} & \sigma_{R2}^2 \end{pmatrix}.$$

$$V = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{R1}^2 & \text{COV}_{R1,R2} & \text{COV}_{R1,R3} \\ \text{COV}_{R2,R1} & \sigma_{R2}^2 & \text{COV}_{R2,R3} \\ \text{COV}_{R3,R1} & \text{COV}_{R3,R2} & \sigma_{R3}^2 \end{pmatrix}.$$

**3. Матрица-столбец долей активов имеющихся в портфеле трех видов ценных бумаг**, отражающая распределение объемов имеющихся изначально в портфеле видов ценных бумаг:

$$X = \begin{pmatrix} x_{R1} \\ x_{R2} \\ x_{R3} \end{pmatrix}.$$

Транспонированная матрица или вектор долей активов трех видов ценных бумаг портфеля:

$$X^T = (x_{R1} \quad x_{R2} \quad x_{R3}).$$

Для портфеля, целиком состоящего из трех видов ценных бумаг, имеющихся в рамках портфеля в строго определенных долях, могут быть получены в процессе выполнения определенных расчетных алгоритмов значения следующих параметров:

**1. Доходность портфеля, состоящего из трех видов ценных бумаг,** обозначается  $\mu_R$ , значение параметра определяется как результат умножения матрицы, являющейся транспонированной по отношению к матрице-столбцу доходностей имеющихся в портфеле видов ценных бумаг, на матрицу-столбец долей активов видов ценных бумаг:

$$\mu_R = M_{1 \times 3}^T \times X_{3 \times 1} = \begin{pmatrix} \mu_{R1} & \mu_{R2} & \mu_{R3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_{R1} \\ x_{R2} \\ x_{R3} \end{pmatrix} = (\mu_{R1} \cdot x_{R1} + \mu_{R2} \cdot x_{R2} + \mu_{R3} \cdot x_{R3}).$$

**2. Квадрат риска портфеля, состоящего из трех видов ценных бумаг,** обозначается  $\sigma_R^2$ , значение параметра получается как результат умножения матрицы, являющейся транспонированной по отношению к матрице-столбцу долей активов имеющихся в портфеле видов ценных бумаг, на квадратную ковариационную матрицу имеющихся в портфеле видов ценных бумаг и на матрицу-столбец долей активов данных видов ценных бумаг:

$$\sigma_R^2 = X_{1 \times 3}^T \times V_{3 \times 3} \times X_{3 \times 1} = \begin{pmatrix} x_{R1} & x_{R2} & x_{R3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_{R1} \\ x_{R2} \\ x_{R3} \end{pmatrix} =$$

$$= x_{R1}^2 \cdot v_{11} + x_{R1} \cdot x_{R2} \cdot v_{21} + x_{R1} \cdot x_{R3} \cdot v_{31} + x_{R1} \cdot x_{R2} \cdot v_{12} +$$

$$+ x_{R2}^2 \cdot v_{22} + x_{R2} \cdot x_{R3} \cdot v_{32} + x_{R1} \cdot x_{R3} \cdot v_{13} + x_{R2} \cdot x_{R3} \cdot v_{23} +$$

$$+ x_{R3}^2 \cdot v_{33} = x_{R1}^2 \cdot v_{11} + x_{R1} \cdot x_{R2} \cdot (v_{12} + v_{21}) + x_{R1} \cdot x_{R3} \cdot (v_{13} + v_{31}) +$$

$$+ x_{R2}^2 \cdot v_{22} + x_{R2} \cdot x_{R3} \cdot (v_{23} + v_{32}) + x_{R3}^2 \cdot v_{33}.$$

**3. Риск портфеля, состоящего из трех видов ценных бумаг,** обозначается  $\sigma_R$ , значение параметра определяется

как квадратный корень из значения квадрата риска двух видов ценных бумаг для выборки объемом  $n$ :

$$\sigma_R = \sqrt{\sigma_R^2}$$

## Пример решения комплексной задачи с применением редактора Excel

*Условие задачи:* Необходимо для заданных значений параметров реализации портфеля, в рамках которого содержатся ценные бумаги трех видов, в виде указания последовательности значений величин выборочных доходностей (за каждый месяц в течение года) осуществить автоматизированные расчеты параметров исследуемого портфеля трех видов ценных бумаг с точки зрения рассматриваемого промежутка времени, согласно применяемым алгоритмам и наглядное представление всех промежуточных и итоговых результатов в редакторе электронных таблиц Excel.

На рисунках 6.15-6.23 ниже представлено решение описанной задачи в редакторе электронных таблиц Excel (рисунок 6.15 — параметры исходных данных, рисунки 6.16 и 6.17 — выполнение промежуточных расчетов доходностей и квадратов рисков по трем видам ценных бумаг портфеля, рисунок 6.18 — вывод итоговых результатов расчетов по трем видам ценных бумаг и представление сравнительного анализа полученных результатов расчетов со значениями соответствующих расчетных функций, входящих в инструментарий редактора электронных таблиц Excel; рисунок 6.19 — выполнение промежуточных расчетов по анализу взаимосвязей между двумя видами ценных бумаг в портфеле с точки зрения нахождения ковариации, рисунок 6.20 — вывод итоговых результатов расчетов и интерпретация параметров сравнения двух

видов ценных бумаг и представление сравнительного анализа полученных результатов расчетов со значениями соответствующих расчетных функций, входящих в инструментарий редактора электронных таблиц Excel; рисунок 6.21 — выполнение расчетных алгоритмов нахождения доходности и риска исследуемого портфеля из трех видов ценных бумаг), при этом все необходимые расчеты реализуются с применением описанных на рисунках 6.22 и 6.23 формул.

	A	B	C	D	E	F	G
1		<b>Исходные данные</b>					
2		<b>Наименование параметра</b>	<b>Обозначение</b>	<b>Значение</b>			
3		Количество замеров для портфеля из двух видов ценных бумаг	$K_0$	12			
4		<b>Матрица долей видов акций в пакете</b>					
5		Доля акций первого вида ценных бумаг в портфеле	$X_{k1}$	24,00%			
6		Доля акций второго вида ценных бумаг в портфеле	$X_{k2}$	36,00%			
7		Доля акций третьего вида ценных бумаг в портфеле	$X_{k3}$	40,00%			
8		Сумма долей по трем видам ценных бумаг в портфеле	$\text{sum}(X_{k1}, X_{k2}, X_{k3})$	100,00%			
9		<b>Наименование параметра</b>	<b>Выборочные доходности для первого вида ценных бумаг в портфеле</b>	<b>Выборочные доходности для второго вида ценных бумаг в портфеле</b>	<b>Выборочные доходности для третьего вида ценных бумаг в портфеле</b>		
10		<b>Номер позиции</b>	<b>Обозначение</b>	<b>Значение</b>	<b>Обозначение</b>	<b>Значение</b>	
11		1	$r_{11}$	8,45%	$r_{21}$	5,89%	$r_{31}$
12		2	$r_{12}$	7,68%	$r_{22}$	9,78%	$r_{32}$
13		3	$r_{13}$	3,23%	$r_{23}$	10,45%	$r_{33}$
14		4	$r_{14}$	5,57%	$r_{24}$	1,56%	$r_{34}$
15		5	$r_{15}$	-9,45%	$r_{25}$	-9,86%	$r_{35}$
16		6	$r_{16}$	4,67%	$r_{26}$	5,87%	$r_{36}$
17		7	$r_{17}$	12,45%	$r_{27}$	13,87%	$r_{37}$
18		8	$r_{18}$	-9,67%	$r_{28}$	9,65%	$r_{38}$
19		9	$r_{19}$	8,56%	$r_{29}$	7,89%	$r_{39}$
20		10	$r_{110}$	4,23%	$r_{210}$	8,23%	$r_{310}$
21		11	$r_{111}$	5,67%	$r_{211}$	4,67%	$r_{311}$
22		12	$r_{112}$	-4,55%	$r_{212}$	-4,67%	$r_{312}$
23		Количество замеров по видам ценных бумаг в портфеле	$k_i$	12	$k_2$	12	$k_3$

Рис. 6.15. Исходные данные для расчетов

A		B	C	D	E	F	G
24	Реализация расчетов параметров портфеля из трех видов ценных бумаг						
25	Промежуточные расчеты по видам ценных бумаг портфеля						
Наименование параметра		Нарастание доходности первого вида ценных бумаг портфеля		Нарастание доходности второго вида ценных бумаг портфеля		Нарастание доходности третьего вида ценных бумаг портфеля	
26	Номер позиции	Обозначение	Значение	Обозначение	Значение	Обозначение	Значение
27	1	mu11	8,45%	mu21	5,89%	mu31	9,48%
28	2	mu12	16,13%	mu22	15,67%	mu32	7,14%
29	3	mu13	19,36%	mu23	26,12%	mu33	2,58%
30	4	mu14	24,93%	mu24	27,68%	mu34	-1,09%
31	5	mu15	15,48%	mu25	17,82%	mu35	1,69%
32	6	mu16	20,15%	mu26	23,69%	mu36	-5,99%
33	7	mu17	32,60%	mu27	37,56%	mu37	-10,34%
34	8	mu18	22,93%	mu28	47,21%	mu38	5,30%
35	9	mu19	31,49%	mu29	55,10%	mu39	-8,57%
36	10	mu110	35,72%	mu210	63,33%	mu310	-12,93%
37	11	mu111	41,39%	mu211	68,00%	mu311	-21,87%
38	12	mu112	37,04%	mu212	63,33%	mu312	-31,43%
39		muR1	3,09%	muR2	5,28%	muR3	-2,62%
40	Доходности по видам ценных бумаг портфеля						

Рис. 6.16. Детализация расчетов доходностей по трем видам ценных бумаг портфеля

A		B	C	D	E	F	G
41	Наименование параметра						
42	Номер позиции	Обозначение	Значение	Обозначение	Значение	Обозначение	Значение
43	1	sigma <sup>2</sup> <sub>11</sub>	0,29%	sigma <sup>2</sup> <sub>21</sub>	0,00%	sigma <sup>2</sup> <sub>31</sub>	1,46%
44	2	sigma <sup>2</sup> <sub>12</sub>	0,50%	sigma <sup>2</sup> <sub>22</sub>	0,21%	sigma <sup>2</sup> <sub>32</sub>	1,46%
45	3	sigma <sup>2</sup> <sub>13</sub>	0,50%	sigma <sup>2</sup> <sub>23</sub>	0,47%	sigma <sup>2</sup> <sub>33</sub>	1,50%
46	4	sigma <sup>2</sup> <sub>14</sub>	0,56%	sigma <sup>2</sup> <sub>24</sub>	0,61%	sigma <sup>2</sup> <sub>34</sub>	1,51%
47	5	sigma <sup>2</sup> <sub>15</sub>	2,13%	sigma <sup>2</sup> <sub>25</sub>	2,90%	sigma <sup>2</sup> <sub>35</sub>	1,80%
48	6	sigma <sup>2</sup> <sub>16</sub>	2,16%	sigma <sup>2</sup> <sub>26</sub>	2,91%	sigma <sup>2</sup> <sub>36</sub>	2,06%
49	7	sigma <sup>2</sup> <sub>17</sub>	3,03%	sigma <sup>2</sup> <sub>27</sub>	3,65%	sigma <sup>2</sup> <sub>37</sub>	2,09%
50	8	sigma <sup>2</sup> <sub>18</sub>	4,66%	sigma <sup>2</sup> <sub>28</sub>	3,84%	sigma <sup>2</sup> <sub>38</sub>	5,42%
51	9	sigma <sup>2</sup> <sub>19</sub>	4,96%	sigma <sup>2</sup> <sub>29</sub>	3,90%	sigma <sup>2</sup> <sub>39</sub>	6,69%
52	10	sigma <sup>2</sup> <sub>10</sub>	4,97%	sigma <sup>2</sup> <sub>10</sub>	3,99%	sigma <sup>2</sup> <sub>10</sub>	6,72%
53	11	sigma <sup>2</sup> <sub>11</sub>	5,04%	sigma <sup>2</sup> <sub>11</sub>	4,00%	sigma <sup>2</sup> <sub>11</sub>	7,12%
54	12	sigma <sup>2</sup> <sub>12</sub>	5,59%	sigma <sup>2</sup> <sub>12</sub>	4,99%	sigma <sup>2</sup> <sub>12</sub>	7,60%
55	Квадраты рисков портфеля по видам ценных бумаг						
		sigma <sup>2</sup> <sub>R1</sub>	0,51%	sigma <sup>2</sup> <sub>R2</sub>	0,45%	sigma <sup>2</sup> <sub>R3</sub>	0,69%

Рис. 6.17. Детализация расчетов квадратов рисков по трем видам ценных бумаг портфеля

A		B	C	D	E	F	G
56	Итоговые расчеты по видам ценных бумаг портфеля						
Наименование параметра		Параметры первого вида ценных бумаг портфеля		Параметры второго вида ценных бумаг портфеля		Параметры третьего вида ценных бумаг портфеля	
57		Обозначение	Значение	Обозначение	Значение	Обозначение	Значение
58	Доходности по видам ценных бумаг портфеля	muR1	3,09%	muR2	5,28%	muR3	-2,62%
59	Квадраты рисков по видам ценных бумаг портфеля	sigma <sup>2</sup> <sub>R1</sub>	0,51%	sigma <sup>2</sup> <sub>R2</sub>	0,45%	sigma <sup>2</sup> <sub>R3</sub>	0,69%
60	Риски по видам ценных бумаг портфеля	sigma <sub>R1</sub>	7,13%	sigma <sub>R2</sub>	6,73%	sigma <sub>R3</sub>	8,31%
61	Excel Доходности по видам ценных бумаг портфеля	muR1	3,09%	muR2	5,28%	muR3	-2,62%
62	Excel Квадраты рисков по видам ценных бумаг портфеля	sigma <sup>2</sup> <sub>R1</sub>	0,51%	sigma <sup>2</sup> <sub>R2</sub>	0,45%	sigma <sup>2</sup> <sub>R3</sub>	0,69%
63	Excel Риски по видам ценных бумаг портфеля	sigma <sub>R1</sub>	7,13%	sigma <sub>R2</sub>	6,73%	sigma <sub>R3</sub>	8,31%
64							

Рис. 6.18. Итоговые результаты расчетов по трем видам ценных бумаг портфеля

A	B	C	D	E	F	G	
65	Промежуточные расчеты по сравнению трех видов ценных бумаг портфеля						
	Наименование параметра	Наравнение ковариации для первого и второго видов ценных бумаг портфеля	Наравнение ковариации для первого и третьего видов ценных бумаг портфеля	Наравнение ковариации для второго и третьего видов ценных бумаг портфеля	Обозначение	Значение	
66	Номер позиции	Обозначение	Значение	Обозначение	Значение		
67	1	$cov(r_{11},r_{12})$	0,03%	$cov(r_{11},r_{13})$	0,65%	$cov(r_{21},r_{23})$	0,077%
68	2	$cov(r_{12},r_{13})$	0,24%	$cov(r_{12},r_{13})$	0,66%	$cov(r_{22},r_{23})$	0,099%
69	3	$cov(r_{13},r_{23})$	0,25%	$cov(r_{13},r_{23})$	0,66%	$cov(r_{23},r_{33})$	-0,011%
70	4	$cov(r_{11},r_{21})$	0,15%	$cov(r_{11},r_{21})$	0,63%	$cov(r_{21},r_{31})$	0,039%
71	5	$cov(r_{11},r_{31})$	2,05%	$cov(r_{15},r_{15})$	-0,04%	$cov(r_{21},r_{31})$	-0,79%
72	6	$cov(r_{16},r_{26})$	2,06%	$cov(r_{16},r_{26})$	-0,12%	$cov(r_{26},r_{36})$	-0,82%
73	7	$cov(r_{17},r_{17})$	2,87%	$cov(r_{17},r_{17})$	-0,29%	$cov(r_{27},r_{17})$	-0,97%
74	8	$cov(r_{18},r_{28})$	2,31%	$cov(r_{18},r_{28})$	-2,62%	$cov(r_{28},r_{38})$	-0,17%
75	9	$cov(r_{19},r_{19})$	2,45%	$cov(r_{19},r_{19})$	-3,23%	$cov(r_{29},r_{19})$	-0,47%
76	10	$cov(r_{110},r_{110})$	2,49%	$cov(r_{110},r_{110})$	-3,25%	$cov(r_{210},r_{110})$	-0,52%
77	11	$cov(r_{111},r_{111})$	2,47%	$cov(r_{111},r_{111})$	-3,41%	$cov(r_{211},r_{111})$	-0,48%
78	12	$cov(r_{112},r_{112})$	3,21%	$cov(r_{112},r_{112})$	-2,90%	$cov(r_{212},r_{112})$	0,21%
79	Ковариация между двумя видами ценных бумаг портфеля						
80		$cov_{r1,r2}$	0,29%	$cov_{r1,r3}$	-0,26%	$cov_{r2,r3}$	0,02%

Рис. 6.19. Детализация расчетов по сравнению трех видов ценных бумаг портфеля

A	B	C	D	E	F	G	
81	Итоговые расчеты по сравнению трех видов ценных бумаг портфеля						
82	Наименование параметра	Обозначение	Значение	Обозначение	Значение	Значение	
83	Расчет Ковариация между двумя видами ценных бумаг	$cov_{r1,r2}$	0,29%	$cov_{r1,r3}$	-0,26%	$cov_{r2,r3}$	0,02%
84	Расчет Коэффициент корреляции между двумя видами ценных бумаг портфеля	$\rho_{r1,r2}$	60,78%	$\rho_{r1,r3}$	-44,44%	$\rho_{r2,r3}$	3,43%
85	Excel Ковариация между двумя видами ценных бумаг портфеля	$cov_{r1,r2}$	0,29%	$cov_{r1,r3}$	-0,26%	$cov_{r2,r3}$	0,02%
86	Excel Коэффициент корреляции между двумя видами ценных бумаг портфеля	$\rho_{r1,r2}$	60,78%	$\rho_{r1,r3}$	-44,44%	$\rho_{r2,r3}$	3,43%
87	Характер связи между двумя видами ценных бумаг портфеля	Прямая	Прямая	Обратная	Прямая	Слабая	
88	Сила связи между двумя видами ценных бумаг портфеля	$\delta_{r1,r2}$	$\delta_{r1,r3}$	$\delta_{r2,r3}$	Средняя	Слабая	

Рис. 6.20. Итоговые результаты расчетов по сравнению трех видов ценных бумаг портфеля

A	B	C	D	E	F	G	H	I
89	Итоговые расчеты по портфелю из трех видов ценных бумаг							
90	Наименование параметра	Обозначение	Значение					
91	Матрица ковариации по видам ценных бумаг портфеля	$\sigma_{r1,r2}$	3,09%					
92	Доходность первого вида ценных бумаг портфеля	$\mu_{r1}$	5,28%					
93	Доходность второго вида ценных бумаг портфеля	$\mu_{r2}$	-2,62%					
94	Доходность третьего вида ценных бумаг портфеля	$\mu_{r3}$						
95	Результаты расчетов по портфелю из трех видов ценных бумаг							
96	Наименование параметра	Обозначение	Значение	Обозначение	Значение			
97	Ковариация	$V_1$	$V_2$	$V_3$	Ковариации	$V_1$	$V_2$	$V_3$
98		$\sigma_{r1,r2}$	$\sigma_{r1,r3}$	$\sigma_{r2,r3}$	$cov_{r1,r2}$	$cov_{r1,r3}$	$cov_{r2,r3}$	$V_1$
99		$\sigma_{r2,r3}$	$\sigma_{r1,r2}$	$\sigma_{r1,r3}$	$\sigma_{r2,r3}$	$\sigma_{r1,r2}$	$\sigma_{r1,r3}$	$V_2$
100		$\sigma_{r1,r2}$	$\sigma_{r2,r3}$	$\sigma_{r1,r3}$	$\sigma_{r1,r2}$	$\sigma_{r2,r3}$	$\sigma_{r1,r3}$	$V_3$
101	Результаты расчетов по портфелю из трех видов ценных бумаг							
102	Наименование параметра	Обозначение	Значение					
103	Доходность портфеля из трех видов ценных бумаг портфеля	$\mu_{p1}$	1,59%					
104	Квадрат риска портфеля из трех видов ценных бумаг портфеля	$\sigma_{p1}^2$	0,20%					
105	Риск портфеля из трех видов ценных бумаг портфеля	$\sigma_{p1}$	4,52%					

Рис. 6.21. Итоговые расчеты параметров портфеля из трех видов ценных бумаг

A	B	C	D	E	F
106	Адрес ячейки	Формула	Адрес ячейки	Формула	Формула
107	Ячейка C23	=СЧЕТ(С11;С22)	Ячейка E23	=СЧЕТ(Е11;Е22)	Ячейка G23
108	Ячейка C28	=С11	Ячейка E28	=Е11	Ячейка G28
109	Ячейка C39	=С38;С22	Ячейка E39	=Е38;Е22	Ячейка G39
110	Ячейка C40	=С39;С33	Ячейка E40	=Е39;С33	Ячейка G40
111	Ячейка C43	=С11;С340;2	Ячейка E43	=Е11;Е340;2	Ячейка G43
112	Ячейка C54	=С53+(С22;С340)*2	Ячейка E54	=Е53+(Е22;Е340)*2	Ячейка G54
113	Ячейка C55	=С54/(С33-1)	Ячейка E55	=Е54/(Е33-1)	Ячейка G55
114	Ячейка C59	=С40	Ячейка E59	=Е40	Ячейка G59
115	Ячейка C60	=С55	Ячейка E60	=Е55	Ячейка G60
116	Ячейка C61	=КОРЕНЬ(С60)	Ячейка E61	=КОРЕНЬ(Е60)	Ячейка G61
117	Ячейка C62	=СРНАЧ(С11;С22)	Ячейка E62	=СРНАЧ(Е11;Е22)	Ячейка G62
118	Ячейка C63	=ДИСТ(В(С11;С22)	Ячейка E63	=ДИСТ(В(Е11;Е22)	Ячейка G63
119	Ячейка C64	=СТАНДОТКЛОН(В(С11;С22)	Ячейка E64	=СТАНДОТКЛОН(В(Е11;Е22)	Ячейка G64

Рис. 6.22. Применяемые для реализации расчетов параметров трех видов ценных бумаг в портфеле формулы

№	А	В	С	Д	Е	Ф
119	Ячейка С64 Адрес ячейки формулы	=СТАНДОТКЛОН(B11;C22) Формула	Ячейка E64 Адрес ячейки формулы	=СТАНДОТКЛОН(E11;E22) Формула	Ячейка G64 Адрес ячейки формулы	=СТАНДОТКЛОН(F11;G22) Формула
120	Ячейка С7 Адрес ячейки формулы	=СУММ(C5;C7)	Ячейка E68 Адрес ячейки формулы	=C11;C340*(G11;G340)	Ячейка G68	=E11;E340*(G11;G340)
121	Ячейка С8	=C11;C340*(E11;E340)	Ячейка E79	=E78;C22;C340*(G22;G340)	Ячейка G79	=G78;E22;E340*(G22;G340)
122	Ячейка С79	=C78;C2;C340*(E22;E340)	Ячейка E80	=E79;(C33;1)	Ячейка G80	=G79;(C33;1)
123	Ячейка С80	=C80	Ячейка E83	=E80	Ячейка G83	=G80
124	Ячейка С83	=C83;(C61*E61)	Ячейка E84	=E83;(C61*G61)	Ячейка G84	=G83;(E61*G61)
125	Ячейка С84	=C83;(C61*E61)	Ячейка E85	=КОВАРИАНЦИЯ(C11;C22;E11;E22)	Ячейка G85	=КОВАРИАНЦИЯ(E11;E22;G11;G22)
126	Ячейка С85	=КОВАРИАНЦИЯ(C11;C22;E11;E22)	Ячейка E86	=КОРРЕЛ(C11;C22;E11;E22)	Ячейка G86	=КОРРЕЛ(E11;E22;G11;G22)
127	Ячейка С86	=КОРРЕЛ(C11;C22;E11;E22)	Ячейка E87	=ЕСЛИ(И(C84>=1; 1;C84<0);"Обратная";ЕСЛИ(C84=0;"Отсутствует";ЕСЛИ(C84<0;C84<=-1);"Правая";0))	Ячейка G87	=ЕСЛИ(И(G84>=1; 1;G84<0);"Обратная";ЕСЛИ(G84=0;"Отсутствует";ЕСЛИ(G84<0;G84<=-1);"Правая";0))
128	Ячейка С87	=ЕСЛИ(И(C84>=1; 1;C84<0);"Обратная";ЕСЛИ(C84=0;"Отсутствует";ЕСЛИ(C84<0;C84<=-1);"Правая";0))	Ячейка E88	=ЕСЛИ(ABS(E84)=0;"Отсутствует";ЕСЛИ(ABS(E84)>0;ABS(E84)<=0.3);"Слабая";ЕСЛИ(ABS(E84)>0.3;ABS(E84)>0.7);"Средняя";ЕСЛИ(ABS(E84)>0.7;ABS(E84)<1);"Сильная";ЕСЛИ(ABS(E84)=1;"Скорая";0))))	Ячейка G88	=ЕСЛИ(ABS(G84)=0;"Отсутствует";ЕСЛИ(ABS(G84)>0;ABS(G84)<=0.3);"Слабая";ЕСЛИ(ABS(G84)>0.3;ABS(G84)>0.7);"Средняя";ЕСЛИ(ABS(G84)>0.7;ABS(G84)<1);"Сильная";ЕСЛИ(ABS(G84)=1;"Скорая";0))))
129	Ячейка С88	=ЕСЛИ(ABS(C84)=0;"Отсутствует";ЕСЛИ(ABS(C84)>0;ABS(C84)<=0.3);"Слабая";ЕСЛИ(ABS(C84)>0.3;ABS(C84)>0.7);"Средняя";ЕСЛИ(ABS(C84)>0.7;ABS(C84)<1);"Сильная";ЕСЛИ(ABS(C84)=1;"Скорая";0))))	Ячейка E88	=ЕСЛИ(ABS(E84)=0;"Отсутствует";ЕСЛИ(ABS(E84)>0;ABS(E84)<=0.3);"Слабая";ЕСЛИ(ABS(E84)>0.3;ABS(E84)>0.7);"Средняя";ЕСЛИ(ABS(E84)>0.7;ABS(E84)<1);"Сильная";ЕСЛИ(ABS(E84)=1;"Скорая";0))))	Ячейка G88	=ЕСЛИ(ABS(G84)=0;"Отсутствует";ЕСЛИ(ABS(G84)>0;ABS(G84)<=0.3);"Слабая";ЕСЛИ(ABS(G84)>0.3;ABS(G84)>0.7);"Средняя";ЕСЛИ(ABS(G84)>0.7;ABS(G84)<1);"Сильная";ЕСЛИ(ABS(G84)=1;"Скорая";0))))
130	Ячейка С88	=ЕСЛИ(ABS(C84)=0;"Отсутствует";ЕСЛИ(ABS(C84)>0;ABS(C84)<=0.3);"Слабая";ЕСЛИ(ABS(C84)>0.3;ABS(C84)>0.7);"Средняя";ЕСЛИ(ABS(C84)>0.7;ABS(C84)<1);"Сильная";ЕСЛИ(ABS(C84)=1;"Скорая";0))))	Ячейка E88	=ЕСЛИ(ABS(E84)=0;"Отсутствует";ЕСЛИ(ABS(E84)>0;ABS(E84)<=0.3);"Слабая";ЕСЛИ(ABS(E84)>0.3;ABS(E84)>0.7);"Средняя";ЕСЛИ(ABS(E84)>0.7;ABS(E84)<1);"Сильная";ЕСЛИ(ABS(E84)=1;"Скорая";0))))	Ячейка G88	=ЕСЛИ(ABS(G84)=0;"Отсутствует";ЕСЛИ(ABS(G84)>0;ABS(G84)<=0.3);"Слабая";ЕСЛИ(ABS(G84)>0.3;ABS(G84)>0.7);"Средняя";ЕСЛИ(ABS(G84)>0.7;ABS(G84)<1);"Сильная";ЕСЛИ(ABS(G84)=1;"Скорая";0))))

№	А	В
131	Ячейка С92	=C59
132	Ячейка С93	=E59
133	Ячейка С94	=G59
134	Ячейка F98	=C60
135	Ячейка F99	=C83
136	Ячейка F100	=E83
137	Ячейка С103	=МУМНОЖ(ТРАНСП(C92;C94);C5;C7)
138	Ячейка С104	=МУМНОЖ(ТРАНСП(C5;C7);МУМНОЖ(G98;H100;C5;C7))
139	Ячейка С105	=КОРЕНЬ(C104)

Рис. 6.23. Применяемые для реализации расчетов параметров портфеля из трех видов ценных бумаг формулы

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

### Учебники, учебные пособия, монографии

1. Бухвалов А.В., Бухвалова В.В. Финансовые вычисления для менеджеров: Учеб. пособие / А.В. Бухвалов, В.В. Бухвалова; Высшая школа менеджмента СПбГУ. — 3-е изд., испр. и доп. — СПб.: Высшая школа менеджмента, 2010. — 368 с.
2. Недосекин А.О. Финансовая математика / А.О. Недосекин, Э.И. Абдулаева. — СПб.: Изд-во Политехн. университета, 2013. — 220 с.
3. Войтишек Я.В. Финансовая математика: Учебное пособие / Я.В. Войтишек, С.Е. Игнатова. — СПб.: Изд-во СПбГЭУ, 2016. — 63 с.
4. Малыхин В.И. Финансовая математика: Учебное пособие для вузов. — 2-е изд., перераб. и доп. — М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2017. — 237 с.
5. Брусов П.Н., Брусов П.П., Орехова Н.П., Скородулина С.В. Финансовая математика. — М.: Кнорус, 2013. — 224 с.
6. Брусов П.Н., Брусов П.П., Орехова Н.П., Скородулина С.В. Задачи по финансовой математике. — М.: Кнорус, 2014. — 285 с.
7. Четыркин Е.М. Финансовая математика. — М.: Дело, 2011. — 400 с.
8. Бабайцев В.А., Гисин В.Б. Математические методы финансового анализа. — М.: Финуниверситет, 2011. — 200 с.

## Электронные ресурсы

9. Копнова Е.Д. Финансовая математика: Учебник и практикум для вузов. — М.: Юрайт, 2023. — 413 с. — (Высшее образование). — Текст: электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/511234> (дата обращения: 06.08.2023).

10. Касимов Ю.Ф. Финансовая математика: Учебник и практикум для вузов. — 5-е изд., перераб. и доп. — М.: Юрайт, 2023. — 459 с. — (Высшее образование). — Текст: электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/532975> (дата обращения: 06.08.2023).

## ДЛЯ ЗАПИСЕЙ



Учебное издание

**БОГУН Виталий Викторович**

**ФИНАНСОВАЯ  
МАТЕМАТИКА.  
ТЕОРИЯ И РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ**

*Учебное пособие*

Публикуется в авторской редакции  
Верстка и дизайн обложки *Середы Т. В.*

Издательство «Прометей»  
119002, г. Москва, ул. Арбат, д. 51, стр. 1  
Тел./факс: +7 (495) 730-70-69  
E-mail: [info@prometej.su](mailto:info@prometej.su)

Подписано в печать .2023  
Формат 60×84/16. Объем 7,0 п.л.  
Тираж 500 экз. Заказ